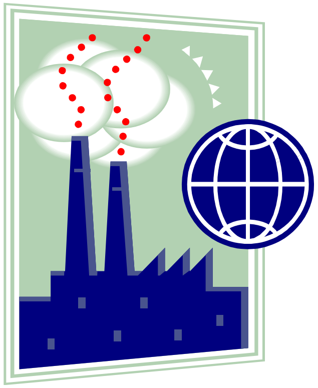
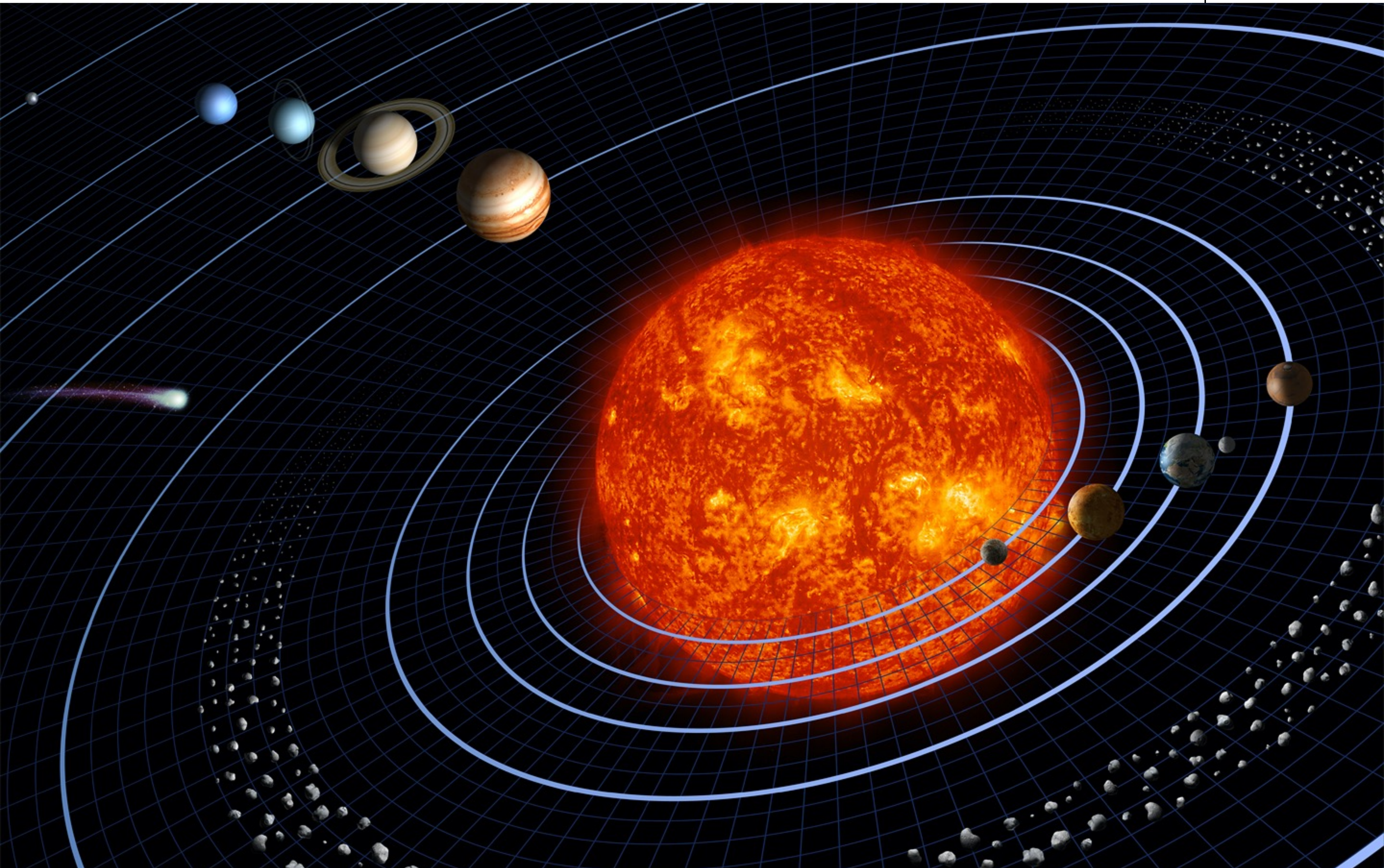


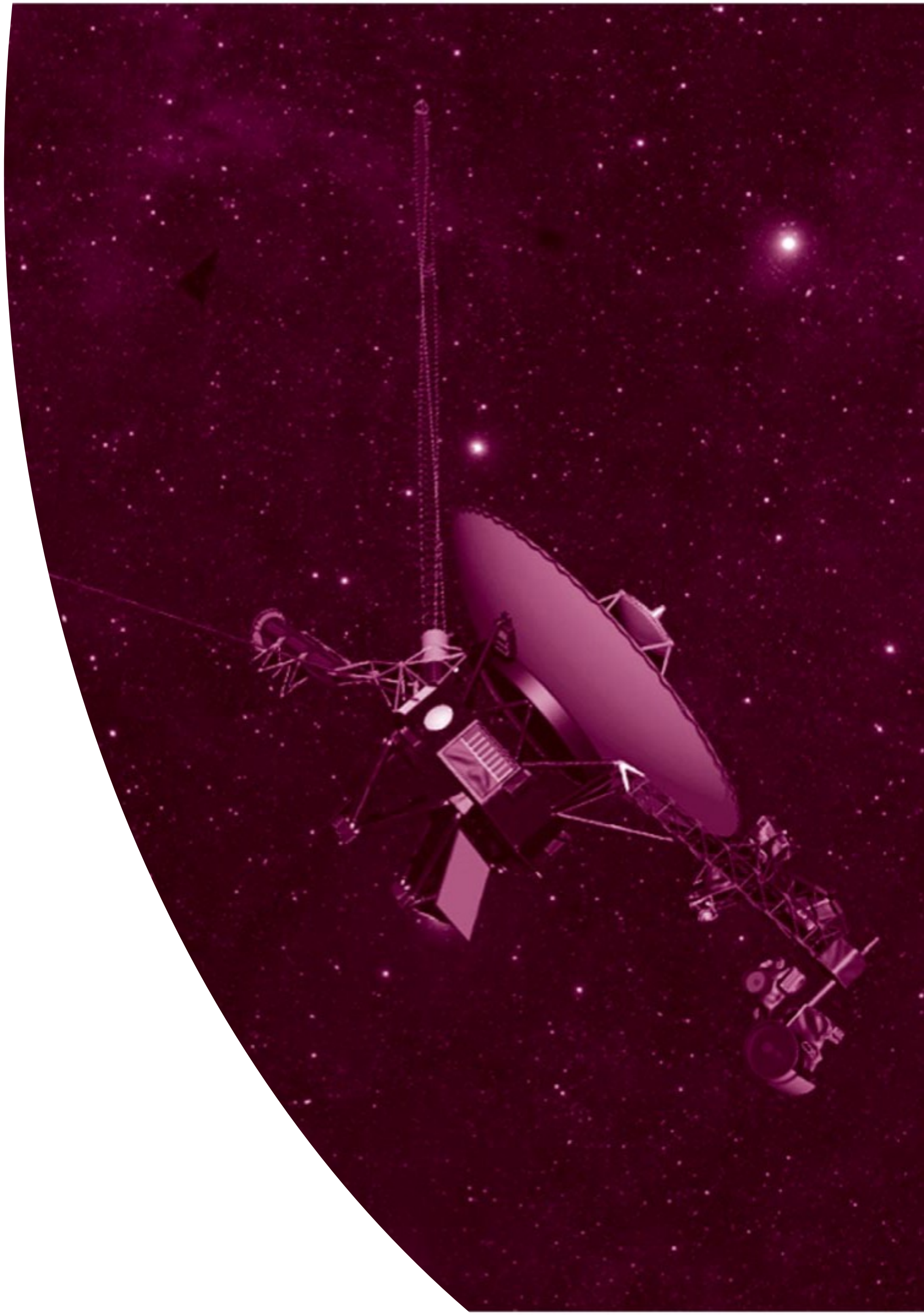
Βαρύτητα

Ηλιακό σύστημα (όχι σε κλίμακα)



Τι μαθαίνετε

- Τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα
- Πώς να υπολογίζετε τις μεταβολές στη βαρυτική δυναμική ενέργεια
- Τις κυκλικές και άλλες τροχιές
- Πώς να περιγράφετε τους τύπους των τροχιών σε σχέση με τη συνολική μηχανική ενέργεια
- Την έννοια της ταχύτητας διαφυγής
- Την έννοια του πεδίου



Βαρύτητα

Η μεγάλη ακρίβεια της ουράνιας μηχανικής είναι παροιμιώδης. Οι θεωρητικοί υπολογισμοί της ουράνιας μηχανικής βασίζονται στους νόμους κίνησης του Newton και στο νόμο της παγκόσμιας έλξης του Newton, σύμφωνα με τον οποίο μία μάζα ασκεί ελκτική βαρυτική δύναμη σε όλες τις άλλες μάζες. Αυτές οι αμοιβαίες βαρυτικές έλξεις διέπουν τις κινήσεις όλων των ουρανίων σωμάτων. Οι θεωρητικοί υπολογισμοί των κινήσεων μας δίνουν τη δυνατότητα μακροχρόνιων προβλέψεων για τις θέσεις των πλανητών, των δορυφόρων και των κομητών· αυτές οι προβλεπόμενες θέσεις συμφωνούν με πολύ μεγάλη ακρίβεια με τις αστρονομικές παρατηρήσεις. Λόγου χάρη, οι προβλεπόμενες γωνιακές θέσεις των πλανητών συμφωνούν με τις παρατηρούμενες θέσεις με ακρίβεια μερικών δευτερολέπτων τόξου, ακόμα και μετά την πάροδο δεκάδων ετών. Οι περισσότεροι από τους παράγοντες που περιορίζουν την ακρίβεια της ουράνιας μηχανικής δεν οφείλονται σε κάποια ατέλεια της θεωρίας, αλλά στις προσεγγίσεις που πρέπει να γίνουν για να απλοποιηθούν οι μακροσκελείς υπολογισμοί στους οποίους λαμβάνονται υπόψη όλες οι αμοιβαίες αλληλεπιδράσεις όλων των πλανητών.

Βαρύτητα

Ηδη κατά το δέκατο έννατο αιώνα η θεωρία του Newton για τη βαρύτητα είχε αποδειχθεί τόσο αξιόπιστη, ώστε όταν οι αστρονόμοι παρατήρησαν κάποιαν ανωμαλία στην κίνηση του πλανήτη Ουρανού, δεν προσπάθησαν να πείσουν τους εαυτούς τους να συμπεράνουν ότι έσφαλε η θεωρία. Αντιθέτως, υποψιάστηκαν ότι κάποιος άγνωστος πλανήτης προκαλούσε αυτές τις ανωμαλίες εξαιτίας της βαρυτικής του έλξης στον Ουρανού. Οι J.C. Adams και U.J.J. Leverrier υπολόγισαν την αναμενόμενη θέση αυτού του υποθετικού πλανήτη – και ο νέος πλανήτης, που αργότερα πήρε το όνομα Ποσειδών, βρέθηκε αμέσως στην αναμενόμενη θέση περίπου. Η ανακάλυψη του Ποσειδώνα ήταν μια φαντασμαγορική επιτυχία της θεωρίας της βαρύτητας.

