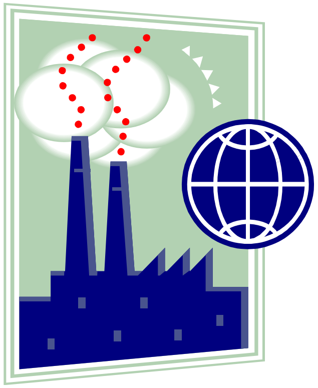
Κεφάλαιο 5



Χρήση των Νόμων του Νεύτωνα
Δυναμική
Δυνάμεις και η λύση της εξίσωσης κίνησης

Τι μαθαίνετε

- Να εφαρμόζετε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε δύο διαστάσεις
- Πώς να επιλέγετε συστήματα συντεταγμένων και να αναλύετε διανύσματα δυνάμεων σε συνιστώσες
- Πώς να ενσωματώνετε την τριβή στην ανάλυσή σας
- Πώς να αναλύετε προβλήματα που αφορούν πολλά σώματα ή κυκλική κίνηση

Ο 2^{ος} νόμος του Newton

Οταν μία δύναμη δρα πάνω σε ένα σώμα προσδίδει σ' αυτό επιτάχυνση που έχει τη φορά της δύναμης και μέτρο αντιστρόφως ανάλογο προς τη μάζα του σώματος,

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/\mathrm{m} \rightarrow \mathrm{m}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Ονομάζεται συνήθως **εξίσωση κίνησης**.

Για να βρούμε μια λύση της εξίσωσης κίνησης αρκεί να βρούμε μια δύναμη **F** και μια επιβατική ακτίνα **r**(t) η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου τέτοια ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση m**a**=**F**.

Ανάλογα με τις συνθήκες μπορεί να θεωρηθεί το δεξί ή αριστερό μέρος σκέλος ως άγνωστος.

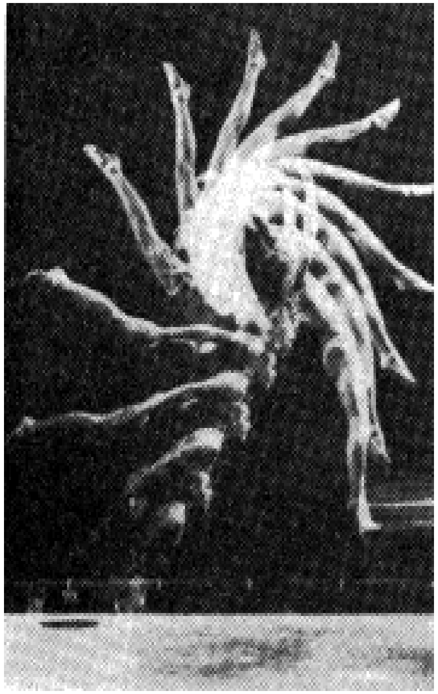
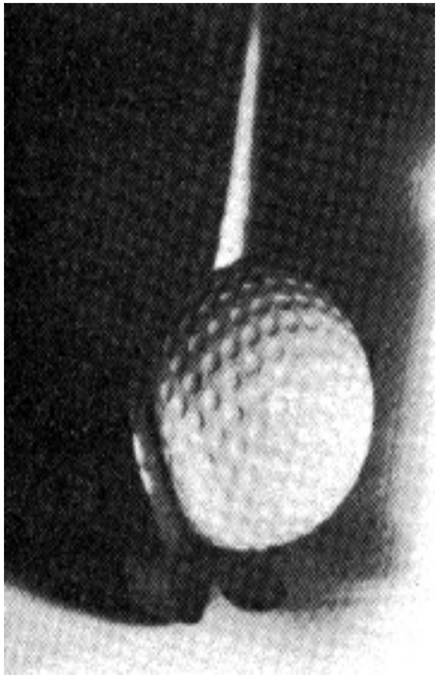
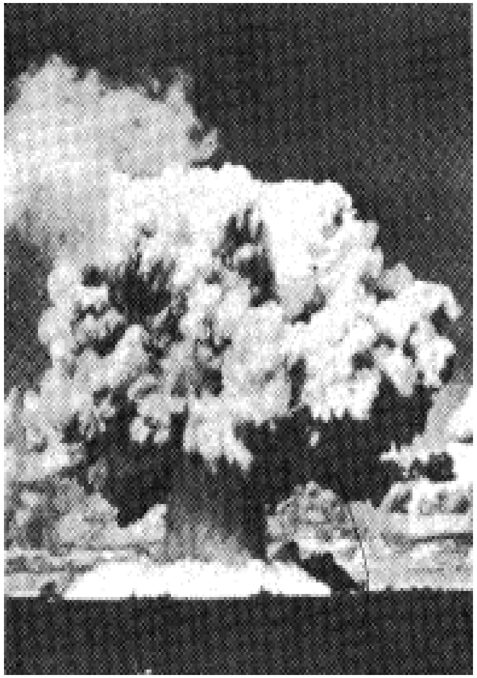
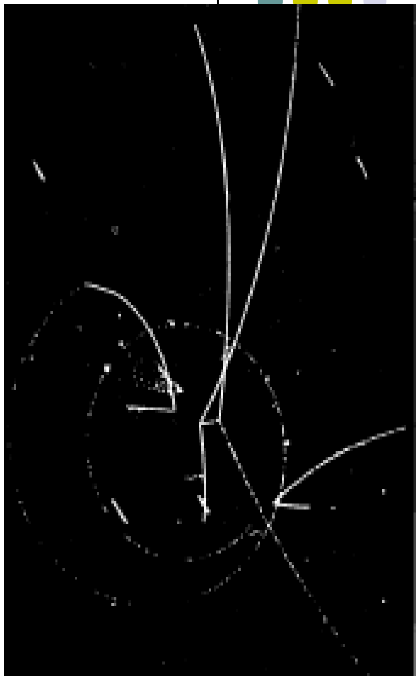
Φυσικός: Τυπικό πρόβλημα: γνωστή δύναμη, άγνωστη κίνηση,

π.χ. γνωρίζει τη δύναμη ανάμεσα στους πλανήτες και στον Ήλιο και ζητάει να υπολογίσει την κίνηση αυτών των σωμάτων.

Μηχανικός: Τυπικό πρακτικό πρόβλημα: το αντίστροφο, γνωστή κίνηση, άγνωστη δύναμη,

π.χ., γνωρίζει ότι ένα τρένο πρόκειται να κινηθεί με ταχύτητα 100 km/h σε δεδομένη καμπύλη και ζητάει να υπολογίσει τις δυνάμεις στις οποίες θα αντέξουν οι γραμμές και οι τροχοί.

Οι 4 θεμελιώδεις δυνάμεις

Σχήμα.

(1) Η ελεύθερη πτώση του καταδύτη οφείλεται στη βαρυτική δύναμη.

(2) Οι ηλεκτρικές δυνάμεις ανάμεσα στα άτομα προκαλούν τις δυνάμεις επαφής και τις ελαστικές δυνάμεις που δρουν κατά την πρόσκρουση του μπαστουνιού με τη μπάλλα του golf.

(3) Η «ισχυρή» δύναμη είναι υπεύθυνη για τις αντιδράσεις θερμοπυρηνικής σύντηξης στην έκρηξη μιας βόμβας υδρογόνου.

(4) Η «ασθενής» δύναμη είναι η αιτία της διάσπασης πολλών στοιχειωδών σωματιδίων και της δημιουργίας νέων σωματιδίων τα οποία σχημάτισαν αυτές τις τροχιές στο θάλαμο ενός επιταχυντή.

Οι 4 θεμελιώδεις δυνάμεις

Βαρυτική δύναμη: η αμοιβαία έλξη μεταξύ όλων των μαζών, η ασθενέστερη μεταξύ των τεσσάρων (μεταξύ δύο πρωτονίων ενός πυρήνα είναι **10^{-34}** N περίπου).

Ηλεκτρομαγνητική: η έλξη ή η άπωση μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων, είναι μεσαίου μεγέθους (ανάμεσα σε δύο γειτονικά πρωτόνια ισούται με **10^{2}** N). Με εξαίρεση τη βαρύτητα, κάθε δύναμη στο άμεσο μακροσκοπικό περιβάλλον μας είναι ηλεκτρική (δυνάμεις επαφής ανάμεσα σε στερεά, δυνάμεις συνοχής, τριβής, κτλ.)

«Ισχυρή» δύναμη: δρά κυρίως στο εσωτερικό των πυρήνων των ατόμων, ως «πυρηνική κόλλα» που εμποδίζει τα διάφορα κομμάτια του πυρήνα να πετάξουν. Η ισχυρότερη από τις τέσσερις δυνάμεις (ανάμεσα σε δύο γειτονικά πρωτόνια είναι **10^{4}** N).

«Ασθενής» δύναμη: εκδηλώνεται σε μερικές μόνο αντιδράσεις των στοιχειωδών σωματιδίων (ραδιενεργές διασπάσεις σε άλλα σωματίδια), η πλέον ασθενής (ανάμεσα σε δύο γειτονικά πρωτόνια είναι **10^{-2}** N).

Οι 4 θεμελιώδεις δυνάμεις

Δύναμη	*Ασκείται*	*Μέγεθος*[a]	*Εμβέλεια*
Βαρυτική	Σε όλες τις Μάζες	10^{-34}	Απειρη
Ασθενής	Στα περισσότερα στοιχειώδη σωματίδια	10^{-2}	Μικρότερη από 10^{-17} m
Ηλεκτρομαγνητική	Στα ηλεκτρικά φορτία	10^{2}	Απειρη
Ισχυρές	Στα πυρηνικά σωματίδια	10^{4}	10^{-15} m

[a]Το μέγεθος που αναφέρεται εδώ είναι η δύναμη (σε newton) ανάμεσα σε δύο πρωτόνια που βρίσκονται σε απόσταση ίση με τη διάμετρο τους 2×10^{-15} m.

Βάρος

Βαρυτική δύναμη: η αμοιβαία έλξη μεταξύ όλων των μαζών, η ασθενέστερη μεταξύ των τεσσάρων (μεταξύ δύο πρωτονίων ενός πυρήνα είναι 10^{-34} N περίπου).

Βάρος: **εξωγενής ιδιότητα** ενός σώματος, μετρά δηλαδή την έλξη της βαρύτητας σε ένα σώμα, είναι δηλαδή δύναμη, **w = mg** (μονάδες: N, lbf)

Μάζα: **ενδογενής ιδιότητα** ενός σώματος, μετρά την αντίσταση (αδράνεια) με την οποία ένα σώμα αντιστέκεται στις μεταβολές της κίνησής του.

