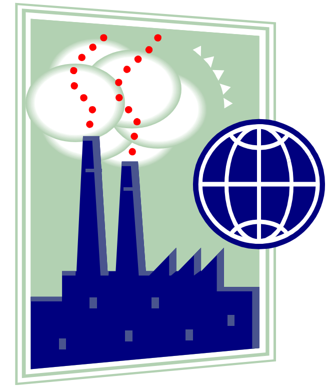


Κεφάλαια 10-11

Κινηματική και Δυναμική του Στερεού Σώματος

Τι μαθαίνετε

- Να περιγράφετε την περιστροφική κίνηση στερεών σωμάτων
  - Θα εντοπίσετε την αναλογία που υπάρχει ανάμεσα στις νέες ποσότητες που περιγράφουν την περιστροφική κίνηση και τις γνωστές ποσότητες από τη γραμμική κίνηση
- Να υπολογίζετε τις περιστροφικές αδράνειες σωμάτων που συγκροτούνται από διακριτές και συνεχείς κατανομές της ύλης
  - Η περιστροφική αδράνεια είναι το περιστροφικό ανάλογο της μάζας
- Να λύνετε προβλήματα που περιλαμβάνουν τόσο γραμμική όσο και περιστροφική κίνηση

- Να περιγράφετε τις περιστροφικές ποσότητες χρησιμοποιώντας διανύσματα, με κατεύθυνση και μέτρο
  - Γωνιακή ταχύτητα
  - Γωνιακή επιτάχυνση
  - Ροπή
- Να προσδιορίζετε το διανυσματικό εξωτερικό γινόμενο και να το χρησιμοποιείτε σε εκφράσεις για τη ροπή και τη στροφορμή
- Να επιλύετε προβλήματα που περιλαμβάνουν τη διατήρηση της στροφορμής
- Να περιγράφετε την κύλιση

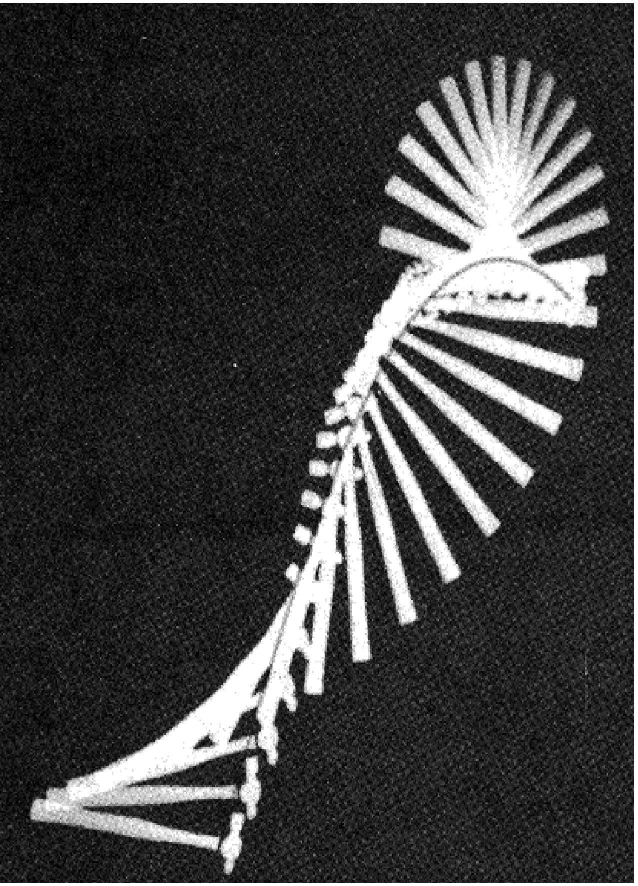
Κίνηση στερεού σώματος

Στερεό σώμα: σωματίδια του σώματος δεν έχουν μεταξύ τους αμοιβαίες κινήσεις (rigid-άκαμπτο σώμα)

Όχι παραμορφώσεις σωμάτων (αμελητέες) υπό την επίδραση δυνάμεων

Η ακαμψία καλή προσέγγιση

Κίνηση στερεού σώματος



Σχήμα: Σφυρί σε ελεύθερη πτώση υπό την επίδραση της βαρύτητας. Παρατηρείστε την τροχιά του κέντρου μάζας.

Κίνηση: Μεταβολή θέσης

(μεταφορική κίνηση, δηλ. κίνηση του κέντρου μάζας)

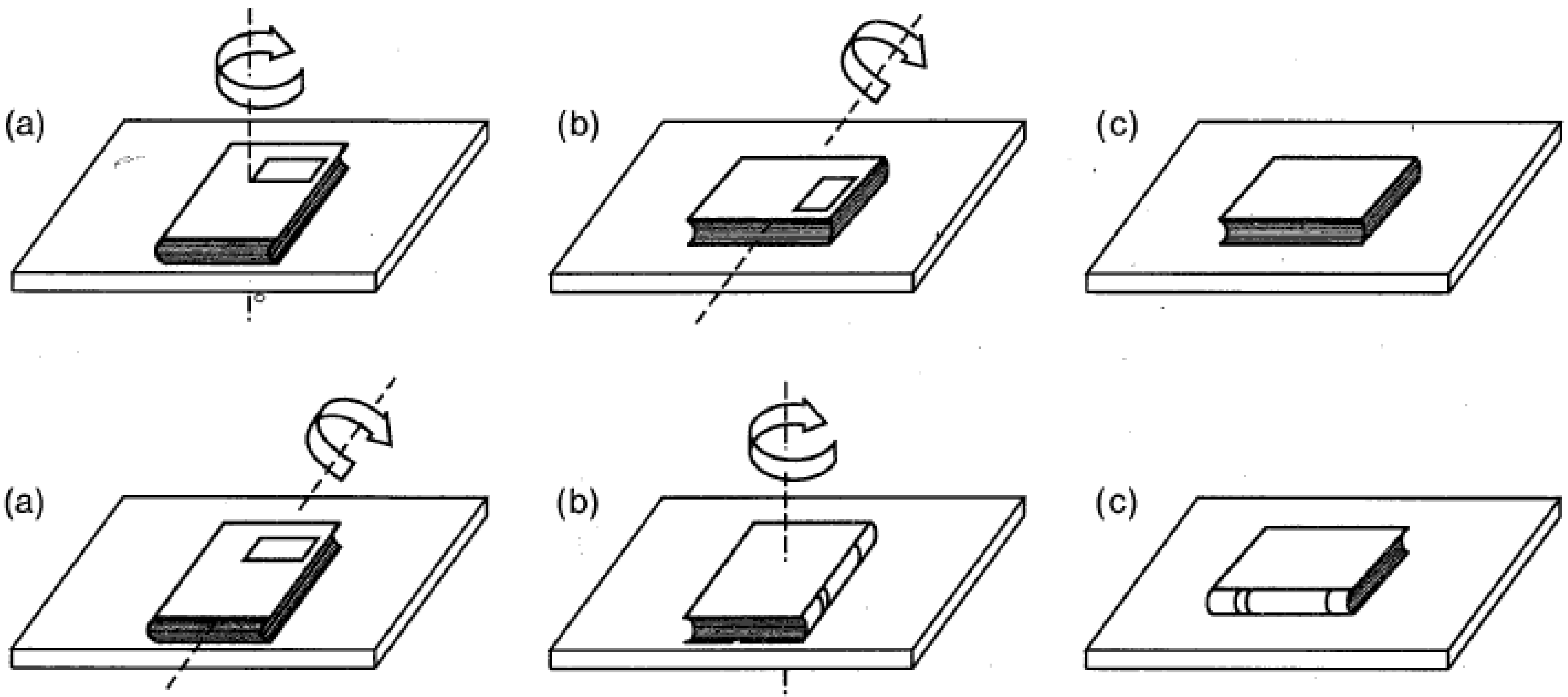
+

Μεταβολή προσανατολισμού (περιστροφική κίνηση, δηλ. περιστροφή περί κάποιον άξονα)

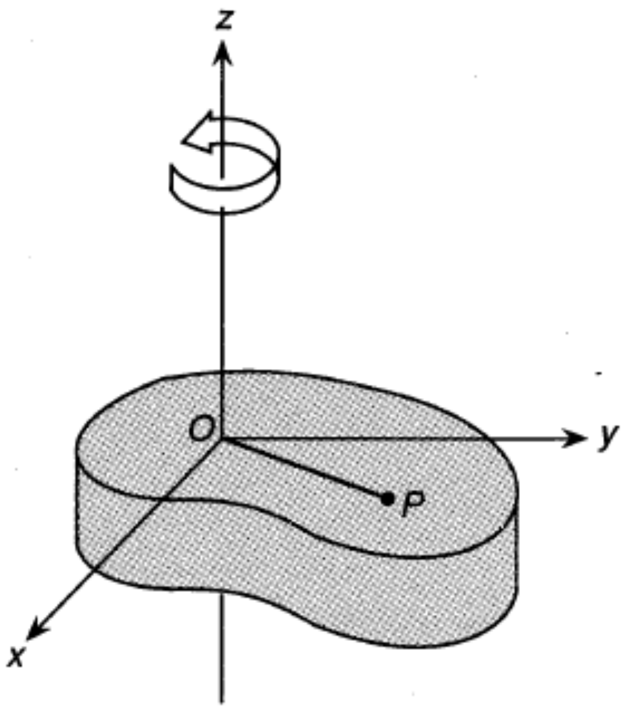
θεώρημα Euler: οποιαδήποτε μεταβολή του προσανατολισμού ενός στερεού σώματος μπορεί να θεωρηθεί ως περιστροφή περί κάποιον άξονα

Κίνηση στερεού σώματος

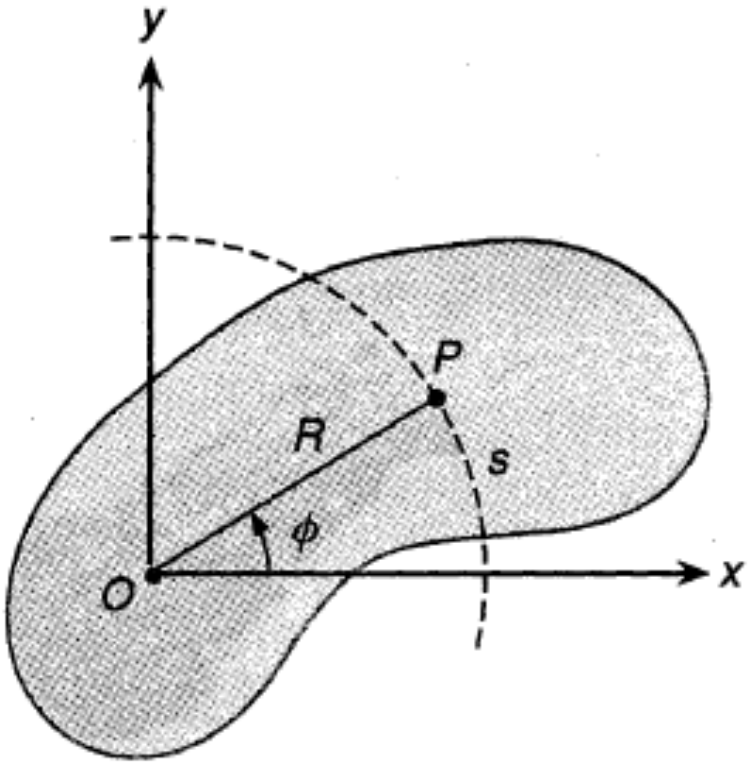
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ενα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των περιστροφών γύρω από διάφορους άξονες είναι ότι *οι περιστροφές δεν αντιμετατίθενται*, δηλαδή, το τελικό αποτέλεσμα δύο διαδοχικών περιστροφών εξαρτάται από το ποιά περιστροφή έγινε πρώτη και ποιά δεύτερη. Δείξτε ότι πράγματι συμβαίνει αυτό, περιστρέφοντας ένα βιβλίο γύρω από δύο διαφορετικούς άξονες.



Περιστροφή περί σταθερό άξονα



Σχήμα. Περιστροφή στερεού σώματος περί σταθερό άξονα (Z).



Σχήμα. Καθοδηγητικό σημείο P στο στερεό σώμα. Η ακτίνα του κύκλου που διαγράφεται από την κίνηση του σημείου είναι η ίδια με το μήκος της επιβατικής ακτίνας $R^2=x^2+y^2$. Το μήκος του δρόμου είναι: $s=\varphi R$

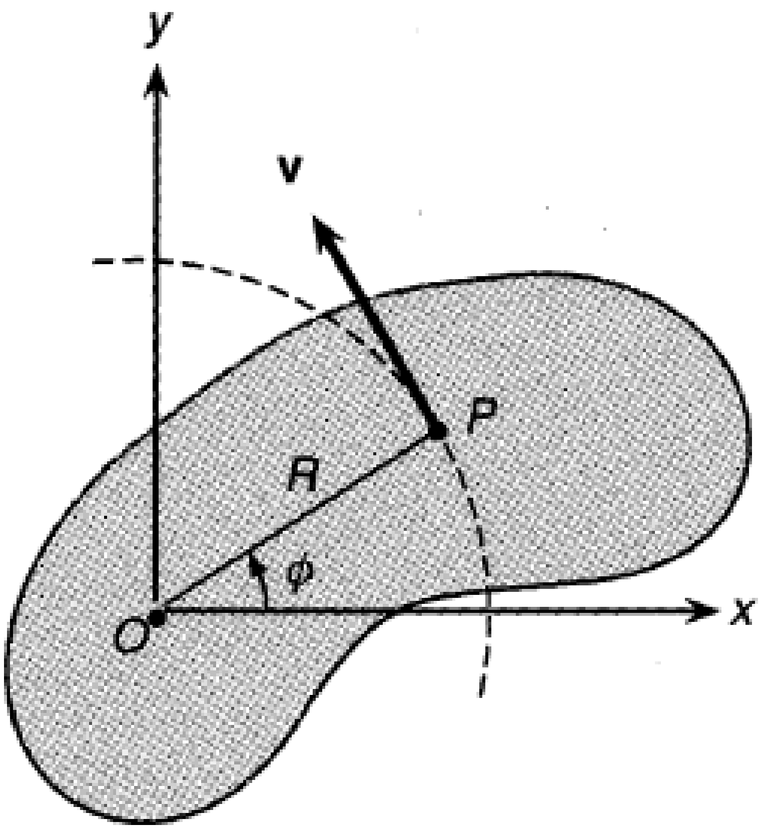
Περιστροφή περί σταθερό άξονα

Μέση γωνιακή ταχύτητα $\overline{\omega} = \dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$

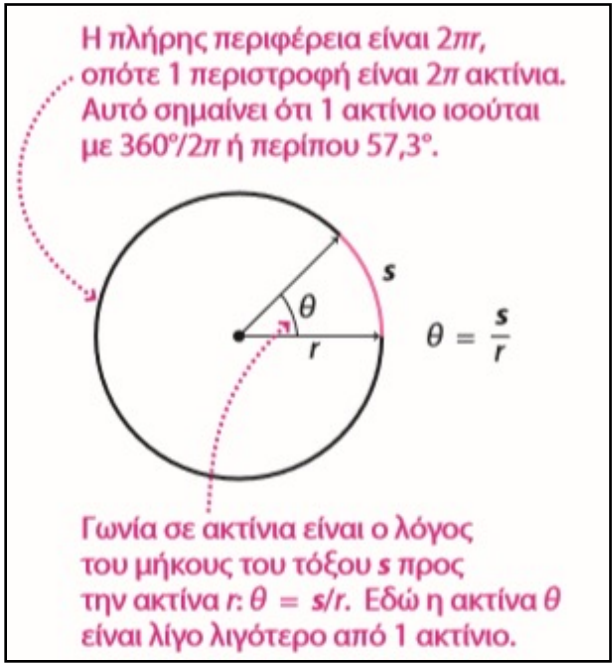
Στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$

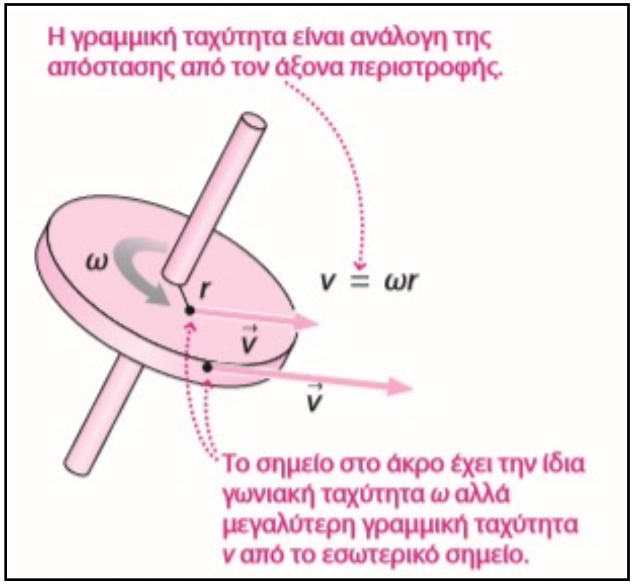
Συχνότητα $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$

Περίοδος $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$



Γωνιακή ταχύτητα





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Το πλατώ ενός πικ–απ περιστρέφεται με $33\frac{1}{3}$ στροφές ανά λεπτό. Να βρεθεί η συχνότητα περιστροφής, η γωνιακή ταχύτητα και η περίοδος της κίνησης.

Περιστροφή περί σταθερό άξονα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Το πλατώ ενός πικ–απ περιστρέφεται με $33\frac{1}{3}$ στροφές ανά λεπτό. Να βρεθεί η συχνότητα περιστροφής, η γωνιακή ταχύτητα και η περίοδος της κίνησης.