Ο νόμος του Newton για την παγκόσμια βαρύτητα

Στο Ηλιακό Σύστημα, οι πλανήτες περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο και οι δορυφόροι περιφέρονται γύρω από τους πλανήτες. Αυτές οι κυκλικές, ή σχεδόν κυκλικές, κινήσεις απαιτούν μία κεντρομόλο δύναμη που έλκει τους πλανήτες προς τον Ήλιο και τους δορυφόρους προς τους πλανήτες. Οφείλεται στον Newton η μεγάλη ανακάλυψη, ότι αυτή η ενδοπλανητική δύναμη που κρατάει τα ουράνια σώματα στις τροχιές τους είναι της ιδίας φύσεως με τη δύναμη της βαρύτητας που κάνει τα μήλα, και άλλα αντικείμενα, που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια της Γης, να πέφτουν προς τη Γη. Ο **νόμος της παγκόσμιας έλξης**, όπως διατυπώθηκε από τον Newton, έχει ως εξής:

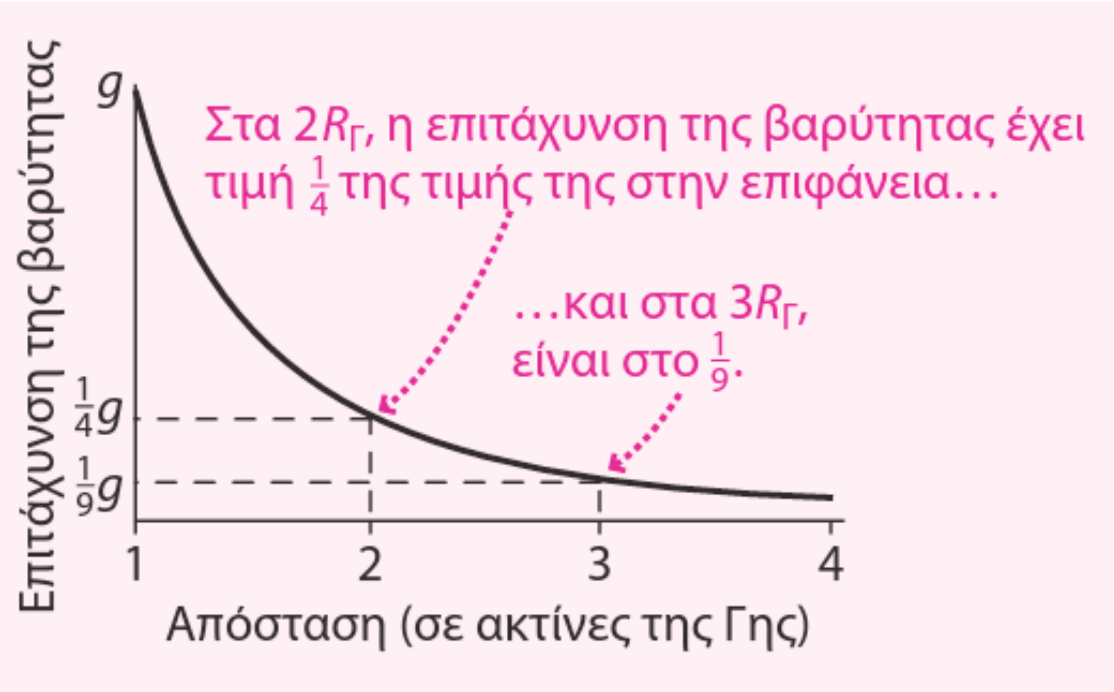
> *Κάθε σωματίδιο έλκει κάθε άλλο σωματίδιο με δύναμη ευθέως ανάλογη προς το γινόμενο των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης.*

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

Το κατανοήσατε;

- Αν η απόσταση μεταξύ δύο σωμάτων μειώνεται στο μισό, η βαρυτική δύναμη μεταξύ τους είναι
  - (α) τέσσερις φορές μικρότερη
  - (β) μισή
  - (γ) διπλάσια
  - (δ) τετραπλάσια;



Πόσο ελκόμαστε ?

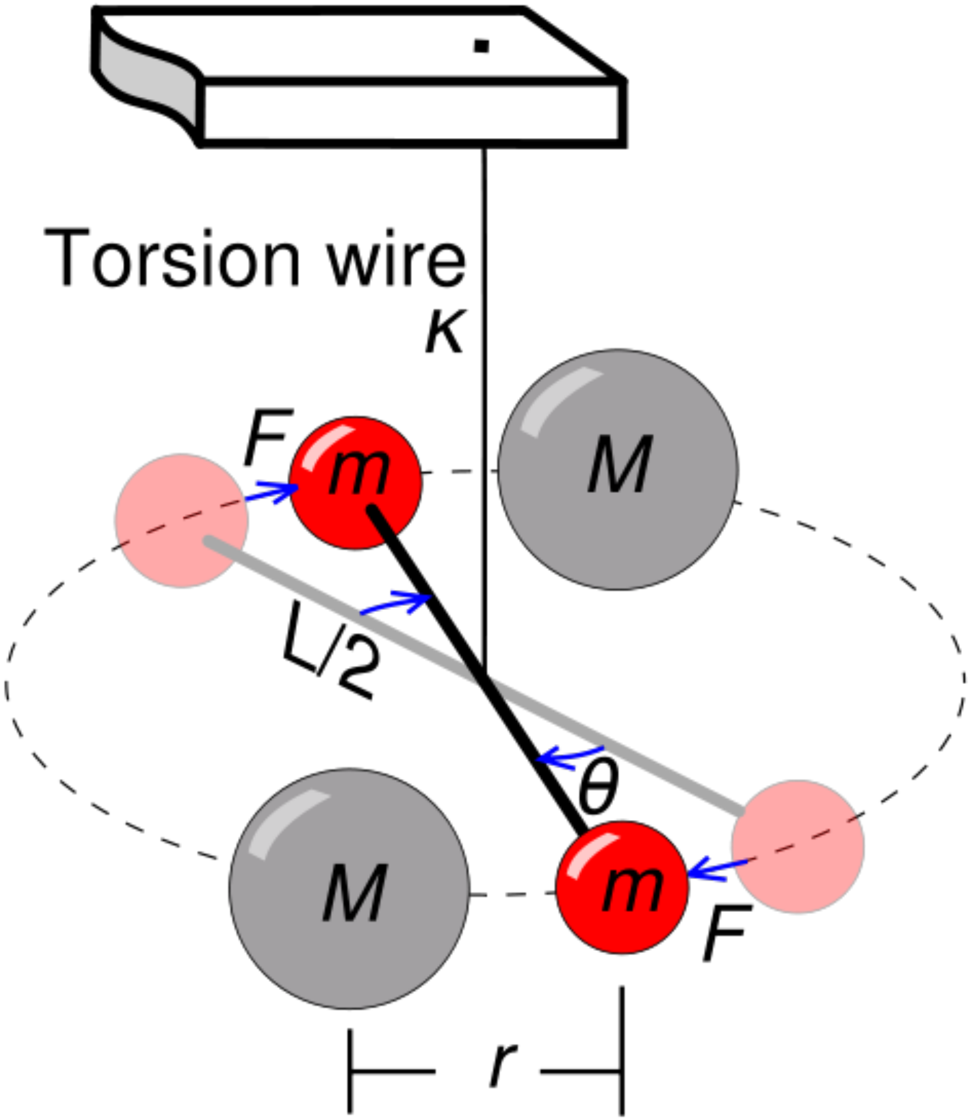
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ποιό είναι το μέτρο της βαρυτικής δύναμης ανάμεσα σε έναν άνδρα 70 kg και σε μία γυναίκα 70 kg που βρίσκονται, ο ένας από τον άλλο, σε απόσταση 10 m; Θεωρήστε και τις δύο μάζες ως σωματίδια.

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$$= \frac{6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \times 70\,\mathrm{kg} \times 70\,\mathrm{kg}}{(10\,\mathrm{m})^2}$$

$$= 3{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{N}$$

Μέτρηση του G (Cavendish)



$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$G = 6{,}673 \times 10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$

ακρίβεια 4 ψηφίων

Μέτρηση του G (Cavendish)

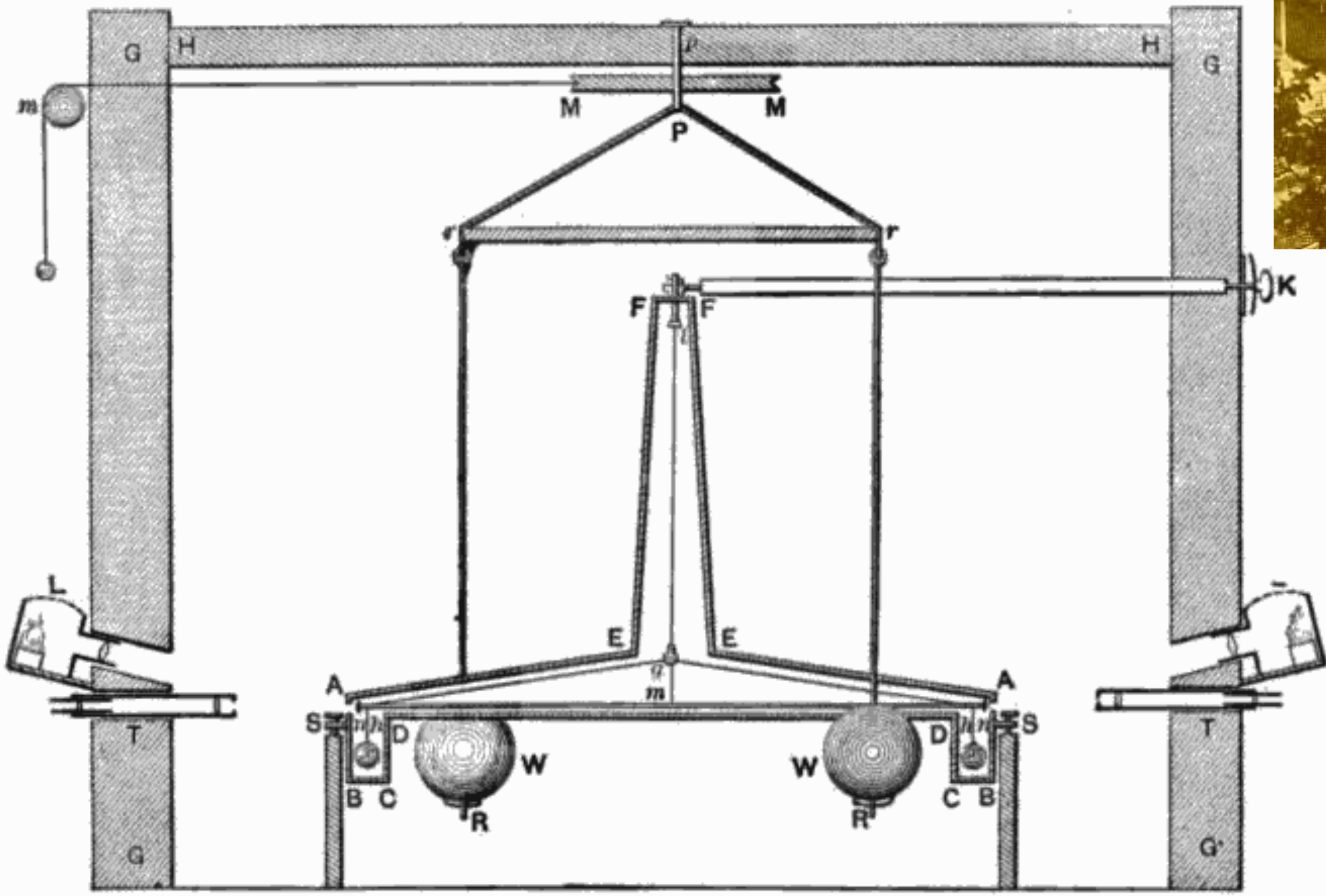
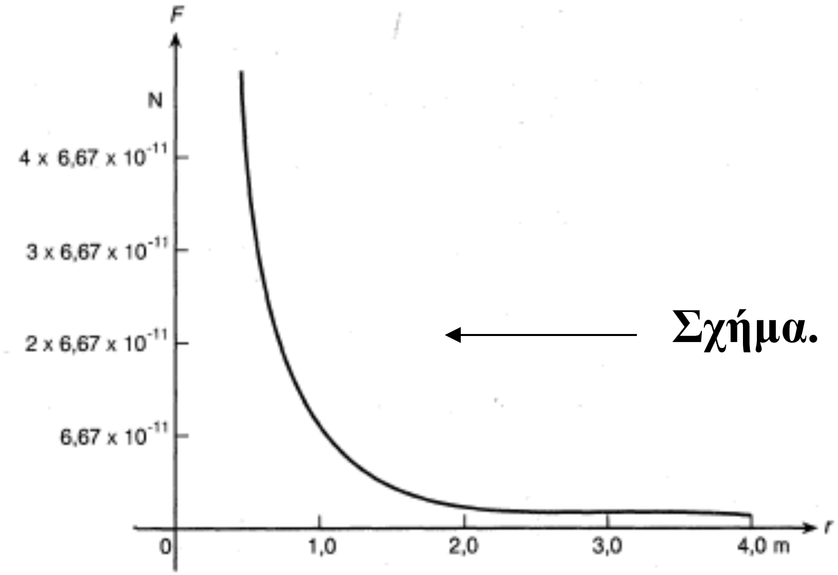