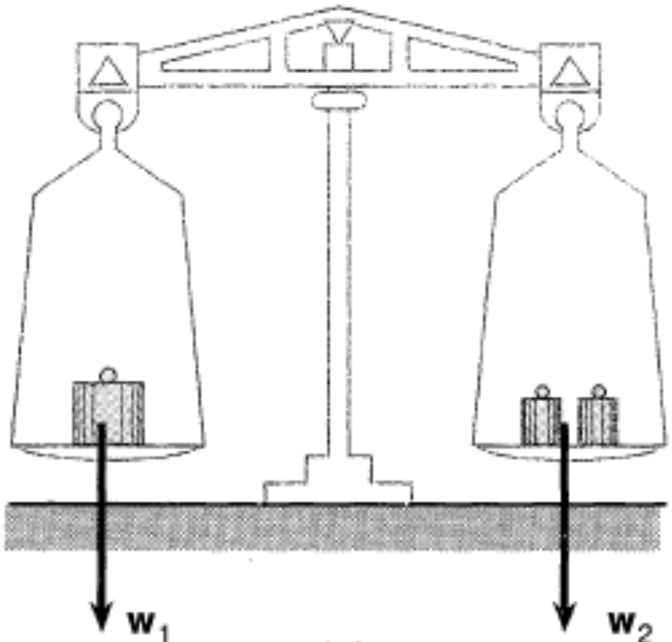
Παράδειγμα: Ποιο είναι το βάρος ενός άνδρα 74 kg (163 lb)?

Λύση: $w = mg = 74\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 726\ \text{N}$

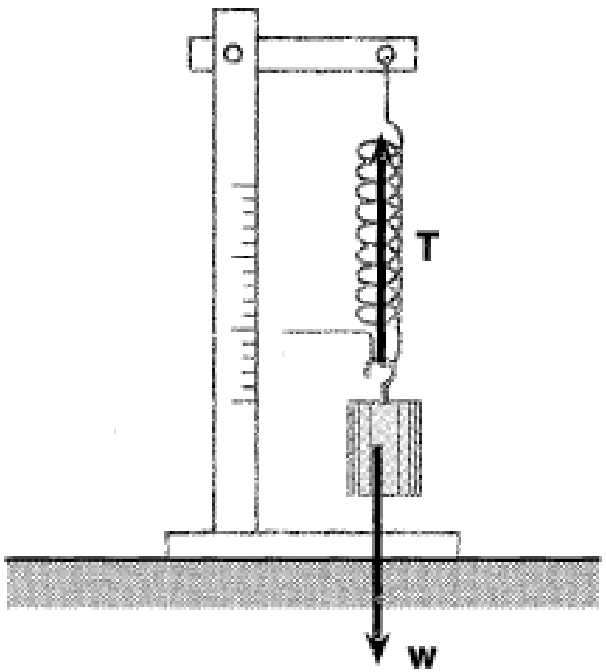
$w = mg = 163\ \text{lb} \times 32{,}2\ \text{ft/s}^2 = 5248{,}6\ \text{lb ft/s}^2 = 163\ \text{lbf}$

Σύγχιση Καθημερινή χρήση εννοιών βάρους αντί για μάζας (εξαίρεση η Ρωσία –macca)

Ζυγοί, τι μετρούν?



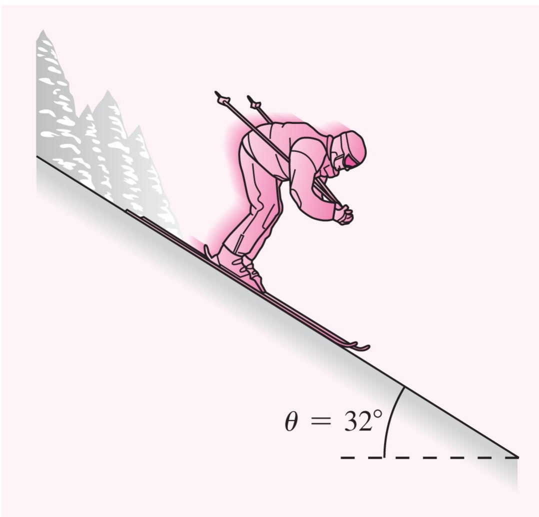
(a)



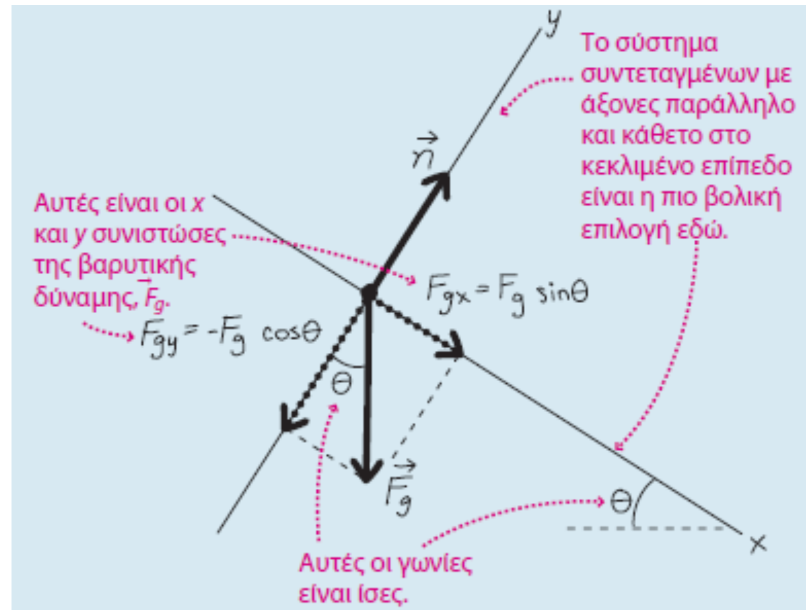
(b)

Ένα τυπικό πρόβλημα: Ποια είναι η επιτάχυνση του σκιέρ; Ποια είναι η δύναμη που ασκείται στον σκιέρ από το χιόνι;

- Διάγραμμα:

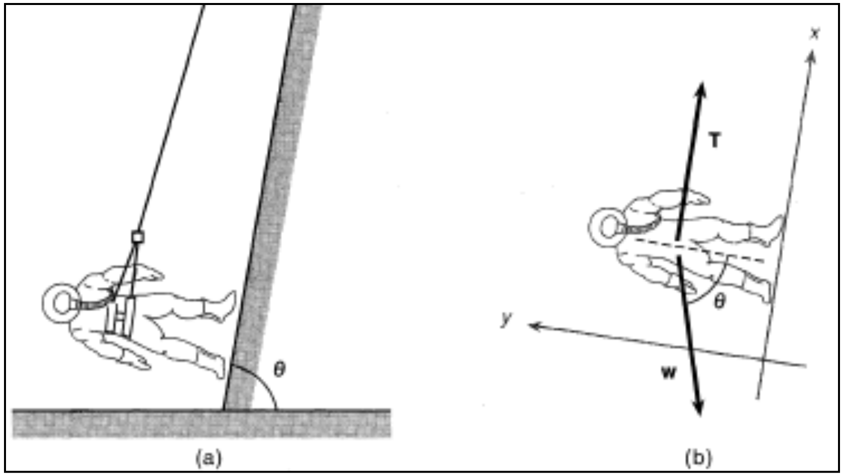


- Διάγραμμα ελεύθερου σώματος:



- Νόμος του Νεύτωνα: $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{n} + \vec{F}_g = m\vec{a}$
- Σε συνιστώσες:
  - Συνιστώσα x: $mg \sin\theta = ma$
  - Συνιστώσα y: $n - mg \cos\theta = 0$
- Επιλύουμε (με m = 65 kg και θ = 32°) για να βρούμε τις απαντήσεις:
  - $a = g \sin\theta = (9{,}8 \text{ m/s}^2) \sin 32° = 5{,}2 \text{ m/s}^2$
  - $n = mg \cos\theta = (65 \text{ kg})(9\mu 8 \text{ m/s}^2)\cos 32° = 540 \text{ N}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Κατά την προετοιμασία τους να περπατήσουν υπό συνθήκες μικρής βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης, οι αστροναύτες της NASA εκπαιδεύονταν σ' έναν προσομοιωτή Σελήνης, που αποτελείτο από ένα κεκλιμένο επίπεδο στο οποίο μπορούσαν να βαδίζουν ενώ βαστάζονταν από μια ζώνη (Σχ. 6.5a). Υποθέστε ότι η έλξη της ζώνης είναι παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο. Πόση πρέπει να είναι η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου εάν οι δυνάμεις οι κάθετες προς το επίπεδο πρόκειται να προσομοιάσουν τις συνθήκες της Σελήνης; Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης είναι $g_{Moon} = 1,6\ m/s^2$.



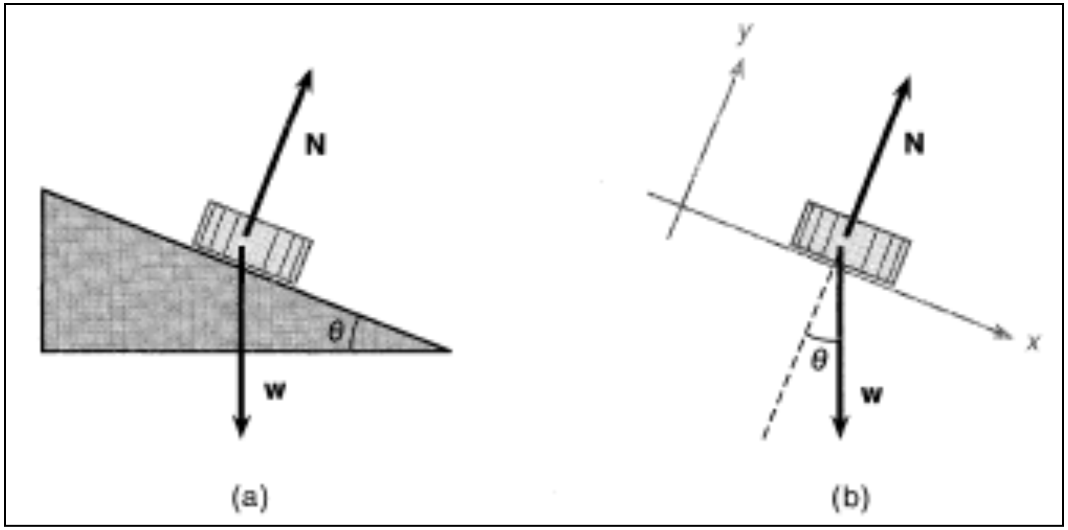
$w_x = -mg\ \sin\theta$, $w_y = -mg\ \cos\theta$