ΛΥΣΗ: Η συχνότητα ισούται με

$$\nu = \frac{33{,}3\ \text{rev}}{1\ \text{min}} = \frac{33{,}3\ \text{rev}}{60\ \text{s}} = 0{,}55\ \text{rev}/\text{s}$$

Η γωνιακή ταχύτητα ισούται με

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 0{,}555\ \text{rev}/\text{s} = 3{,}49\ \text{rad}/\text{s}$$

και η περίοδος της κίνησης με

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0{,}555\ \text{rev}/s} = 1{,}80\ s$$

Περιστροφή περί σταθερό άξονα

Μέση γωνιακή επιτάχυνση $$\bar{a} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση $$a = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

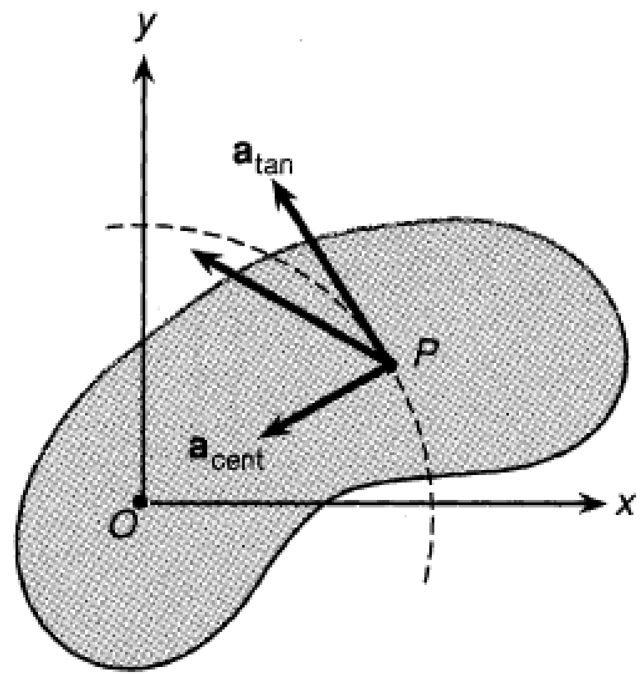
$$s = \phi R \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \upsilon = R\omega \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} =$$

$$\alpha_{\tan} = R\alpha$$

Γωνιακή επιτάχυνση

Γραμμική επιτάχυνση

$$\alpha_{cent} = \frac{\upsilon^2}{R} = R\omega^2$$



Κίνηση με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση

Αναλογίες μεταξύ κυκλικών και γραμμικών ποσοτήτων

Γραμμική ποσότητα	Γωνιακή ποσότητα
Θέση x	Γωνιακή θέση θ
Ταχύτητα $v = \dfrac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$	Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

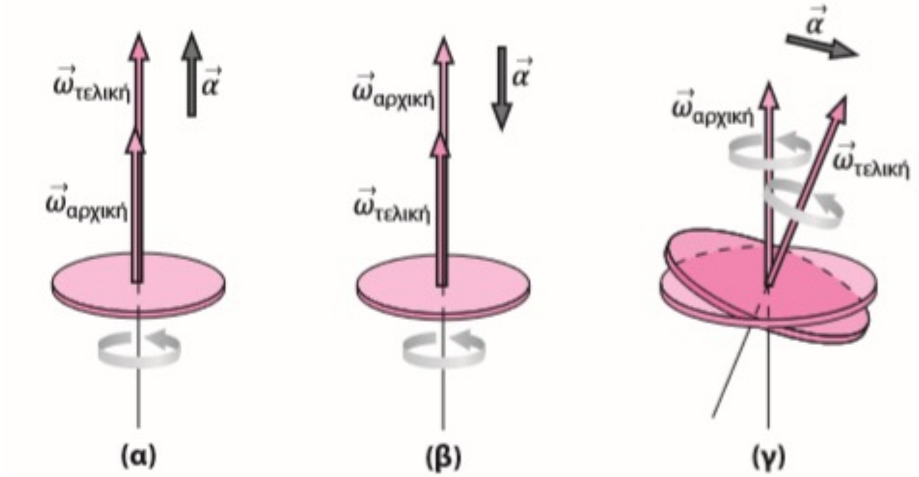
Εξισώσεις για σταθερή γραμμική επιτάχυνση		Εξισώσεις για σταθερή γωνιακή επιτάχυνση	
$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$	(2.8)	$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$	(10.6)
$v = v_0 + at$	(2.7)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(10.7)
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	(2.10)	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10.8)
$v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0)$	(2.11)	$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(10.9)

Η κατεύθυνση της γωνιακής επιτάχυνσης

Η γωνιακή επιτάχυνση δείχνει προς την κατεύθυνση της μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας $\Delta\vec{\omega}$

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

- Η μεταβολή μπορεί να είναι στην ίδια κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα, αυξάνοντας το μέτρο της **(α)**
- Η μεταβολή μπορεί να είναι στην αντίθετη κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα, μειώνοντας το μέτρο της **(β)**
- Ή μπορεί να είναι σε τυχαία κατεύθυνση, μεταβάλλοντας τόσο την κατεύθυνση όσο και το μέτρο της **(γ)**



Κινητική ενέργεια περιστροφής
Ροπή αδράνειας

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \mathrm{I} \omega^2$$

Ολική κινητική ενέργεια K ενός περιστρεφόμενου στερεού σώματος

$$\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$$

Ροπή Αδράνειας περιστρεφόμενου σώματος περί δεδομένου άξονα.

Μονάδες: $kg \cdot m^2$ ή $lb \cdot ft^2$

Η έκφραση **$K = ½ I\omega^2$** μοιάζει με την **$K = ½ m\upsilon^2$**

Αντιστοίχηση **υ** με **ω** και **m** με **I**

(μέτρο της αντίστασης που παρουσιάζει ένα σώμα στις μεταβολές της περιστροφικής του κίνησης)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Υποθέστε ότι το μόριο του βρωμιούχου καλίου (KBr) του Παραδείγματος 10.5 περιστρέφεται ως στερεό σώμα περί το κέντρο μάζας του (Σχ. 12.11). Πόση είναι η ροπή αδρανείας του μορίου περί αυτόν τον άξονα; Υποθέστε ότι το μόριο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $1{,}0 \times 10^{12}$ rad/s. Πόση είναι η κινητική ενέργεια περιστροφής;

ΛΥΣΗ: Μπορούμε να θεωρήσουμε το μόριο ως στερεό σώμα, αποτελούμενο από δύο σωματίδια ενωμένα με αβαρή ράβδο. Είναι προτιμότερο να τοποθετήσουμε την αρχή των συντεταγμένων στο κέντρο μάζας (βλ. Σχ. 12.11). Σύμφωνα με τ' αποτελέσματα του Παραδείγματος 10.5, η απόσταση του ατόμου Br είναι ίση με $R_1 = 0{,}93$ Å και η απόσταση του ατόμου K είναι $R_2 = 1{,}89$ Å. Οι αντίστοιχες μάζες είναι $m_1 = 79{,}9$ u και $m_2 = 39{,}1$ u. Η ροπή αδρανείας του μορίου ισούται με

proton mass =
1.67262192 × 10^{-27} kilograms

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2$$

$$= 79{,}9\,\text{u} \times (0{,}93\,\text{Å})^2 + 39{,}1\,\text{u} \times (1{,}89\,\text{Å})^2$$

$$= 2{,}09 \times 10^2\,\text{u} \cdot \text{Å}^2$$

$$= 2{,}09 \times 10^2\,\text{u} \cdot \text{Å}^2 \times \frac{1{,}66 \times 10^{-27}\,\text{kg}}{1\,\text{u}} \times \left(\frac{10^{-10}\,\text{m}}{1\,\text{Å}}\right)^2$$

$$= 3{,}47 \times 10^{-45}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$K = \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

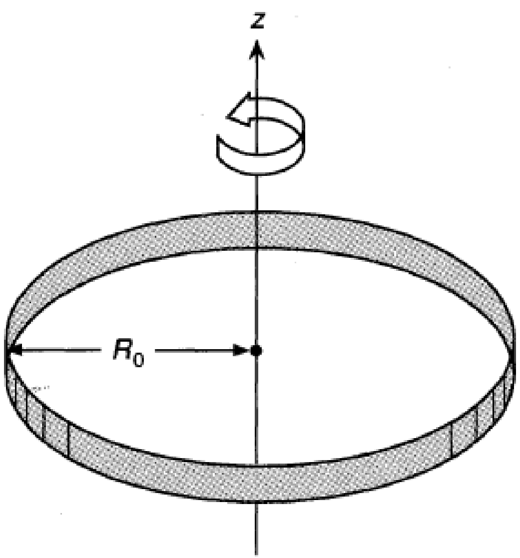
$$= \tfrac{1}{2} \times 3{,}47 \times 10^{-45}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \times (1{,}0 \times 10^{12}\,\text{rad/s})^2$$

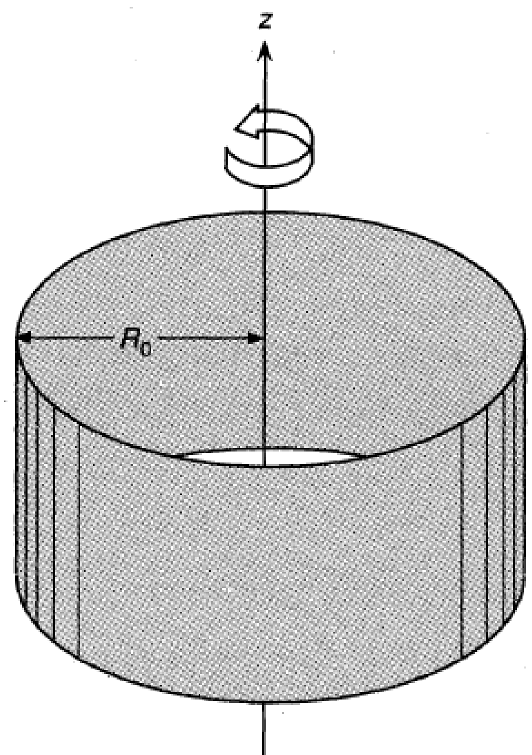
$$= 1{,}73 \times 10^{-21}\,\text{J}$$

ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Την κινητική ενέργεια θα μπορούσαμε να είχαμε υπολογίσει αφού πρώτα υπολογίζαμε τις ταχύτητες του κάθε ατόμου χωριστά ($\upsilon_1 = R_1 \omega$, $\upsilon_2 = R_2 \omega$) και μετά προσθέταμε τις αντίστοιχες κινητικές ενέργειες.

Ροπή αδράνειας στερεού συνεχούς κατανομής μάζας

$$\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho R_i^2 \Delta V \Rightarrow \mathrm{I} = \int \rho R^2 dV$$





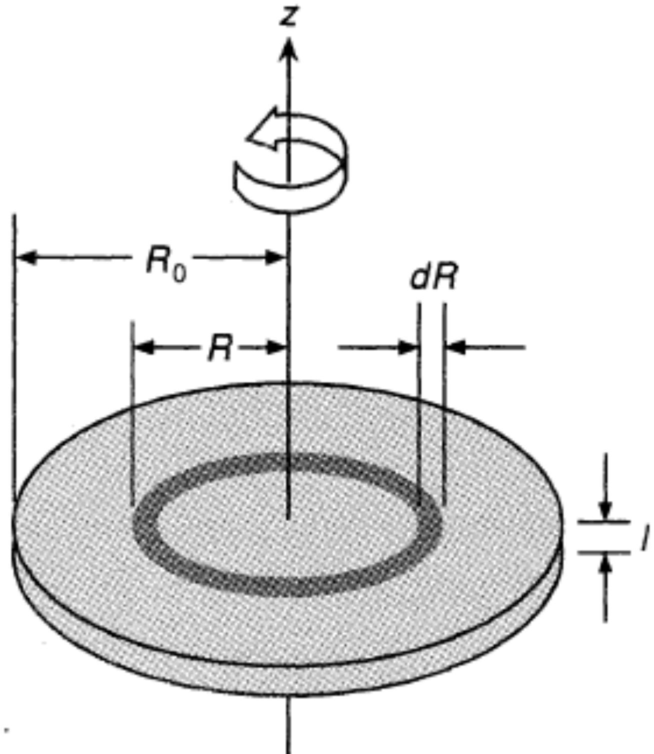
$$I = MR_0^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να βρεθεί η ροπή αδρανείας δίσκου ομοιόμορφης πυκνότητας, μάζας M και ακτίνας R_0 που περιστρέφεται περί τον άξονα του.

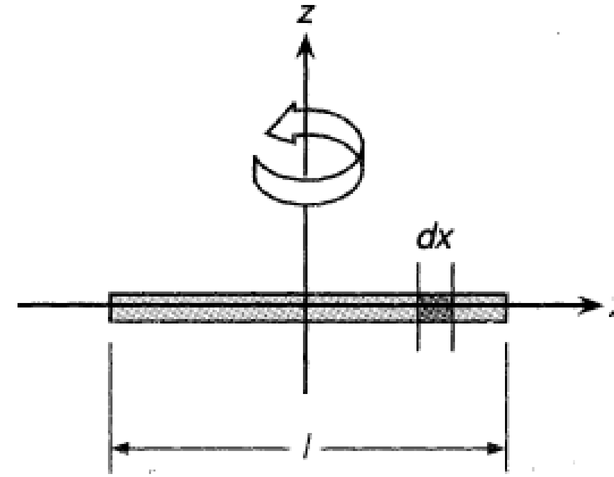
$$\mathrm{I} = \int \rho R^2 dV = \int_0^{R_0} \rho R^2 2\pi R l dR = 2\pi\rho l \int_0^{R_0} R^3 dR = 2\pi\rho l \frac{R_0^4}{4}$$

$$M = \pi R_0^2 l \rho \Rightarrow \rho l = \frac{M}{\pi R_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} M R_0^2$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Να βρεθεί η ροπή αδρανείας μιας ομογενούς λεπτής ράβδου μήκους l και μάζας M που περιστρέφεται περί άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το κέντρο της.



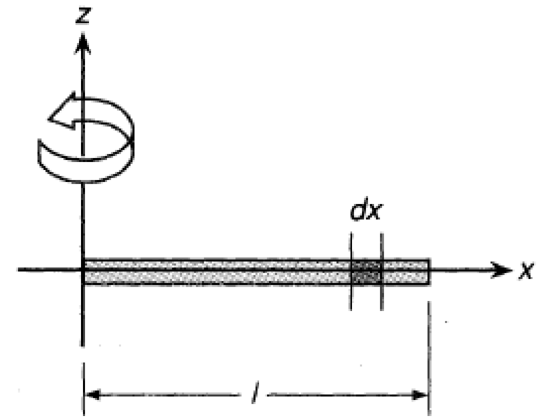
ΛΥΣΗ: Στο Σχ. 12.15 φαίνεται η ράβδος που συμπίπτει με τον άξονα x· ο άξονας περιστροφής συμπίπτει με τον άξονα z. Θεωρήστε ένα μικρό τμήμα dx της ράβδου. Αν η εγκάρσια τομή της ράβδου ισούται με A, τότε $dV = A\,dx$ και η Εξ. (25) γράφεται ως

$$I = \int \rho R^2 dV \Rightarrow I = \int_{-l/2}^{l/2} \rho x^2 A\,dx = \rho A \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} \rho A l^3 \qquad (29)$$

Αφού Al είναι ο όγκος της ράβδου, ρAl είναι η ολική της μάζα και, ως εκ τούτου, η ροπή αδρανείας μπορεί να γραφεί ως

$$I = \frac{1}{12} M l^2 \qquad (30)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Να επαναληφθεί ο προηγούμενος υπολογισμός για άξονα που διέρχεται από το άκρο της ράβδου.



ΛΥΣΗ: Στο Σχ. 12.16 φαίνεται η ράβδος και ο άξονας περιστροφής. Η ράβδος εκτείνεται από $x = 0$ ώς $x = l$· συνεπώς, αντί της Εξ. (29) παίρνουμε

$$I = \int_0^l \rho x^2 A\, dx = \rho A \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{3} \rho A l^3 \tag{31}$$

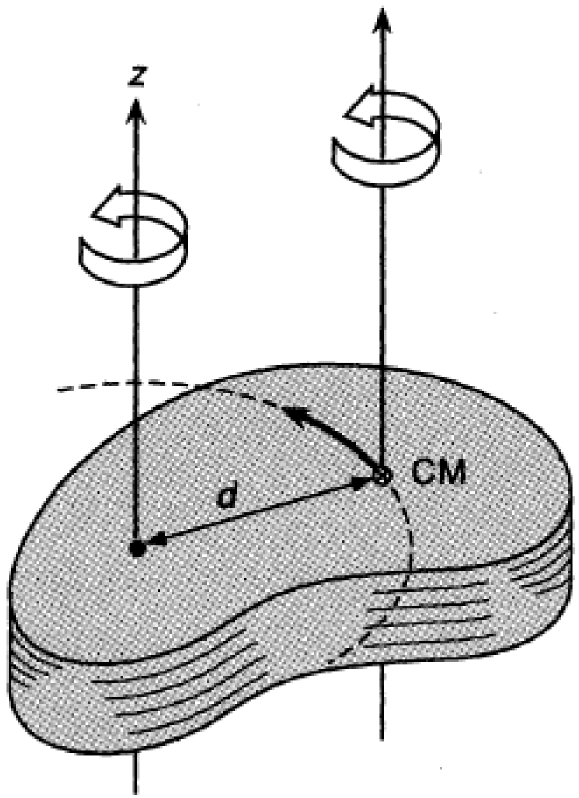
και αντί της Εξ. (3), παίρνουμε

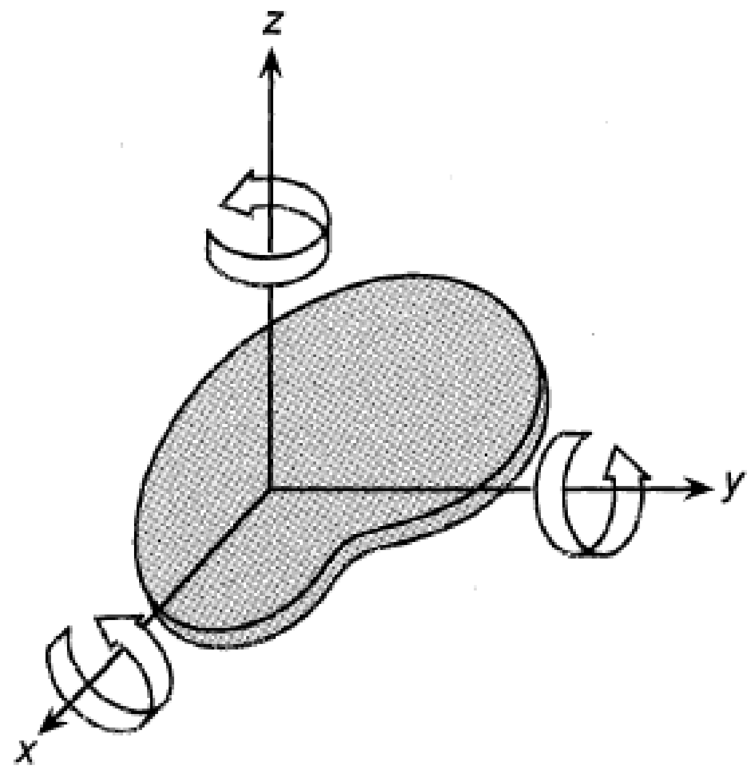
$$I = \frac{1}{3} M l^2 \tag{32}$$

Ροπή αδράνειας: **μικρή** όταν ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας, $I = \frac{1}{12} M l^2$

μεγάλη όταν διέρχεται από το άκρο της ράβδου. $I = \frac{1}{3} M l^2$

Θεωρήματα των παράλληλων και κάθετων αξόνων (Θεώρημα Steiner)