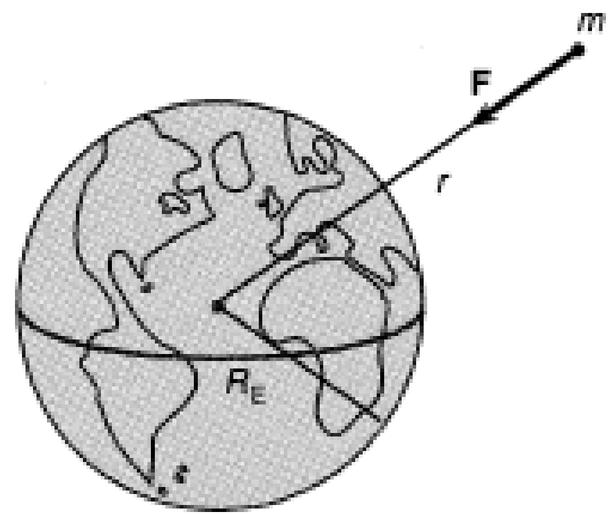
Fig. 1

Ο νόμος του Newton για την παγκόσμια βαρύτητα

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

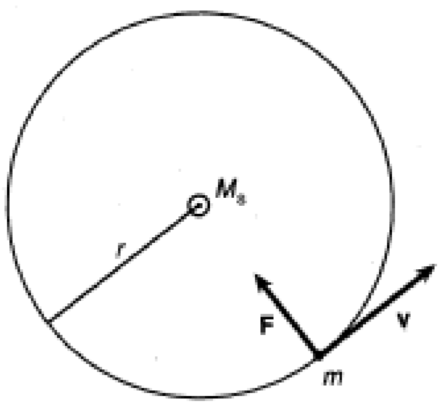


Σχήμα. Το μέτρο της βαρυτικής δύναμης που ασκείται μεταξύ δύο σωματιδίων 1 kg.



- Ποτέ η βαρυτική δύναμη δεν γίνεται μηδέν
- Δεν απαιτεί επαφή (δράση από απόσταση)
- Δεν επηρεάζεται από την παρουσία ενδιάμεσων μαζών
- Θεώρημα Newton (συγκέντρωση μάζας στο κέντρο)
- Επιτάχυνση βαρύτητας $\mathbf{g = G \cdot M_{earth}/R_{earth}^2}$ (g μικρότερη σε μεγάλο ύψος από τη γή)
- Υπολογισμός μάζας γής $\mathbf{M_{earth} = R_{earth}^2 \cdot g/G = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg}$

Κυκλικές τροχιές



Προσέγγιση:

επειδή η μάζα του Ήλιου >> από τη μάζα ενός πλανήτη →
→ Ήλιος σταθερός και ακίνητος και κινείται γύρω του ο πλανήτης

Απλούστερη κίνηση, η ομαλή κυκλική, με την βαρυτική δύναμη να παίζει το ρόλο της κεντρομόλου και εξίσωση:

$$\frac{\mathrm{m}\upsilon^2}{\mathrm{r}} = \frac{GM_s m}{\mathrm{r}^2} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{GM_s}{r} \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{GM_s}{r} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

δηλ., το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο προς τον κύβο της ακτίνας της τροχιάς με σταθερά αναλογίας που εξαρτάται από τη μάζα του κεντρικού σώματος.

Από την παραπάνω σχέση μπορεί να υπολογιστεί η μάζα του Ήλιου ($r = 1{,}496\times10^{11}$ m, $T=1$ yr $= 3{,}156\times10^{7}$ s)

$M_{sun}=1{,}989\times10^{30}$ kg

Αφροδίτη - Γη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Τόσο η Αφροδίτη όσο και η Γη έχουν κατά προσέγγιση κυκλικές τροχιές γύρω από τον Ηλιο. Η περίοδος της τροχιάς της Αφροδίτης είναι 0,615 του έτους και η περίοδος της τροχιάς της Γης είναι 1 έτος. Σύμφωνα με την Εξ. (15), κατά πόσο διαφέρουν οι ακτίνες των δύο τροχιών;

$$\frac{\mathrm{m}\upsilon^2}{\mathrm{r}} = \frac{GM_s m}{\mathrm{r}^2} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{GM_s}{r} \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{GM_s}{r} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

$$\frac{r_\mathrm{E}}{r_\mathrm{v}} = \frac{T_\mathrm{E}^{2/3}}{T_\mathrm{v}^{2/3}} = \frac{(1\ \mathrm{yr})^{2/3}}{(0{,}615\ \mathrm{yr})^{2/3}} = 1{,}38$$

Κίνηση Σελήνης / Δορυφόρου

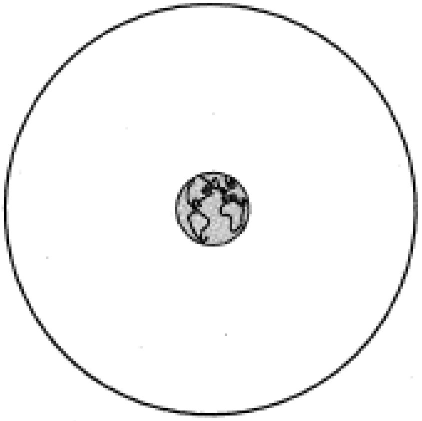
Η εξίσωση κίνησης μιας σελήνης ή ενός δορυφόρου που εκτελούν κυκλικές τροχιές γύρω από ένα πλανήτη περιγράφεται από την Εξ. (15). Ο πλανήτης παίζει τώρα το ρόλο του κεντρικού σώματος και, στην Εξ. (15), η μάζα του εμφανίζεται στη θέση της μάζας του Ηλιου.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

Κυκλικές τροχιές

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ο τηλεπικοινωνιακός δορυφόρος Early Bird εκτελεί ισημερινή κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη. Η περίοδος του είναι ακριβώς ίση με 1 ημέρα έτσι, ώστε ο δορυφόρος έχει πάντα σταθερή θέση ως προς την περιστρεφόμενη Γη. Πόση πρέπει να είναι η ακτίνα μας τέτοιας "γεωστατικής" τροχιάς;

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_E} r^3$$



$$r = \left(\frac{G M_E T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \times 5{,}98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg} \times (24 \times 60 \times 60\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

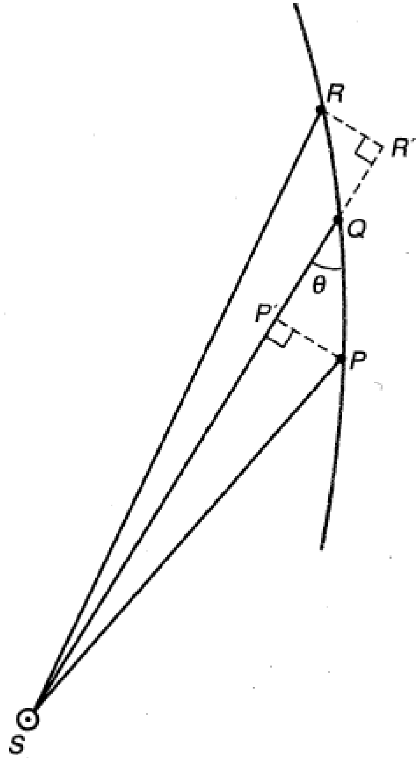
$$= 4{,}23 \times 10^7\,\mathrm{m}$$

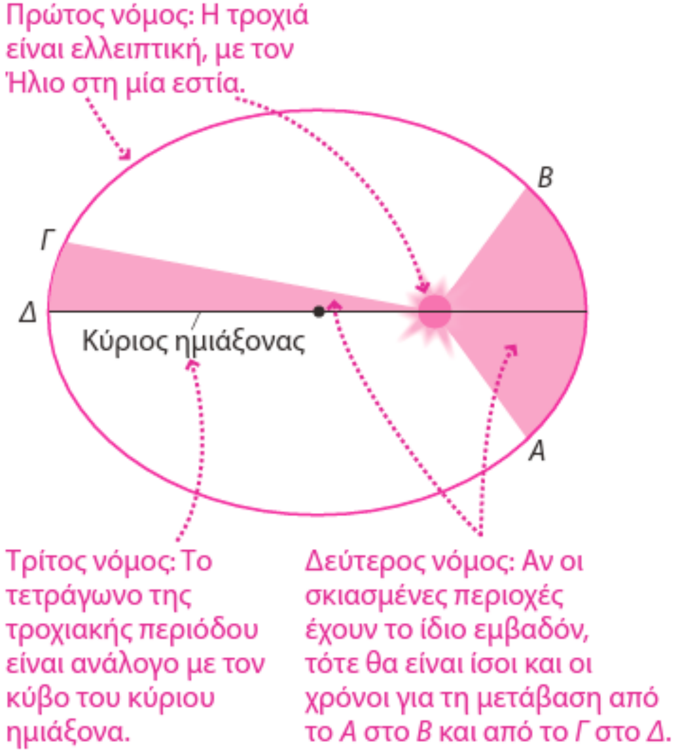
Η τροχιά φαίνεται στο Σχ. 9.7, το οποίο είναι σχεδιασμένο υπό κλίμακα. Ενας αριθμός τηλεπικοινωνιακών δορυφόρων έχει τοποθετηθεί σ' αυτή τη γεωστατική τροχιά. Αυτοί οι δορυφόροι επιτρέπουν την αποστολή σημάτων ραδιοφωνικών και τηλεόρασης από τη μία ήπειρο στην άλλη.

