ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑ)

- Η ***περιστροφική αδράνεια*** ενός σώματος είναι το μέτρο της <u>αντίστασης</u> του στη μεταβολής της περιστροφικής του κατάστασης, αντίστοιχο της μάζας στην περίπτωση της μεταφορικής κίνησης.
- Για σύστημα σωματιδίων με μάζες m_i σε αποστάσεις r_i από άξονα που περνά από ένα σημείο P, η κινητική τους ενέργεια δίνεται από:

$$K = m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 + \ldots = m_1 r_1^2\omega^2 + m_2 r_2^2\omega^2 + \ldots = \frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

- Για σύστημα σωματιδίων με μάζες m_i σε αποστάσεις r_i από άξονα που περνά από ένα σημείο P, η ροπή αδράνειας του συστήματος γύρω από αυτόν τον άξονα δίνεται από:

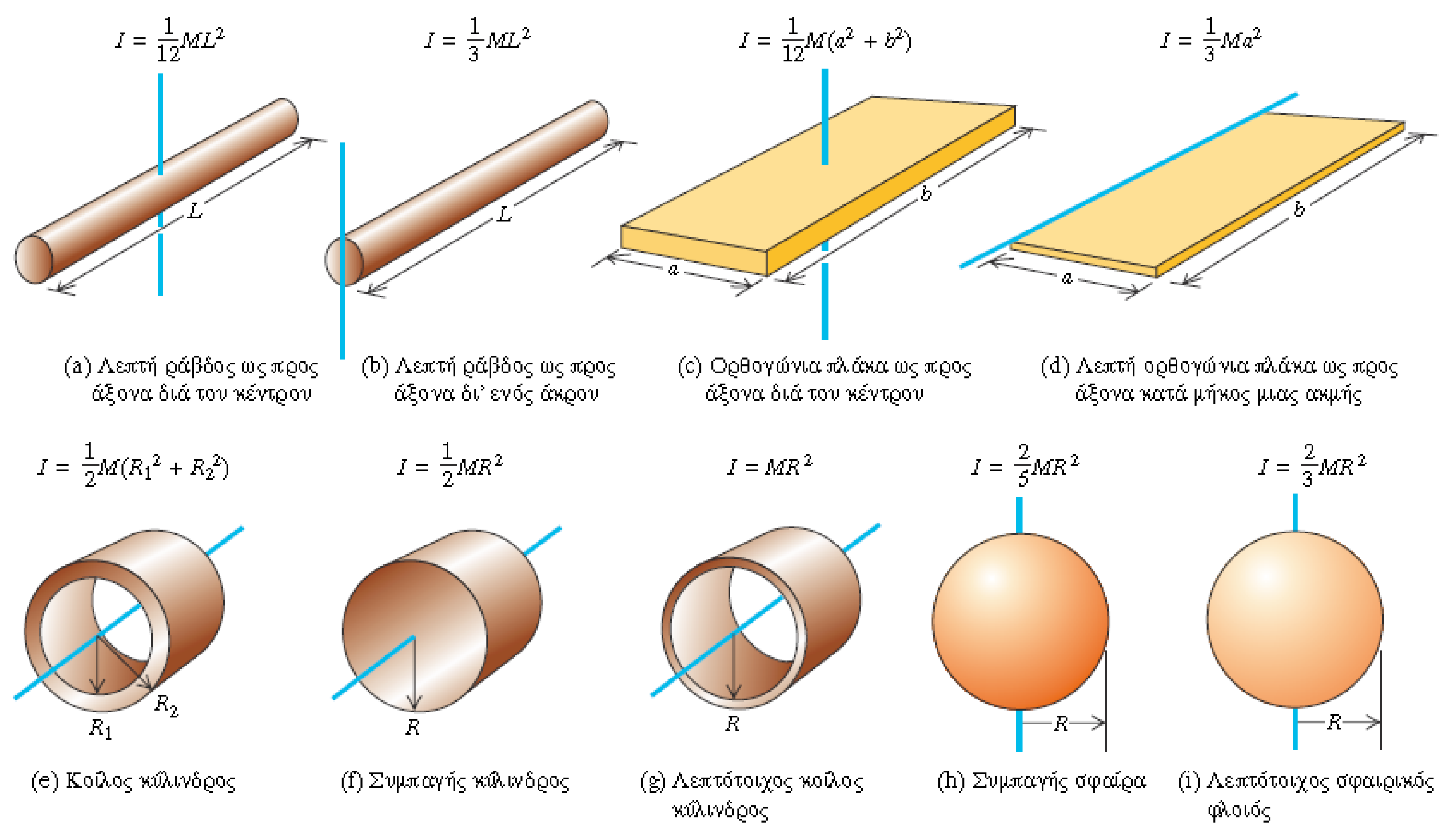
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots = \sum_i m_i r_i^2$$