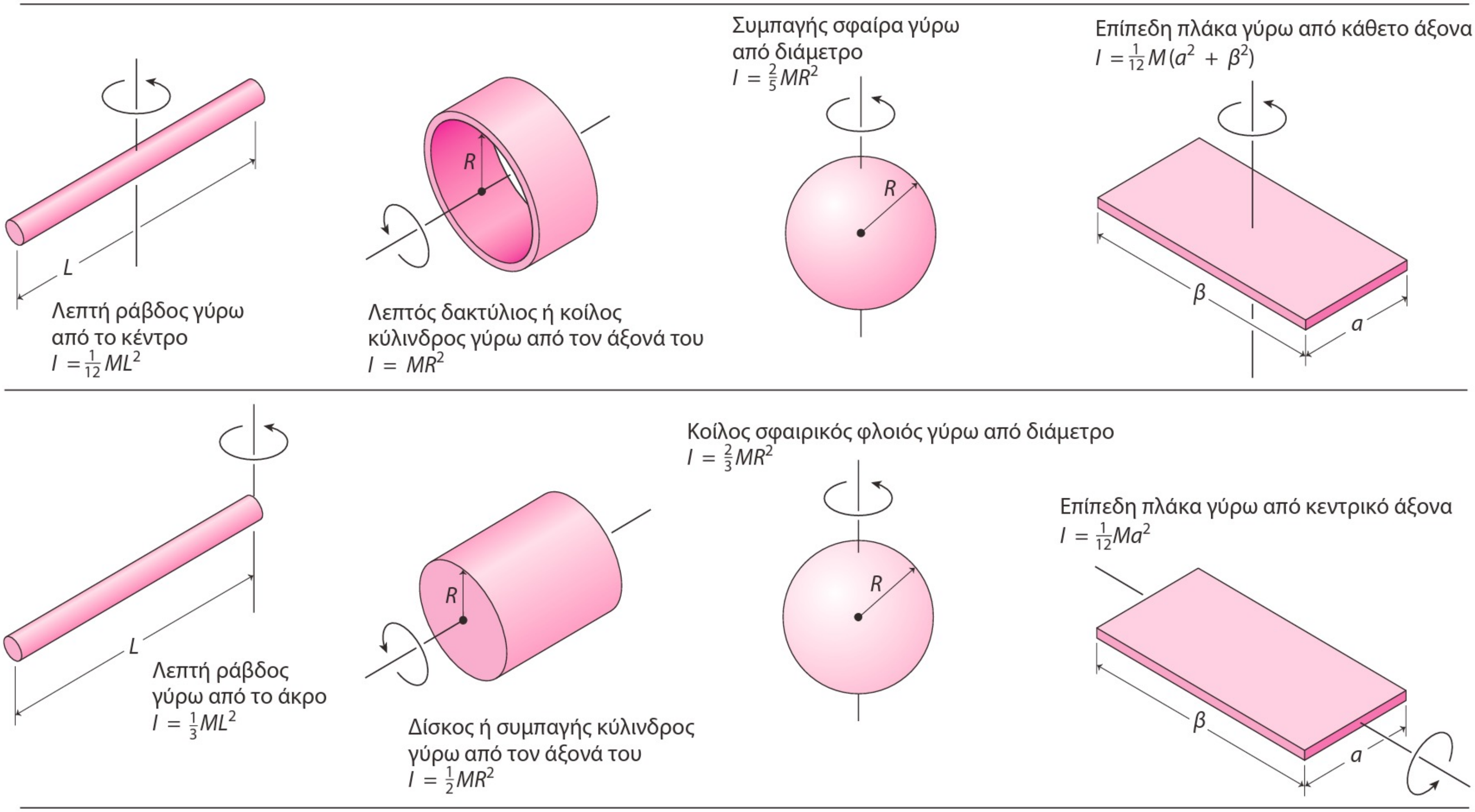




$$I = I_{CM} + Md^2$$

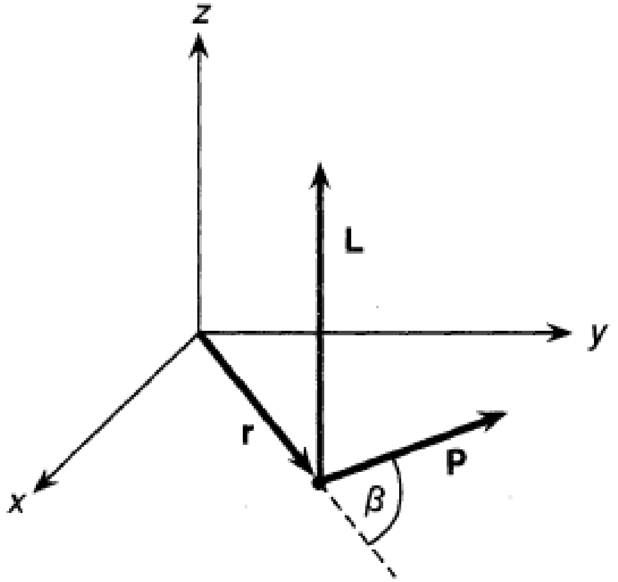
$$I_Z = I_X + I_Y$$

Περιστροφικές αδράνειες μερικών σωμάτων

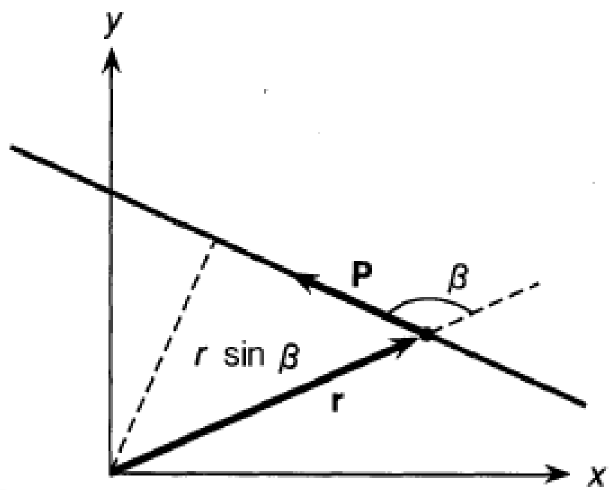


Στροφορμή σωματιδίου - Εξωτερικό γινόμενο

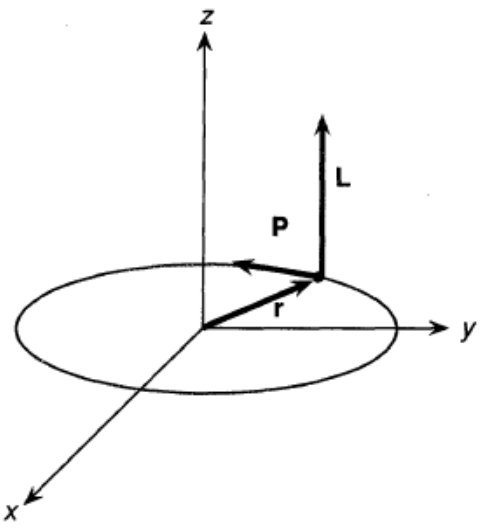
Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m, το οποίο, σε κάποια χρονική στιγμή, έχει ορμή **p** και βρίσκεται σε απόσταση r από την αρχή των συντεταγμένων. Η στροφορμή **L** αυτού του σωματιδίου ορίζεται ως το διάνυσμα που έχει μέτρο



$$\boxed{\begin{aligned} L &= rp\sin\beta \\ L &= r\times p \\ L &= mr\times \upsilon \end{aligned}}$$



Διατήρηση της στροφορμής σωματιδίου που κινείται με σταθερή ταχύτητα



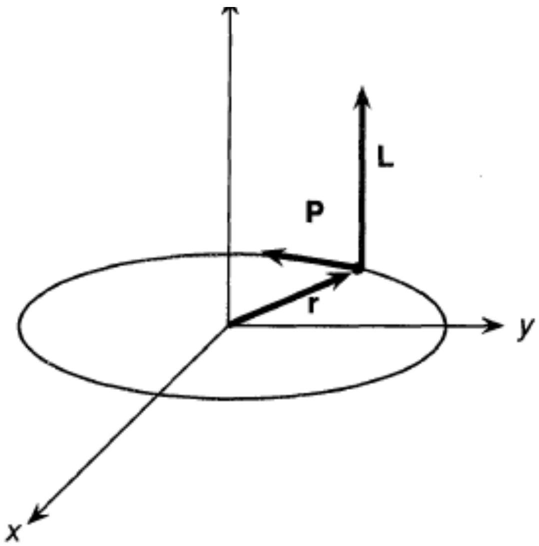
Στροφορμή σωματιδίου - Εξωτερικό γινόμενο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Η Γη καθώς κινείται γύρω από τον Ηλιο, εκτελεί (κατά προσέγγιση) ομαλή κυκλική κίνηση. Εάν η αρχή των αξόνων τοποθετηθεί στον Ηλιο, ποιά είναι η στροφορμή της Γης;

ΛΥΣΗ: Η ακτίνα του κύκλου ισούται με $1{,}5 \times 10^{11}$ m και η ταχύτητα της Γης ισούται με $3{,}0 \times 10^{4}$ m/s (βλ. Παράδειγμα 2.2)· η μάζα της Γης είναι ίση με $6{,}0 \times 10^{24}$ kg. Συνεπώς, το μέτρο της στροφορμής ισούται με

$$L = mrv = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg} \times 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \times 3{,}0 \times 10^{4}\,\mathrm{m/s}$$

$$= 2{,}7 \times 10^{40}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$$



Στροφορμή στερεού σώματος

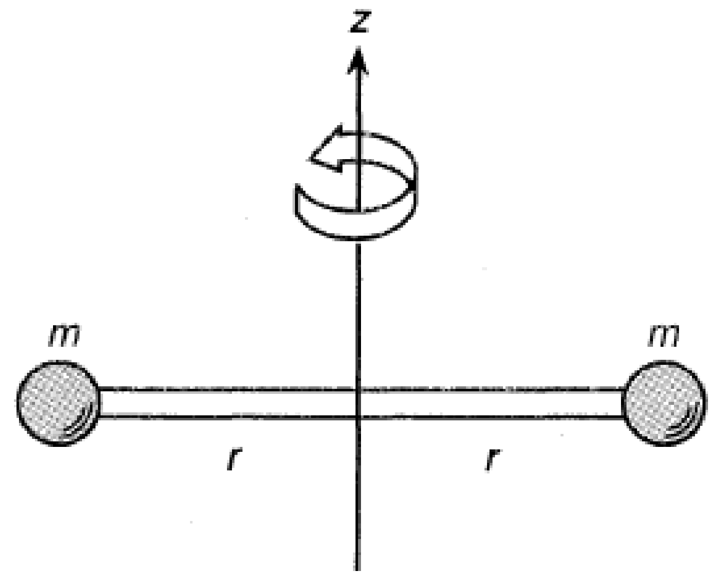
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon} \Rightarrow \vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i$$

Εξαρτάται από την εκλογή του συστήματος συντεταγμένων (συνήθως στο κ.μ. ή στον άξονα περιστροφής)

Πίνακας. Στροφορμή μερικών σωμάτων (μονάδες ? kg·m²/s, J·s)

Τροχιακή κίνηση όλων των πλανητών του Ηλιακού Συστήματος	$3{,}2 \times 10^{43}$ J · s
Τροχιακή κίνηση της Γης	$2{,}7 \times 10^{40}$ J · s
Περιστροφή της Γης	$5{,}8 \times 10^{33}$ J · s
Κινητήρας ελικοπτέρου (320 rev/min)	5×10^{4} J · s
Τροχός αυτοκινήτου (90 km/h)	1×10^{2} J · s
Ηλεκτρικός ανεμιστήρας	1 J · s
Frisbee	1×10^{-1} J · s
Παιδική σβούρα	1×10^{-1} J · s
Δίσκος πικ-άπ ($33\frac{1}{3}$ rev/min)	6×10^{-3} J · s
Σφαίρα που εβλήθη από όπλο	2×10^{-3} J · s
Τροχιακή κίνηση ηλεκτρονίου σε άτομο	$1{,}05 \times 10^{-34}$ J · s
Σπιν ηλεκτρονίου	$0{,}53 \times 10^{-34}$ J · s

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Στο Σχ. 12.24 φαίνεται ένας αλτήρας, ένα στερεό σώμα που αποτελείται από δύο σωματίδια μάζας m προσαρμοσμένα στα άκρα μιας (σχεδόν) αβαρούς στερεάς ράβδου μήκους $2r$. Το σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα διερχόμενο από το κέντρο της ράβδου. Υπλογίστε τη στροφορμή.

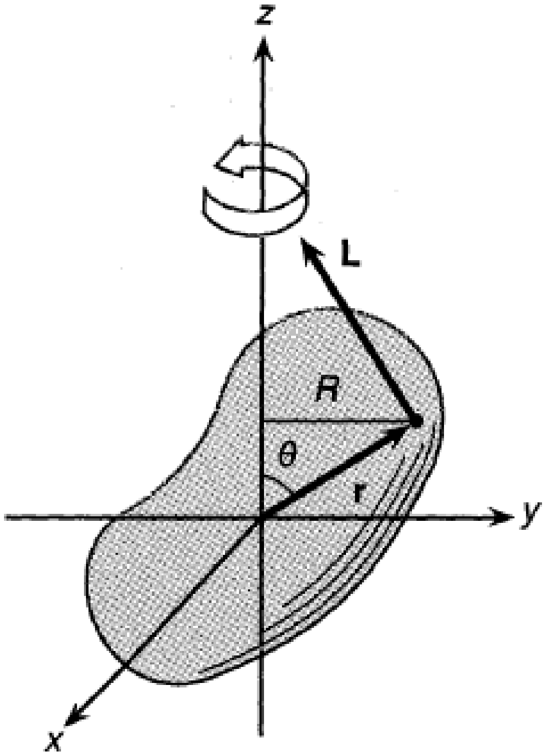


ΛΥΣΗ: Αφού η στιγμιαία επιβατική ακτίνα είναι κάθετη στο στιγμιαίο διάνυσμα της ταχύτητας, το μέτρο του διανύσματος της στροφορμής $m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ κάθε σωματιδίου ισούται απλώς με mrv. Η διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής κάθε σωματιδίου είναι πράλληλη προς τον άξονα περιστροφής. Η ολική στροφορμή ισούται με

$$L = mrv + mrv = 2mrv = 2mr^2 \omega$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $v = r\omega$.

Στροφορμή στερεού σώματος



Το μέτρο της στροφορμής του σωματιδίου είναι:

$$L = r \times p = mr \times \upsilon = mr\upsilon = m\omega r^2 \sin\theta$$

$$L_Z = L\cos(90^0 - \theta) = (m\omega r^2 \sin\theta)\sin\theta = m\omega(r\sin\theta)^2 = m\omega R^2 \Rightarrow$$

$$L_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega \Rightarrow L_Z = I\omega$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}L_Z^2}{I} = \frac{L_Z^2}{2I}$$

Ανάλογη με την έκφραση $K = p^2/2m$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Η ροπή αδρανείας της Γης γύρω από άξονα που διέρχεται από τους πόλους ισούται με $1{,}8 \times 10^{37}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$. Υπολογίστε τη στροφορμή σπιν. Υπολογίστε την περιστροφική κινητική ενέργεια.

ΛΥΣΗ: Η συχνότητα περιστροφής ισούται με 1 rev/d.[3]

$$\nu = 1/\mathrm{day} = 1/8{,}6 \times 10^4\,\mathrm{s} = 1{,}2 \times 10^{-5}/\mathrm{s}$$

και

$$\omega = 2\pi\nu = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$$

Η στροφή ισούται τότε με

$$L_z = I\omega$$

$$= 8{,}1 \times 10^{37}\,\mathrm{kg \cdot m^2} \times 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$$

$$= 5{,}9 \times 10^{33}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$$

και η κινητική ενέργεια με

$$K = \tfrac{1}{2} L_z^2 / I$$

$$= \tfrac{1}{2}(5{,}9 \times 10^{33}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s})^2 / (8{,}1 \times 10^{37}\,\mathrm{kg \cdot m^2})$$

$$= 2{,}1 \times 10^{29}\,\mathrm{J}$$

Σύνοψη

Μέση γωνιακή ταχύτητα: $\overline{\omega} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$

Στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \frac{d\phi}{dt}$

Μέση γωνιακή επιτάχυνση: $\bar{a} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Ταχύτητα σωματιδίου περιστρεφόμενου σώματος: $v = R\omega$

Επιτάχυνση σωματιδίου περιστρεφόμενου σώματος:

$$a_{\text{tan}} = R\alpha$$

$$a_{\text{cent}} = R\omega^2$$

Κίνηση με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\phi - \phi_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\alpha(\phi - \phi_0) = \tfrac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)$$

Σύνοψη

Ροπή αδρανείας: $I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$

$$I = \int \rho R^2 \, dV$$

Κινητική ενέργεια περιστροφής: $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

Θεώρημα των παράλληλων αξόνων: $I = I_{CM} + Md^2$

Θεώρημα των κάθετων αξόνων (για επίπεδη πλάκα στο επίπεδο x – y):

$I_z = I_x + I_y$

Εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο:

Το μέτρο του $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ισούται με $AB \sin \beta$
η φορά δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Στροφορμή σωματιδίου: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$

Στροφορμή ομαλής κυκλικής κίνησης: $L = mrv$

Στροφορμή στερεού σώματος περιστρεφόμενου περί τον άξονα z: $L_z = I\omega$

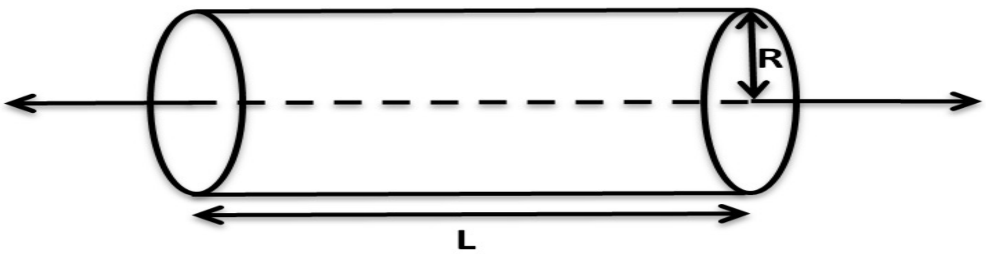
Ερωτήσεις

Γύρω από ποιόν άξονα η στροφορμή ενός σώματος είναι μεγαλύτερη?

Υποθέστε ότι αντλείτε μάζα Μ θαλασσινού νερού και γεμίζετε μια λίμνη που βρίσκεται στη ξηρά. Πως αυτό μεταβάλλει τη στροφορμή της γης?

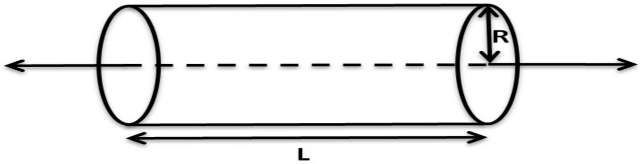
Ασκήσεις

*19. Ενα άδειο κουτί μπύρας έχει μάζα 50 g, μήκος 12 cm και ακτίνα 3,3 cm. Βρείτε τη ροπή αδρανείας αυτού του κουτιού γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Υποθέστε ότι το κουτί είναι τέλειος κύλινδρος από μεταλλικό φύλλο χωρίς προεξοχές, εσοχές ή τρύπες.