Ελλειπτικές τροχιές, οι νόμοι του Kepler

1ος νόμος : Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις με τον Ήλιο στη θέση της μιας εστίας

2ος νόμος : Η επιβατική ακτίνα από τον Ήλιο προς τον πλανήτη σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους





Το τρίγωνο SPQ με βάση r και PP′=PQ×sinθ σαρώνεται σε 1 s

Εμβαδόν τριγώνου SPQ =**½ × rυ sinθ = [σταθερά]**

Αλλιώς: Η στροφορμή (L=mrυsinθ) του πλανήτη είναι σταθερή (νόμος διατήρησης της στροφορμής)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ηλιο είναι έλλειψη με πολύ μικρή εκκεντρότητα. Στο περιήλιο η απόσταση Γης – Ηλιου είναι $1{,}47 \times 10^{11}$ m· στο αφήλιο η απόσταση Γης – Ηλιου είναι $1{,}52 \times 10^{11}$ m. Κατά ποιό συντελεστή η ταχύτητα της Γης στο περιήλιο είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα της Γης στο αφήλιο;

ΛΥΣΗ: Στο αφήλιο και στο περιήλιο η ταχύτητα είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα, δηλαδή, $\theta = 90°$. Η διατήρηση της ποσότητας $\frac{1}{2} \times rv \sin\theta$ συνεπάγεται, επομένως, ότι

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 \tag{19}$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στο περιήλιο και στο αφήλιο, αντιστοίχως. Ο λόγος των ταχυτήτων είναι

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1{,}52 \times 10^{11}\,\mathrm{m}}{1{,}47 \times 10^{11}\,\mathrm{m}} = 1{,}03$$

που σημαίνει ότι στο περιήλιο η ταχύτητα είναι κατά 3% μεγαλύτερη απ' ότι στο αφήλιο.

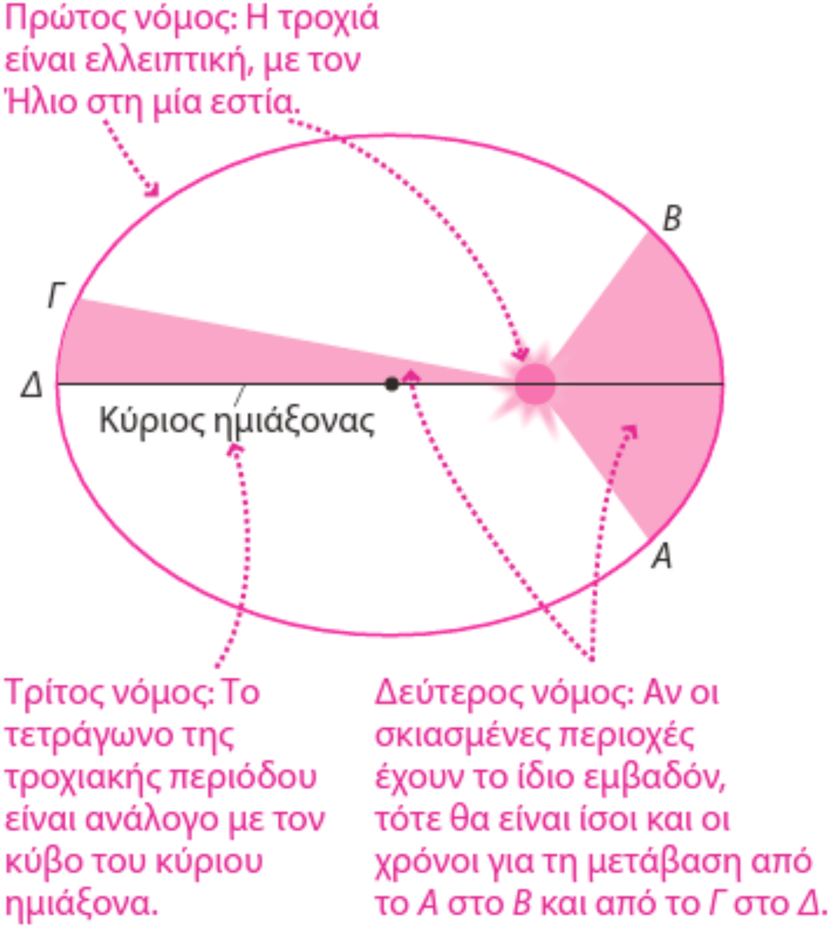
Ελλειπτικές τροχιές, οι νόμοι του Kepler

3ος νόμος (συσχετίζει την περίοδο της τροχιάς με το μέγεθος της τροχιάς)

Το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της πλανητικής τροχιάς

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

Σημείωση: οι νόμοι ισχύουν για πλανήτες, δορυφόρους, κομήτες, κτλ.

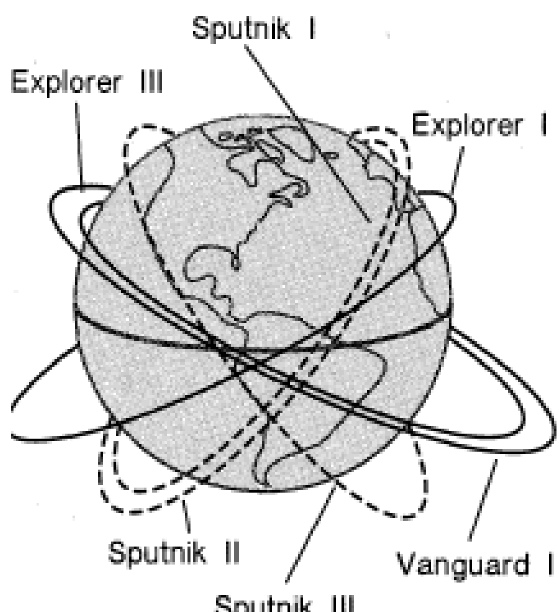


Οι πλανήτες

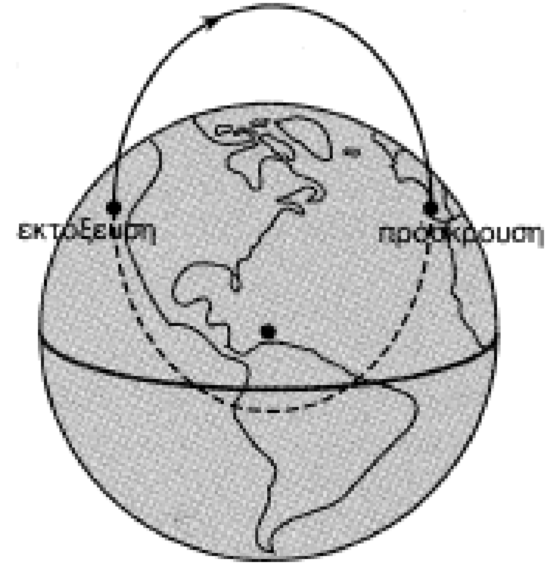
Πλανήτης	*Μάζα*	*Μέση απόσταση από τον Ηλιο (μεγάλος ημιάξονας)*	*Απόσταση περιηλίου*	*Απόσταση αφηλίου*	*Περίοδος*
Ερμής	$3{,}30 \times 10^{23}$ kg	$57{,}9 \times 10^{6}$ km	$45{,}9 \times 10^{6}$ km	$69{,}8 \times 10^{6}$ km	0,241 έτη
Αφροδίτη	$4{,}87 \times 10^{24}$	108	107	109	0,615
Γη	$5{,}98 \times 10^{24}$	150	147	152	1,00
Αρης	$6{,}42 \times 10^{23}$	228	207	249	1,88
Δίας	$1{,}90 \times 10^{27}$	778	740	816	11,9
Κρόνος	$5{,}67 \times 10^{26}$	1430	1350	1510	29,5
Ουρανός	$8{,}70 \times 10^{25}$	2870	2730	3010	84,0
Ποσειδών	$1{,}03 \times 10^{26}$	4500	4460	4540	165
Πλούτων	$1{,}5 \times 10^{22}$	5890	4410	7360	248

Οι πρώτοι τεχνητοί δορυφόροι της Γης

Δορυφόρος	*Μάζα*	*Μέση απόσταση από το κέντρο της Γης (μεγάλος ημιάξονας)*	*Περίγειος απόσταση*	*Απόγειος απόσταση*	*Περίοδος*
Sputnik I	83 kg	$6{,}97 \times 10^3$ km	$6{,}60 \times 10^3$ km	$7{,}33 \times 10^3$ km	96,2 min
Sputnik II	3000	7,33	6,61	8,05	104
Explorer I	14	7,83	6,74	8,91	115
Vanguard I	1,5	8,68	7,02	10,3	134
Explorer III	14	7,91	6,65	9,17	116
Sputnik III	1320	7,42	6,59	8,25	106

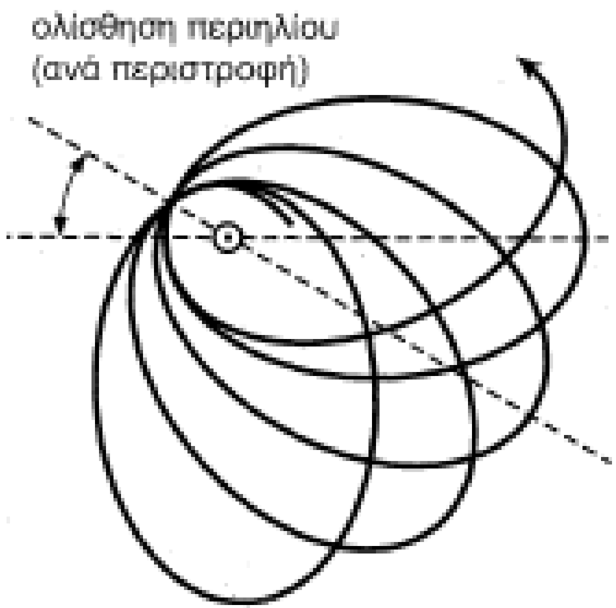


Ελλειπτικές τροχιές, οι νόμοι του Kepler



Οι νόμοι του Kepler ισχύουν και στην κίνηση π.χ. διηπειρωτικών πυραύλων, με την τροχιά να είναι τμήμα έλλειψης.

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε κάθε πλανήτη είναι συνάρτηση της θέσης όλων των άλλων πλανητών (πρόβλημα πολλών σωμάτων).