$T = w_x$

Άρα μόνο η συνιστώσα w_y προκαλεί επιτάχυνση κατά τη διεύθυνση y ίση με :

$\alpha_y = w_y/m = -g\cos\theta = -g_{moon} \rightarrow \cos\theta = 1,6/9,8 = 0,16 \rightarrow \theta = 81^0$

Κίνηση υπό σταθερή δύναμη
(κίνηση σώματος χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο)



Διάγραμμα «ελεύθερου σώματος»

(δείχνει το σώμα και όλες τις δυνάμεις που δρουν πάνω του)

$N_x = 0$

$w_x = mg\ \sin\theta,$

$F_x = N_x + w_x = mg\ \sin\theta$

$\alpha_x = F_x/m = g\ \sin\theta$

$N_y = N$

$w_y = -mg\ \cos\theta$

$F_y = N_y + w_y = N - mg\ \cos\theta$

$\alpha_y = F_y/m = N/m - g\ \cos\theta$

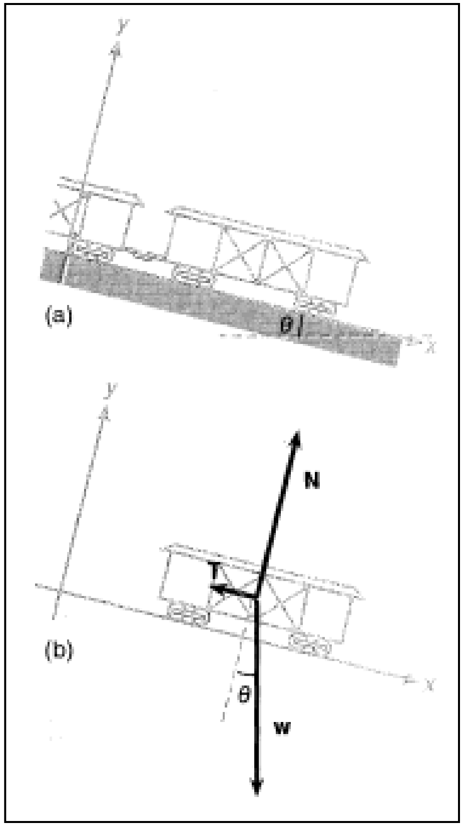
- για θ=0 (οριζόντιο επίπεδο) η επιτάχυνση είναι 0
- ενώ για $\theta=90^0$ (κατακόρυφο επίπεδο) η επιτάχυνση είναι η ίδια με αυτήν του ελεύθερου σώματος

Κίνηση υπό σταθερή δύναμη
(κίνηση σώματος χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Η πιο επικλινής σιδηροδρομική γραμμή του κόσμου, που βρίσκεται στη Γουατεμάλα, έχει κλίση 1:11 (Σχ. 6.7a). Πόση δύναμη απαιτείται για να κινηθεί ένα βαγόνι 20 μετρικών τόννων με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος αυτής της γραμμής; Αμελήστε τις τριβές και θεωρήστε την κίνηση του βαγονιού ως κίνηση σωματιδίου.

ΛΥΣΗ: Οι δυνάμεις που δρουν στο βαγόνι είναι το βάρος **w**, η κάθετη δύναμη **N**, και η δύναμη **T** που έλκει το βαγόνι κατά μήκος της γραμμής. Στο Σχ. 6.7b φαίνονται αυτές οι δυνάμεις σε διάγραμμα "ελευθέρου σώματος". Για ευκολία όλες οι δυνάμεις σχεδιάστηκαν σαν να δρούσαν στο κέντρο του βαγονιού (η μεταφορική κίνηση του βαγονιού είναι κίνηση σωματιδίου, και γι' αυτή την κίνηση δεν έχει σημασία πού δρουν οι δυνάμεις).

Η ολική δύναμη **F** είναι το διανυσματικό άθροισμα $\mathbf{w}+\mathbf{N}+\mathbf{T}$. Με τους άξονες των συντεταγμένων, όπως φαίνονται στο Σχ. 6.7 οι συνιστώσες x και y της ολικής δύναμης είναι



$$F_x = mg\sin\theta - T$$

$$F_y = -mg\cos\theta + N$$

Αφού η επιτάχυνση υποτίθεται ότι είναι μηδέν, $F_x = 0$ και συνεπώς,

$$T = mg\sin\theta$$

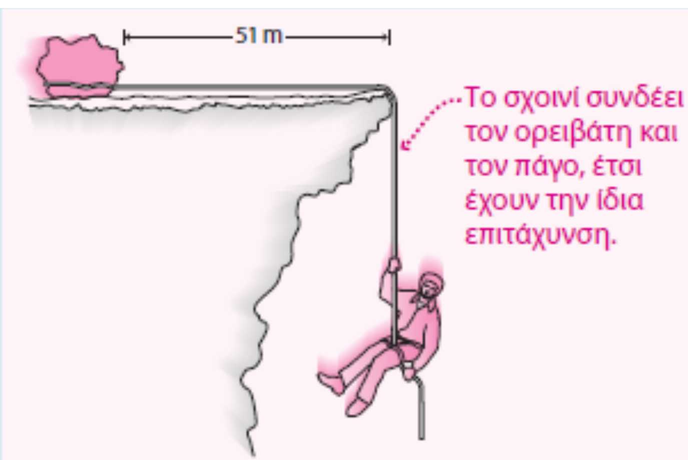
Για κλίση 1:11, η γωνία θ είναι $\theta = \tan^{-1}(1/11) = 5{,}19°$. Επομένως,

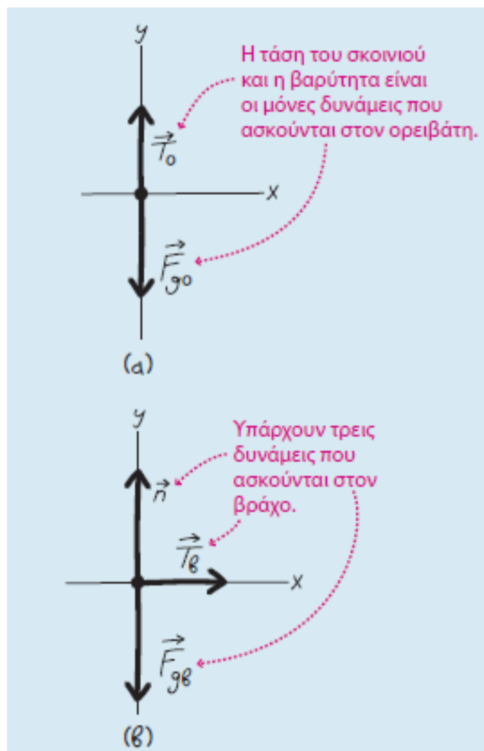
$$T = 20\times10^3\ \text{kg}\times 9{,}81\ \text{m/s}^2\times\sin 5{,}19°$$

$$= 1{,}78\times10^4\ \text{N}$$

Πολλαπλά σώματα

- Επιλύουμε προβλήματα που περιλαμβάνουν πολλαπλά σώματα, προσδιορίζοντας αρχικά κάθε σώμα και όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε καθένα από αυτά
- Σχεδιάζουμε ένα διάγραμμα ελεύθερου σώματος για κάθε σώμα
- Γράφουμε τον νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα
- Προσδιορίζουμε τις συνδέσεις μεταξύ των σωμάτων, οι οποίες καθορίζουν τις ποσότητες στις εξισώσεις του νόμου του Νεύτωνα
- Επιλύουμε





- Νόμος του Νεύτωνα:

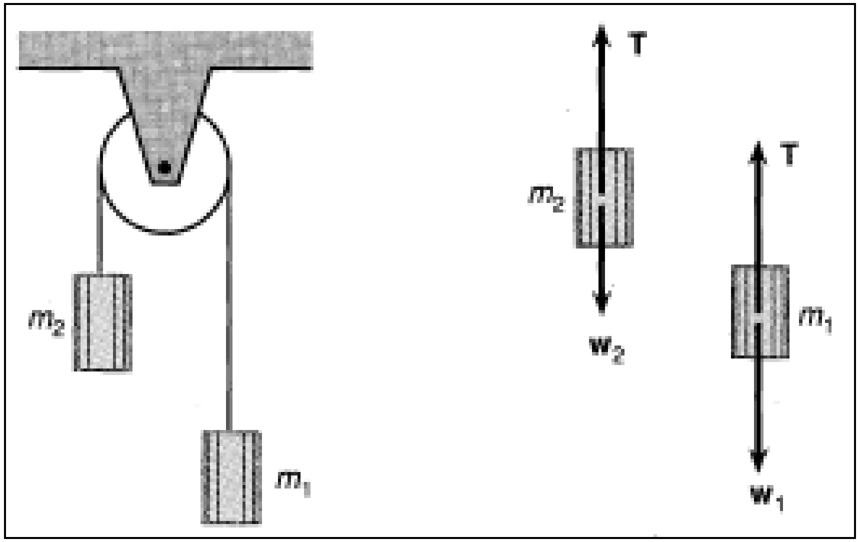
$$\text{ορειβάτης:} \quad \vec{T}_o + \vec{F}_{go} = m_o \vec{a}_o$$
$$\text{βράχος:} \quad \vec{T}_\beta + \vec{F}_{g\beta} + \vec{n} = m_\beta \vec{a}_\beta$$

- Σε συνιστώσες:

$$\text{ορειβάτης}, y: \quad T - m_o g = -m_o a$$
$$\text{βράχος}, x: \quad T = m_\beta a$$
$$\text{βράχος}, y: \quad n - m_\beta g = 0$$

- Λύση: $a = \dfrac{m_o g}{m_o + m_\beta}$

Κίνηση υπό σταθερή δύναμη
(κίνηση σώματος χωρίς τριβές με τροχαλία



Νήμα και τροχαλίες αβαρείς

Ελεύθερη περιστροφή τροχαλίας (χωρίς τριβές)