Ασκήσεις

*19. Ενα άδειο κουτί μπύρας έχει μάζα 50 g, μήκος 12 cm και ακτίνα 3,3 cm. Βρείτε τη ροπή αδρανείας αυτού του κουτιού γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Υποθέστε ότι το κουτί είναι τέλειος κύλινδρος από μεταλλικό φύλλο χωρίς προεξοχές, εσοχές ή τρύπες.



Συνολική επιφάνεια του κουτιού μπύρας:

$2\pi R L + 2\pi R^2$

Μάζα κυλινδρικής επιφάνειας:

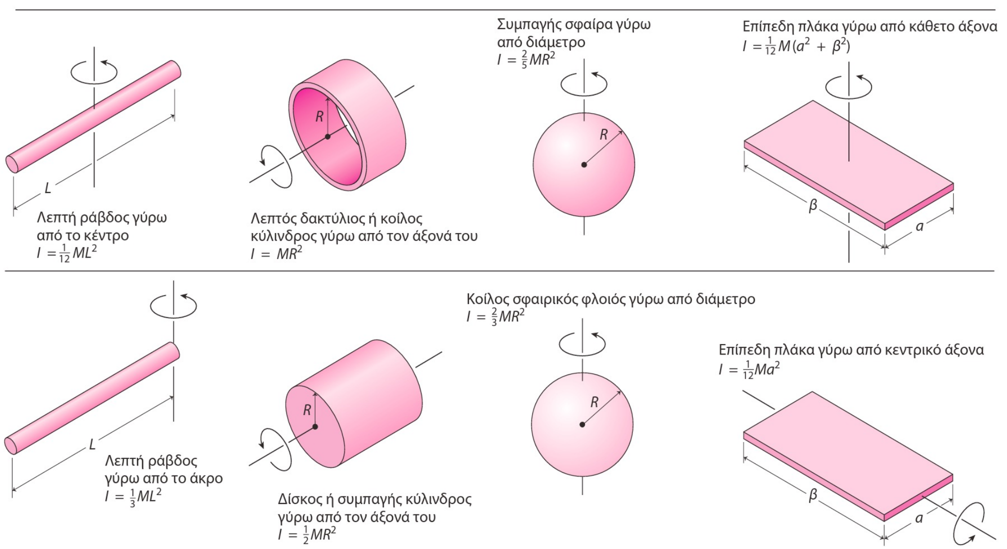
$\frac{2\pi RL}{2\pi(RL+R^2)} M = \frac{L}{L+R} M = \frac{12}{15.3} 0.05 \text{ kg} = 0.0392 \text{ kg}$

Μάζα κάθε πάτου:

$\frac{0,05-0,0392}{2} = 0,0054 \text{ kg}$

$I = M_{κυλινδρ} R^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) M_{πάτο} R^2 =$

$= 0.0392\,(0.033)^2 + 0.0054\,(0.033)^2 = 4.9 * 10^{-5} \text{ kg*m}^2$



Ασκήσεις

*20. Υποθέστε ότι ένα υπερπετρελαιοφόρο μεταφέρει $4{,}4 \times 10^8$ kg πετρελαίου από μία δεξαμενή στη Βενεζουέλα (βόρειο πλάτος 10°) σε δεξαμενή στην Ολλανδία (βόρειο πλάτος 53°). Πόση είναι η μεταβολή της ροπής αδρανείας του συστήματος Γης – πετρελαίου;

Ασκήσεις

*20. Υποθέστε ότι ένα υπερπετρελαιοφόρο μεταφέρει $4{,}4 \times 10^8$ kg πετρελαίου από μία δεξαμενή στη Βενεζουέλα (βόρειο πλάτος 10°) σε δεξαμενή στην Ολλανδία (βόρειο πλάτος 53°). Πόση είναι η μεταβολή της ροπής αδρανείας του συστήματος Γης–πετρελαίου;

$$\left.\begin{aligned} \Delta I &= I_{Hol} - I_{Ven} \\ I &= m_{oil} * (R_E \cos\theta)^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta I = m_{oil}\, R_E^2 \cos^2 53^o - m_{oil}\, R_E^2 \cos^2 10^o$$

$$= 4.4 * 10^8 \text{ kg } (6.39 * 10^6 \text{ m}) (\cos^2 53^o - \cos^2 10^o)$$

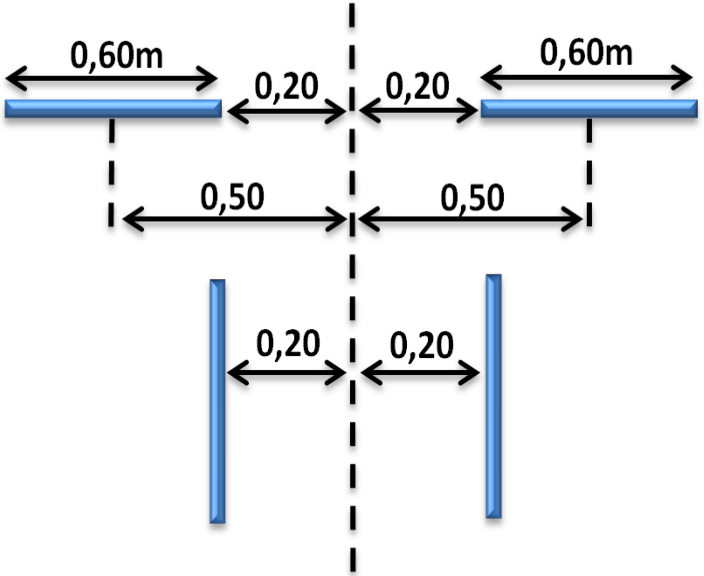
$$= -1.1 * 10^{22} \text{ kg m}^2$$

Ασκήσεις

*23. Για να αυξήσει τη ροπή αδρανείας της γύρω από κατακόρυφο άξονα, μία αθλήτρια γυμναστικών επιδείξεων παγοδρομίας απλώνει τα χέρια της, ώστε να γίνουν οριζόντια· για να μειώσει τη ροπή αδρανείας της κατεβάζει τα χέρια της στο πλάι, ώστε να γίνουν κατακόρυφα. Υπολογίστε τη μεταβολή της ροπής αδρανείας ανάμεσα σ' αυτές τις δύο θέσεις των χεριών της. Υποθέστε ότι κάθε βραχίονας είναι μία λεπτή, ομοιόμορφη ράβδος μήκους 0,60 m και μάζας 2,8 kg αρθρωμένη στον ώμο σε απόσταση 0,20 m από τον άξονα περιστροφής.

Ασκήσεις

*23. Για να αυξήσει τη ροπή αδρανείας της γύρω από κατακόρυφο άξονα, μία αθλήτρια γυμναστικών επιδείξεων παγοδρομίας απλώνει τα χέρια της, ώστε να γίνουν οριζόντια· για να μειώσει τη ροπή αδρανείας της κατεβάζει τα χέρια της στο πλάι, ώστε να γίνουν κατακόρυφα. Υπολογίστε τη μεταβολή της ροπής αδρανείας ανάμεσα σ' αυτές τις δύο θέσεις των χεριών της. Υποθέστε ότι κάθε βραχίονας είναι μία λεπτή, ομοιόμορφη ράβδος μήκους 0,60 m και μάζας 2,8 kg αρθρωμένη στον ώμο σε απόσταση 0,20 m από τον άξονα περιστροφής.



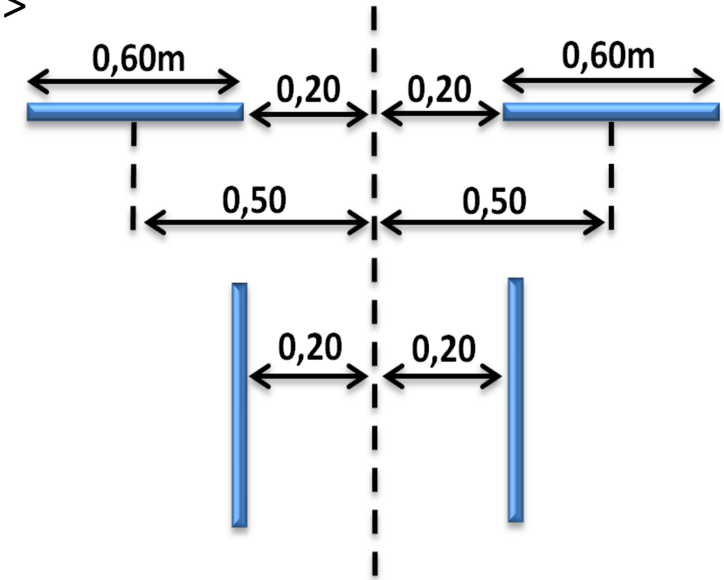
Ασκήσεις

*23. Για να αυξήσει τη ροπή αδρανείας της γύρω από κατακόρυφο άξονα, μία αθλήτρια γυμναστικών επιδείξεων παγοδρομίας απλώνει τα χέρια της, ώστε να γίνουν οριζόντια· για να μειώσει τη ροπή αδρανείας της κατεβάζει τα χέρια της στο πλάι, ώστε να γίνουν κατακόρυφα. Υπολογίστε τη μεταβολή της ροπής αδρανείας ανάμεσα σ' αυτές τις δύο θέσεις των χεριών της. Υποθέστε ότι κάθε βραχίονας είναι μία λεπτή, ομοιόμορφη ράβδος μήκους 0,60 m και μάζας 2,8 kg αρθρωμένη στον ώμο σε απόσταση 0,20 m από τον άξονα περιστροφής.

Χέρια πάνω

$I_{arms} = 2\,(I_{CM} + Mx^2) = 2\,(\frac{1}{12} * 2.8 * 0.6^2 + 2.8 * 0.5^2)$ =>

=> $I_{arms} = 1.568$ kg m^2 (1)



Χέρια κάτω

$I = \Sigma mR^2 = 2\,(2.8 * 0.2^2) = 0.224$ kg m^2 (2)

(1), (2) => $\Delta I = 1.568 - 0.224 = 1.34$ kg m^2

Ασκήσεις

38. Ο καθένας από τους τροχούς ενός αυτοκινήτου, μάζας 1360 kg, έχει διάμετρο 76,2 cm και μάζα 27,2 kg. Αν λάβουμε υπόψη την περιστροφική κινητική ενέργεια των τροχών γύρω από τους άξονες τους, πόση είναι η ολική κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου όταν τρέχει με 80,0 km/h; Τί ποσοστό κινητικής ενέργειας ανήκει στην περιστροφική κίνηση των τροχών γύρω από τους άξονες τους; Προσποιηθείτε ότι κάθε τροχός είναι ομογενής κυκλικός δίσκος.

Ασκήσεις

38. Ο καθένας από τους τροχούς ενός αυτοκινήτου, μάζας 1360 kg, έχει διάμετρο 76,2 cm και μάζα 27,2 kg. Αν λάβουμε υπόψη την περιστροφική κινητική ενέργεια των τροχών γύρω από τους άξονες τους, πόση είναι η ολική κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου όταν τρέχει με 80,0 km/h; Τί ποσοστό κινητικής ενέργειας ανήκει στην περιστροφική κίνηση των τροχών γύρω από τους άξονες τους; Προσποιηθείτε ότι κάθε τροχός είναι ομογενής κυκλικός δίσκος.

[Γιατί χρησιμοποιούμε ζάντες αλουμινίου?]

Κινητική ενέργεια αυτοκινήτου:

$K = ½\ M\ u^2 = ½ * 1360 * \left(\frac{80000}{3600}\right)^2 = 3.36 * 10^5$ J

Γωνιακή ταχύτητα τροχού: $\omega = \frac{u}{R} = \frac{80000}{3600*0.381} = 58$ rad/s

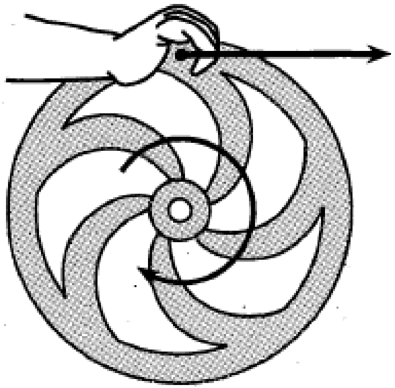
Κινητική ενέργεια περιστροφής: $E_R = 4\ (½\ I\ \omega^2) = 2\ I\ \omega^2$ =>

=> $E_R = 2\ (½\ M\ R^2)\ \omega^2 = 2\ (½ * 27{,}2 * 0{,}381^2)\ (58{,}3)^2$

=> $E_R = 1{,}34 * 10^4$ J

$\% = \frac{1.34 \text{ x } 10^4}{1.34 \text{ x } 10^4 + 3.36 \text{ x } 10^5} \text{ x } 100 = 3.84\ \%$

Ροπή Στρέψεως

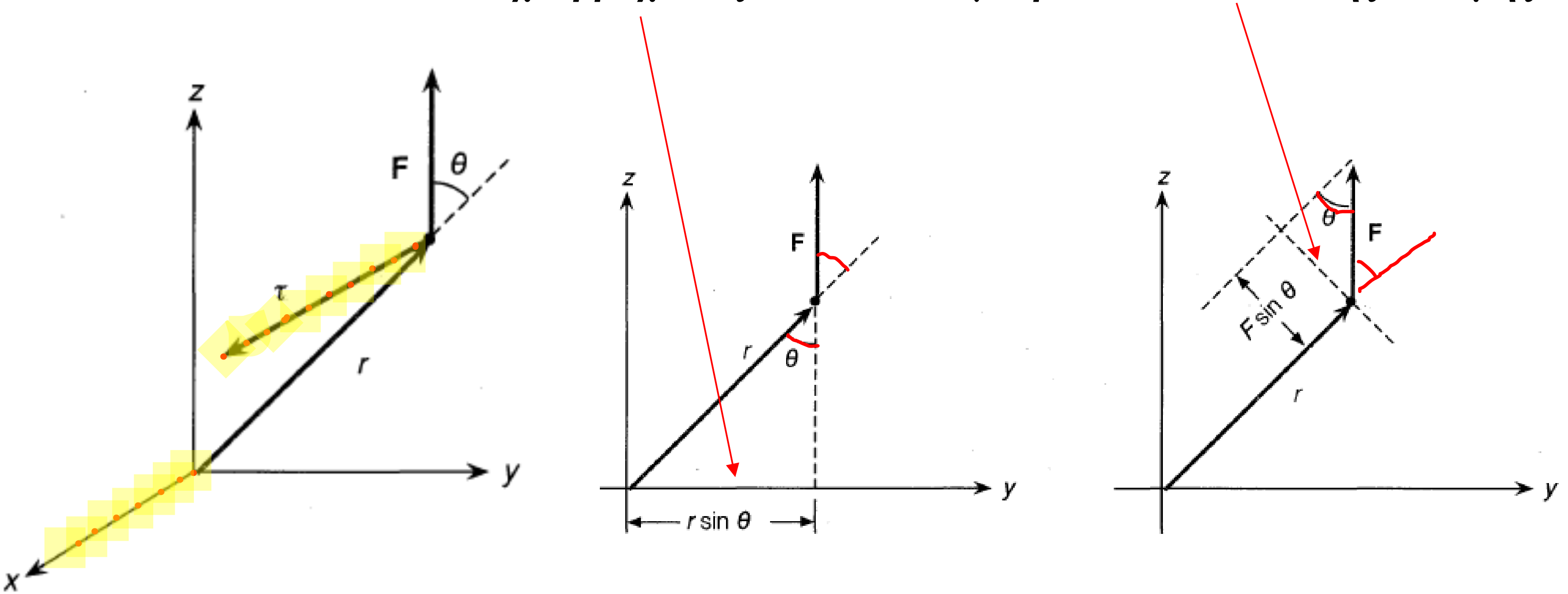


Ροπή: **τ = r × F = rFsinθ** (για θ = 0^0 τ = 0, και για θ = 90^0 τ = rF

Μονάδες: N·m = Joule (μονάδα έργου)

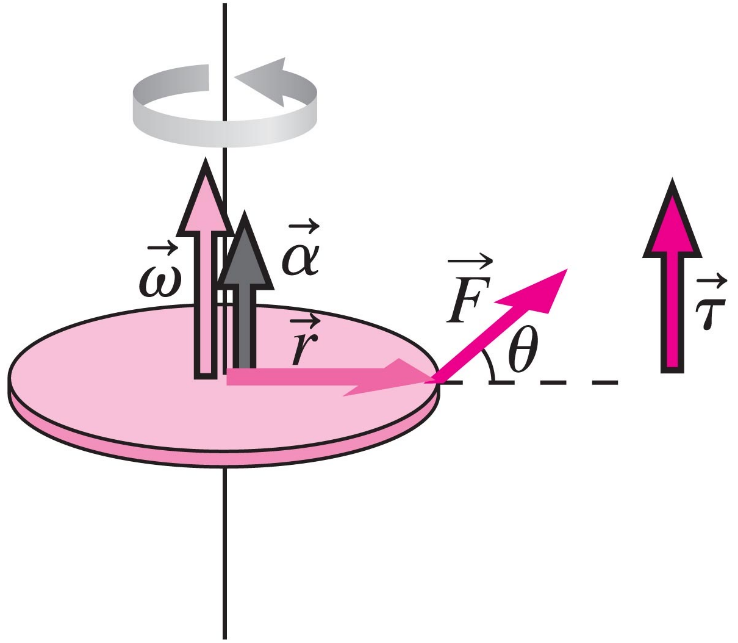
Η ροπή παίζει στην περιστροφική κίνηση το ρόλο που παίζει η δύναμη στην μεταφορική κίνηση.

Μοχλοβραχίονας **Εγκάρσια συνιστώσα της δύναμης**



Κατεύθυνση του διανύσματος της ροπής

- Το διάνυσμα της ροπής είναι κάθετο τόσο στο διάνυσμα της δύναμης όσο και στο διάνυσμα της μετατόπισης από τον άξονα περιστροφής στο σημείο εφαρμογής της δύναμης



  - Το μέτρο της ροπής είναι

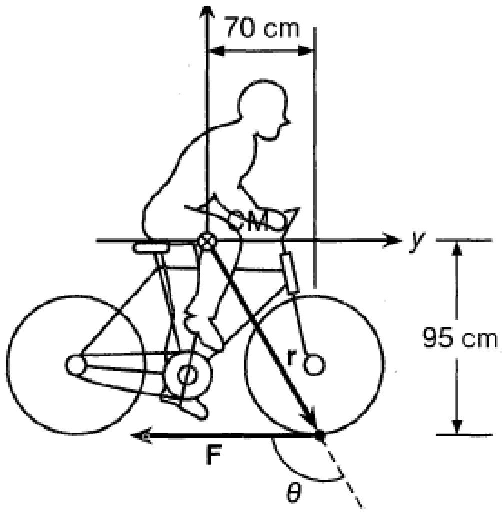
$$\tau = rF\sin\theta$$

  - Από τις δύο δυνατές κατευθύνσεις που είναι κάθετες στα $\vec{r}$ και $\vec{F}$, η σωστή κατεύθυνση δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού

  - Η ροπή εκφράζεται με τη χρήση του **εξωτερικού γινομένου:**

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Οταν σταματάει ξαφνικά, η οριζόντια δύναμη τροχοπέδησης που ασκείται από το έδαφος πάνω στον μπροστινό τροχό ενός ποδηλάτου, με φρένα στον μπροστινό τροχό, είναι ίση με 600 N. Πόση είναι η ροπή αυτής της δύναμης ώς προς το κέντρο μάζας ποδηλάτου και αναβάτη; Το κέντρο μάζας βρίσκεται 95 cm πάνω από το έδαφος και 70 cm πίσω από το σημείο επαφής του μπροστινού τροχού με το έδαφος.