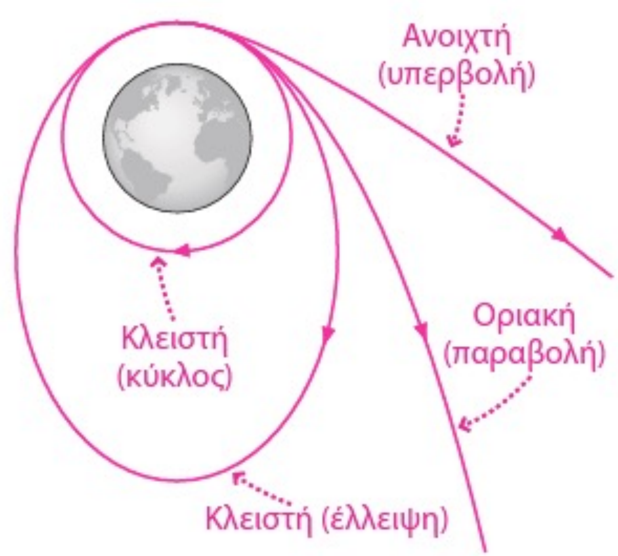


Επομένως, οι νόμοι Kepler περιγράφουν τις κινήσεις των πλανητών μόνο σε 1η προσέγγιση, μια και οι ενδοπλανητικές δυνάμεις δημιουργούν διάφορες διαταραχές στους νόμους, π.χ. ο προσανατολισμός του μεγάλου άξονα της ελλειπτικής τροχιάς της Γης ολισθαίνει κατά 104 δεύτερα λεπτά του τόξου κάθε αιώνα, εξαιτίας κυρίως της βαρυτικής δύναμης του Δία πάνω στη Γη.

Τροχιές

Ο Νεύτωνας εξήγησε τις τροχιές χρησιμοποιώντας την παγκόσμια βαρύτητα και τους νόμους του για την κίνηση:

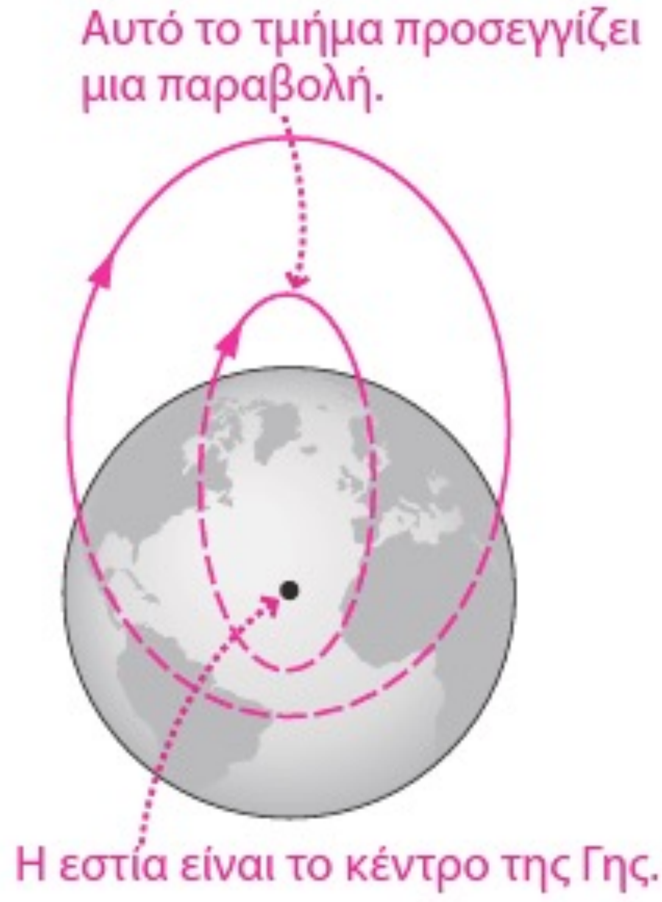
- Οι κλειστές (δεσμευμένες) τροχιές είναι ελλειπτικές
- Στην ειδική περίπτωση μιας κυκλικής τροχιάς, η επιτάχυνση του σώματος που βρίσκεται σε τροχιά έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση πάντα προς το κέντρο της τροχιάς
- Οι μη δεσμευμένες (ανοιχτές) τροχιές σχηματίζουν υπερβολές ή παραβολές (στην περίπτωση της οριακής τροχιάς)



Κίνηση βλήματος και τροχιές

- Οι «παραβολικές» τροχιές βλημάτων κοντά στην επιφάνεια της Γης αποτελούν στην πραγματικότητα τμήματα ελλειπτικών τροχιών που διακόπτονται από την επιφάνεια της Γης

- Η τροχιές είναι παραβολικές υπό την προϋπόθεση ότι μπορούμε να αγνοήσουμε την καμπυλότητα της Γης και τη διακύμανση της βαρύτητας ανάλογα με την απόσταση από το κέντρο της Γης

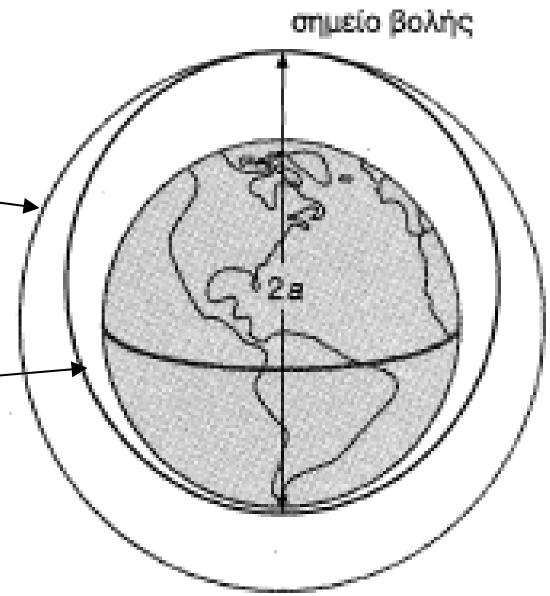


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Ενας αστροναύτης βρίσκεται σε διαστημόπλοιο που εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας $9{,}6 \times 10^3$ km γύρω από τη Γη. Σε κάποιο σημείο της τροχιάς ενεργοποιεί για βραχύ χρονικό διάστημα τους προωθητήρες του προς την κατεύθυνση της κίνησης του έτσι, ώστε να ελαττώσει την ταχύτητα του. Τούτο τον τοποθετεί σε νέα ελλειπτική τροχιά με απόγειο ίσο με την ακτίνα της παλιάς τροχιάς, αλλά με μικρότερο περίγειο (Σχ. 9.16). Υποθέστε ότι το περίγειο της νέας τροχιάς είναι $7{,}0 \times 10^3$ km. Να συγκρίνετε τις περιόδους της παλιάς και της νέας τροχιάς.

$$T_{old} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_E} r^3}$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2 \times (9{,}6 \times 10^6\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \times 5{,}98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}} = 9{,}4 \times 10^3\,\mathrm{s}$$

$$T_{new} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_E} a^3}$$



Με $a = \frac{1}{2}(9{,}6 \times 10^3\,\mathrm{km} + 7{,}0 \times 10^3\,\mathrm{km}) = 8{,}3 \times 10^3\,\mathrm{km}$,

$$T_{new} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \times (8{,}3 \times 10^6\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \times 5{,}98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}} = 7{,}5 \times 10^3\,\mathrm{s}$$

Επομένως, η περίοδος της νέας τροχιάς είναι κατά 20% περίπου μικρότερη από την περίοδο της παλιάς τροχιάς – μολονότι ο ελιγμός του αστροναύτη *ελάττωσε* την ταχύτητα του στο απόγειο, χρειάζεται λιγότερο χρόνο για να καλύψει την τροχιά του! Φυσικά, η εξήγηση είναι ότι ο ελιγμός *αύξησε* την ταχύτητα του στο περίγειο και, ακόμα, έκανε βραχύτερο το μήκος της τροχιάς.

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

Η βαρυτική δύναμη είναι διατηρητική δύναμη, δηλ. το έργο που παράγεται εξαρτάται από το αρχικό και το τελικό σημείο μετατόπισης και όχι από το σχήμα και το μήκος των δρόμων που τα ενώνει

$$U(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + U(P_0)$$

Έστω το P_0 σε άπειρη απόσταση με $U(P_0)=0$

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} -\left(\frac{GMm}{x^2}\right)dx = -\left[\frac{GMm}{x}\right]_{\infty}^{r} \longrightarrow U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Η ολική μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής. Αυτή η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης.

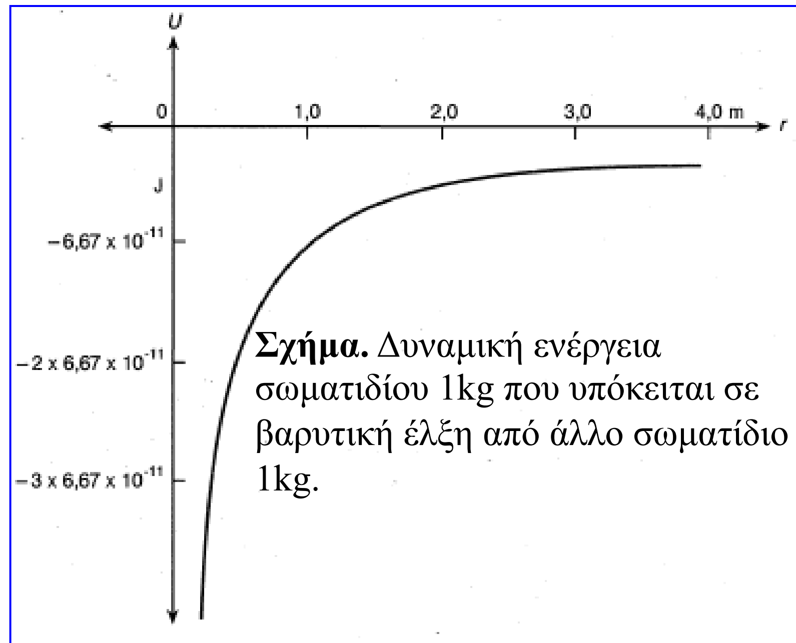
$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = [\text{σταθερά}]$$

Επειδή

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{GM_s m}{r^2} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{GM_s}{r} \longrightarrow K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_S\, m}{2r}$$

$$\boxed{E = -\frac{GM_S\, m}{2r}}$$

Η ολική ενέργεια της κυκλικής τροχιάς είναι αρνητική και ίση με το μισό της δυναμικής ενέργειας

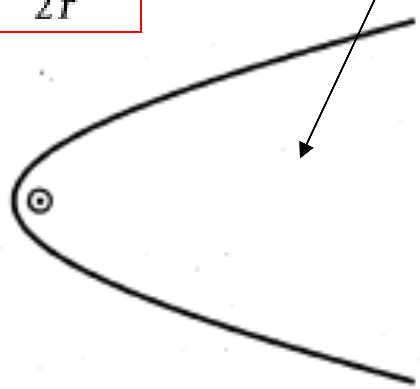


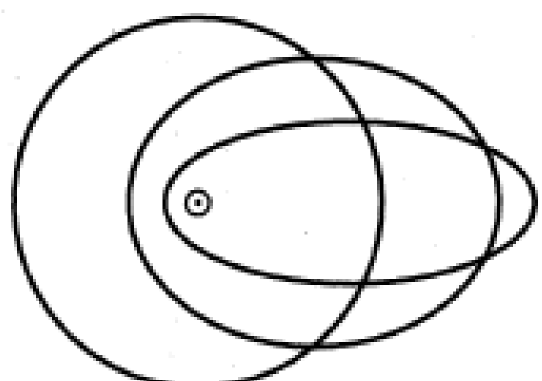
Σχήμα. Δυναμική ενέργεια σωματιδίου 1kg που υπόκειται σε βαρυτική έλξη από άλλο σωματίδιο 1kg.