Ορισμός ροπής αδράνειας

- ***Μονάδα SI*** σύστημα ***kg·m²***
- Για στερεά σώματα η ροπή αδράνειας υπολογίζεται με ένα **ολοκλήρωμα** (αντί του αθροίσματος)
- Σε ένα <u>στερεό</u> οι ***αποστάσεις*** r_i είναι ***σταθερές***, και η ***I*** είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο περιστροφής του γύρω από δεδομένο άξονα.

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ



ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

- Για να βρούμε την ροπή αδράνειας σώματος ως προς άξονα που είναι διαφορετικός από άλλον άξονα ως προς τον οποίο είναι γνωστή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των ***παραλλήλων αξόνων***.
- Θεώρημα: Η ***ροπή αδράνειας*** σώματος μάζας ***M*** ως προς άξονα, ***P***, που είναι παράλληλος προς και σε απόσταση ***d*** από άξονα που περνά από *κέντρο μάζας* του σώματος είναι:

$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

Θεώρημα παραλλήλων αξόνων

Απόδειξη:

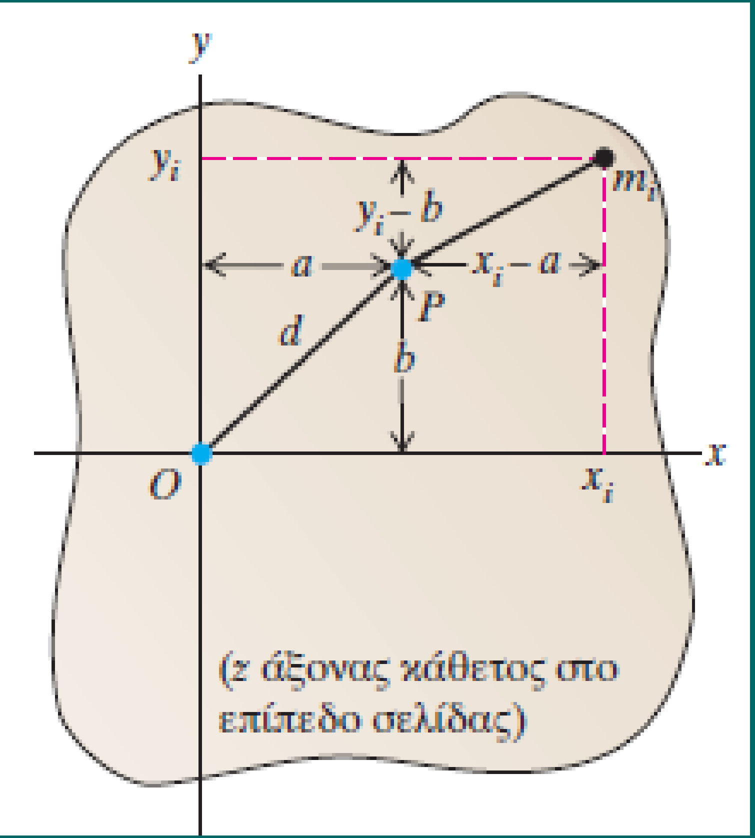
- Θεωρούμε ότι ο άξονας περιστροφής είναι στην διεύθυνση z και θεωρούμε 2 άξονες παράλληλους προς τον άξονα *z*, ο ένας περνά από το ***κέντρο μάζας*** και ο άλλος από το σημείο ***P***.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

- Σημείο Ο είναι το κέντρο μάζας, και το (*x*, *y*) επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής που περνά από το Ο.
- Στοιχείο μάζας m_i με συντεταγμένες (x_i, y_i) ως προς το Ο και (x_i-a, y_i-b) ως προς τον άξονα που είναι ***παράλληλος*** ως προς τον πρώτο και περνά από το ***P*** (συντεταγμένες (a,b).