ΛΥΣΗ: Στο Σχ. 13.5 η αρχή των συντεταγμένων συμπίπτει με το κέντρο μάζας. Η απόσταση του σημείου εφαρμογής της δύναμης από την αρχή είναι

$$r = \sqrt{(0{,}70\ \text{m})^2 + (0{,}95\ \text{m})^2} = 1{,}18\ \text{m}$$

Το ημίτονο της γωνίας ανάμεσα στην επιβατική ακτίνα και στη δύναμη είναι $\sin\theta = 0{,}95\ \text{m}/1{,}18\ \text{m} = 0{,}81$. Επομένως, το μέτρο της ροπής ισούται με

$$\tau = rF\sin\theta = 1{,}18\ \text{m} \times 600\ \text{N} \times 0{,}81 = 570\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Η εξίσωση της περιστροφικής κίνησης

Η στροφορμή σωματιδίου είναι:

$$L = r \times p \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) = (\frac{dr}{dt} \times p) + (r \times \frac{dp}{dt}) = [\upsilon \times (m\upsilon)] + (r \times F) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = m(\upsilon \times \upsilon) + (r \times F) \Rightarrow \frac{dL}{dt} = r \times F$$

Για σύστημα σωματιδίων, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i = \tau_{ολική} \Rightarrow \frac{dL_{x,y,z}}{dt} = \tau_{x,y,z}$$

Και εάν η ολική εξωτερική ροπή = 0, τότε η στροφορμή του συστήματος διατηρείται

(L=σταθερά) Νόμος διατήρησης της στροφορμής

Η εξίσωση της περιστροφικής κίνησης

Η σχέση **dL/dt = τ**, σε συνδυασμό με την αντίστοιχη εξίσωση **dP/dt = F** ορίζουν πλήρως την **περιστροφική** και **μεταφορική** κίνηση του στερεού σώματος.

Αν ο άξονας περιστροφής συμπίπτει με τον άξονα Z ισχύει:

$$\frac{dL_Z}{dt} = \tau_Z \Rightarrow \frac{d(I\omega)}{dt} = \tau_Z \Rightarrow I\frac{d\omega}{dt} = \tau_Z \Rightarrow Ia = \tau_Z$$

Σε αντιστοιχία με την εξίσωση Newton για την μεταφορική κίνηση : ***mα=F***

Αντιστοίχηση εξισώσεων μεταφοράς και περιστροφής

$$ma = F \quad \rightarrow \quad I\alpha = \tau_z$$

$$p = mv \quad \rightarrow \quad L_z = I\omega$$

$$K = \tfrac{1}{2} mv^2 \quad \rightarrow \quad K = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

Οπως θα δούμε στο επόμενο εδάφιο, η αναλογία αυτή περιλαμβάνει επίσης και τις εξισώσεις έργου και ισχύος:

$$W = \int F\,dx \quad \rightarrow \quad W = \int \tau_z\,d\phi$$

$$P = Fv \quad \rightarrow \quad P = \tau_z\,\omega$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Το πλατώ ενός πικ–άπ, που συνδέεται με ηλεκτρικό κινητήρα, επιταχύνεται με σταθερό ρυθμό από 0 έως $33\frac{1}{3}$ rev/min σε χρόνο 2,0 s. Το πλατώ είναι ομογενής μεταλλικός δίσκος, μάζας 1,5 kg και ακτίνας 13 cm. Πόση είναι η ροπή ως προς τον άξονα που απαιτείται για να περιστρέψει αυτό το πλατώ; Αν ο τροχός μετάδοσης της κίνησης εφάπτεται στο πλατώ στην εξωτερική του περιφέρεια (Σχ. 13.8), πόση είναι η δύναμη που πρέπει να εξασκεί;

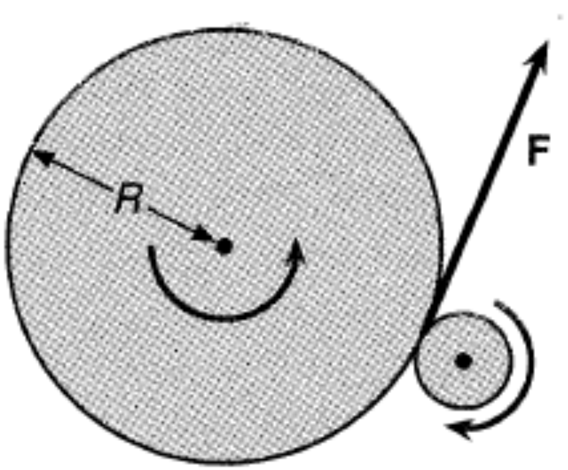
ΛΥΣΗ: Η τελική γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega = 2\pi \times 33{,}3\ \mathrm{rad}/60\ \mathrm{s} = 3{,}49\ \mathrm{rad/s}$ και η γωνιακή επιτάχυνση είναι

$$\alpha = \Delta\omega/\Delta t = (3{,}49\ \mathrm{rad/s})/2{,}0\ \mathrm{s} = 1{,}75\ \mathrm{rad/s^2}$$

Η ροπή αδρανείας του πλατώ είναι η ίδια με τη ροπή αδρανείας δίσκου,

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2} \times 1{,}5\ \mathrm{kg} \times (0{,}13\ \mathrm{m})^2$$

$$= 1{,}27 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$



Επομένως, η απαιτούμενη ροπή ισούται με

$$\tau_z = I\alpha = 1{,}27 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot m^2} \times 1{,}75\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$= 2{,}22 \times 10^{-2}\ \mathrm{N \cdot m}$$

Η εξασκούμενη δύναμη είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα, οπότε $\tau_z = RF$ και

$$F = \tau_z/R = 2{,}22 \times 10^{-2}\ \mathrm{N \cdot m}/0{,}1\overset{3}{\cancel{5}}\ \mathrm{m} = 0{,}147\ \mathrm{N}$$

Έργο, Ενέργεια και Ισχύς στην περιστροφική κίνηση

$$dW = F \cdot dr = F_{\tan} R d\phi = \tau_Z d\phi \Rightarrow W = \int \tau_Z d\phi$$

Το έργο που παράγεται από τη ροπή μεταβάλλει την περιστροφική κινητική ενέργεια ενός σώματος. Αν η αρχική και η τελική γωνιακή ταχύτητα είναι ω_1 και ω_2 τότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι : (απόδειξη?)

$$W = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

Θεώρημα έργου-ενέργειας στην περιστροφική κίνηση

$$W = -(U_2 - U_1) \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega_1^2 + U_1 = \frac{1}{2} I\omega_2^2 + U_2 \Rightarrow$$

Εάν η δύναμη που δρα στο σώμα είναι διατηρητική (βαρύτητα, ελατήριο) τότε το έργο ισούται με το αρνητικό της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας

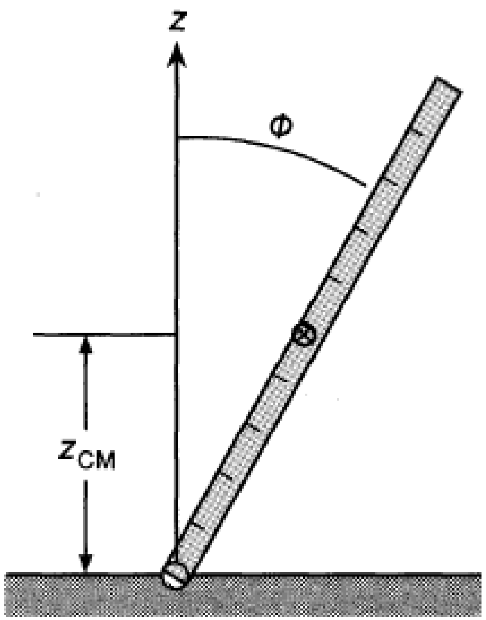
$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} I\omega^2 + U = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$$

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στην περιστροφική κίνηση

$$dW = \tau_Z d\phi \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \tau_Z \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow P = \tau_Z \omega$$

Ισχύς (P=Fυ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Μία πήχη, ενός μέτρου, στέκεται, αρχικά, κάθετα προς το πάτωμα. Αν η πήχη πέσει, με ποιά γωνιακή ταχύτητα θα κτυπήσει στο πάτωμα; Υποθέστε ότι το άκρο που βρίσκεται σ' επαφή με το πάτωμα δεν γλιστράει.



Όταν η πήχη είναι κάθετη, $z_{CM}= ½\, l$ *και η ενέργεια είναι:*

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + U = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2)\omega_1^2 + Mgz_{CM} = 0 + Mg\frac{l}{2}$$

Όταν η πήχη πέσει στο πάτωμα, $z_{CM}= 0$ *και η ενέργεια είναι:*

$$E = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2)\omega_2^2 + Mgz_{CM} = \frac{1}{6}Ml^2\omega_2^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}Ml^2\omega_2^2 = Mg\frac{l}{2} \Rightarrow \omega_2^2 = {}^{3g}\!/_{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3\times 9{,}8}{1}} = 5{,}4 rad/s$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Το πλατώ ενός πικ – άπ, που συνδέεται με ηλεκτρικό κινητήρα, επιταχύνεται με σταθερό ρυθμό από 0 έως 33 $\frac{1}{3}$ rev/min σε χρόνο 2,0 s. Το πλατώ είναι ομογενής μεταλλικός δίσκος, μάζας 1,5 kg και ακτίνας 13 cm. Πόση είναι η ροπή ως προς τον άξονα που απαιτείται για να περιστρέψει αυτό το πλατώ; Αν ο τροχός μετάδοσης της κίνησης εφάπτεται στο πλατώ στην εξωτερική του περιφέρεια (Σχ. 13.8), πόση είναι η δύναμη που πρέπει να εξασκεί;

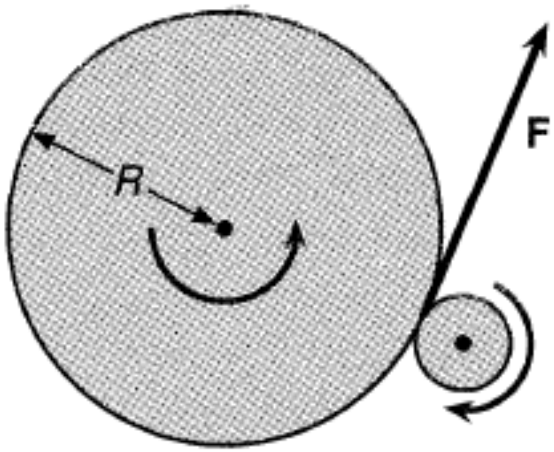
Υπολογίστε το έργο που παράγεται κατά την επιτάχυνση. Υπολογίστε τη μέση ισχύ.

ΛΥΣΗ: Η ολική γωνιακή μετατόπιση κατά το διάστημα των 2,0 s είναι

$$\Delta\phi = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \times (1{,}75 \text{ rad/s}^2) \times (2{,}0 \text{ s})^2$$

$$= 3{,}49 \text{ rad}$$

Αφού η ροπή είναι σταθερή, το έργο ισούται με



$$W = \tau_z \Delta\phi = 2{,}22 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \times 3{,}49 \text{ rad}$$

$$= 7{,}72 \times 10^{-2} \text{ J}$$

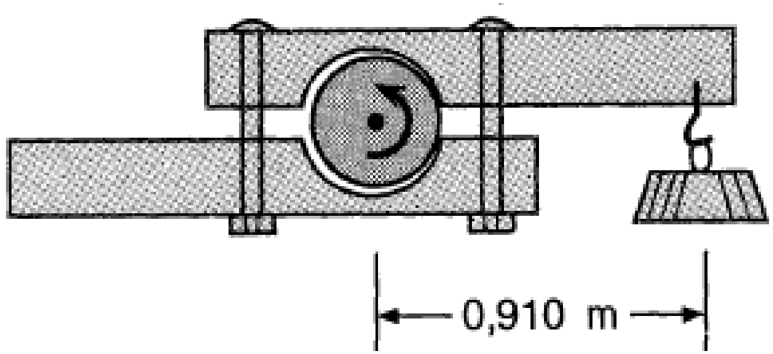
Η μέση ισχύς ισούται με

$$\overline{P} = W/t = 7{,}72 \times 10^{-2} \text{ J}/2{,}0 \text{ s} = 3{,}86 \times 10^{-2} \text{ W}$$

ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε το παραγόμενο έργο από τη μεταβολή της περιστροφικής κινητικής ενέργειας, με τη βοήθεια του θεωρήματος έργου–ενέργειας. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι μηδέν και η τελική κινητική ενέργεια ισούται με $\frac{1}{2} I\omega^2$, οπότε

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} I\omega^2 - 0 \\
&= \frac{1}{2} \times 1{,}27 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg \cdot m^2} \times (3{,}49\ \mathrm{rad/s})^2 \\
&= 7{,}72 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Το **δυναμόμετρο** Prony, που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ισχύος εξόδου μιας μηχανής, αποτελείται από δύο ίσες δοκούς σφιγμένες χαλαρά γύρω από σφόνδυλο προσαρμοσμένο στο στροφαλοφόρο άξονα της μηχανής (Σχ. 13.12). Οι δυνάμεις τριβής ανάμεσα στον περιστρεφόμενο σφόνδυλο και στο σφικτήρα τείνει να περιστρέψει τις δοκούς κατά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού φορά· ένα βάρος αναρτημένο από τη δεξιά δοκό τείνει να τις περιστρέψει κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Το βάρος πρέπει να ρυθμιστεί έτσι, ώστε οι αντιθέμενες ροπές του βάρους και των τριβών να ισορροπούν και οι δοκοί να παραμένουν σε στατική, οριζόντια θέση. Σε δοκιμές μιας μηχανής αυτοκινήτου που περιέστρεψε σφόνδυλο ακτίνας 0,305 m με 2500 rev/min, μάζα 33,1 kg ισορροπεί τις δοκούς, όταν κρέμεται σε απόσταση 0,910 m από τον άξονα του σφονδύλου. Πόση είναι η ισχύς εξόδου της μηχανής;



ΛΥΣΗ: Η ροπή του βάρους mg που ασκείται σε απόσταση l από τον άξονα περιστροφής ισούται με mgl. Στην κατάσταση ισορροπίας, η ροπή αυτή πρέπει να έχει το ίδιο μέτρο με τη ροπή των δυνάμεων τριβής που ο σφόνδυλος ασκεί στις δοκούς. Από τον Τρίτο Νόμο του Newton, η ροπή των δυνάμεων τριβής που οι δοκοί ασκούν *στον σφόνδυλο* πρέπει επίσης να έχουν το ίδιο μέτρο. Η ισχύς αυτής της τελευταίας ροπής τριβών ισούται με

$$P = \tau_z \omega = mgl\omega$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του σφονδύλου. Η μηχανική ισχύς που καταναλίσκεται λόγω τριβών από το σφόνδυλο πρέπει να ισούται με τη μηχανική ισχύ που μεταφέρεται στο σφόνδυλο από τη μηχανή. Επομένως, η παραπάνω εξίσωση δίνει την ισχύ εξόδου της μηχανής:

$$P = mgl\omega$$

$$= 33{,}1\ \mathrm{kg} \times 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \times 0{,}910\ \mathrm{m} \times \left(2500\ \frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{min}} \times \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\ \mathrm{rev}} \times \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} \right)$$

$$= 7{,}74 \times 10^4\ \mathrm{W} = 104\ \mathrm{hp}$$

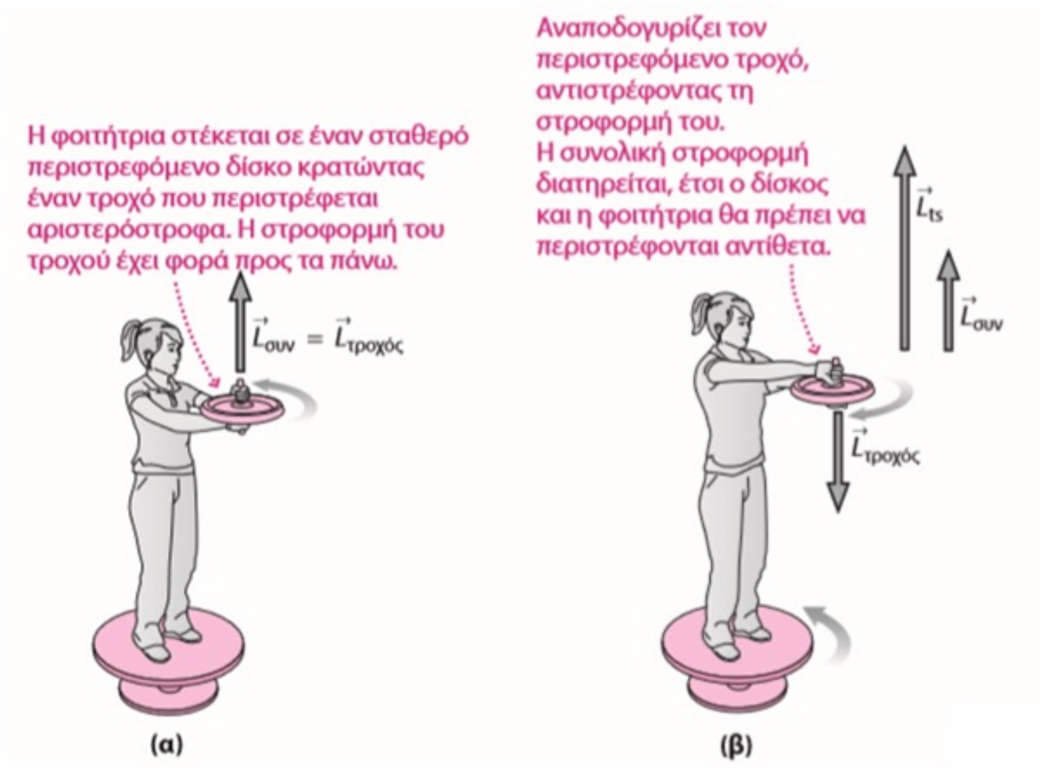
Αυτή η ποσότητα ονομάζεται συνήθως **ισχύς πέδησης** της μηχανής.

