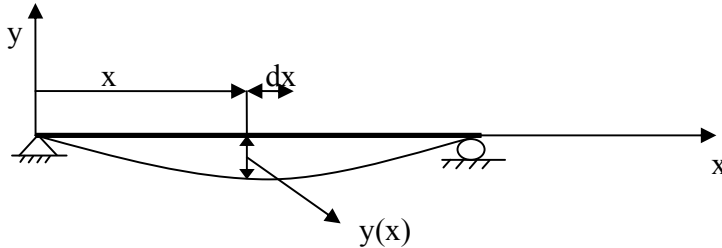
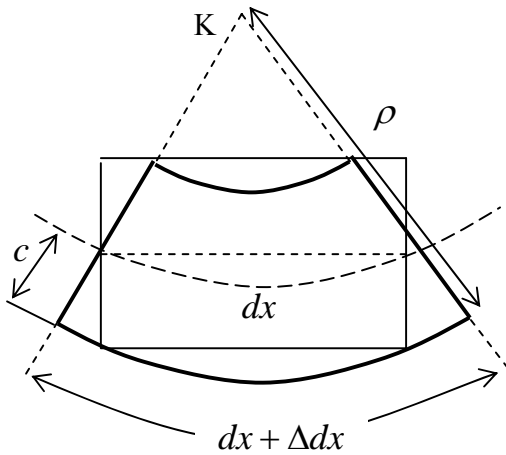


## ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

- Σαν ελαστική γραμμή δοκού ορίζεται ο παραμορφωμένος ουδέτερος άξονας της δοκού ή αλλιώς η γραμμή των βυθίσεων της δοκού



- Απειροστό τμήμα της δοκού μεταξύ x και dx



$\rho$  ακτίνα καμπυλότητας

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \approx y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$



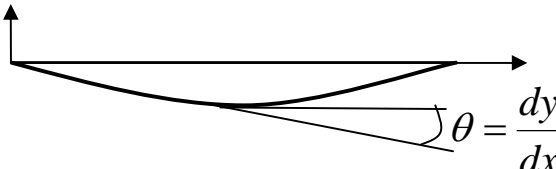
$$\left. \begin{aligned} dx &= \rho d\theta \\ dx + \Delta dx &= (\rho + c) d\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dx + \Delta dx}{dx} = \frac{\rho + c}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta dx}{dx} = \epsilon_c = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \frac{\sigma_c}{E} = \frac{1}{\rho} c \Rightarrow \frac{Mc}{EI_z} = \frac{d^2 y}{dx^2} c$$

$$\Rightarrow \therefore \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{Εξίσωση ελαστικής γραμμής}$$

- $M > 0 \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} > 0 \Rightarrow$  Η ελαστική γραμμή στρέφει τα κοίλα άνω.
- $M < 0 \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} < 0 \Rightarrow$  Η ελαστική γραμμή στρέφει τα κοίλα κάτω.



## ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

- Κοίλα άνω:  Κοίλα κάτω: 
- Κλίση ελαστικής γραμμής: 

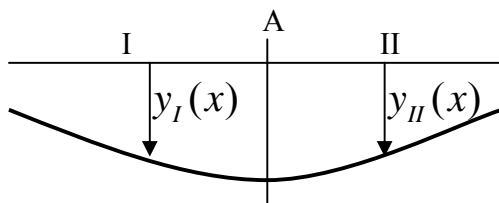
- Υπολογισμός ελαστικής γραμμής

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI_z} dx + c_1 \Rightarrow y(x) = \int \left[ \int \frac{M}{EI_z} dx \right] dx + c_1 x + c_2$$

Οι  $c_1$  και  $c_2$  προσδιορίζονται από οριακές συνθήκες:

- Πάκτωση:   $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$
- Άρθρωση ή κύλιση:   $y(0) = 0$

- Αν δυο τμήματα της δοκού έχουν διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά ή φυσικές ιδιότητες, τότε η βύθιση υπολογίζεται για τα επιμέρους τμήματα και οι πρόσθετες σταθερές ολοκλήρωσης προσδιορίζονται από τις συνθήκες συνέχειας στα κοινά σημεία.



