ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ, ΕΑΡΙΝΟ 2024

ΑΣΚΗΣΗ – 12

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικής τιμής (IVP): $y' = y^2, \quad y(0) = 1$

α) Να χρησιμοποιήσετε μία επανάληψη της μεθόδου Runge-Kutta 2ης τάξης για να βρείτε προσεγγιστικά την τιμή $y(0.2)$.

β) Να χρησιμοποιήσετε δύο επαναλήψεις της βελτιωμένης μεθόδου Euler για να βρείτε προσεγγιστικά την τιμή $y(0.2)$.

Let $f(y) = y^2$. With $y_0 = 1$ and $h = 0.2$ we have:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(y_0) && = (0.2)(1)^2 && = 0.2 \\ k_2 &= hf(y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) && = (0.2)(1 + \tfrac{1}{2}(0.2))^2 && = 0.242 \\ k_3 &= hf(y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) && = (0.2)(1 + \tfrac{1}{2}(0.242))^2 && = 0.251 \\ k_4 &= hf(y_0 + k_3) && = (0.2)(1 + 0.251)^2 && = 0.3132 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad y(0.2) \approx y_1 &= y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &\approx 1 + \tfrac{1}{6}(0.2 + 2(0.242) + 2(0.251) + 0.3132) = \boxed{1.25} \end{aligned}$$

With $y_0 = 1$ and $h = 0.1$ the first iteration gives:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(y_0) && = (0.1)(1)^2 && = 0.1 \\ k_2 &= hf(y_0 + k_1) && = (0.1)(1 + 0.1)^2 && = 0.121 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad y_1 &= y_0 + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}(0.1 + 0.121) = 1.1105 \end{aligned}$$

The second iteration gives:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(y_1) && = (0.1)(1105)^2 && = 0.1233 \\ k_2 &= hf(y_1 + k_1) && = (0.1)(1.1105 + 0.1233)^2 && = 0.1522 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad y(0.2) \approx y_2 &= y_1 + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ &= 1.1105 + \tfrac{1}{2}(0.1233 + 0.1522) = \boxed{1.248} \end{aligned}$$