Διατήρηση της στροφορμής

Αν η ολική εξωτερική ροπή =0, τότε η στροφορμή συστήματος διατηρείται

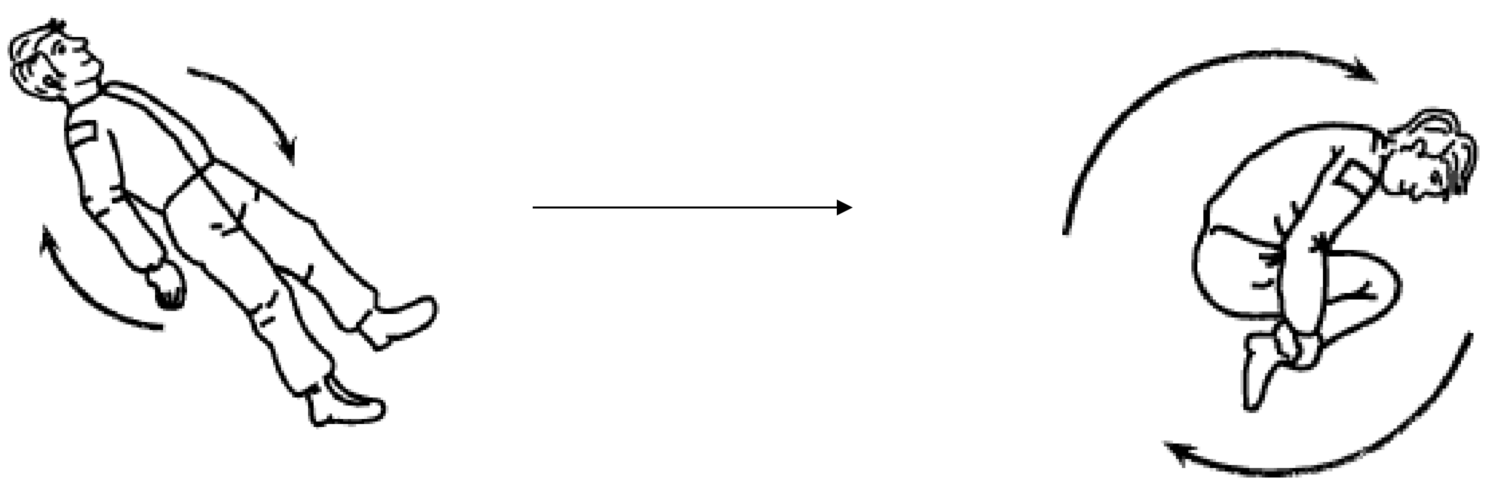
(L=(Iω)=σταθερά) Νόμος διατήρησης της στροφορμής

- Ο περιστρεφόμενος δίσκος αρχικά περιέχει όλη τη στροφορμή του συστήματος, η οποία έχει φορά προς τα πάνω
- Όταν η φοιτήτρια αναποδογυρίζει τον τροχό, μεταβάλλει την κατεύθυνση της στροφορμής του
- Η φοιτήτρια και ο περιστρεφόμενος δίσκος περιστρέφονται αντίθετα προς τον αναποδογυρισμένο τροχό, προκειμένου να διατηρηθεί αμετάβλητη η συνολική στροφορμή



Διατήρηση της στροφορμής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Σ' ένα πείραμα που έγινε για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια μιας αποστολής του Skylab, ένας αστροναύτης, ο οποίος αιωρείτο ελεύθερα υπό συνθήκες αβαρούς στο διαστημόπλοιο που βρισκόταν σε τροχιά γύρω από τη Γη, έδειξε πώς μπορεί να μεταβάλλει την ταχύτητα περιστροφής του μεταβάλλοντας τη ροπή αδρανείας του. Αρχικά, ο αστροναύτης κρατάει το σώμα του στητό ενώ περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του με ρυθμό 0,17 rev/s (Σχ. 13.17a). Μετά συσπειρώνει το σώμα του σε στάση εμβρύου (Σχ. 13.17b). Πόσος είναι ο νέος ρυθμός περιστροφής του; Πόση είναι η μεταβολή της περιστροφικής κινητικής του ενέργειας; Υποθέστε ότι η ροπή αδρανείας του ισούται με 18 $kg \cdot m^2$ όταν είναι όρθιος και 5,5 $kg \cdot m^2$ όταν έχει τη στάση εμβρύου.



ΛΥΣΗ: Η αρχική στροφορμή είναι ίση με $I\omega$ και η τελική στροφορμή είναι ίση με $I'\omega'$. Αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές η στροφορμή διατηρείται:

$$I\omega = I'\omega'$$

Με $\nu = \omega/2\pi$ έχουμε

$$\nu' = \frac{I}{I'}\nu$$

$$= \frac{18\ \mathrm{kg\cdot m^2}}{5{,}5\ \mathrm{kg\cdot m^2}} \times 0{,}17\ \mathrm{rev/s} = 0{,}56\ \mathrm{rev/s}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με

$$\tfrac{1}{2}I'\omega'^2 - \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}I'(2\pi\nu')^2 - \tfrac{1}{2}I(2\pi\nu)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\times 5{,}5\ \mathrm{kg\cdot m^2}\times(2\pi\times 0{,}56\,/\mathrm{s})^2$$

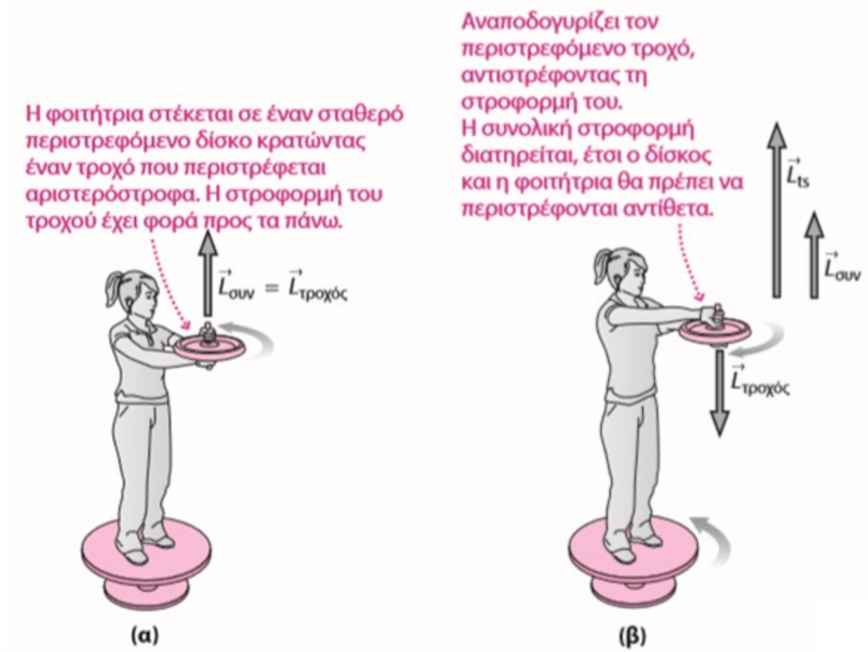
$$- \tfrac{1}{2}\times 18\ \mathrm{kg\cdot m^2}\times(2\pi\times 0{,}17\,/\mathrm{s})^2$$

$$= 33{,}6\ \mathrm{J} - 10{,}3\ \mathrm{J} = 23{,}3\ \mathrm{J}$$

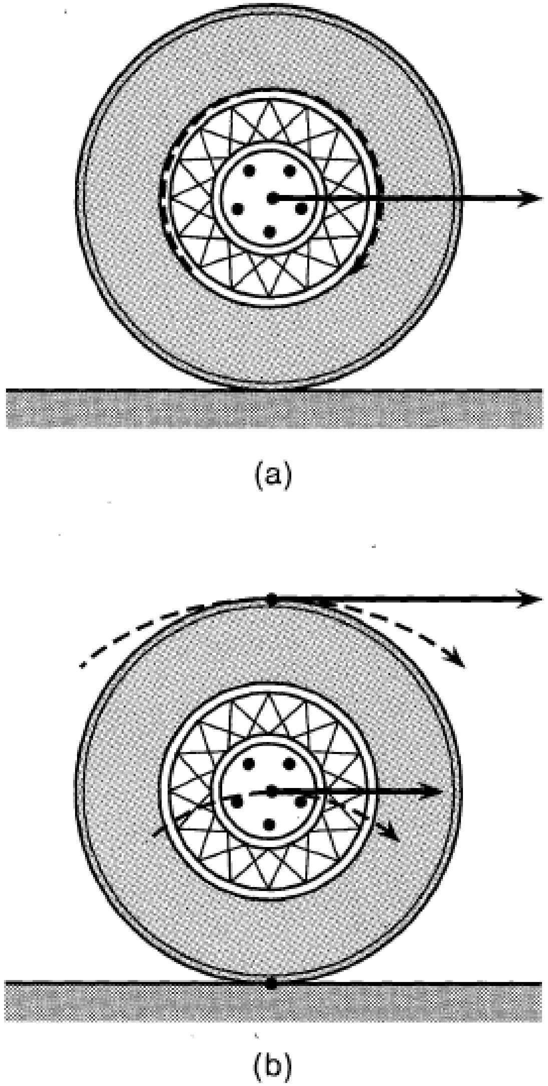
Η αύξηση της κινητικής ενέργειας προέρχεται από το έργο που παράγει ο αστροναύτης ενώ συσπειρώνει το σώμα του.

Διατήρηση της στροφορμής (γάτα…)

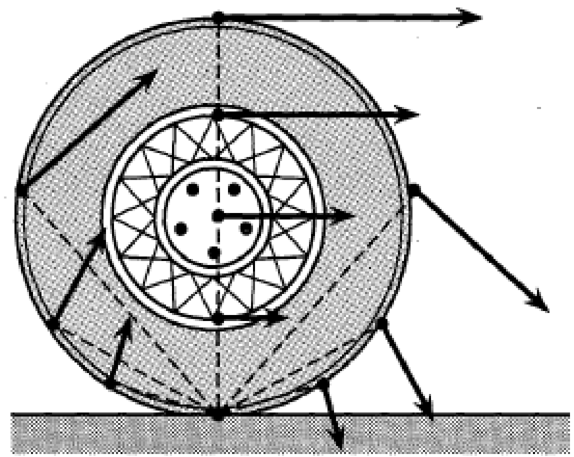
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Σ' ένα άλλο πείραμα ο αστροναύτης επιδεικνύει πώς μπορεί να μεταβάλλει τον προσανατολισμό του σώματος του χωρίς να καταφεύγει σε εξωτερικές δυνάμεις. Πώς μπορεί ο αστροναύτης να κάνει μεταβολή; Πώς μπορεί να γυρίσει πάνω–κάτω;



Κύλιση



Σχ. 13.19 Η κίνηση ενός κυλιόμενου τροχού μπορεί να θεωρηθεί είτε ως (a) περιστροφή περί κέντρο και μεταφορά αυτού του κέντρου είτε ως (b) περιστροφή περί άξονα που διέρχεται από στιγμιαίο σημείο επαφής.



Σχ. 13.20 Στιγμιαία διανύσματα ταχύτητας διαφόρων σημείων ενός κυλιόμενου τροχού.

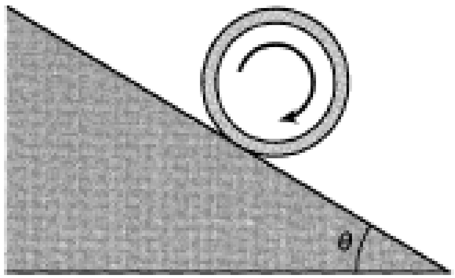
<u>Ανώτερο σημείο τροχού</u>: ταχύτητα **ωR+υ=υ+υ=2υ** (αναλυτικά, **ωR** ως προς το κέντρο που έχει ταχύτητα **υ** ως προς το δρόμο)

<u>Κατώτερο σημείο τροχού:</u> ταχύτητα **υ-ωR=υ-υ=0**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Ενα κομμάτι χαλυβδοσωλήνα μάζας 360 kg κυλίεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης 30° ως προς την οριζόντιο. Πόση είναι η επιτάχυνση αν ο σωλήνας κυλίεται χωρίς ολίσθηση; Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης τριβής που δρα στο σημείο επαφής ανάμεσα στο σωλήνα και στο επίπεδο;

Η ροπή του βάρους ως προς το σημείο επαφής είναι: $\tau_Z = MgR\sin\theta$

Η ροπή αδράνειας του χαλυβδοσωλήνα ως προς το κμ είναι:

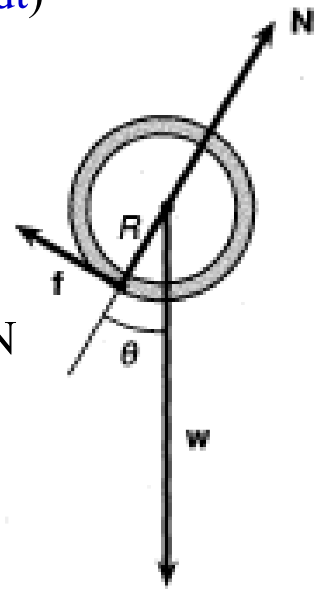


$I_{CM} = MR^2$, και ως προς το σημείο επαφής

$I = I_{CM} + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$

Η εξίσωση κίνησης είναι

$\tau_Z = I\boldsymbol{\alpha} \rightarrow MgR\sin\theta = 2MR^2\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = (1/2R)g\sin\theta$ (**γωνιακή επιτάχυνση**=$d\omega/dt$)



Η γραμμική επιτάχυνση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο είναι:

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{R} = \frac{1}{2}\,\mathbf{g\sin\theta} = 2{,}45\ m/s^2$

Εξίσωση μεταφορικής κίνησης:

$M\boldsymbol{a} = Mg\sin\theta - f \rightarrow f = M\,(g\sin\theta - \boldsymbol{a}) = M\,(g\sin\theta - \frac{1}{2}\,g\sin\theta) = \frac{1}{2}\,Mg\sin\theta = 883\ N$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Υποθέστε ότι ο σωλήνας του προηγουμένου παραδείγματος ξεκινά από την ηρεμία και κυλιόμενος διανύει απόσταση 3,00 m κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Πόση είναι η ολική κινητική ενέργεια σ' αυτή τη στιγμή; Πόση είναι η μεταφορική κινητική ενέργεια; Πόση είναι η κινητική ενέργεια περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας;

ΛΥΣΗ: Η ολική κινητική ενέργεια ισούται απλώς με την κινητική ενέργεια περιστροφής γύρω από το στιγμιαίο άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής,

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2\,MR^2)\,(\upsilon / R)^2 = M\upsilon^2$$

Συναρτήσει της απόστασης και της επιτάχυνσης, η μεταβολή της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2ax$$

(γραμμική επιτάχυνση)

ή

$$\upsilon = \sqrt{2\,ax} = \sqrt{2 \times 2{,}45\ \mathrm{m/s^2} \times 3{,}00\ \mathrm{m}} = 3{,}84\ \mathrm{m/s}$$

έτσι, ώστε

$$K = M\upsilon^2 = 360\ \mathrm{kg} \times (3{,}84\ \mathrm{m/s})^2$$

$$= 5{,}30 \times 10^3\ \mathrm{J}$$

Μέση ταχύτητα (μέτρο): $\dfrac{[\text{διανυθείσα απόσταση}]}{[\text{απαιτηθείς χρόνος}]}$

Μέση ταχύτητα (διανυσματική): $\bar{\upsilon} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Στιγμιαία ταχύτητα: $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$

Μέση επιτάχυνση: $\bar{a} = \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$

Στιγμιαία επιτάχυνση: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση: $\upsilon = \upsilon_0 + at$

$x = x_0 + \upsilon_0 t + \tfrac{1}{2} at^2$

$a(x - x_0) = \tfrac{1}{2}(\upsilon^2 - \upsilon_0^2)$

Επιτάχυνση βαρύτητας: $g \cong 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

$\cong 32{,}2\ \mathrm{ft/s^2}$

Η μεταφορική κινητική ενέργεια ισούται με

$$\frac{1}{2} Mv_{CM}^2 = \frac{1}{2} Mv^2 = 2{,}65 \times 10^3 \text{ J}$$

Η περιστροφική κινητική ενέργεια γύρω από το κέντρο μάζας είναι ίση με

$$K_{int} = \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2 = \frac{1}{2}(MR^2)(v/R)^2 = \frac{1}{2} Mv^2$$

$$= 2{,}65 \times 10^3 \text{ J}$$

ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Σημειώστε ότι η μεταφορική και η περιστροφική κινητική ενέργεια αθροίζονται στην ολική κινητική ενέργεια, όπως άλλωστε και θα έπρεπε, σύμφωνα με την Εξ. (12.35). Σημειώστε, επιπλέον ότι η ολική κινητική ενέργεια των $5{,}3 \times 10^3$ J ισούται ακριβώς με τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

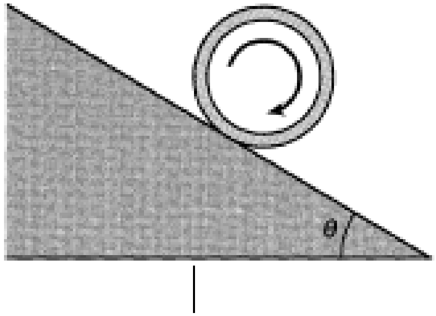
$$Mgh = Mg \times 3{,}00 \text{ m} \times \sin 30°$$

$$= 360 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 \times 3{,}00 \text{ m} \times \sin 30°$$

$$= 5{,}30 \times 10^3 \text{ J}$$

Τούτο υποδεικνύει ότι μολονότι η δύναμη τριβής έχει μέτρο 883 N, *δεν παράγει έργο*. Ο λόγος για τον οποίο η τριβή δεν παράγει έργο κατά την κύλιση, είναι ότι το σημείο του τροχού στο οποίο δρα η τριβή είναι το σημείο επαφής – και αυτό το σημείο βρίσκεται πάντοτε σε στιγμιαία κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή, έχει μηδενική μετατόπιση κατά τη διεύθυνση της δύναμης τριβής.