Το νήμα μεταφέρει την τάση από τη μια μάζα στην άλλη

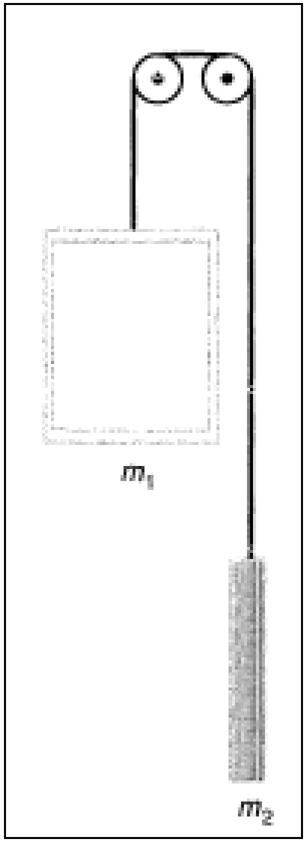
$m_1a_1 = T - m_1g$ (1) $m_2a_2 = T - m_2g$ (2) $a_1 = -a_2$ (3)

$$\boxed{a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g}$$

μηδενική επιτάχυνση αν οι δύο μάζες είναι ίσες

$$\boxed{T = \frac{2\, g m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ενας ανελκυστήρας αποτελείται από ένα θαλαμίσκο 900 kg (όταν είναι άδειος) και ένα αντίβαρο 990 kg, συνδεδεμένο με καλώδιο που περνάει από δύο τροχαλίες (Σχ. 6.9). Αμελήστε τις μάζες του καλωδίου και των τροχαλιών. (a) Πόση είναι η προς τα πάνω επιτάχυνση του θαλαμίσκου αν οι τροχαλίες αφεθούν να περιστραφούν ελεύθερα; Πόση είναι η τάση του καλωδίου; (b) Πόση είναι η τάση του καλωδίου αν οι τροχαλίες ακινητοποιηθούν (με τη βοήθεια φρένου) έτσι, ώστε ο ανελκυστήρας να ακινητοποιηθεί;



ΛΥΣΗ: (a) Ο ανελκυστήρας με το αντίβαρο είναι ισοδύναμος με σύστημα δύο μαζών m_1 και m_2 συνδεδεμένων με νήμα που διέρχεται από τροχαλία, όπως αναπτύχθηκε παραπάνω. Με $m_1 = 900$ kg και $m_2 = 990$ kg, η Εξ. (15) δίνει

$$\boxed{a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g} \qquad a_1 = \frac{990\text{ kg} - 900\text{ kg}}{990\text{ kg} + 900\text{ kg}} g = \frac{90}{1890} g$$

$$= 0{,}048\, g = 0{,}47\text{ m/s}^2$$

και η Εξ. (16) δίνει

$$\boxed{T = \frac{2\, g m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \qquad T = \frac{2\, g \times 900\text{ kg} \times 990\text{ kg}}{900\text{ kg} + 990\text{ kg}} = 9{,}2 \times 10^3\text{ N}$$

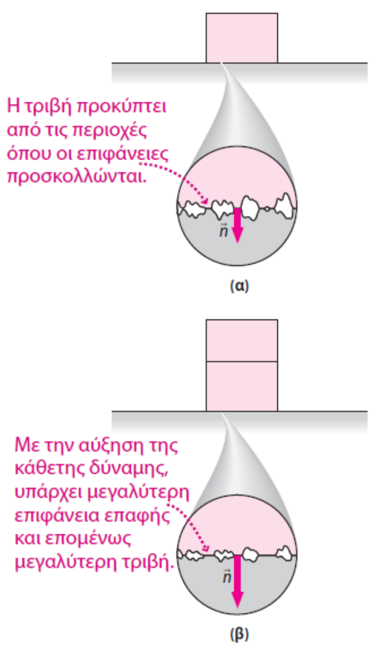
(b) Αν οι τροχαλίες ακινητοποιηθούν, η τάση του καλωδίου από το ένα και από το άλλο μέρος των τροχαλιών θα είναι ίσες με το βάρος που κρέμεται από την αντίστοιχη πλευρά. Επομένως,

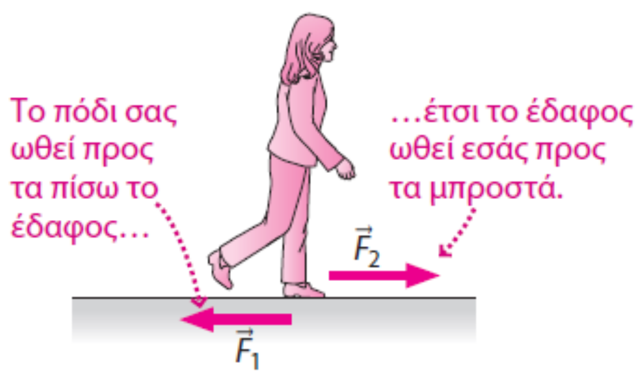
$$T_1 = m_1 g = 8{,}8 \times 10^3\text{ N} \qquad \text{και} \qquad T_2 = m_2 g = 9{,}7 \times 10^3\text{ N}$$

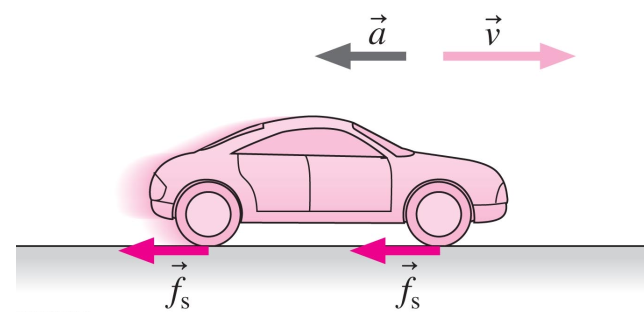
Τριβή

- **Τριβή** είναι μια δύναμη που αντιτίθεται στη σχετική κίνηση δύο επιφανειών οι οποίες έρχονται σε επαφή
- Η **στατική τριβή** προκύπτει όταν οι επιφάνειες δεν κινούνται. Το μέτρο της είναι $f_s \geq \mu_s n$, όπου n η κάθετη δύναμη μεταξύ των επιφανειών και μ_s ο **συντελεστής της στατικής τριβής**
- Η **κινητική τριβή (τριβή ολίσθησης)** προκύπτει μεταξύ δύο επιφανειών που κινούνται. Το μέτρο της είναι $f_k = \mu_k n$.

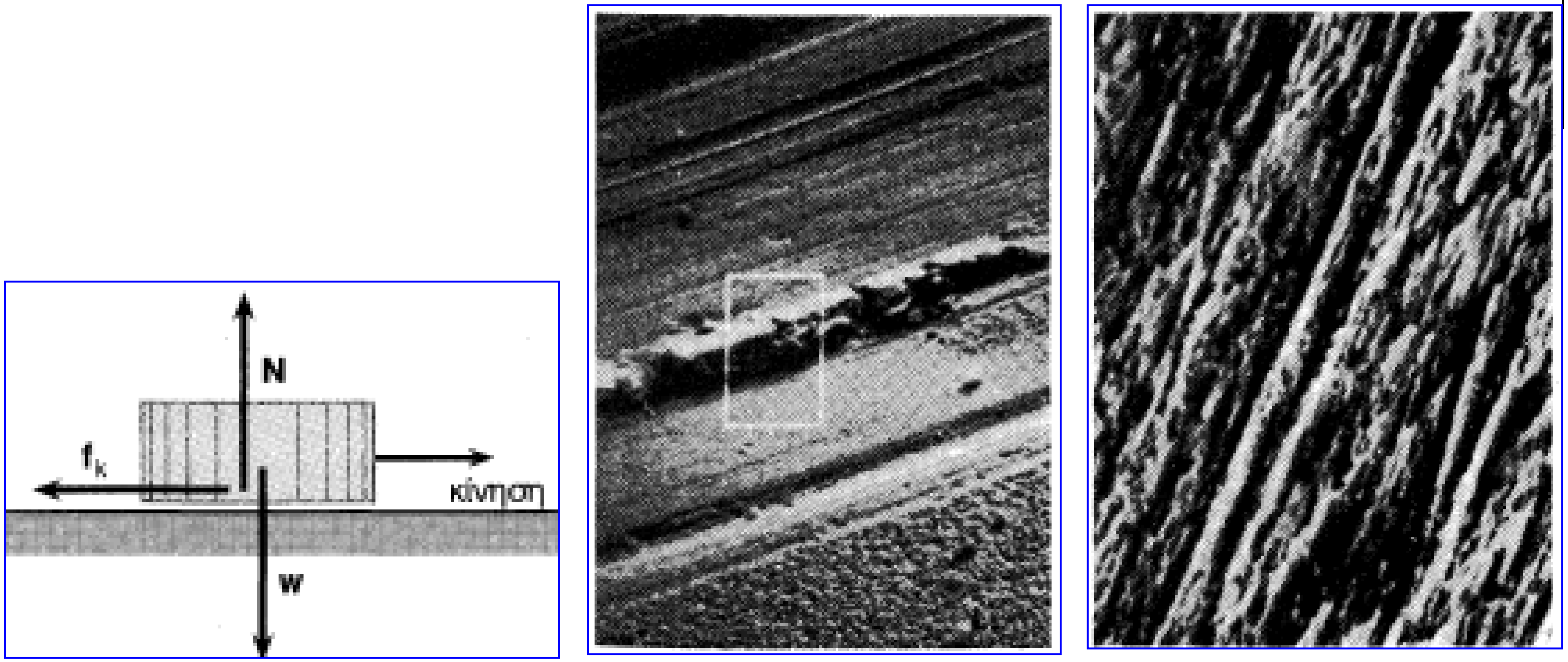
Η τριβή παίζει σημαντικό ρόλο στο περπάτημα, την οδήγηση και σε πολλές ακόμα εφαρμογές:







Τριβή



Σχήμα. Δυνάμεις που ασκούνται σε τούβλο που ολισθαίνει πάνω σε πλάκα (**αριστερά**). Θραύσματα μαλακού χάλυβα που προσκολλώνται στην επιφάνεια σκληρού χάλυβα ενός ρουλεμάν, μεγέθυνση 1600× (**κέντρο**). Επιφάνεια ενός λεπτογυαλισμένπυ, κατοπτρικά λείου ρουλεμάν από χάλυβα υπό μεγέθυνση 3300× (**δεξιά**)

Κινητική τριβή

Το μέτρο της δύναμης τριβής ανάμεσα σε μη λιπανθείσες, ξηρές επιφάνειες, όταν η μία ολισθαίνει απάνω στην άλλη, είναι ανάλογο προς την κάθετη δύναμη που συμπιέζει τις επιφάνειες και είναι ανεξάρτητο τόσο από την (μακροσκοπική) επιφάνεια επαφής όσο και από τη σχετική ταχύτητα.

