

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΣΕΙΡΑ 6^η

20 ΜΑΪΟΥ 2024

ΑΣΚΗΣΗ – 1

Χρησιμοποιώντας σειρές Taylor να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = x - y, \quad y(0) = 1 \quad \text{για } x = 0.1$$

ΑΣΚΗΣΗ – 2

Δοθέντος ότι $y' + 4y = x^2$ με $y(0) = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή $y(0.2)$ χρησιμοποιώντας σειρές Taylor 4ης τάξης και ένα βήμα ολοκλήρωσης. Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό της ακριβούς λύσης, προσδιορίζοντας το σχετικό σφάλμα, που δίνεται από την εξίσωση:

$$y = \frac{31}{32}e^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}$$

ΑΣΚΗΣΗ – 3

Να βρείτε τις τιμές $y(0.1)$ και $y(0.2)$ από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Euler (single step explicit method).

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad \text{με } y(0) = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ – 4

Να προσδιορίσετε την τιμή του y όταν $x = 0.1$ και $x = 0.2$ δοθέντος ότι $y(0) = 1$ και $y' = x^2 - y$. Να χρησιμοποιήσετε την τροποποιημένη μέθοδο Euler.

ΑΣΚΗΣΗ – 5

Να προσδιορίσετε τις τιμές $y(0.1)$ και $y(0.2)$ της εξίσωσης $y' = y^2 - x^2$ με $y(0) = 2$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 2ης τάξης.

ΑΣΚΗΣΗ – 6

Να προσδιορίσετε την τιμή $y(0.1)$ της εξίσωσης $y' = x^2 + y^2$ με $x = 0, y = 1$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης.

ΑΣΚΗΣΗ – 7

Δίνεται η διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης $y'' + xy' + y^2 = \sin(x)$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1, y'(0) = 1$. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Euler για να βρείτε τις τιμές των y και y'' για $x = 0.5$. Να χρησιμοποιήσετε βήμα 0.1.

ΑΣΚΗΣΗ – 8

Να λυθεί το ακόλουθο ζεύγος διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = xy+z \quad \text{με αρχικές συνθήκες } x_0 = 0.5, y_0 = 1.5, z_0 = 1 \text{ για } x = 0.6$$

ΑΣΚΗΣΗ – 9

Να χρησιμοποιήσετε την τροποποιημένη μέθοδο Euler για να λύσετε τη Σ.Δ.Ε.

$$\frac{dy}{dx} = -1.2y + 7e^{-0.3x} \text{ από } x = 0 \text{ έως } x = 2.5 \text{ με αρχική συνθήκη } y(0) = 3 \text{ και βήμα } h = 0.5$$

Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα με την ακριβή (αναλυτική) λύση $y = \frac{70}{9}e^{-0.3x} - \frac{43}{9}e^{-1.2x}$, προσδιορίζοντας τα σφάλμα σε κάθε βήμα. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο λύσεων σε ένα διάγραμμα

ΑΣΚΗΣΗ – 10

Να χρησιμοποιήσετε τις μεθόδους Runge-Kutta 2^{ης} και 4^{ης} τάξης για να λύσετε τη Σ.Δ.Ε.

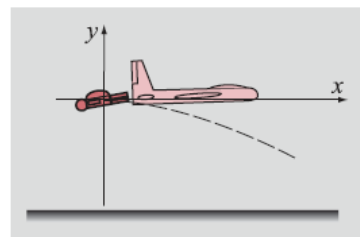
$$\frac{dy}{dx} = -1.2y + 7e^{-0.3x} \text{ από } x = 0 \text{ έως } x = 2.0 \text{ με αρχική συνθήκη } y(0) = 3 \text{ και βήμα } h = 0.5$$

Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα με την ακριβή (αναλυτική) λύση $y = \frac{70}{9}e^{-0.3x} - \frac{43}{9}e^{-1.2x}$, προσδιορίζοντας τα σφάλμα σε κάθε βήμα. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των τριών λύσεων σε ένα διάγραμμα.

ΑΣΚΗΣΗ – 11

Ένας αλεξιπτωτιστής πηδά από ένα αεροσκάφος σε ευθεία και επίπεδη πτήση. Η κίνηση του αλεξιπτωτιστή περιγράφεται κατά προσέγγιση από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m} \left(\frac{dx}{dt} \right) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{\gamma}{m} \left(\frac{dy}{dt} \right) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$$



όπου x και y προσδιορίζουν τη θέση του αλεξιπτωτιστή με βάση το σύστημα συντεταγμένων που υπάρχει στο σχήμα. Για $m = 80 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 5.38 \text{ N s}^2/\text{m}^2$, και αρχικές συνθήκες:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 3134 \text{ m/s}, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

Να προσδιορίσετε και να σχεδιάσετε την τροχιά του αλεξιπτωτιστή για τα πρώτα 5s. Να ανάγετε το σύστημα των δύο, 2^{ης} τάξης, συνήθων Δ.Ε. σε ένα σύστημα τεσσάρων 1^{ης} τάξης συνήθων Δ.Ε. και να το λύσετε.