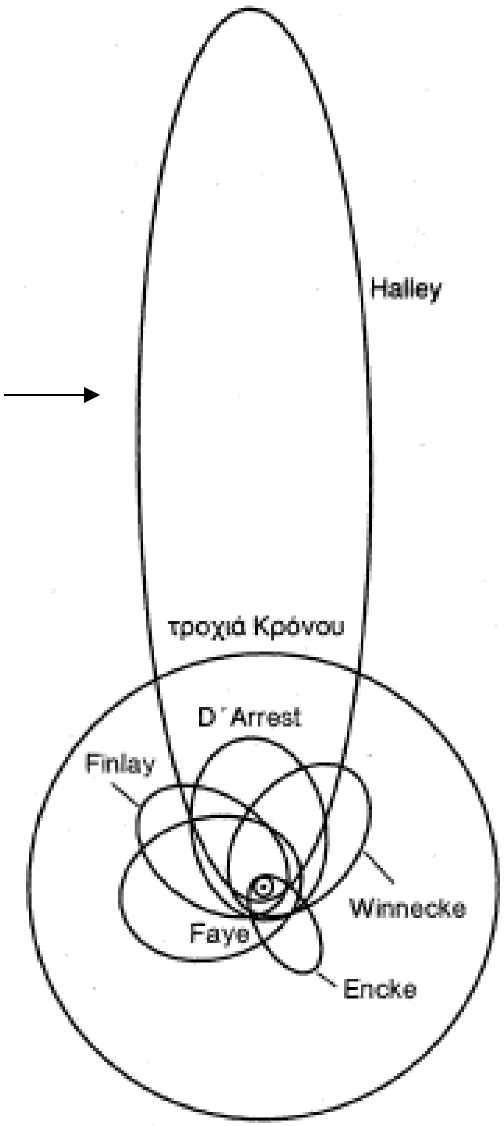
Βαρυτική δυναμική ενέργεια

- Η ολική ενέργεια της ελλειπτικής τροχιάς είναι επίσης αρνητική (όπου r ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης)
- Η ολική ενέργεια δεν εξαρτάται από το σχήμα της έλλειψης αλλά μόνο από το μέγεθός της
- βλ. διάφορες τροχιές με την ίδια ολική ενέργεια
- $E \approx 0$ για πολύ μεγάλο μέγεθος τροχιάς (π.χ. για κομήτες, Σχήμα)
- $E = 0$ τότε η έλλειψη εκτείνεται στο άπειρο και δεν κλείνει ποτέ, στην πραγματικότητα έχουμε παραβολή

$$\boxed{E = -\frac{GM_S\, m}{2r}}$$







ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Ενας μετεωρίτης βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας στον ενδοπλανητικό χώρο πολύ μακριά από την Ηλιο. Υπό την επίδραση της βαρύτητας, ο μετεωρίτης αρχίζει να πέφτει προς τον Ηλιο κατά μήκος μιας ακτινικής ευθείας γραμμής. Με τί ταχύτητα προσκρούει στον Ηλιο;

ΛΥΣΗ: Η ενέργεια του μετεωρίτη είναι

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_S m}{r} = [\text{σταθερά}]$$

Αρχικά, τόσο η κινητική όσο και η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν ($v = 0$ και $r \cong \infty$). Επομένως, σε οποιοδήποτε μεταγενέστερο χρόνο

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_S m}{r} = 0$$

Με $r = R_S$, οδηγούμαστε στον παρακάτω τύπο για την ταχύτητα κατά την στιγμή της πρόσκρουσης:

$$\boxed{v = \sqrt{2 G M_S / R_S}}$$

Μια και η ακτίνα του Ηλίου είναι $R_S = 6{,}96 \times 10^8$ m, βρίσκουμε

$$v = \sqrt{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \times 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} / 6{,}96 \times 10^8\,\mathrm{m}}$$

$$= 6{,}18 \times 10^5\,\mathrm{m/s} = 618\,\mathrm{km/s}$$

Ταχύτητα διαφυγής

- Η ταχύτητα του προηγούμενου παραδείγματος ονομάζεται **ταχύτητα διαφυγής** και είναι η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί ένα σώμα προς τα πάνω από την επιφάνεια του Ήλιου για να διαφύγει.

- Στο παράδειγμά μας ο μετεωρίτης αρχίζει με 618 km/s στην επιφάνεια του Ήλιου και επιβραδύνεται καθώς ανέρχεται, χωρίς να σταματά ποτέ παρά μόνο όταν φτάσει σε μεγάλη απόσταση ($r \approx \infty$)

- Η ταχύτητα διαφυγής από την Γη είναι $\sqrt{\dfrac{2GM_E}{R_E}} = 11{,}2 \text{ km/s}$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια στη γειτονιά της γης

$$U(r) = -\frac{GM_E m}{r}$$

Η *μεταβολή* της δυναμικής ενέργειας ανάμεσα στο σημείο r και σ' ένα σημείο στην επιφάνεια της Γης είναι ίση με

$$\Delta U = U(r) - U(R_E) = -\frac{GM_E m}{r} + \frac{GM_E m}{R_E} = GM_E m \frac{r - R_E}{rR_E}$$

Εάν το σημείο r βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της Γης έτσι, ώστε $r \cong R_E$, τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε το γινόμενο rR_E με R_E^2. Ακόμα, η διαφορά $r - R_E$ ισούται απλώς με το ύψος z πάνω από την επιφάνεια, οπότε

$$\boxed{\Delta U = \frac{GM_E m}{R_E^2} z}$$

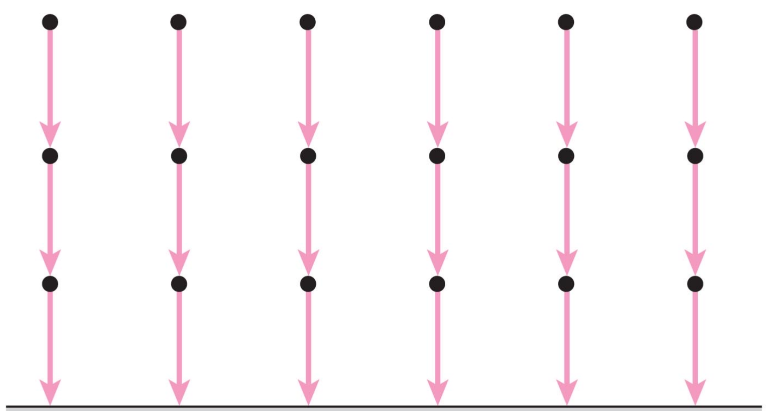
Επειδή $g = GM_E/R_E^2$

$$\boxed{\Delta U = mgz}$$

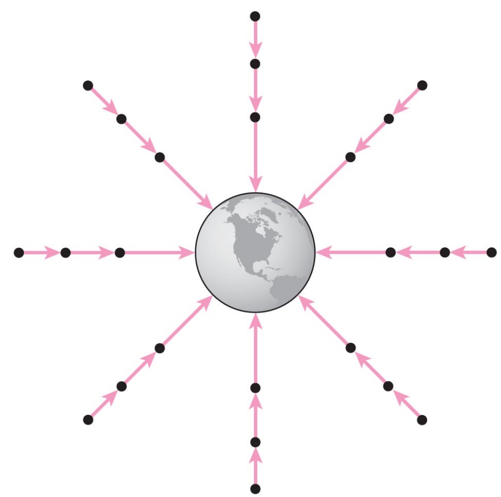
για $r << R_E$

Το βαρυτικό πεδίο

- Είναι πρακτικό να περιγράφουμε τη βαρύτητα σε όρους ενός **βαρυτικού πεδίου** το οποίο οφείλεται στην παρουσία μάζας και υπάρχει σε όλα τα σημεία στον χώρο
  - Ένα σώμα μεγάλης μάζας δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο στο περιβάλλον του και άλλα σώματα ανταποκρίνονται στο πεδίο στις *άμεσες τοποθεσίες* τους
  - Το βαρυτικό πεδίο μπορεί να περιγραφεί από διανύσματα του δίνουν την ένταση (σε N/kg· ισοδύναμα, m/s^2) και την κατεύθυνσή του



(α) Κοντά στην επιφάνεια της Γης



(β) Σε μεγαλύτερη κλίμακα

Αδρανειακή και βαρυτική μάζα

Αδρανειακή μάζα: η μάζα που ορίζεται ως μέτρο της αδράνειας ή της αντίστασης σε κάθε προσπάθεια αλλαγής της κατάστασης κίνησής του

Βαρυτική μάζα: Η μάζα που μετρείται με τη σύγκριση των βαρών δύο μαζών

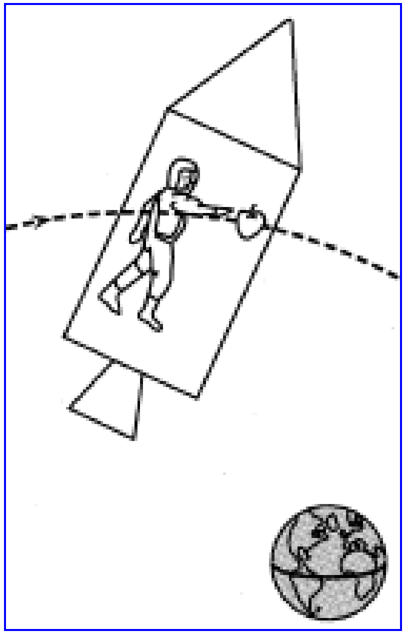
Είναι η αδρανειακή και η βαρυτική μάζα **ίσες** ?

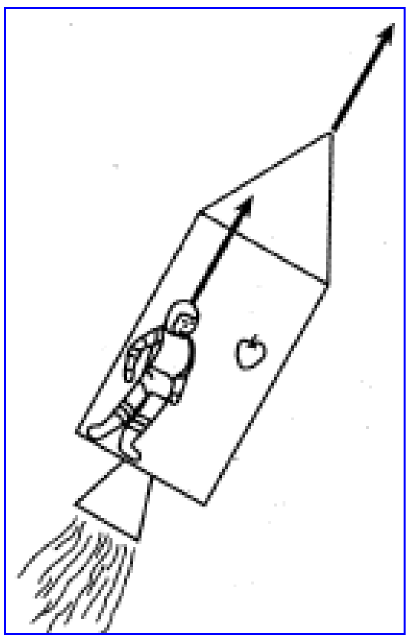
Ναι για την πρότυπη μάζα, αλλά για άλλες?

Έστω δύο σώματα με αδρανειακές μάζες m, m’ και αντίστοιχα βάρη w, w’ για τα οποία μετά από έλεγχο με ζυγό ισχύει $w = w' \rightarrow mg = m'g \rightarrow m = m'$

Άρα, οι βαρυτικές μάζες δύο σωμάτων είναι ίσες **αν και μόνο αν** και οι αδρανειακές τους μάζες είναι ίσες (**προσοχή**, υποθέσαμε ότι το g είναι το ίδιο στα δύο σκέλη της εξίσωσης).

Η αρχή της ισοδυναμίας





Πάνω:

Αστροναύτης και μήλο σε τροχιά. Το μήλο είναι μετέωρο και στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς του αστροναύτη επικρατεί **φαινομένη συνθήκη** έλλειψης βαρύτητας.