Εμπειρικός νόμος Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci, *1452–1519, Ιταλός καλλιτέχνης, μηχανικός και επιστήμονας. Φημισμένος για τα λαμπρά επιτεύγματα του στη ζωγραφική, γλυπτική και αρχιτεκτονική, ο Leonardo συνεισέφερε πρωτοποριακά και στην επιστήμη. Η ακόρεστη περιέργεια του τον οδήγησε στο να διερευνήσει προβλήματα στα μαθηματικά, στη μηχανική, στην υδραυλική, στη γεωλογία, στη βοτανική και στην ανατομία. Οι έρευνες του Leonardo στην τριβή είχαν ξεχαστεί και οι νόμοι της τριβής ξαναανακαλύφθηκαν 200 χρόνια αργότερα από τον Guillaume Amontons, Γάλλο φυσικό.*

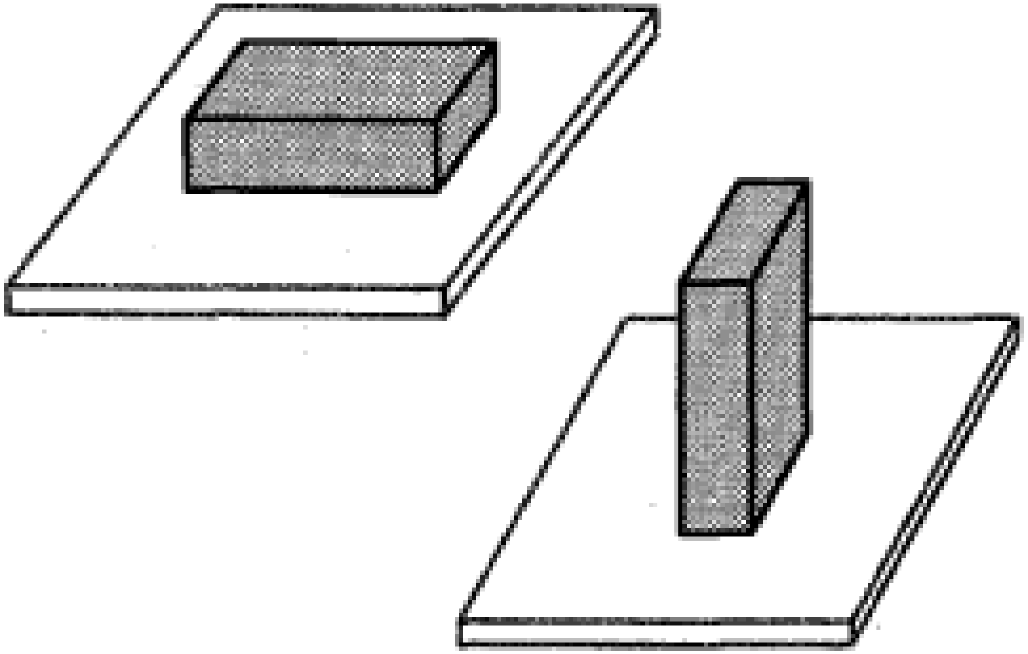
Η τριβή μεταξύ επιφανειών που βρίσκονται σε σχετική κίνηση ονομάζεται **κινητική τριβή** (ή τριβή ολίσθησης). Σύμφωνα με τον παραπάνω νόμο, η δύναμη της κινητικής τριβής μπορεί να γραφεί μαθηματικά ως

$$\boxed{f_k = \mu_k N} \tag{17}$$

όπου μ_k είναι ο **συντελεστής κινητικής τριβής**, μια σταθερά χαρακτηριστική τα υλικά που βρίσκονται σ' επαφή.

Σημειώστε ότι η Εξ. (17) δηλώνει ότι τα *μέτρα* των δυνάμεων $\mathbf{f}_k$ και $\mathbf{N}$ είναι ανάλογα· η *φορά* αυτών των δυνάμεων, όμως, είναι πολύ διαφορετική: η $\mathbf{N}$ είναι κάθετος προς την επιφάνεια επαφής και η $\mathbf{f}_k$ είναι παράλληλη προς την επιφάνεια επαφής, με φορά αντίθετη προς τη φορά της κίνησης.

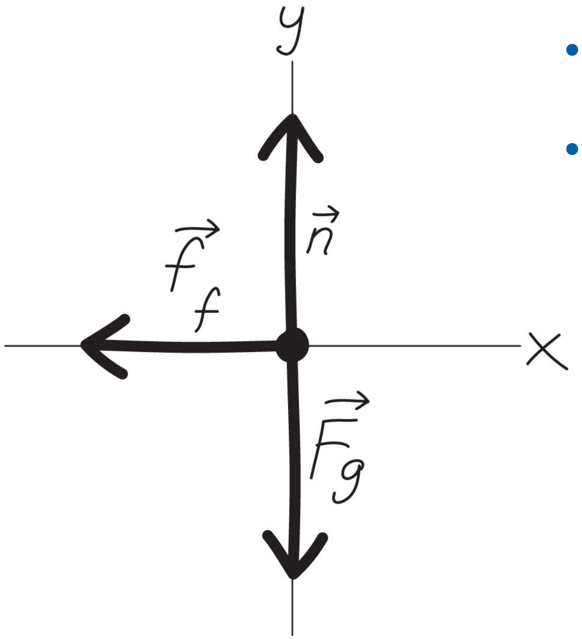
Κινητική τριβή



Δύναμη τριβής ανεξάρτητη από την επιφάνεια επαφής

Επίλυση προβλημάτων τριβής

- Τα προβλήματα που σχετίζονται με την τριβή δεν διαφέρουν από τα άλλα προβλήματα που αφορούν τον νόμο του Νεύτωνα
- Προσδιορίζουμε τις δυνάμεις, σχεδιάζουμε ένα διάγραμμα ελεύθερου σώματος, γράφουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα
- Πρέπει να συσχετίσουμε τις συνιστώσες της δύναμης σε δύο κατακόρυφες κατευθύνσεις, ακολουθώντας την κάθετη δύναμη και τη δύναμη τριβής
- Παράδειγμα: Σταματώντας ένα αυτοκίνητο: Ποια είναι η επιτάχυνση;



- Νόμος του Νεύτωνα: $\vec{F}_g + \vec{n} + \vec{f}_s = m\vec{a}$
- Σε συνιστώσες: $x: -\mu n = ma_x$

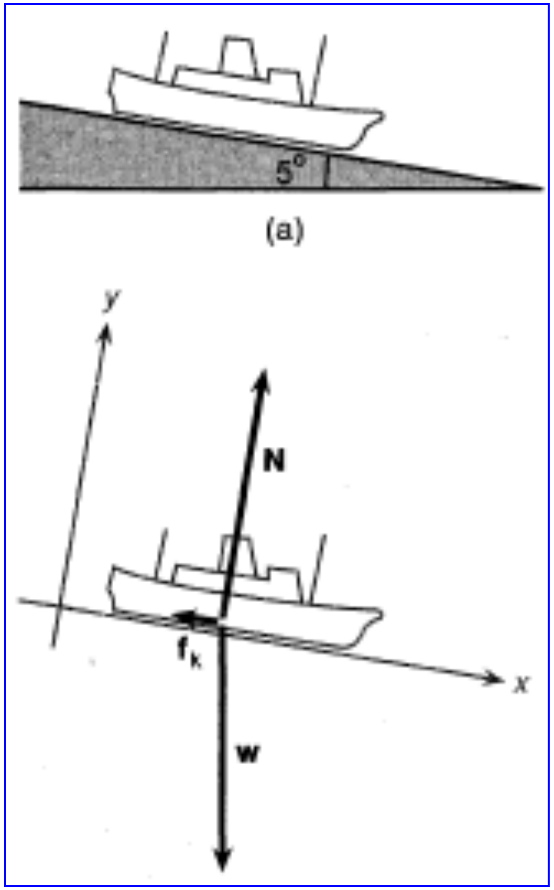
$$y: -mg + n = 0$$

- Επίλυση ως προς *a*:

η εξίσωση y δίνει $n = mg$,

έτσι, η εξίσωση x δίνει $a_x = -\dfrac{\mu n}{m} = -\mu g$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Κατά την καθέλκυση του ένα πλοίο ολισθαίνει σε εσχάρα που σχηματίζει γωνία 5° με την οριζόντιο (Σχ. 6.14a). Ο συντελεστής κινητικής τριβής α-νάμεσα στον πυθμένα του πλοίου και στην εσχάρα είναι $\mu_k = 0{,}08$. Πόση είναι η επι-τάχυνση του πλοίου κατά μήκος της εσχάρας;



$N = mg\cos\theta$

$f_\kappa = \mu_\kappa N = \mu_\kappa mg\cos\theta$

$F_x = w_x - f_\kappa = mg\sin\theta - \mu_\kappa mg\cos\theta \rightarrow$

$\rightarrow ma_x = mg\sin\theta - \mu_\kappa mg\cos\theta \rightarrow$

$\rightarrow a_x = g(\sin\theta - \mu_\kappa\cos\theta) = g(\sin 5^0 - 0{,}08\cos 5^0) = 0{,}073\ m/s^2$

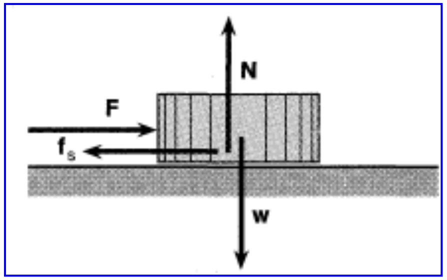
Στατική τριβή

Η τριβή ανάμεσα σε επιφάνειες που ηρεμούν

Το μέτρο της μέγιστης δύναμης τριβής ανάμεσα σε μη λιπανθείσες ξηρές επιφάνειες που ηρεμούν είναι ανάλογο προς την κάθετη δύναμη και α-νεξάρτητο από τη (μακροσκοπική) επιφάνεια επαφής.

Ισχύει παρόμοιος εμπειρικός νόμος

$$f_s \leq \mu_s N$$



όπου μ_s είναι ο **συντελεστής στατικής τριβής**, ο οποίος εξαρτάται από τα υ-λικά. Η διεύθυνση της $\mathbf{f}_{s,max}$ είναι παράλληλη προς την επιφάνεια, με φορά που αντιτίθεται στην εγκάρσια ώθηση που προσπαθεί να κινήσει το σώμα

Για τα περισσότερα υλικά $\mu_s > \mu_k$ και, ως εκ τούτου, η μέγιστη στατική δύναμη τριβής είναι μεγαλύτερη από την κινητική δύναμη τριβής. Τούτο υ-πονοεί ότι αν η εγκάρσια ώθηση που ασκείται στο σώμα είναι αρκετά με-γάλη, ώστε να υπερνικήσει τη στατική τριβή για ν' αρχίσει το σώμα να κι-νείται, είναι μεγαλύτερη από αυτή που χρειάζεται για ν' αντισταθμίσει τη μετέπειτα αναπτυσσόμενη κινητική τριβή και, ως εκ τούτου θα επιταχύνει συνεχώς το σώμα.

