ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ, ΕΑΡΙΝΟ 2024

ΑΣΚΗΣΗ – 14

Να χρησιμοποιήσετε τους πρώτους δύο μη μηδενικούς όρους της κατάλληλης σειράς Taylor για να βρείτε προσεγγιστικά την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx$$

[ΑΠΑΝΤΗΣΗ : 13/42]

Answer: We know that the Maclaurin series for $\sin x$ is

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

so the Maclaurin series for $\sin(x^2)$ is

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(x^2)dx &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{11 \cdot 120} - \dots\end{aligned}$$

Thus, approximating by the first two terms, we see that

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{13}{42}.$$