Κάτω:

Αστροναύτης και μήλο σε επιταχυνόμενο (με 9,8m/s^2) διαστημόπλοιο. Το μήλο επιταχύνεται προς τα πίσω, ως προς τον αστροναύτη και συμπεριφέρεται σαν να είναι υπό την επίδραση της συνηθισμένης βαρύτητας (η επιταχυνόμενη κίνηση του συστήματος αναφοράς μιμείται την επίδραση της βαρύτητας)

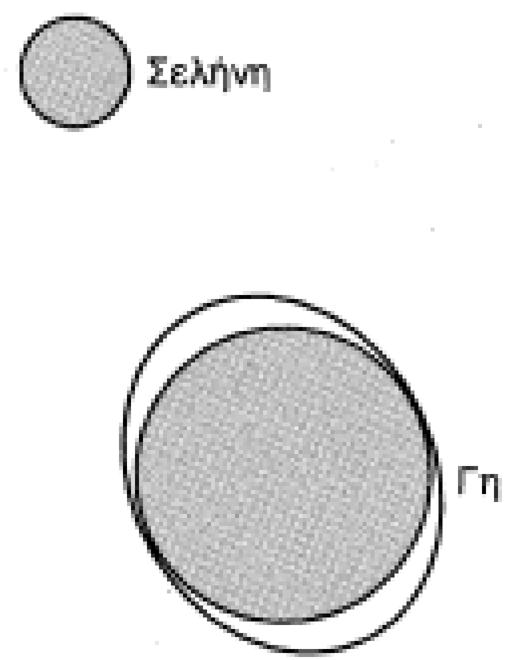
Αρχή της Ισοδυναμίας:

Η ομοιότητα στα αποτελέσματα της βαρύτητας και στα αποτελέσματα ενός κατάλληλα επιταχυνόμενου συστήματος αναφοράς.

Η αρχή της ισοδυναμίας (παραδείγματα)

Η Γη και όλοι μας **ελκόμαστε** από τον Ήλιο, τη Σελήνη και τα άλλα ουράνια σώματα.

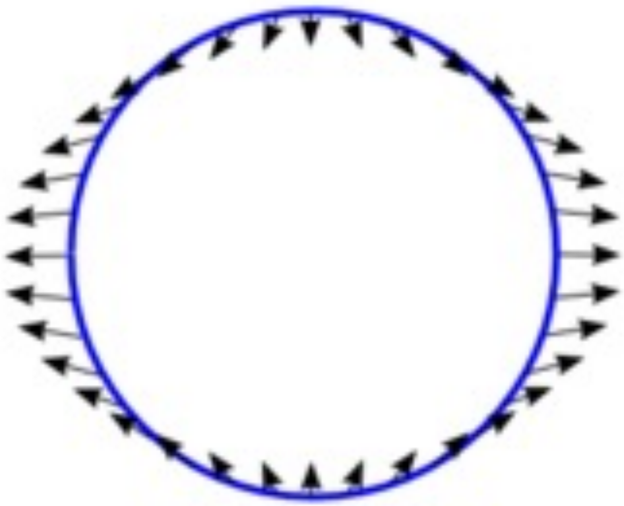
Δεν αισθανόμαστε αυτή την έλξη, διότι η Γη εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση ελεύθερης πτώσης προς αυτά τα σώματα και εμείς στη Γη συμπεριφερόμαστε ως **αβαρή σώματα** προς τη βαρυτική έλξη των ουρανίων σωμάτων.

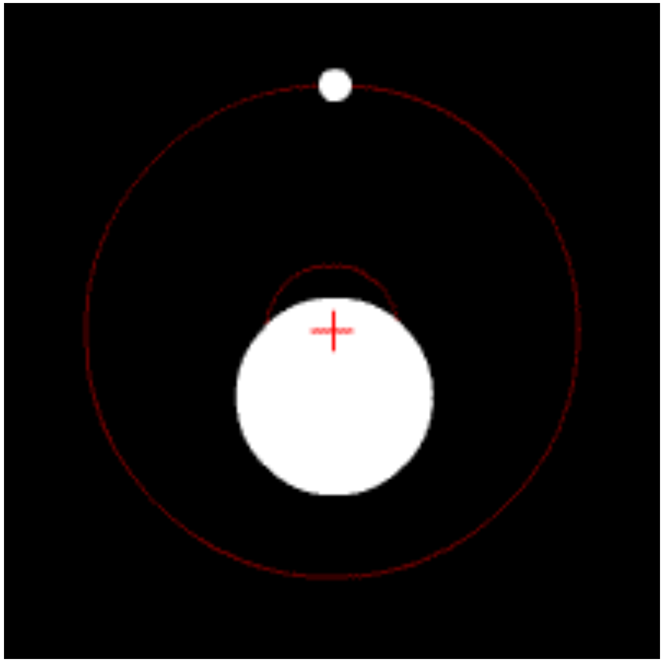


Οι **παλίρροιες** αποδυκνείουν παρόλα αυτά την ύπαρξη μιας μικρής παραμένουσας επίδρασης που δεν εξουδετερώνει η ελεύθερη πτώση, επειδή το νερό που βρίσκεται εγγύτερα στη Σελήνη υπόκειται σε ελαφρά ισχυρότερη βαρυτική έλξη.

Έτσι το νερό φαίνεται να φουσκώνει-ξεφουσκώνει (δεν διαστέλλεται το νερό) ανάλογα αν είναι κοντύτερα ή μακρύτερα στη Σελήνη.

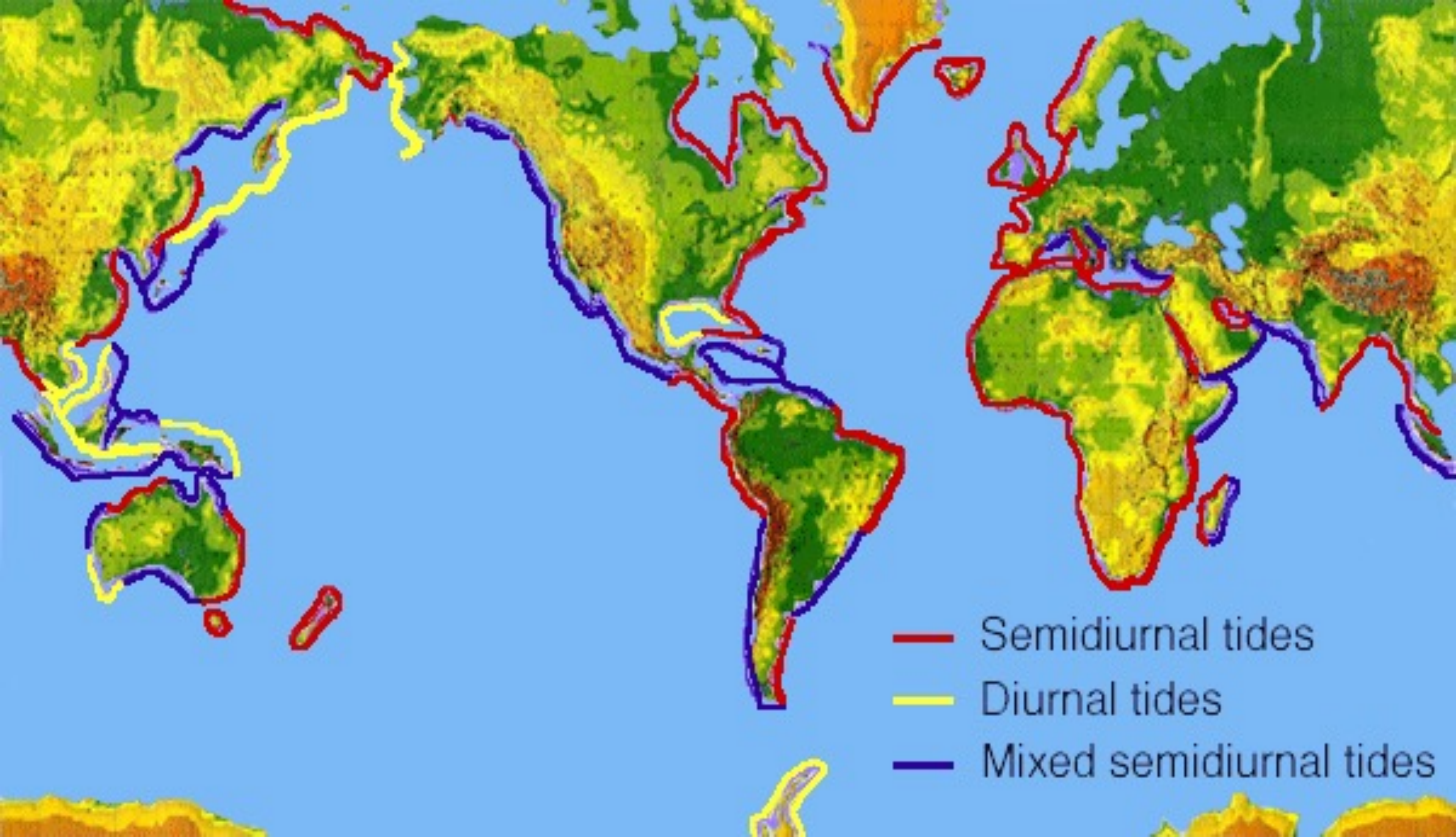
Σχήμα. Πλημμυρίδα και άμπωτη





The Moon's gravity differential field at the surface of the earth is known as the tide generating force. This is the primary mechanism that drives tidal action and explains two tidal equipotential bulges, accounting for two high tides per day.

A schematic of the Earth-Moon system



Σχήμα. Η ίδια παλιρροιακή δύναμη έχει διαφορετικά αποτελέσματα εξαρτώμενη από πολλούς παράγοντες (π.χ. προσανατολισμό ακτών, διαστάσεις υδάτινων μαζών, ηπειρωτικό περιθώριο, κτλ.)

Σύνοψη

Νόμος της παγκόσμιας έλξης: $F = \frac{GMm}{r^2}$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

Επιτάχυνση βαρύτητας στη Γη: $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$

Κυκλική τροχιά γύρω απ' τον Ήλιο: $v^2 = \frac{GM_S}{r}$

Πρώτος Νόμος του Kepler: Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις με τον Ήλιο στη θέση της μίας εστίας.

Δεύτερος Νόμος του Kepler: Η επιβατική ακτίνα από τον Ήλιο προς τους πλανήτες σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

Τρίτος Νόμος του Kepler: Το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της πλανητικής τροχιάς.