- Αρχή συστήματος αναφοράς στο ***CM***:
  - $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$
- Παράλληλος άξονας που περνά από το ***P*** έχει συντεταγμένες (*a*, *b*). Απόσταση αξόνων ***d***: $d^2 = a^2 + b^2$
- Ροπή αδράνειας $\boldsymbol{I_{cm}}$ ως προς άξονα δια του ***O***:

$$I_{cm} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

- Ροπή αδράνειας $\boldsymbol{I_P}$ ως προς άξονα δια του ***P***:

$$I_P = \sum_i m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2)]$$

- Αυτές οι εκφράσεις δεν περιλαμβάνουν τις συντεταγμένες z_i των σημείων που βρίσκονται σε μια παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής λωρίδα. Σε αυτή την λωρίδα όλα τα σημεία έχουν την ίδια απόσταση από τον άξονα περιστροφής, άρα η ροπή αδράνειας τους δεν εξαρτάται από το z. Επεκτείνουμε την άθροιση σε όλα τα σημεία της λωρίδας και σε όλες τις λωρίδες οπότε έχουμε την ροπή αδράνειας για όλο το σώμα $\boldsymbol{I_p}$ ως προς τον άξονα δια του ***P***:

$$I_P = \underbrace{\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)}_{I_{cm}} - 2a\underbrace{\sum_i m_i x_i}_{x_{cm}=0} - 2b\underbrace{\sum_i m_i y_i}_{y_{cm}=0} + \underbrace{(a^2 + b^2)}_{d^2}\underbrace{\sum_i m_i}_{M}$$

$$I_P = I_{cm} + Md^2$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

- Για σώματα που έχουμε συνεχή κατανομή μάζας το άθροισμα των γινομένων μάζας επί τετράγωνο απόστασης από τον άξονα περιστροφής μετατρέπεται σε ***ολοκλήρωμα***.
- Διαχωρισμός του σώματος σε στοιχειώδεις μάζες d***m*** (σε απόσταση ***r***), οπότε η στοιχειώδης ροπή αδράνειας δίνετε από:

$$dI = r^2 dm \quad \text{οπότε η ροπή θα δίνεται:}\ I = \int r^2 dm$$

- Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρειάζεται να εκφραστούν τόσο το ***r*** όσο και το d***m*** συναρτήσει της ίδιας μεταβλητής ολοκλήρωσης.
- Σε αυτό παίζει το σπουδαιότατο ρόλο η **συμμετρία** του σώματος και ο βαθμός **ομογένειας** στην κατανομή της μάζας του στο χώρο.
- Π.χ. 1-D σώμα: χρήση της μεταβλητής *x* για το μήκος και σχέση του d***m*** με το d***x***.
- 3-D σώμα: εκφράζουμε το d***m*** συναρτήσει του στοιχειώδους όγκου d***V*** και της πυκνότητας ρ.

Καρτεσιανές συντεταγμένες

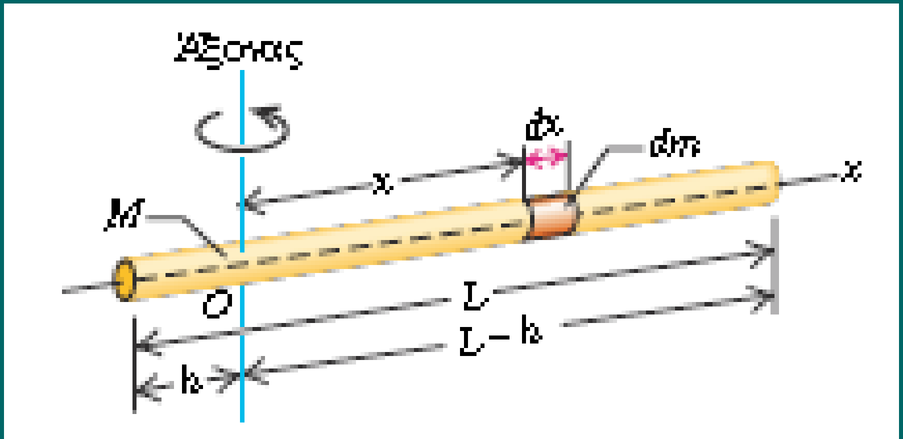
$$dV = dx\,dy\,dz$$

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad \text{για}\ I = \int r^2 \rho(V)\, dV$$

$$\rho = \text{στ.} \rightarrow I = \rho \int r^2 dV$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Παράδειγμα: Ομογενής λεπτή ράβδος, άξονας ⊥ στη ράβδο