Πρέπει:  $y_I(A) = y_{II}(A)$  και  $\frac{dy_I}{dx}(A) = \frac{dy_{II}}{dx}(A)$

## ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

Παράδειγμα 1:

$EI$  σταθερό

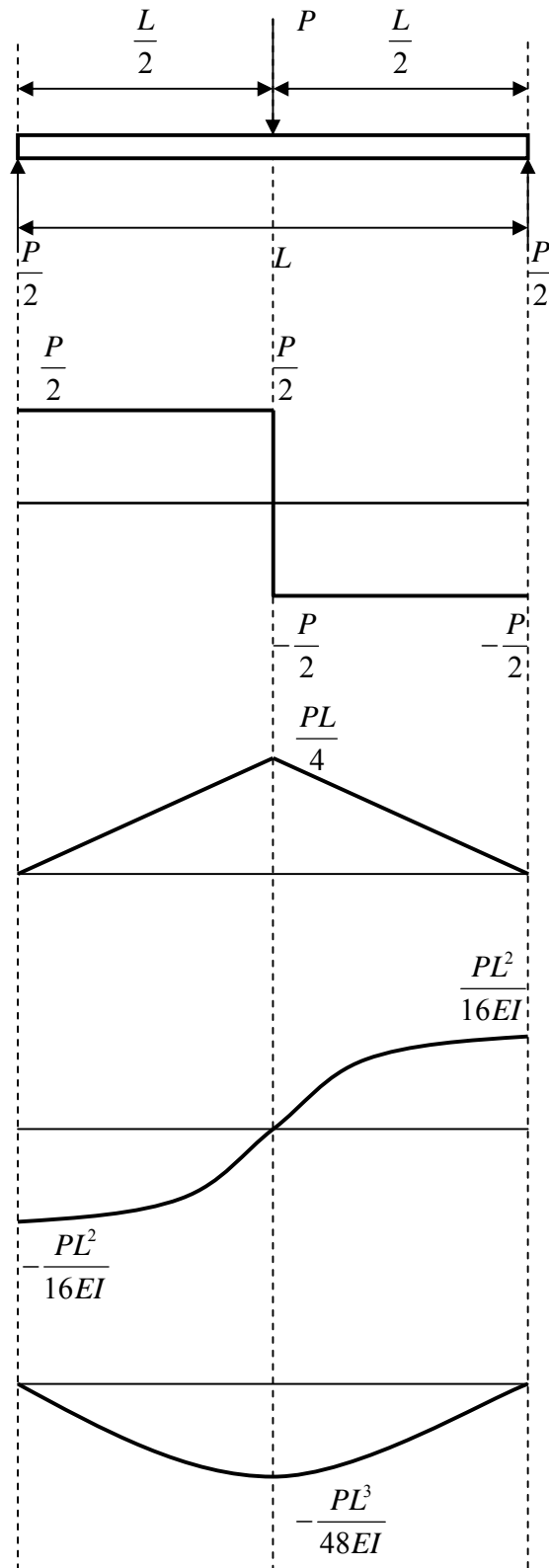
• Φορτίο:  $-w \equiv \frac{dV}{dx} = EI \frac{d^4 y}{dx^4}$

• Διάτμηση:  $V = \frac{DM}{dx} = EI \frac{d^3 y}{dx^3}$

• Ροπή:  $M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$

• Κλίση:  $\theta = \frac{dy}{dx}$

• Παραμόρφωση (Βύθιση):  $y$



## ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

- Υπολογισμός βύθισης  $y$

$$M = \frac{P}{2}x \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{2}x \Rightarrow$$

$$\therefore EI \frac{dy}{dx} = \frac{P}{4}x^2 + c_1 \Rightarrow$$

$$\therefore EIy = \frac{P}{12}x^3 + c_1x + c_2$$

$$\text{Συνοριακές συνθήκες: } \begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ \frac{dy}{dx}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{PL^2}{16} \end{cases}$$

Τελικά:

$$\therefore \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16} \right) \rightarrow \begin{cases} x=0, \frac{dy}{dx}(0) = -\frac{PL^2}{16EI} \\ x=\frac{L}{2}, \frac{dy}{dx}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \Rightarrow y = \frac{1}{EI} \left( \frac{P}{12}x^3 - \frac{PL^2}{16}x \right) \rightarrow \begin{cases} x=0, y(0) = 0 \\ x=\frac{L}{2}, y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{48EI} \end{cases}$$