

ΑΣΚΗΣΗ – 9

Να βρείτε τους πρώτους τρεις όρους της σειράς MacLaurin για τη συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x^2} \sin x. \text{ Στη συνέχεια να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^3} = -\frac{7}{6}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

so that

$$\begin{aligned} e^{-x^2} \sin x &= (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots)(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots - x^2(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) + \frac{x^4}{2!}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots - x^3 + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^5}{2!} + \dots \\ &= x - \frac{7x^3}{6} + \frac{27x^5}{40} + \dots \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{7x^3}{6} + \frac{27x^5}{40} + \dots - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7x^3}{6} + \frac{27x^5}{40} + \dots}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{7}{6} + \frac{27x^2}{40} + \dots) \\ &= -\frac{7}{6} \end{aligned}$$