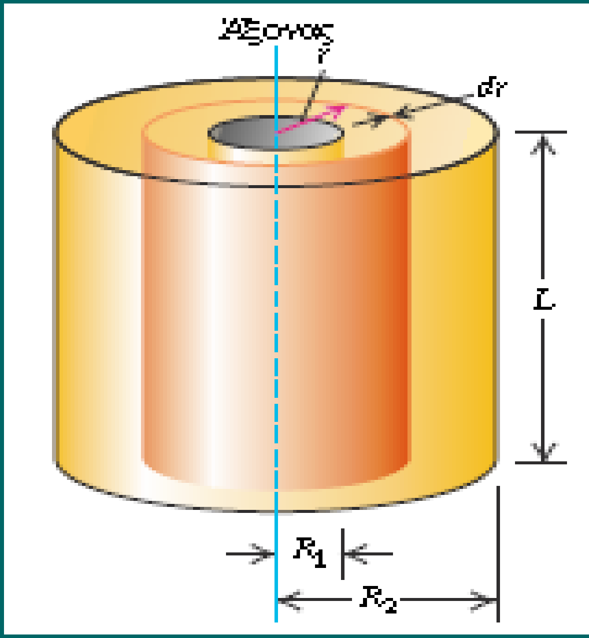


- Μάζα ***M*** και μήκος **L**.
- Υπολογίστε την ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το ***O***, σε τυχαία απόσταση **h** από το άκρο της
- Γραμμική πυκνότητα μάζας *λ=M/L* ⇒ *dm=λdx*
- Επιλέγουμε το d***x*** σε απόσταση ***x*** από το ***O***.

$$I = \int x^2 dm = \int \lambda x^2 dx = \lambda \int_{-h}^{L-h} x^2 dx = \left[\lambda \left(\frac{x^3}{3} \right) \right]_{-h}^{L-h} = \frac{\lambda}{3}(L^3 - 3L^2 h + 3Lh^2)$$

- Άκρο της ράβδου h=0: $$I_A = \frac{\lambda}{3} L^3 = \frac{M}{3L} L^3 = \frac{ML^2}{3}$$
- Μέσο της ράβδου h=L/2: $$I = \frac{\lambda}{3}\left[L^3 - 3L^2 \frac{L}{2} + 3L\left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] = \frac{\lambda}{3}\frac{1}{4} L^3 = \frac{ML^2}{12}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ



- **Παράδειγμα: Κοίλος στερεός ομογενής κύλινδρος ως προς τον άξονα συμμετρίας του**
- Μήκος **L**, εσωτερική διάμετρος ***R*$_1$**, εξωτερική διάμετρος ***R*$_2$**.
- Επιλογή στοιχειώδους όγκου: Κυλινδρικός φλοιός ακτίνας ***r***, πάχους d***r***, και μήκους (ύψους) ***L***. Όλα τα τμήματα του φλοιού αυτού απέχουν την ***ίδια απόσταση από τον άξονα.***

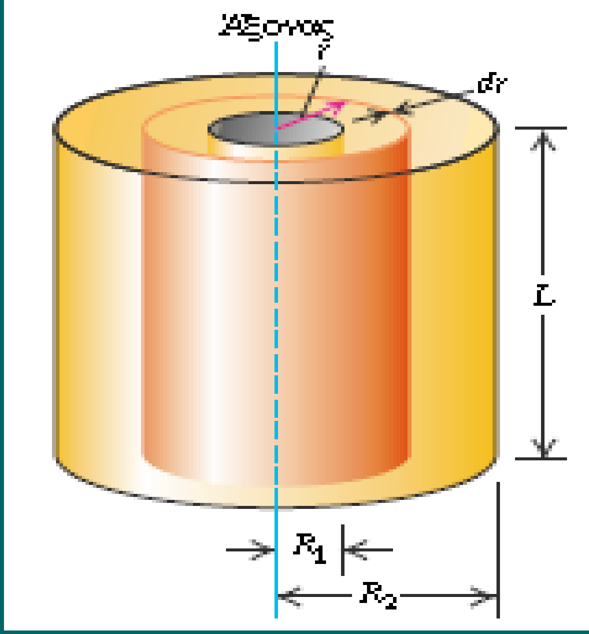
$$\text{Κύλινδρος: όγκος } V = \pi L(R_2^2 - R_1^2),\ \text{πυκνότητα } \rho = \frac{M}{\pi L(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$\text{Φλοιός: όγκος } dV = 2\pi r L dr,\ \text{μάζα } dm = \rho dV = \rho(2\pi r L dr)$$

$$I = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi r L dr) = 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{2\pi\rho L}{4}(R_2^4 - R_1^4) =$$

$$= \frac{\pi\rho L}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) \Rightarrow I = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ



- **Κοίλος στερεός ομογενής κύλινδρος ως προς τον άξονα συμμετρίας του**

$$\boxed{I = \frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2)}$$

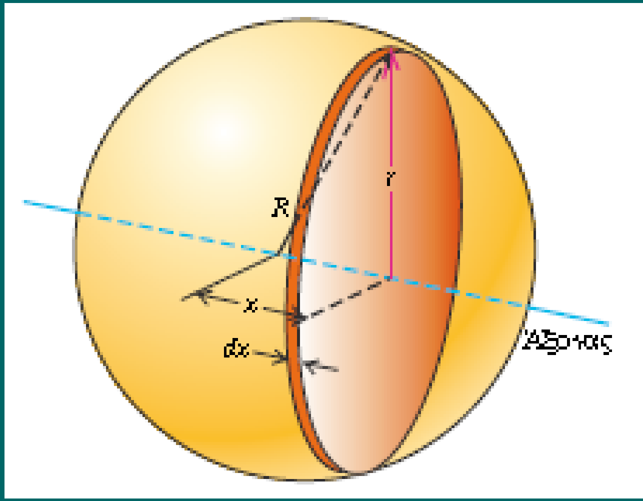
- Στερεός κύλινδρος, $\boldsymbol{R_1}$=0, $\boldsymbol{R_2}$=R: $I = \frac{1}{2} MR^2$

- Στερεός λεπτός κυλινδρικός φλοιός, $\boldsymbol{R_1}$ και $\boldsymbol{R_2}$ σχεδόν ίσες:

$$I = MR^2$$

- ***Σημ.***: Η ροπή αδράνεια κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του εξαρτάται από τη μάζα και την ακτίνα αλλά όχι από το ***μήκος*** του!

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ



- **Παράδειγμα: Ομογενής σφαίρα, άξονας μέσω του κέντρου της.**
- Ακτίνα σφαίρας **R**. Όγκος σφαίρας: $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$
- Μάζα **M**. Πυκνότητα: $\rho = \dfrac{M}{4\pi R^3 / 3}$
- Διαιρούμε τη σφαίρα σε <u>λεπτούς δίσκους</u> πάχους d***x***,

$$\text{Ακτίνα: } r = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{Όγκος: } dV = \pi r^2 dx = \pi(R^2 - x^2)dx$$

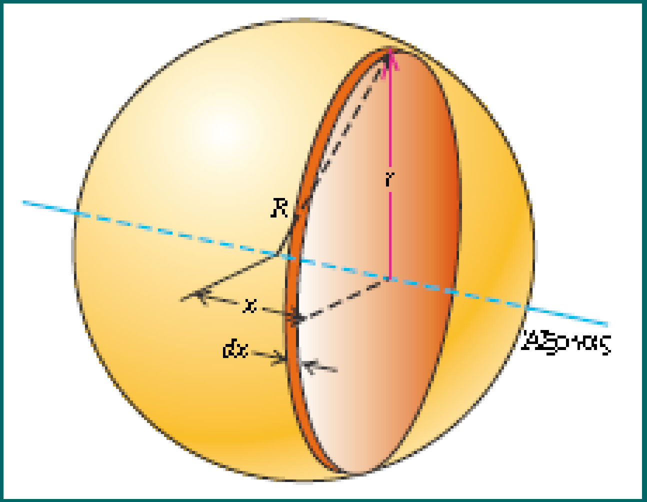
$$\text{Μάζα: } dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dx = \pi\rho(R^2 - x^2)dx$$

- Η ροπή αδράνειας δίσκου ακτίνας ***r*** και μάζας d***m*** είναι

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 [\pi\rho(R^2 - x^2)dx] = \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2 dx$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

- **Ομογενής σφαίρα, άξονας μέσω του κέντρου της.**
- Ολοκληρώνουμε από ***x***=-*R* έως **x**=*R* :



$$I = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)^2 dx = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{R}(R^4 - 2R^2x^2 + x^4)dx = \frac{\pi\rho}{2}\frac{16}{15}R^5 = \frac{8\pi\rho}{15}R^5$$

Επειδή η μάζα ***M*** της σφαίρας $M = \rho V = \frac{4\pi\rho}{3}R^3$

Ομογενής σφαίρα: $\boxed{I = \frac{2}{5}MR^2}$