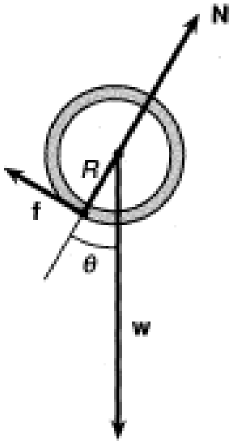
Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σωλήνα του προηγούμενου παραδείγματος χρησιμοποιώντας τη ροπή ως προς το κέντρο μάζας



Λύση

Η ροπή ως προς το κέντρο μάζας οφείλεται στη δύναμη τριβής και είναι:

$\tau_{Z,CM} = Rf$



Η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας είναι:

$I_{CM}\,\alpha = \tau_{Z,CM} \rightarrow MR^2\,\alpha = Rf \rightarrow MR^2(\boldsymbol{\alpha}/R) = Rf \rightarrow \mathbf{M\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{f}}$ **(1)**

α: γωνιακή επιτάχυνση

α: γραμμική επιτάχυνση

ενώ η εξίσωση της μεταφορικής κίνησης είναι:

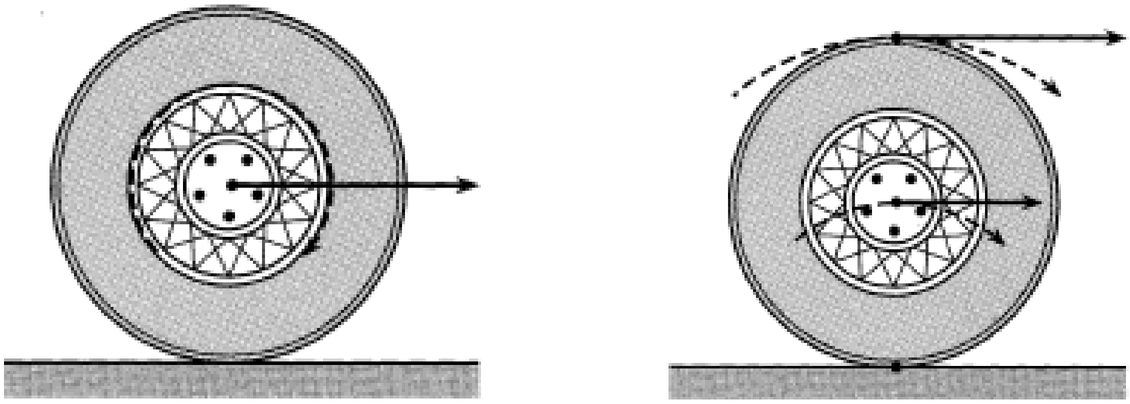
$M\boldsymbol{\alpha} = Mg\sin\theta - f$ **(2)**

Από (1), (2) προκύπτει ότι:

$\boldsymbol{f} = \mathbf{½\, Mg\sin\theta}$ (μισό της συνιστώσας του βάρους)

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{½\, g\sin\theta}$

Κύλιση



ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Το κατά πόσο καταστρώνουμε την εξίσωση κύλισης ενός σώματος λαμβάνοντας τη ροπή ως προς το σημείο επαφής (Παράδειγμα 11) ή ως προς το κέντρο μάζας (Παράδειγμα 13) είναι θέμα ευκολίας. Η χρήση της ροπής ως προς το σημείο επαφής έχει το πλεονέκτημα ότι δίνει αμέσως την επιτάχυνση της περιστροφικής κίνησης [βλ. Εξ. (32)], χωρίς να χρειάζεται να καταστρώσουμε την εξίσωση της μεταφορικής κίνησης. Το μειονέκτημα είναι ότι αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο στην περίπτωση κύλισης χωρίς ολίσθηση, ενώ η άλλη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και όταν υπάρχει ολίσθηση.

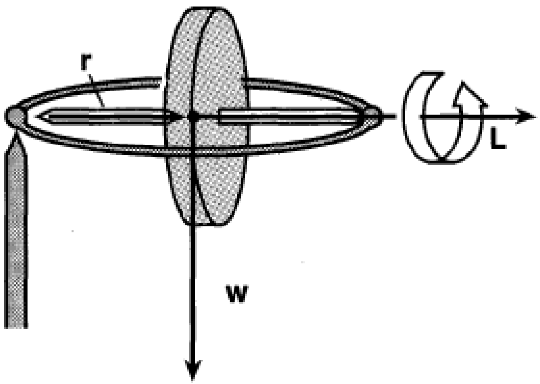
$$a = \alpha R$$

α: γωνιακή επιτάχυνση

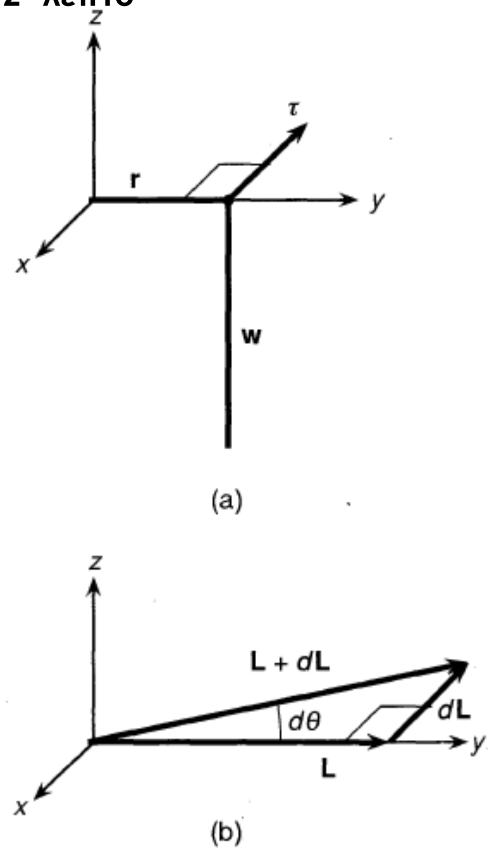
a: γραμμική επιτάχυνση

Μετάπτωση γυροσκοπίου

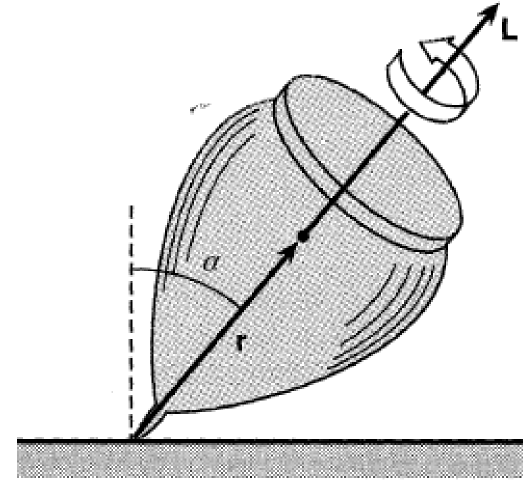
https://www.youtube.com/watch?v=UehulDValVk
Από 12ο λεπτό



Σχ. 13.23 Περιστρεφόμενο γυροσκόπιο που στηρίζεται στο ένα άκρο του.



Σχ. 13.24 (a) Η ροπή **τ** είναι κάθετη προς τα **r** και **w**. (b) Επομένως, το $d\mathbf{L}$ είναι κάθετο προς το **L**.



$d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau} \rightarrow d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} dt = rMgdt$

$d\theta = dL/L = rMgdt/L \rightarrow$

$d\theta/dt =$ $\omega_P = rMg/L$ **συχνότητα μετάπτωσης**

Γενικότερα, κάθε φορά που εξασκούμε μιαν εγκάρσια ώθηση ή έλξη πάνω στον άξονα ενός γυροσκοπίου, θα έχει ως αποτέλεσμα να κινηθεί ο άξονας εγκάρσια προς την ώθηση ή την έλξη – μία κατακόρυφη ώθηση θα προκαλέσει οριζόντια εκτροπή του άξονα και μία οριζόντια ώθηση θα προκαλέσει κατακόρυφη εκτροπή του άξονα.

Μετάπτωση

- Η μετάπτωση είναι ένα τριδιάστατο φαινόμενο που περιλαμβάνει περιστροφική κίνηση
  - Η μετάπτωση προκύπτει όταν μια ροπή δρα σε ένα περιστρεφόμενο σώμα, μεταβάλλοντας την κατεύθυνση αλλά όχι το μέτρο του διανύσματος της στροφορμής του
  - Ως αποτέλεσμα, ο άξονας περιστροφής υπόκειται σε κυκλική κίνηση:

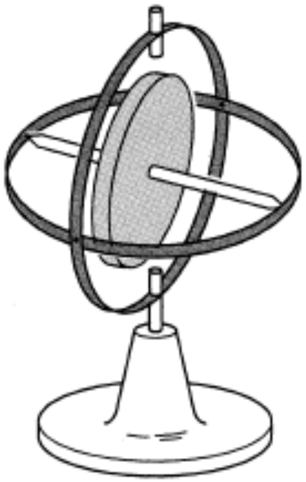
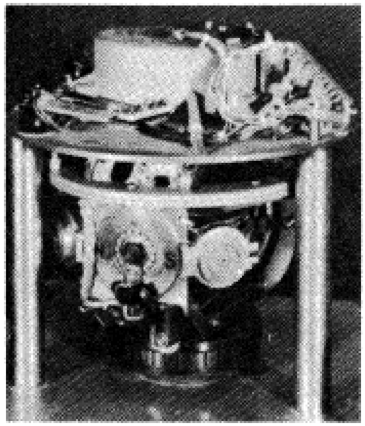
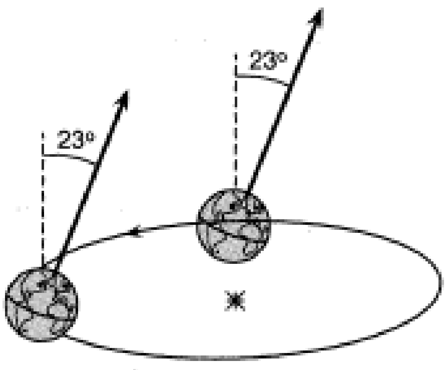
Μετάπτωση ενός γυροσκοπίου

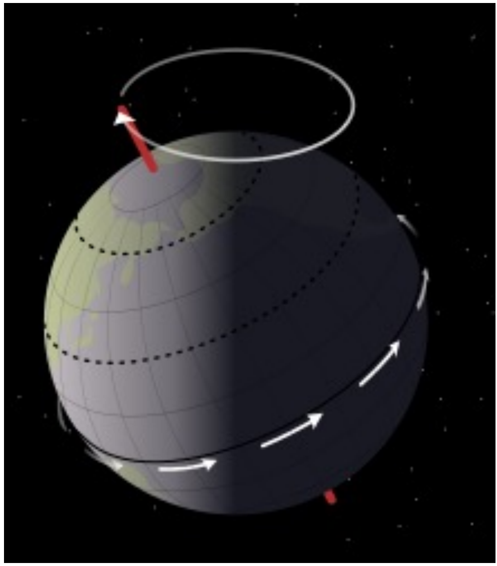
Η μετάπτωση μεταβάλλει αργά την κατεύθυνση του άξονα περιστροφής της Γης

Διατήρηση της στροφορμής

Αν η ολική εξωτερική ροπή =0, τότε η στροφορμή συστήματος διατηρείται

(L=(Iω)=σταθερά) Νόμος διατήρησης της στροφορμής



Σχήμα

Γυροσκόπιο προσαρμοσμένο σε δακτυλίους διπλής ανάρτησης (αριστερά),
κατευθυντικό γυροσκόπιο επιβατικού αεροπλάνου (κέντρο)
και κλίση του άξονα περιστροφής της γης (δεξιά) (πλήρη περιφορά σε 26.000 χρόνια)

Η γωνιακή ταχύτητα και ο προσανατολισμός του άξονα στο χώρο παραμένουν σταθερά, παρέχοντας μια απόλυτη κατεύθυνση αναφοράς.

Σύνοψη

Ροπή: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Εξίσωση περιστροφικής κίνησης (σταθερός άξονας ή άξονας διερχόμενος από το κέντρο μάζας):

$$I\alpha = \tau_z$$

Εργο παραγόμενο από ροπή: $W = \int \tau_z \, d\phi$

Διατήρηση ενέργειας: $E = \frac{1}{2} I\omega^2 + U = [\text{σταθερά}]$

Ισχύς μεταφερόμενη από ροπή: $P = \tau_z \omega$

Διατήρηση στροφορμής: $I\omega = [\text{σταθερά}]$

Κύλιση (χωρίς ολίσθηση): Ο άξονας που διέρχεται από το σημείο επαφής είναι στιγμιαία σταθερός άξονας.

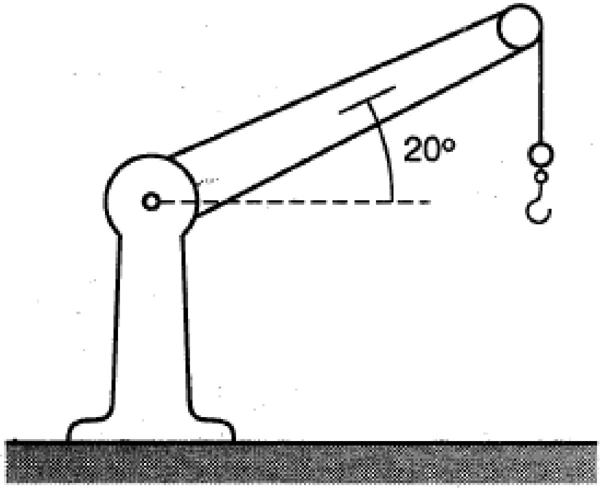
Μετάπτωση γυροσκοπίου: $\omega_p = rMg/L$

Ερωτήσεις

- Πολλοί αγρότες έχουν τραυματιστεί όταν ξαφνικά το τρακτέρ με το οποίο έσυραν ένα βαρύ μηχάνημα αναποδογύρισε προς τα πίσω. Εξηγείστε πως συμβαίνει αυτό.
- Μια φέτα ψωμί πέφτει πάντοτε με τη βουτυρωμένη πλευρά προς τα κάτω. Ναι ή όχι?
- Στέκεστε πάνω σε ένα μεγάλο (και ανθεκτικό) πικάπ. Πως μπορείτε να στραφείτε κατά 180^0 χωρίς ούτε να κατεβείτε, ούτε να σπρώξετε κάποιο εξωτερικό σώμα?
- Αν περιστρέψετε ένα σφιχτοβρασμένο και ένα ωμό αυγό, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, ποιό θα σταματήσει πρώτο χρονικά ?
- Γιατί χρειάζεται η μικρή, κατακόρυφη ουραία έλικα στα ελικόπτερα ?

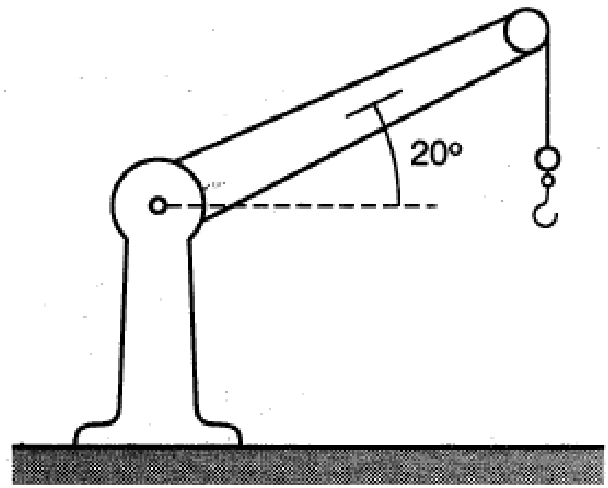
Ασκήσεις

1. Το εγχειρίδιο οδηγιών ενός μικρού γερανού ορίζει ότι όταν ο βραχίονας έχει γωνία κλίσης 20° ως προς την οριζόντιο (Σχ. 13.30), το μέγιστο ασφαλές φορτίο που μπορεί να σηκώσει ο γερανός είναι 500 kg. Υποθέτοντας ότι το μέγιστο φορτίο καθορίζεται από τη μέγιστη ροπή στην οποία μπορεί ν' αντέξει ο στροφέας, πόση είναι η μέγιστη ροπή για τις 20°; Πόσο είναι το μέγιστο ασφαλές φορτίο για 40°; Για 60°;



Ασκήσεις

1. Το εγχειρίδιο οδηγιών ενός μικρού γερανού ορίζει ότι όταν ο βραχίονας έχει γωνία κλίσης 20° ως προς την οριζόντιο (Σχ. 13.30), το μέγιστο ασφαλές φορτίο που μπορεί να σηκώσει ο γερανός είναι 500 kg. Υποθέτοντας ότι το μέγιστο φορτίο καθορίζεται από τη μέγιστη ροπή στην οποία μπορεί ν' αντέξει ο στροφέας, πόση είναι η μέγιστη ροπή για τις 20°; Πόσο είναι το μέγιστο ασφαλές φορτίο για 40°; Για 60°;



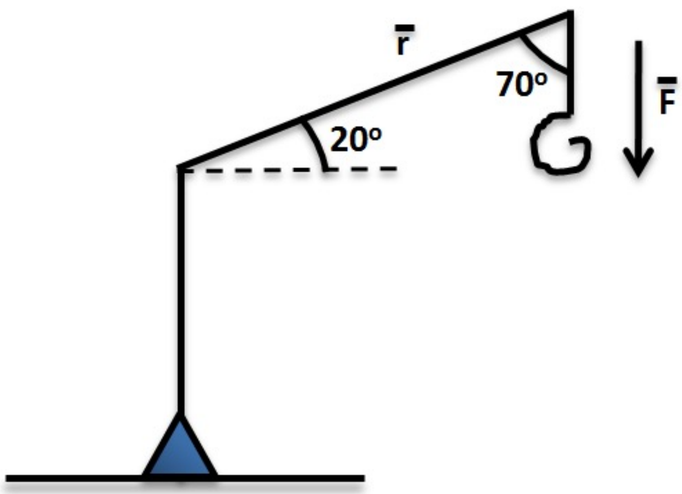
Max Torque = B*l*sin(90°-20°) = 500g * l * sin70°

l = μήκος βραχίονα

<u>Για 40°</u>

$\tau_{max} = F_{max} * l * \sin(90^o - 40^o) =$

$= F_{max}\, l \sin 50^o = 500\, g\, l \sin 70^o \Rightarrow F_{max} = 610$ N



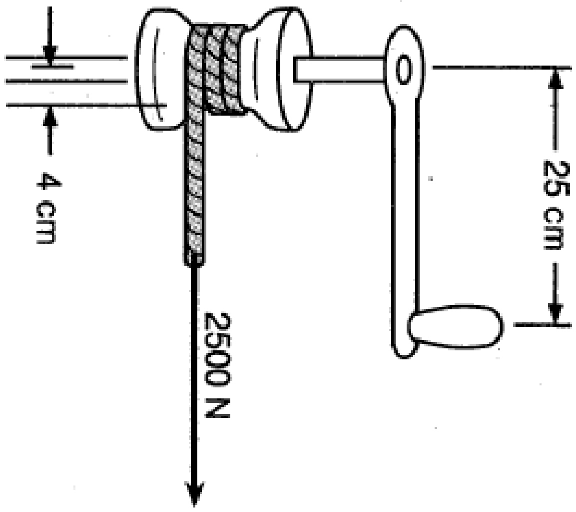
<u>Για 60°</u>

$\tau_{max} = F_{max} * l * \sin(90^o - 60^o) =$

$= F_{max}\, l \sin 30^o = 500\, g\, l \sin 70^o \Rightarrow F_{max} = 940$ N

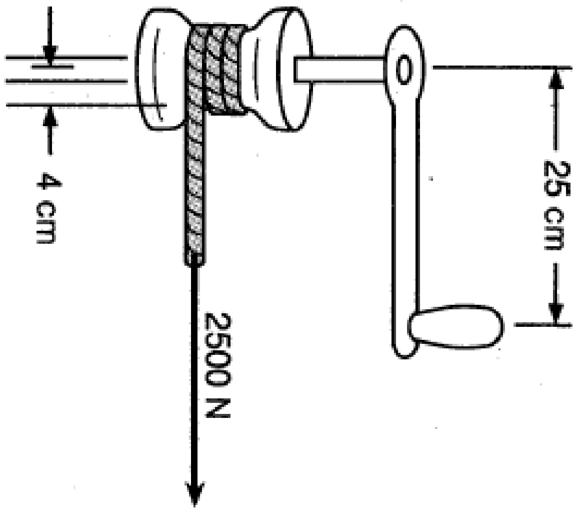
Ασκήσεις

2. Ενα απλό χειροκίνητο βαρούλκο αποτελείται από τύμπανο ακτίνας 4,0 cm, στο οποίο προσαρμόζεται χειρολαβή ακτίνας 25 cm (Σχ. 13.31). Οταν στρέφετε τη χειρολαβή, το σχοινί τυλίγεται στο τύμπανο και έλκει το φορτίο. Υποθέστε ότι το φορτίο που έλκεται από το σχοινί ισούται με 2500 N. Πόση δύναμη πρέπει να ασκήσετε στη λαβή για να κρατήσετε αυτό το φορτίο;



