ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ, ΕΑΡΙΝΟ 2024

ΑΣΚΗΣΗ –10

Να βρείτε τους πρώτους τρεις όρους της σειράς MacLaurin για τη συνάρτηση $\cos(\sin x)$. Στη συνέχεια να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{x^2}$.

From $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$ and $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots$ we have that

$$\begin{aligned}\cos(\sin x) &= 1-\frac{(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)^2}{2!}+\frac{(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)^4}{4!}-\cdots\\
&= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^4}{3!2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\cdots\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\cdots)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{24}+\cdots)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{5x^2}{24}\right)\\
&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$