ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6 ΑΣΚΗΣΗ 2 , ΕΑΡΙΝΟ 2024

Δοθέντος ότι $y' + 4y = x^2$ με $y(0) = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή $y(0.2)$ χρησιμοποιώντας σειρές Taylor 4ης τάξης και ένα βήμα ολοκλήρωσης. Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό της ακριβούς λύσης, προσδιορίζοντας το σχετικό σφάλμα, που δίνεται από την εξίσωση:

$$y = \frac{31}{32}e^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}$$

The Taylor series solution up to and including the term with h^4 is given by

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1!}y_n^{i} + \frac{h^2}{2!}y_n^{ii} + \frac{h^3}{3!}y_n^{iii} + \frac{h^4}{4!}y_n^{iv}$$

or
$$y(h) = y(0) + hy^{i}(0) + \frac{h^2}{2!}y^{ii}(0) + \frac{h^3}{3!}y^{iii}(0) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(0)$$

The given differential equation is

$$\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

or
$$y^{i} = -4y + x^2$$

Differentiating the above equation gives

$$y^{ii} = -4y^{i} + 2x \;=\; 16y - 4x^2 + 2x$$
$$y^{iii} = 16y^{i} - 8x + 2 \;=\; -64y + 16x^2 - 8x + 2$$
$$y^{iv} = -64y^{i} + 32x - 8 \;=\; 256y - 64x^2 + 32x - 8$$

Hence,
$$y^{i}(0) \;=\; -4(1) = -4$$
$$y^{ii}(0) \;=\; 16(1) = 16$$
$$y^{iii}(0) \;=\; -64(1) + 2 = -62$$
$$y^{iv}(0) \;=\; 256(1) - 8 = 248$$

For $h = 0.2$, Eq. (E.1) becomes

$$y^{i}(0.2) = 1 + (-4)(0.2) + \frac{1}{2!}(16)(0.2)^2 + \frac{1}{3!}(-62)(0.2)^3 + \frac{1}{4!}(248)(0.2)^4 = 0.4539$$

The analytical solution gives

$$y(0.2) = \frac{31}{32}e^{-4(0.2)} + \frac{1}{4}(0.2)^2 - \frac{1}{8}(0.2) + \frac{1}{32} = 0.4515$$

Hence, the actual error is 0.4515 – 0.4539 = – 0.0024.