Βαρυτική δυναμική ενέργεια: $U = -\frac{GMm}{r}$

Ενέργεια κυκλικής τροχιάς γύρω από τον Ήλιο: $E = -\frac{GM_S m}{2r}$

Ταχύτητα διαφυγής από τη Γη: $v = \sqrt{2GM_E/R_E}$

Ασκήσεις

*8. Ο Μίμας, ένας μικρός δορυφόρος του Κρόνου, έχει μάζα $3{,}8 \times 10^{19}$ kg και διάμετρο 500 km. Πόση είναι η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα με την οποία μπορούμε να κάνουμε αυτό το δορυφόρο να περιστρέφεται περί τον άξονά του έτσι ώστε να μην αρχίσουν να διαφεύγουν οι σκόρπιες πέτρες που βρίσκονται στην επιφάνεια του;

$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6.67*10^{-11}*3.8*10^{19}}{(250000)^2} = 0.040\ m/s^2$ επιτάχ. βαρύτητας για τον Μίμα

Η μέγιστη δυνατή κεντρομόλος επιτάχυνση ($\omega^2 r$) εξαιτίας της βαρύτητας = 0.040 m/s^2

$0.040 = \omega_{max}^2\, r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0.040}{r}} = \sqrt{\frac{0.040}{250000}} = 4 \times 10^{-4}$ rad/s = 34.5 rad/day

= 5.5 rotations/day

Ασκήσεις

*12. Ο δορυφόρος Discoverer II είχε μια κατά προσέγγιση κυκλική τροχιά που περνούσε πάνω και από τους δύο πόλους της Γης. Η ακτίνα της τροχιάς ήταν ίση με $6{,}67 \times 10^3$ km περίπου. Αν λάβουμε υπόψη την περιστροφή της Γης περί τον άξονα της, να υπολογιστεί πάνω από ποιό σημείο της Ελλάδας θα περάσει ο δορυφόρος μετά από μία πλήρη περίοδο, αν στην προηγούμενη περίοδο είχε περάσει πάνω από την Αθήνα.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_E} r^3$$

$$\left.\begin{aligned} &T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_E}} \\ &r = 6.67 * 10^6 \text{ m} \\ &M_E = 5.98 * 10^{24} \text{ kg} \end{aligned}\right\} \longrightarrow T = 5420 \text{ s} = 0.0627 \text{ day}$$

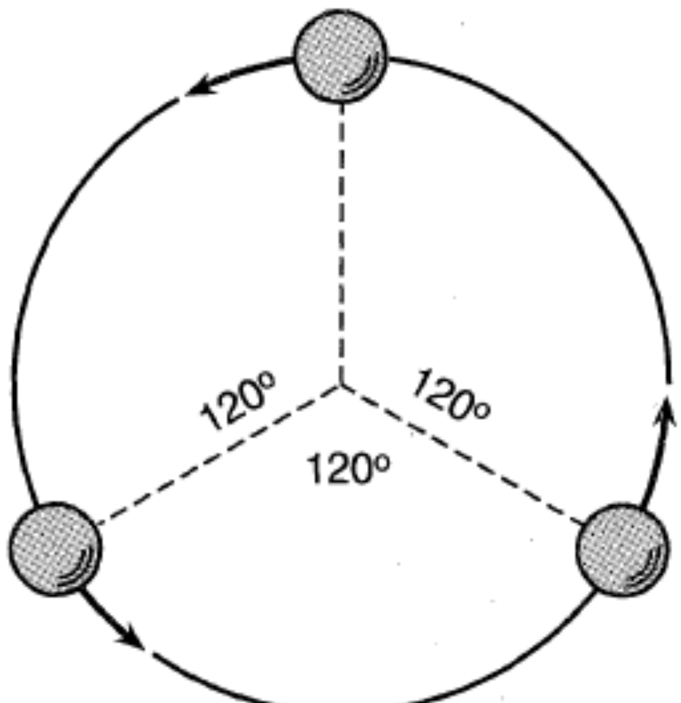
Η γη θα 'χει περιστραφεί $(360^o/\text{day} * 0.0627) = 22.6^o$

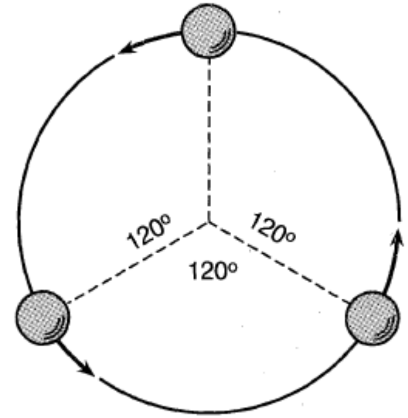
Same latitude but 22.6^o West

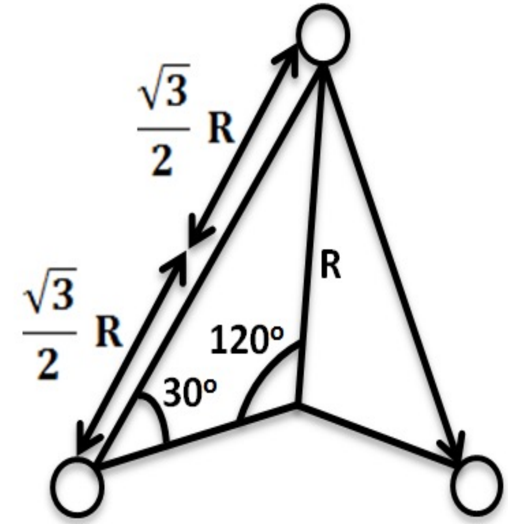
Ασκήσεις

**17. Ενα υποθετικό σύστημα τριπλού αστέρα αποτελείται από τρεις αστέρες που περιφέρονται περί το κοινό κέντρο μάζας τους. Χάριν απλότητας, υποθέστε ότι και οι τρεις αστέρες έχουν ίσες μάζες και ότι κινούνται σε κοινή κυκλική τροχιά διατηρώντας μια γωνιακή απόσταση 120°. Συναρτήσει της μάζας M καθενός αστέρα και της ακτίνας της τροχιάς R, να υπολογιστεί η περίοδος της κίνησης.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$







Η απόσταση μεταξύ των δύο άστρων είναι ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ * R) * 2 = $\sqrt{3}$ *R

Εξαιτίας συμμετριών, μόνο η συνιστώσα προς το κέντρο έχει «καθαρό» αποτέλεσμα.

F =($\frac{GMM}{(\sqrt{3}R)^2}$) cos30^o = $\frac{GM^2}{3R^2}\frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε άστρο

Άρα το κάθε άστρο δέχεται από τα άλλα δύο F = = $\frac{GM^2}{3R^2}\sqrt{3}$

F = $\frac{mu^2}{R}$ => $\frac{GM^2}{3R^2}\sqrt{3}$ = $\frac{m(\frac{4\pi^2R^2}{T^2})}{R}$ => T = 2 π ($\frac{R^3\sqrt{3}}{GM}$)$^{1/2}$

T = $\frac{2\pi R}{u}$ => u^2 = $\frac{4\pi^2R^2}{T^2}$

Ασκήσεις

*36. Σύμφωνα με μία εκτίμηση ένας μεγάλος κρατήρας στο Wilkes Land, της Ανταρκτικής, προκλήθηκε από την πρόσκρουση ενός μετεωρίτη 13×10^{19} τόννων πάνω στην επιφάνεια της Γης με ταχύτητα 70000 km/h. Πόση ήταν η ταχύτητα αυτού του μετεωρίτη ώς προς τη Γη όταν βρισκόταν σε μεγάλη απόσταση από τη Γη;

Συνολική Ενέργεια ΙΔΙΑ κατά την πρόσκρουση και όταν ήταν πολύ μακριά =>

$$\tfrac{1}{2} m \underbrace{u_E}_{70.000\ \text{km/hr}}{}^2 - \frac{G M_E m}{R_E} = \tfrac{1}{2} m u^2 \Rightarrow u^2 = u_E^2 - 2 G M_E/R_E \Rightarrow u = 15.895\ \text{m/s} = 57.200\ \text{km/hr}$$

*37. Ένας πεπειραμένος παίκτης του μπέιζμπολ μπορεί να πετάξει μια μπάλα με ταχύτητα 140 km/h. Υποθέστε ότι ένας αστροναύτης που στέκεται στον Μίμαντα, ένα μικρό δορυφόρο του Κρόνου μάζας $3{,}76 \times 10^{19}$ kg και ακτίνας 195 km, πετάει μια μπάλα με την ίδια ταχύτητα των 140 km/h.

(a) Εάν ο αστροναύτης πετάξει τη μπάλα οριζοντίως, θα μπει η μπάλα σε τροχιά γύρω από τον Μίμαντα;

(b) Εάν ο αστροναύτης πετάξει τη μπάλα κατακορύφως, σε πόσο ύψος θα φτάσει η μπάλα;

140 km/hr = 38.9 m/s

Για σταθερή τροχιά, η κεντρομόλος = βαρυτική επιτάχυνση =>

α) $\frac{mu^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow u^2 = \frac{GM}{R}$

$M = 3.76 * 10^{19}$ kg

$R = 195 * 10^3$ m

u = 113.4 m/s

δε θα μπει σε τροχιά γύρω από τον Μίμαντα

b) Η μπάλα θα ανέβει μέχρι που η αρχική κινητική της ενέργεια

$\frac{1}{2} m u^2 = u_{final} - u_{initial} = -\frac{GMm}{(R+h)} + \frac{GMm}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow u^2 R^2 + u^2 R h = 2 G M h \Rightarrow h = 5910$ m

Ασκήσεις

*45. Υποθέστε ότι ένα βλήμα πυροδοτείται οριζοντίως από την επιφάνεια της Σελήνης με αρχική ταχύτητα 2,0 km/s. Σχεδιάστε χονδρικά την τροχιά του βλήματος. Πόσο είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το βλήμα; Ποιά θα είναι η ταχύτητα του όταν θα φτάσει το μέγιστο ύψος;

$u_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_m}{R_m}} = \sqrt{\frac{2*6.67*10^{-11}*7.35*10^{22}}{1.74*10^{6}}} = 2.37 * 10^3$ m/s = 2.37 km/s

Επειδή 2 km/s < u_{esc} => δε θα ξεφύγει από τη σελήνη

Διατήρηση Ενέργειας $-\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}u'^2 = -\frac{GM}{R_m} + \frac{1}{2}u^2$ (1)

Διατήρηση γωνιακής ορμής (στροφορμής) $R_m u = r u'$ (2)

(1), (2) => $u' = 0.8 * 10^3$ m/s

$r = 4.35 * 10^6$ m

Ασκήσεις

52. Σύμφωνα με μία μελέτη της NASA, μία μεγάλη διαστημική αποικία σε τροχιά γύρω από τη Γη, θα μπορούσε ν αποτελείται από ένα δακτυλιοειδές διαμέτρου 1,8 km, που να μοιάζει κάπως με μία γιγαντιαία ρόδα ποδηλάτου (βλ. Σχ. 9.38). Για να δημιουργηθεί τεχνητή βαρύτητα 1 G, με πόση ταχύτητα θα πρέπει να περιστρέφεται αυτή η διαστημική αποικία περί τον άξονα της;

Αστροναύτης στέκεται στο Διαστημικό Σταθμό

Η δύναμη στα πόδια του θα πρέπει να είναι **mg** και να είναι ίση με την κεντρομόλο που θα τον κρατά σε κυκλική κίνηση

$$\frac{mu^2}{r} = m\,g \Rightarrow \frac{\omega^2 r^2}{r} = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = 0.10 \text{ rad/s}$$

$$= 0.016 \text{ rev/s}$$

$$\cong 1 \text{ rev/min}$$

Ασκήσεις

49. Ο παρακάτω πίνακας καταγράφει τις ακτίνες, μετρούμενες από το κέντρο της Γης, και το κλάσμα της μάζας της Γης που βρίσκεται μέσα σ' αυτή την ακτίνα:

r (km)	$M_{(r)}/M_E$	α (m/s²)
1400	0,024	4,98
2400	0,11	7,62
3400	0,31	10,69
4400	0,47	9,68
5400	0,72	9,85
6400	1,00	9,74

$$\alpha = \frac{GM_{(r)}}{r^2} \qquad g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

$$\frac{\alpha}{g} = \frac{\frac{GM_{(r)}}{r^2}}{\frac{GM_E}{R_E^2}} = \frac{\cancel{G}M_{(r)}R_E^2}{\cancel{G}M_E r^2}$$