Κινητική τριβή

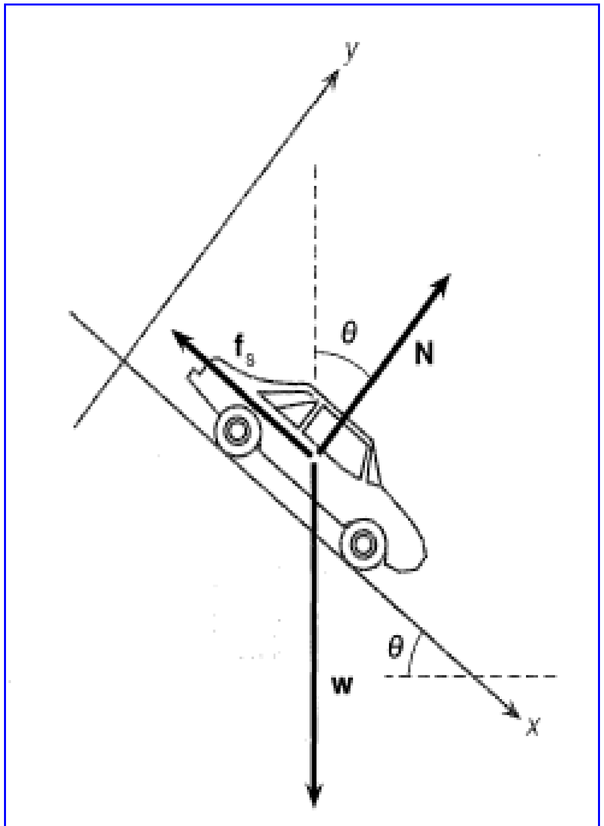
Πίνακας. Συντελεστές κινητικής και στατικής τριβής.

Υλικά	μ_k	μ_s
Χάλυβας με χάλυβα	0,6	0,7
Χάλυβας με μόλυβδο	0,9	0,9
Χάλυβας με χαλκό	0,4	0,5
Χαλκός με χυτοσίδηρο	0,3	1,1
Χαλκός με γυαλί	0,5	0,7
Κερωμένα σκι σε πάγο		
– 10° C	0,2	0,2
0° C	0,05	0,1
Καουτσούκ με μπετόν	~ 1	~ 1

*Ο συντελεστής τριβής εξαρτάται από την κατάσταση των επιφανειών. Οι τιμές σ' αυτό τον πίνακα είναι τυπικές για μη λιπανθείσες ξηρές επιφάνειες, δεν πρέπει όμως να τις εμπιστευόμαστε στα τυφλά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Ο συντελεστής στατικής τριβής σκληρού ελαστικού με την επιφάνεια του εδάφους είναι $\mu_s = 0{,}8$. Πόση είναι η μεγαλύτερη κλίση ενός δρόμου στον οποίο ένα αυτοκίνητο με ρόδες απ' αυτό το ελαστικό (και με τους τροχούς του ακινητοποιημένους) μπορεί να ηρεμεί χωρίς ολίσθηση;

ΛΥΣΗ: Το διάγραμμα "ελευθέρου σώματος" φαίνεται στο Σχ. 6.17. Η γωνία θ υποτίθεται ότι έχει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή, η δύναμη τριβής έχει τη μέγιστη τιμή $f_{s,\max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$. Η συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο είναι



$$F_x = w_x - f_{s,\max}$$

$$= mg\sin\theta - \mu_s mg\cos\theta$$

Για να παραμείνει στάσιμο το αυτοκίνητο, $F_x = 0$ και

$$0 = mg\sin\theta - \mu_s mg\cos\theta$$

ή

$$\mu_s = \tan\theta$$

Με $\mu_s = 0{,}8$, παίρνουμε $\theta = 39°$ ή κλίση 4:5.

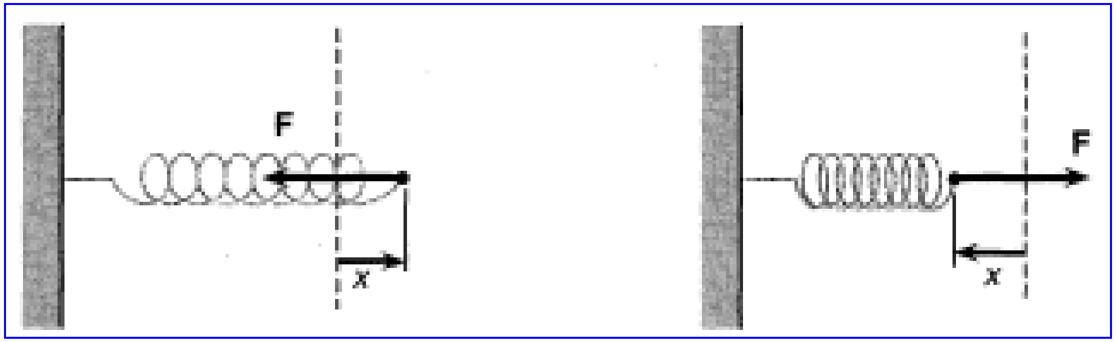
Δύναμη επαναφοράς ελατηρίου – Νόμος του Hook

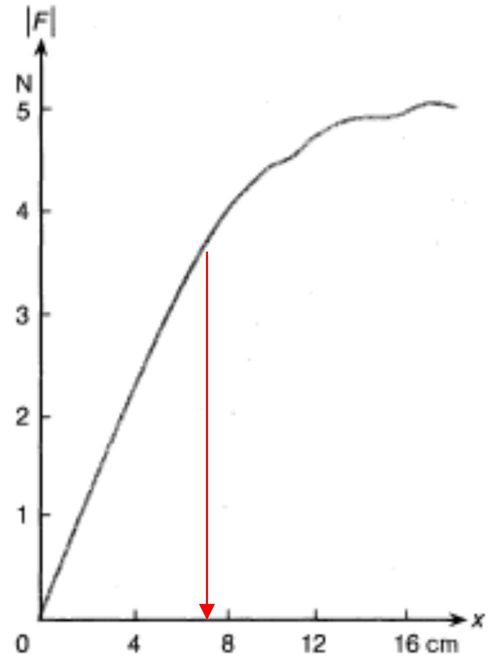
Ελαστικό σώμα: υφίσταται παραμόρφωση με την άσκηση δύναμης και επανέρχεται με την διακοπή άσκησης της δύναμης

Δύναμη επαναφοράς: δύναμη με την οποία ένα σώμα αντιστέκεται στην παραμόρφωση

Νόμος Hooke: Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι ανάλογο της παραμόρφωσης (k = σταθερά ελατηρίου, > 0)

$$\mathbf{F = -k \cdot x}$$





Δύναμη επαναφοράς ελατηρίου – Νόμος του Hook

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Στα χαρακτηριστικά του κατασκευαστή ενός σπειροειδούς ελατηρίου που χρησιμοποιείται στην εμπρόσθια ανάρτηση ενός αυτοκινήτου σπορ μάρκας Triumph αναφέρεται ότι το ελατήριο αποτελείται από 10 σπείρες με μήκος χαλάρωσης 0,316 m και μήκος 0,205 m όταν υπόκειται σε φορτίο 399 kg. Ποιά είναι η τιμή της σταθεράς του ελατηρίου;

ΛΥΣΗ: Η δύναμη επαναφοράς που εξισορροπεί το βάρος 399 kg είναι $F = 399\ \mathrm{kg} \times 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 3{,}91 \times 10^3\ \mathrm{N}$. Η αντίστοιχη μεταβολή μήκους είναι $x = 0{,}205\ \mathrm{m} - 0{,}316\ \mathrm{m} = -0{,}111\ \mathrm{m}$. Επομένως,

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{3{,}91 \times 10^3\ \mathrm{N}}{-0{,}111\ \mathrm{m}} = 3{,}52 \times 10^4\ \mathrm{N/m}$$

Δύναμη επαναφοράς ελατηρίου – Νόμος του Hook

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Εάν το ελατήριο του προηγουμένου παραδείγματος κοπεί σε δύο ίσα κομμάτια, ποιά θα είναι η τιμή της σταθεράς του ελατηρίου κάθε κομματιού;

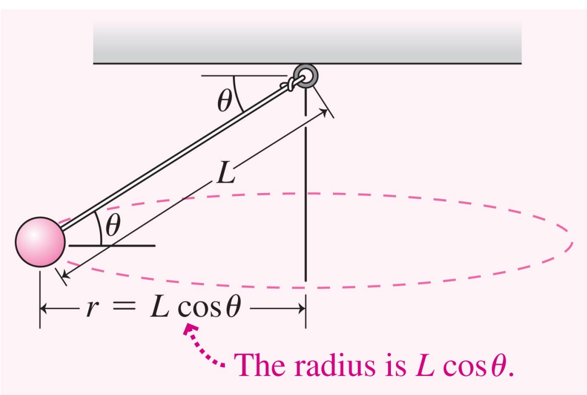
ΛΥΣΗ: Εάν το ελατήριο κοπεί σε δύο ίσα κομμάτια, η σταθερά του ελατηρίου για καθένα απ' αυτά θα έχει διπλάσια τιμή, δηλαδή, $k' = 7{,}04 \times 10^4$ N/m. Μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό αν παρατηρήσουμε ότι εάν ένα ελατήριο 5 σπειρών συμπιεστεί κατά, π.χ., 10 cm, κάθε σπείρα θα παραμορφωθεί κατά 2 cm· ενώ εάν ένα ελατήριο 10 σπειρών συμπιεστεί κατά 10 cm κάθε σπείρα θα παραμορφωθεί κατά 1 cm μόνο. Η δύναμη που απαιτείται για να παραμορφωθεί ένα ελατήριο κατά 2 cm είναι διπλάσια από τη δύναμη που απαιτείται για να παραμορφωθεί ένα ελατήριο κατά 1 cm. Συνεπώς, η σταθερά ελατηρίου του ελατηρίου των 5 σπειρών είναι διπλάσια από τη σταθερά ελατηρίου του ελατηρίου των 10 σπειρών.

ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Αυτό το παράδειγμα οδηγεί σ' ένα γενικό κανόνα: Εάν όλα τ' άλλα παραμείνουν τα ίδια, η σταθερά του ελατηρίου είναι αντιστρόφως ανάλογη προς τον αριθμό των σπειρών. Με αυτόν τον κανόνα μπορούμε να καταλάβουμε γιατί τα ελατήρια ανάρτησης ενός αυτοκινήτου μπορούν να σκληρύνουν όταν δύο γειτονικές σπείρες δεθούν με σφικτήρες έτσι, ώστε να εμποδίζεται η σχετική τους κίνηση. Ο σφικτήρας κάνει τις δύο σπείρες να δρουν ως μία, δηλαδή, μειώνει στην ουσία τον αριθμό των σπειρών.

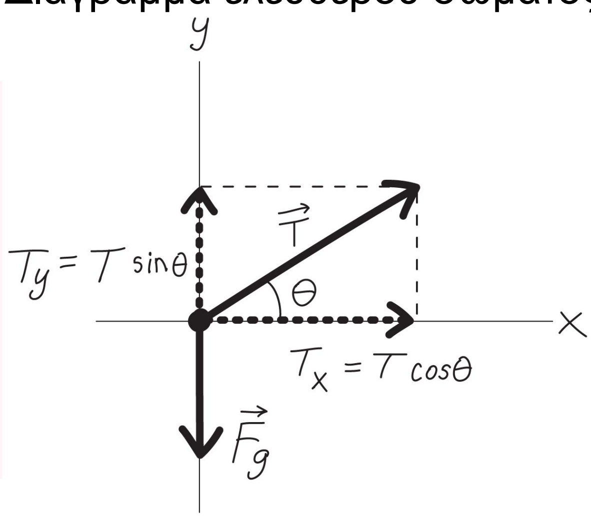
Κυκλική κίνηση

- Τα προβλήματα που περιλαμβάνουν κυκλική κίνηση δεν διαφέρουν από τα υπόλοιπα προβλήματα που σχετίζονται με τον νόμο του Νεύτωνα
- Στην ομαλή κίνηση η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου και μέτρο v^2/r
- Έτσι, το μέτρο της **δύναμης** σε ένα αντικείμενο μάζας *m* σε κυκλική κίνηση ακτίνας *r* είναι $F = ma = \dfrac{mv^2}{r}$
    - Αυτή η δύναμη ονομάζεται **κεντρομόλος δύναμη**

Μια μπάλα περιστρέφεται κρεμασμένη σε μια χορδή:



Διάγραμμα ελεύθερου σώματος:



- Νόμος του Νεύτωνα:

$$\vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

- Σε συνιστώσες:

$$x:\quad T\cos\theta = \frac{mv^2}{L\cos\theta}$$

$$y:\quad T\sin\theta - mg = 0$$

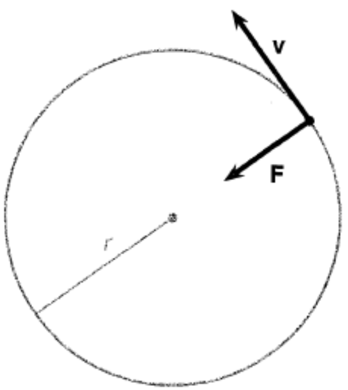
- Επίλυση ως προς την ταχύτητα της μπάλας:

$$v = \sqrt{\frac{TL\cos^2\theta}{m}} = \sqrt{\frac{(mg/\sin\theta)L\cos^2\theta}{m}} = \sqrt{\frac{gL\cos^2\theta}{\sin\theta}}$$

Δυναμική της ομοιόμορφης κυκλικής κίνησης

Οπως είδαμε στο Εδάφιο 4.4, η ομαλή κυκλική κίνηση είναι επιταχυνόμενη κίνηση με κεντρομόλο επιτάχυνση. Εάν η κίνηση συντελείται με ταχύτητα v κατά μήκος κύκλου ακτίνας r, το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι

$$a = v^2/r \tag{34}$$



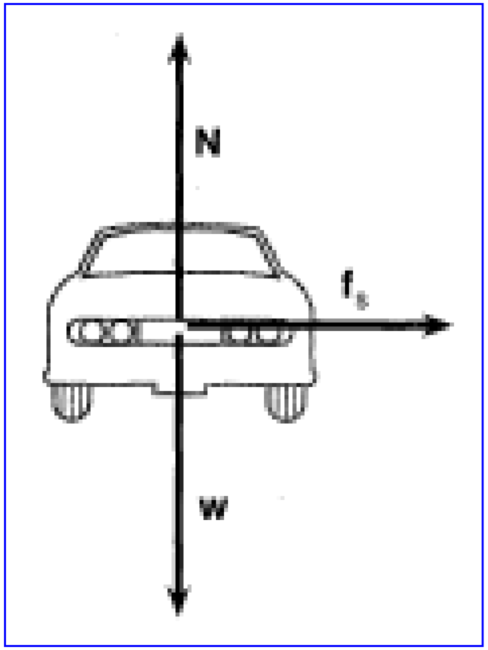
Το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που απαιτείται για να διατηρηθεί η ομαλή κυκλική κίνηση είναι

$$\boxed{F = ma = mv^2/r} \tag{35}$$

Αυτή η εξίσωση είτε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του μέτρου της δύναμης, εάν η ταχύτητα της κίνησης είναι γνωστή, είτε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει την ταχύτητα, εάν είναι γνωστή η δύναμη. Παραθέτουμε διάφορα παραδείγματα υπολογισμών με διάφορα είδη δυνάμεων.

Δυναμική της ομοιόμορφης κυκλικής κίνησης

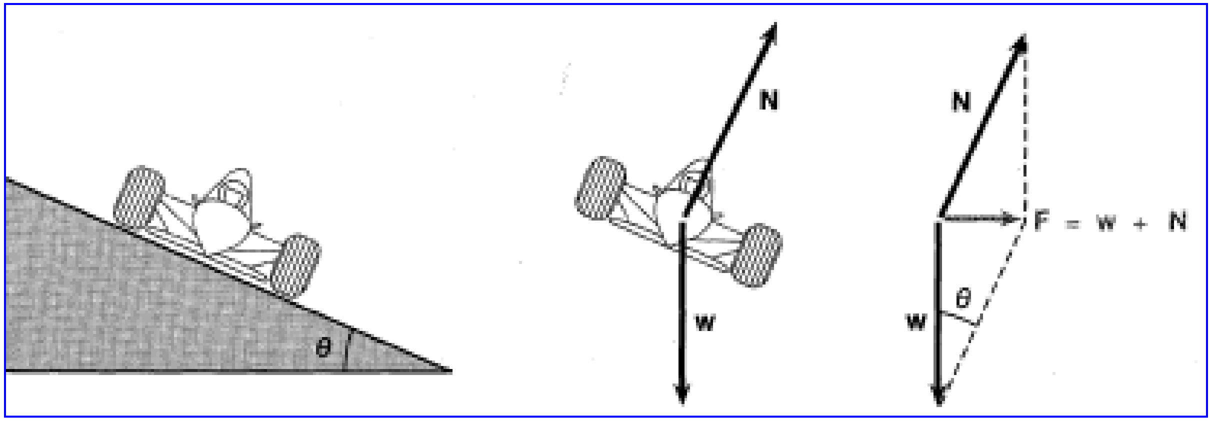
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία ένα αυτοκίνητο μπορεί να πάρει στροφή ακτίνας 100 m χωρίς να ντελαπάρει; Υποθέστε ότι ο δρόμος είναι οριζόντιος και ότι ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στα ελαστικά και στην επιφάνεια του δρόμου είναι $\mu_s = 0{,}8$.



$F_s = m\upsilon^2 / r$

$\mu_s\, mg = m\upsilon^2 / r \;\rightarrow\; \upsilon = [\mu_s g r]^{1/2} = 28 \text{ m/s}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Σε μια πίστα αγώνων στο Texas, μια επιχωματωμένη στροφή ακτίνας 500 m έχει εγκάρσια κλίση 22° (Σχ. 6.27a). Εάν ο οδηγός ενός αυτοκινήτου αγώνων δεν θέλει να βασιστεί στο κράτημα που προσφέρει η τριβή, με ποιά ταχύτητα θα πρέπει να πάρει τη στροφή;



$$w \tan\theta = mv^2/r$$

ή

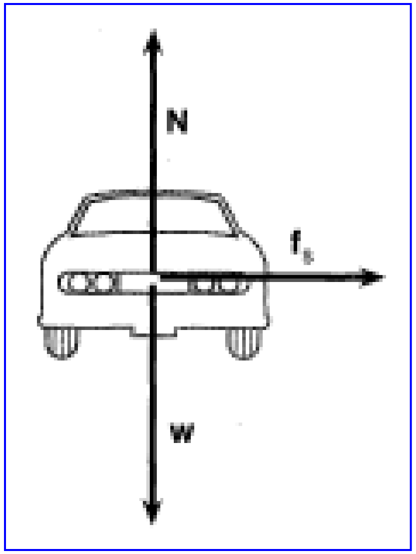
$$mg \tan\theta = mv^2/r$$

που δίνει

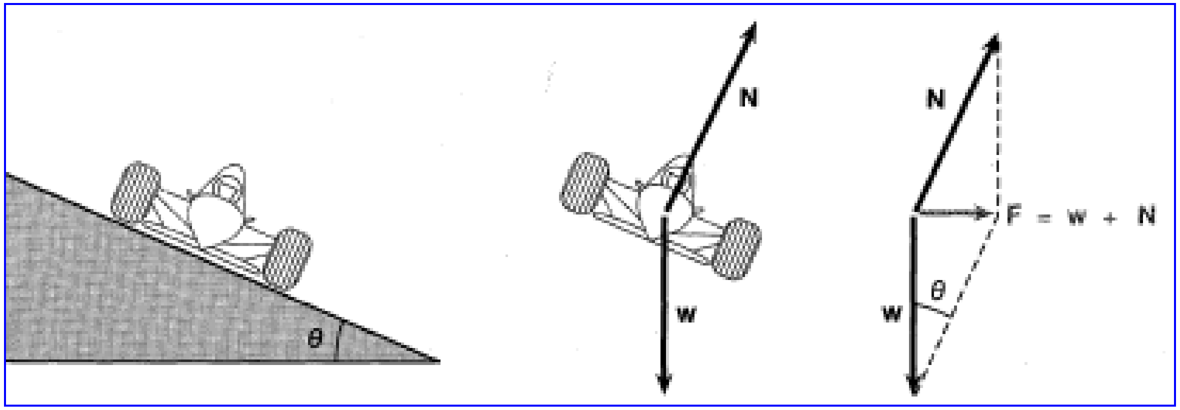
$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

$$= \sqrt{500\ \mathrm{m} \times 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \times \tan 22°}$$

$$= 44{,}5\ \mathrm{m/s}$$



$$\upsilon = [\mu_s\, g\, r]^{1/2}$$



$$\upsilon = [\tan\theta\, g\, r]^{1/2}$$

Φυγόκεντρος δύναμη (επεξήγηση)