Ασκήσεις

2. Ενα απλό χειροκίνητο βαρούλκο αποτελείται από τύμπανο ακτίνας 4,0 cm, στο οποίο προσαρμόζεται χειρολαβή ακτίνας 25 cm (Σχ. 13.31). Οταν στρέφετε τη χειρολαβή, το σχοινί τυλίγεται στο τύμπανο και έλκει το φορτίο. Υποθέστε ότι το φορτίο που έλκεται από το σχοινί ισούται με 2500 N. Πόση δύναμη πρέπει να ασκήσετε στη λαβή για να κρατήσετε αυτό το φορτίο;



Η ροπή που εξασκούμε στο χερούλι = με τη ροπή του σχοινιού στο βαρούλκο

τ_{rope} = (2500 N) * (4,0 cm)

τ_{handle} = F * 25 cm

=> $F = 2500\,\frac{4}{25} = 400$ N

Ασκήσεις

3. Το εγχειρίδιο επισκευών ενός αυτοκινήτου ορίζει ότι τα μπουλόνια των πυροκεφαλών πρέπει να σφιχθούν με ροπή 62 N · m. Εάν ο μηχανικός χρησιμοποιεί κλειδί μήκους 20 cm για να βιδώσει τα μπουλόνια, πόση κατακόρυφη δύναμη πρέπει να εξασκήσει στο άκρο του κλειδιού για να επιτύχει τη σωστή ροπή;

Ασκήσεις

3. Το εγχειρίδιο επισκευών ενός αυτοκινήτου ορίζει ότι τα μπουλόνια των πυροκεφαλών πρέπει να σφιχθούν με ροπή 62 N · m. Εάν ο μηχανικός χρησιμοποιεί κλειδί μήκους 20 cm για να βιδώσει τα μπουλόνια, πόση κατακόρυφη δύναμη πρέπει να εξασκήσει στο άκρο του κλειδιού για να επιτύχει τη σωστή ροπή;

$$\tau = r * F \Rightarrow F = \frac{\tau}{r} = \frac{62}{0.2} = 310 \text{ N}$$

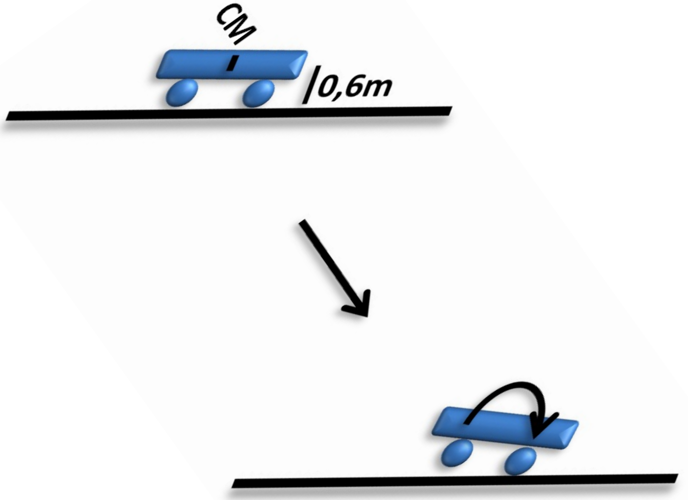
Ασκήσεις

*4. Οταν φρενάρει, ένα αυτοκίνητο 1500 kg επιβραδύνεται με ρυθμό 8,0 m/s^2. Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης πέδησης την οποία ο δρόμος ασκεί στο αυτοκίνητο; Πόση ροπή παράγει αυτή η δύναμη ως προς το κέντρο μάζας του αυτοκινήτου; Αυτή η ροπή θα τείνει να υψώσει το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου ή να το χαμηλώσει; Υποθέστε ότι το κέντρο μάζας του αυτοκινήτου βρίσκεται σε ύψος 60 cm πάνω από την επιφάνεια του δρόμου.

Ασκήσεις

*4. Οταν φρενάρει, ένα αυτοκίνητο 1500 kg επιβραδύνεται με ρυθμό 8,0 m/s^2. Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης πέδησης την οποία ο δρόμος ασκεί στο αυτοκίνητο; Πόση ροπή παράγει αυτή η δύναμη ως προς το κέντρο μάζας του αυτοκινήτου; Αυτή η ροπή θα τείνει να υψώσει το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου ή να το χαμηλώσει; Υποθέστε ότι το κέντρο μάζας του αυτοκινήτου βρίσκεται σε ύψος 60 cm πάνω από την επιφάνεια του δρόμου.

Force = m α = 1500 kg * 8 m/s^2 = 12000 N



Ροπή = F * κατακόρυφη απόσταση

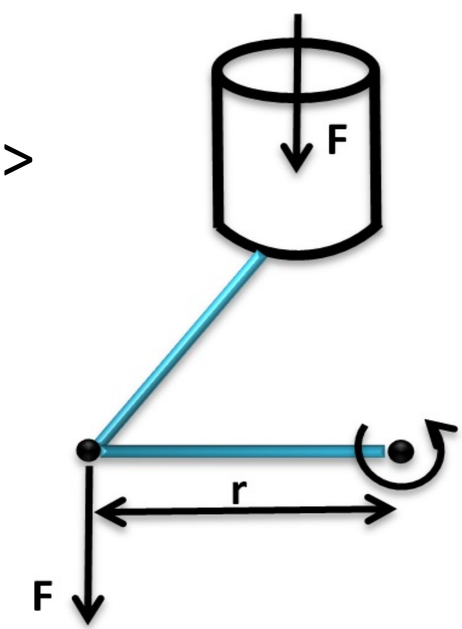
= 12000 * 0,6 = 7200 N m

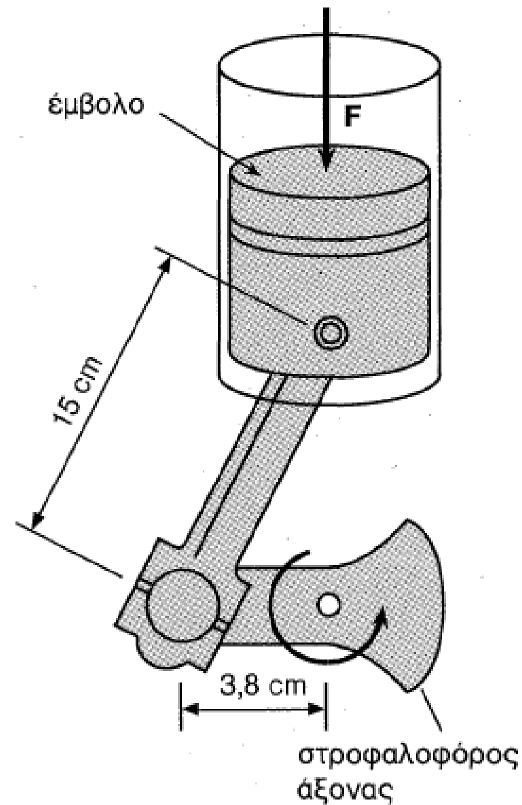
Ασκήσεις

*10. Σ' έναν από τους κυλίνδρους μιας μηχανής αυτοκινήτου, τα αέρια που ελευθερώνονται από την εσωτερική καύση ωθούν το έμβολο (πιστόνι) το οποίο με τη σειρά του ωθεί το στροφαλοφόρο άξονα μέσω ενός βάκτρου (Σχ. 13.33). Εάν ο στροφαλοφόρος άξονας υπόκειται σε ροπή 31 N·m και εάν οι διαστάσεις του στροφαλοφόρου άξονα και του βάκτρου είναι αυτές που φαίνονται στο Σχ. 13.33, πόση πρέπει να είναι η δύναμη την οποία τα αέρια ασκούν στο έμβολο όταν ο στροφαλοφόρος άξονας βρίσκεται στην οριζόντια θέση, όπως στο Σχ. 13.33; Αμελήστε τόσο τις τριβές όσο και τις μάζες του εμβόλου και του βάκτρου.

Ροπή = r F (όπου r = 3.8 cm) =>

=> $F = \frac{\tau}{r} = \frac{31}{3.8*10^{-2}}$ = 816 N





Ασκήσεις

17. Η μηχανή ενός αυτοκινήτου μεταδίδει μέγιστη ροπή 203 N • m όταν στρέφεται με 4600 rev/min και μεταδίδει μέγιστη ισχύ 142 hp όταν στρέφεται με 5750 rev/min. Πόση ισχύ μεταδίδει η μηχανή όταν δουλεύει με τη μέγιστη ροπή; Πόση ροπή μεταδίδει όταν δουλεύει με τη μέγιστη ισχύ;

Ισχύς (Power) P = τ ω

$\omega = (4600 * \frac{2\pi}{60}) = 482$ rad/s

Ισχύς στη μέγιστη ροπή = 203Nm * 482rad/s = $9{,}78*10^4$ W = 131 hp

Ροπή στη μέγιστη ισχύ: $\tau = \frac{P}{\omega} = \frac{142\text{hp}*746\ \text{W/hp}}{5750\text{rev/min}*\frac{2\pi}{60}} = 176$ Nm

Ασκήσεις

20. Μια γυναίκα ανεβασμένη σε ποδήλατο άσκησης πρέπει να εξασκεί (μέση) εφαπτομενική ώθηση 35 N σε κάθε πεντάλ για να περιστρέφει τον τροχό με σταθερή ταχύτητα. Κάθε πεντάλ έχει μήκος ακτίνας ίσο με 0,18 m. Εάν ποδηλατεί με ρυθμό 60 rev/min, πόση ισχύ παράγει πάνω στο ποδήλατο; Εκφράστε την απάντηση σας σε kcal/min.

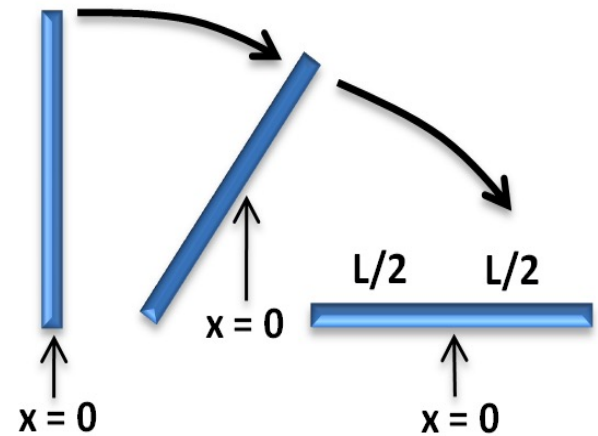
$$P = \tau * \omega = \underbrace{(35)\ (2 * 0{,}18)}_{\tau}\ \left(\frac{60*2\pi}{60}\right) = 79{,}2 \text{ Watt}$$

$$79{,}2 \text{ W} = 79{,}2\ {}^{\text{J}}/_{\text{s}} = \frac{79{,}2*60}{4{,}187} = 1134\ {}^{\text{cal}}/_{\text{min}} = 1{,}1\ {}^{\text{kcal}}/_{\text{min}}$$

Ασκήσεις

*23. Μία πήχη 1 m είναι αρχικά κατακόρυφη, με το ένα άκρο της στο πάτωμα. Εάν η πήχη πέσει, με ποια γωνιακή ταχύτητα θα φτάσει στο πάτωμα; Υποθέστε ότι στην άκρη, που είναι σ' επαφή με το πάτωμα, δεν ασκούνται τριβές και ότι ολισθαίνει ελεύθερα.

Επειδή δεν υπάρχει τριβή, η ράβδος πέφτει έτσι ώστε το κ.β. να μην μετακινηθεί οριζόντια



Μεταφορική Κ.Ε. = ½ M u_{CM}^2 = ½ M $(\frac{L}{2} * \omega)^2$
επειδή το CM έχει μόνο κατακόρυφη ταχύτητα

Περιστροφική Κ.Ε. = ½ I_{CM} ω^2 = ½ $(\frac{1}{12} M L^2)\, \omega^2$

Δυναμική ενέργεια= Μεταφορική + Περιστροφική Κ.Ε.

$$\frac{1}{2} M \frac{L^2}{4} \omega^2 + \frac{1}{24} M L^2 \omega^2 = M g \frac{L}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Ασκήσεις

*26. Η μέγιστη (θετική) επιτάχυνση που ένα αυτοκίνητο μπορεί να επιτύχει σε οριζόντιο δρόμο εξαρτάται από τη μέγιστη ροπή, την οποία η μηχανή μπορεί να μεταφέρει στους τροχούς.

(a) Η μηχανή ενός αυτοκινήτου σπορ Maserati μεταφέρει μέγιστη ροπή 441 N · m στο κιβώτιο ταχυτήτων. Το κιβώτιο ταχυτήτων μειώνει το ρυθμό στροφών κατά ένα συντελεστή 2,58· δηλαδή, κάθε φορά που η μηχανή συμπληρώνει 2,58 στροφές οι τροχοί συμπληρώνουν 1 περιστροφή. Πόση είναι η ροπή που μεταφέρεται στους τροχούς; Αμελήστε τις απώλειες τριβών στο κιβώτιο ταχυτήτων.

(b) Η μάζα του αυτοκινήτου (μαζί με το καύσιμο, τον οδηγό κ.τ.λ.) ισούται με 1770 kg και η ακτίνα των τροχών του ισούται με 0,30 m. Πόση είναι η μέγιστη επιτάχυνση; Αμελήστε τη ροπή αδρανείας των τροχών και τις απώλειες λόγω τριβών.

Έργο από τη ροπή στο κιβώτιο ταχυτήτων σε 2,58 rad

α) W = 441 * 2.58 = 1138 J   όλο το έργο μεταφέρεται στους τροχούς

W = 1138 = τ′ * 1 => τ = 1138 N m

b) $F = \frac{\tau}{R} = \frac{1138}{0.3}$ = 3793 N

$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{3793}{1770} = 2.1\ m/s^2$

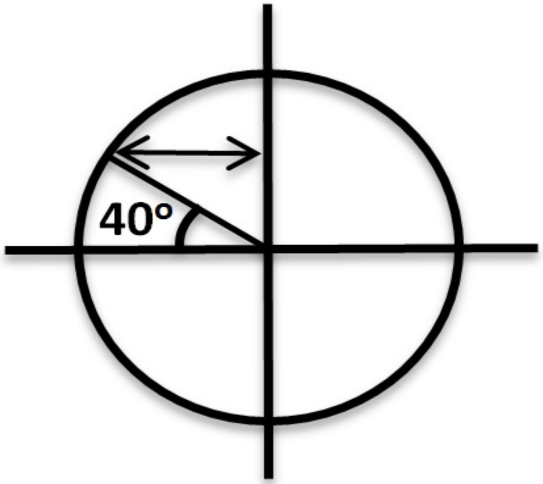
Ασκήσεις

28. Υπάρχουν $1{,}1 \times 10^8$ αυτοκίνητα στις ΗΠΑ, με μέση μάζα το καθένα ίση προς 2000 kg. Υποθέστε ότι ένα πρωί όλα αυτά τα αυτοκίνητα αρχίζουν ταυτοχρόνως να κινούνται προς ανατολάς και επιταχύνονται ώς τα 80 km/h.
   (a) Πόση μεταβολή στην ολική στροφορμή ως προς τον άξονα της Γης συνεισφέρουν όλα αυτά τα αυτοκίνητα μαζί; Υποθέστε ότι τα αυτοκίνητα κινούνται σε μέσο γεωγραφικό πλάτος 40°.
   (b) Πόσο θ' αλλάξει ο ρυθμός περιστροφής της Γης εξαιτίας της κίνησης αυτών των αυτοκινήτων; Υποθέστε ότι ο άξονας περιστροφής της Γης παραμένει σταθερός. Η ροπή αδρανείας της Γης ισούται με $8{,}1 \times 10^{37}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

α) $L = (R_E \cos 40^o)\, m\, u =$

$= (6.38 * 10^6 \cos 40^o)\,(1.1 * 10^8 * 2000)\,(\frac{80000}{3600})$

$= 2.4 * 10^{19}\ \mathrm{kg}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$



b) $L = I_E\, \Delta\omega \;=>$

$=> \;\Delta\omega = \frac{L}{I_E} = \frac{2.4*10^{19}}{8.1*10^{37}} \;=>\; \Delta\omega = 3 * 10^{-19}$ rad/s

**49. Οταν οι τροχοί ενός αεροπλάνου που προσγειώνεται έρθουν σ' επαφή με το διάδρομο, δεν περιστρέφονται στην αρχή. Οι τροχοί πρώτα ολισθαίνουν στο διάδρομο προσγείωσης (και δημιουργούν νέφη καπνού αφήνοντας σημάδια από καμένα λάστιχα, όπως πιθανόν θα έχετε προσέξει· βλ. Σχ. 13.44), έως ότου η δύναμη της τριβής ολίσθησης επιταχύνει τους τροχούς ώς την περιστροφική ταχύτητα που απαιτείται για κύλιση χωρίς ολίσθηση. Από τα ακόλουθα δεδομένα, να υπολογίσετε την απόσταση που διανύει το αεροπλάνο ολισθαίνοντας, πρωτού οι ρόδες αρχίσουν να κυλάνε χωρίς ολίσθηση: ο κάθε τροχός έχει ακτίνα 0,60 m και μάζα 160 kg, η κάθετη δύναμη που δρα στον τροχό είναι 2×10^5 N και η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι 200 km/h· ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης μεταξύ τροχών και διαδρόμου είναι 0,8. Θεωρήστε τον τροχό ως ομογενή δίσκο.

200 km/hr = $\frac{200000}{3600}$ = 55.6 m/s

Δύναμη τριβής $F_f = \mu N = 0.8 * 2 * 10^5 = 1.6 * 10^5$ N

Γωνιακή επιτάχυνση τροχού $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{(0{,}6)F_f}{\frac{1}{2}MR^2}$ => $\alpha = \frac{0.6*1.6*10^5}{\frac{1}{2}*160*0.6^2} = 3.3 * 10^3$ rad/s^2

Όταν ο τροχός περιστρέφεται χωρίς να γλιστράει:

$u = \omega r$ => $\omega_f = \frac{u}{r} = \frac{55.6}{0.6} = 93$ rad/s

Ο χρόνος για να φτάσει τα 93 rad/s από 0 rad/s είναι:

$t = \frac{\omega_f}{a} = \frac{93}{3.3*10^3} = 0.028$ s

Σ' αυτό το χρόνο το αεροπλάνο ταξιδεύει:

x = u * t = (55.6) (0.028) = 1.56 m