



ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΣΕΙΡΑ 1^η

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ – 1

Θεωρείστε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - a$. Να δείξετε ότι η μέθοδος Newton_Raphson οδηγεί στον επαναληπτικό τύπο

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε αυτόν τον επαναληπτικό τύπο για να βρείτε την $\sqrt{10}$ με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων, χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη αρχική εκτίμηση για την τιμή της ρίζας.

ΑΣΚΗΣΗ – 2

Να αποδείξετε ότι η κυβική ρίζα ενός αριθμού N , χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο Newton – Raphson, μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{N}{x_n^2} \right)$$

Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τον τύπο αυτό για να βρείτε την κυβική ρίζα του 12. Αρχική τιμή $x_0 = 3$ και κριτήριο διακοπής $\varepsilon = 0.01$.

ΑΣΚΗΣΗ – 3

Να βρεθεί προσεγγιστικά η ρίζα της εξίσωσης $x - \cos^2(x) = 0$ στο διάστημα $[0, \pi/4]$, εφαρμόζοντας 4 επαναλήψεις με τη μέθοδο της διχοτόμησης. Ποιο είναι το πλήθος των βημάτων που απαιτούνται για να επιτευχθεί ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$;

ΑΣΚΗΣΗ – 4

Για την επίλυση της εξίσωσης $e^{-x^2/2} - 3\cos(x^2) = 0$

να υλοποιήσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης (bisection) με αρχικές τιμές 0.4 , 1.8 και στη συνέχεια μια επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson με προσεγγιστική τιμή αυτή που θα προκύψει από τη μέθοδο της διχοτόμησης. Πώς θα συμπεριφερθεί η μέθοδος Newton αν επιλέξουμε ως αρχική τιμή γι' αυτήν $x_0 = 0.4$;

ΑΣΚΗΣΗ – 5

Μία αριθμομηχανή μπορεί να εκτελέσει μόνον : πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό. Να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση $1/x = 1.37$, τη μέθοδο Newton-Raphson και την αριθμομηχανή για να βρείτε την τιμή $1/1.37$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

ΑΣΚΗΣΗ – 6

Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της τέμνουσας (secant method) για να βρείτε τη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \cos x + 2 \sin x + x^2$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων. Η γωνία x μετράται σε ακτίνια.

ΑΣΚΗΣΗ – 7

Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ έχει μία απλή ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. Να βρεθεί μία προσεγγιστική τιμή αυτής της ρίζας με τη μέθοδο fixed point iteration.

ΑΣΚΗΣΗ – 8

Να υλοποιήσετε τρεις επαναλήψεις

α) της μεθόδου της τέμνουσας (secant) και

β) της μεθόδου Newton-Raphson

για τη λύση της εξίσωσης $3x^2 - \exp(x) = 0$ με αρχικές τιμές α) $x^{(0)} = 0, x^{(1)} = 1$, β) $x^{(0)} = 1$

ΑΣΚΗΣΗ – 9

Να αποδείξετε ότι μια επαναληπτική μέθοδος για την εύρεση της $\sqrt[k]{a}$ δίνεται από τη σχέση

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right]$$

ΑΣΚΗΣΗ – 10

Η αρχική εκτίμηση για τη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι $x_0 = 3, f(3) = 5$. Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x = 3$ με τον άξονα x είναι 57° . Να βρείτε την επόμενη εκτίμηση της τιμής, x_1 .

ΑΣΚΗΣΗ – 11

Έστω R ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο Newton-Raphson στη συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - \frac{R}{x}$$

Για να προσδιορίσετε έναν επαναληπτικό τύπο για τον υπολογισμό της $\sqrt[3]{R}$. Να απλοποιήσετε τον τύπο ώστε να περιέλθει στη μορφή

$$x_n \times \left[\frac{g(x_n)}{h(x_n)} \right]$$

όπου $g(x_n)$ και $h(x_n)$ είναι απλά πολυώνυμα ως προς x_n

ΑΣΚΗΣΗ – 12

Για την επίλυση της εξίσωσης $x^{100} = 0$ με τη μέθοδο Newton-Raphson να χρησιμοποιήσετε την αρχική εκτίμηση $x_0 = 0.1$. Να υπολογίσετε τις επόμενες πέντε εκτιμήσεις της μεθόδου.

ΑΣΚΗΣΗ – 13

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton-Raphson να βρείτε μία λύση της εξίσωσης

$$5x + \ln x = 10000$$

με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων (μετά την υποδιαστολή).

ΑΣΚΗΣΗ – 14

Για ένα δάνειο L με ετήσιο επιτόκιο r για μία περίοδο m ετών, η μηνιαία πληρωμή M δίνεται από την εξίσωση

$$L = \frac{12M}{r} \left[1 - (1 + (r/12))^{-12m} \right]$$

Για ένα δάνειο 150000€ η μηνιαία δόση δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 600€. Υποθέτοντας μία περίοδο αποπληρωμής 30 ετών, να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της διχοτόμησης για να προσδιορίσετε το επιτόκιο που πρέπει να πληρωθεί. [ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 0.025933815....]

ΑΣΚΗΣΗ – 15

Ένα δάνειο σε ευρώ, ποσού A , αποπληρώνεται σε M ισόποσες μηνιαίες πληρωμές, οι οποίες ξεκινούν ένα μήνα μετά από τη λήψη του δανείου. Μπορεί να βρεθεί ότι, εάν το μηνιαίο επιτόκιο είναι r , ισχύει

$$Ar = M \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right)$$

Ένα δάνειο 10000 € αποπληρώθηκε σε 60 μηνιαίες δόσεις των 250 €. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Newton-Raphson για να βρείτε το μηνιαίο επιτόκιο με ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων. [ΑΠΑΝΤΗΣΗ : 1.439%]

ΑΣΚΗΣΗ – 16

Μια βιομηχανία παραγωγής χημικών παράγει κάθε ημέρα q γραμμάρια μιας ουσίας με κόστος $C(q)$ που ορίζεται ως:

$$C(q) = 1000 + 2q + 3q^{2/3}$$

Η βιομηχανία μπορεί να πωλεί οποιαδήποτε ποσότητα αυτής της ουσίας προς 4€ ανά γραμμάριο. Να βρείτε το νεκρό σημείο (break-even point), δηλαδή, την ποσότητα που πρέπει να παράγει κάθε ημέρα ώστε να μην έχει ούτε κέρδος ούτε ζημία. Η απάντηση θα δοθεί στο πλησιέστερο γραμμάριο της ουσίας.

(ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Με κατάλληλους συλλογισμούς να προσδιορίσετε αρχικά την περιοχή τιμών εντός της οποίας θα βρίσκεται η απάντηση)