Αυτοκίνητο σε επιτάχυνση σε ευθύγραμμο δρόμο

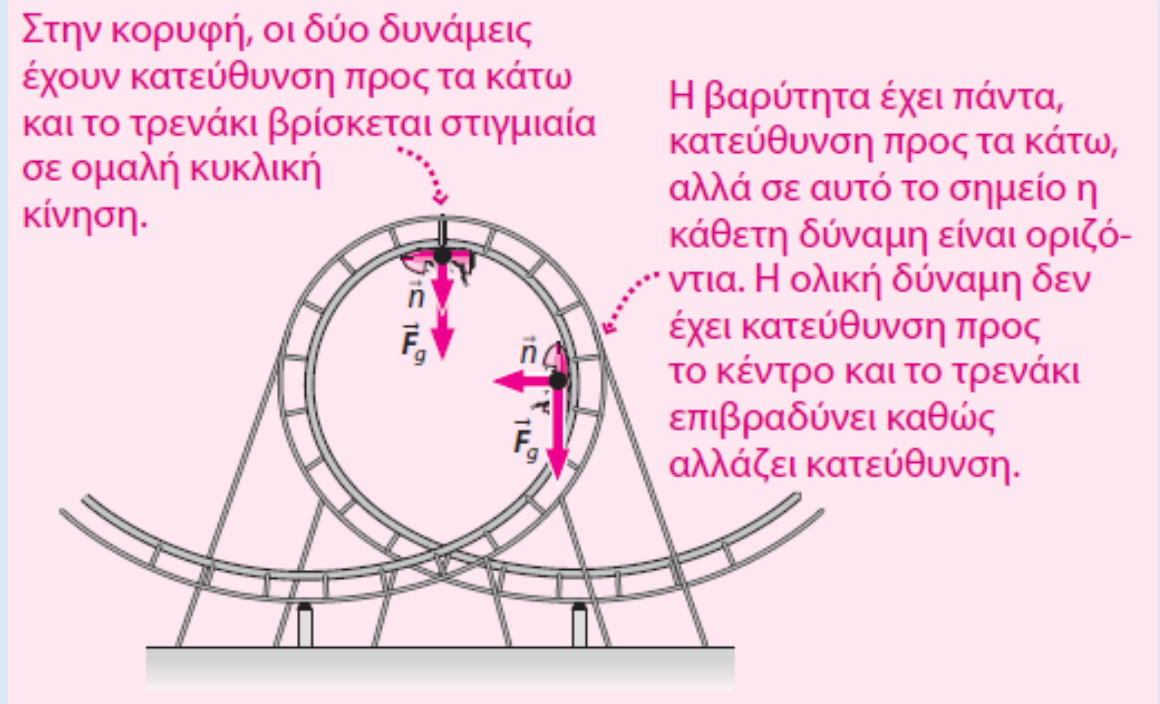
Εμείς πιέζουμε το μαξιλαράκι κεφαλής ή αυτό πιέζει το κεφάλι μας ;

Όταν το σώμα μας υποβάλλεται σε επιτάχυνση

το αίσθημα είναι ισοδύναμο με αυτό που προκαλείται από

ένα πρόσθετο, φαινομενικό βάρος του ιδίου μέτρου με αυτό της δύναμης αλλά με αντίθετη φορά

Τρενάκι



- Οι δύο δυνάμεις που δρουν στο τρενάκι:
  - Βαρύτητα
  - Κάθετη δύναμη
- Όταν το τρενάκι κινείται προς τα πάνω και έρχεται στο ίδιο επίπεδο με το κέντρο της λούπας, οι δύο δυνάμεις βρίσκονται σε δεξιά γωνία:
  - Η κάθετη δύναμη δρα κατακόρυφα στη διαδρομή που ακολουθεί το τρενάκι, κρατώντας αμετάβλητη την κατεύθυνση της κίνησης
  - Η βαρύτητα δρα αντίθετα από την ταχύτητα που έχει το τρενάκι, επιβραδύνοντάς το
  - Η ολική δύναμη *δεν* έχει κατεύθυνση προς το κέντρο

Νόμος του Νεύτωνα: $\vec{n} + \vec{F}_g = m\vec{a}$

Τρενάκι

- Στην κορυφή της διαδρομής, οι δύο δυνάμεις έχουν κατεύθυνση προς τα κάτω. Επιλέγοντας την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική, έχουμε

$$n_y = n, \; F_{gy} = mg \quad \Rightarrow \quad n + mg = \frac{mv^2}{r}$$

- Επιλύοντας ως προς v, παίρνουμε $v = \sqrt{(nr/m) + gr}$

- Για να διατηρήσει το τρενάκι την επαφή με την πίστα, η κάθετη δύναμη πρέπει να είναι μεγαλύτερη από μηδέν
- Επομένως, η ελάχιστη ταχύτητα είναι η ταχύτητα που επιτρέπει στην κάθετη δύναμη να βρίσκεται αυθαίρετα κοντά στο μηδέν στην κορυφή της διαδρομής
- Τότε, η βαρύτητα είναι η μόνη δύναμη που διατηρεί την κυκλική πορεία του σώματος

Τρενάκι

- Επομένως, ο νόμος του Νεύτωνα έχει μία συνιστώσα, με τη βαρυτική δύναμη *mg* να δίνει την επιτάχυνση v^2/r που κρατά το σώμα στην κυκλική τροχιά του:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad mg = \frac{mv^2}{r}$$

  - Επιλύοντας ως προς την ελάχιστη ταχύτητα στην κορυφή της διαδρομής, έχουμε $v = \sqrt{gr}$
  - Αν το τρενάκι κινηθεί με μικρότερη ταχύτητα στην κορυφή της διαδρομής, θα χάσει την επαφή με την πίστα!
  - Επειδή το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από τη μάζα, το τρενάκι και οι επιβάτες του θα συνεχίσουν την πορεία τους εφόσον $v \geq \sqrt{gr}$

Φυγόκεντρος δύναμη (επεξήγηση)

Άσκηση

Αεροπλάνο εκτελεί looping με υ = 200 m/s, σε ακτίνα 1,5 km. Ποιο το φαινόμενο βάρος του πιλότου στο ανώτερο και στο κατώτερο σημείο της περιστροφής?

Λύση

Στο κατώτερο σημείο:

$N - mg = m\upsilon^2/r \;\rightarrow\; N = mg + m\upsilon^2/r \;\rightarrow$

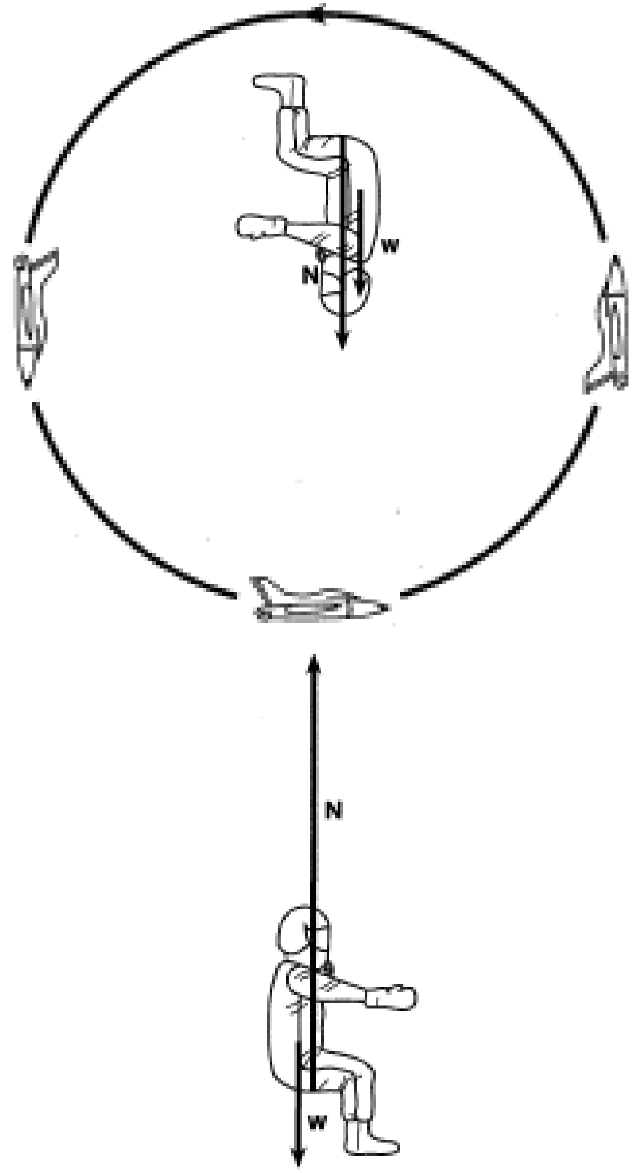
$\rightarrow N = mg\,(1 + \upsilon^2/gr) \rightarrow N = mg \times 3{,}7$

Στο ανώτερο σημείο:

$N + mg = m\upsilon^2/r \;\rightarrow\; N = -\,mg + m\upsilon^2/r \;\rightarrow$

$\rightarrow N = mg\,(-1 + \upsilon^2/gr) \rightarrow N = mg \times 1{,}7$

N: η κάθετη δύναμη που ασκείται από το κάθισμα



Σύνοψη

Οι τέσσερις θεμελιώδεις δυνάμεις: Βαρυτική, "ασθενής", ηλεκτρομαγνητική, "ισχυρή"

Βάρος: μέτρο: $w = mg$
φορά: Προς τα κάτω

Κινητική τριβή: $f_k = \mu_k N$

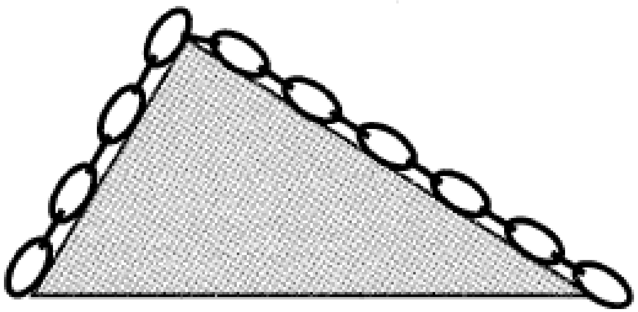
Στατική τριβή: $f_s \le \mu_s N$

Δύναμη επαναφοράς ελατηρίου (Νόμος του Hooke): $F = -kx$

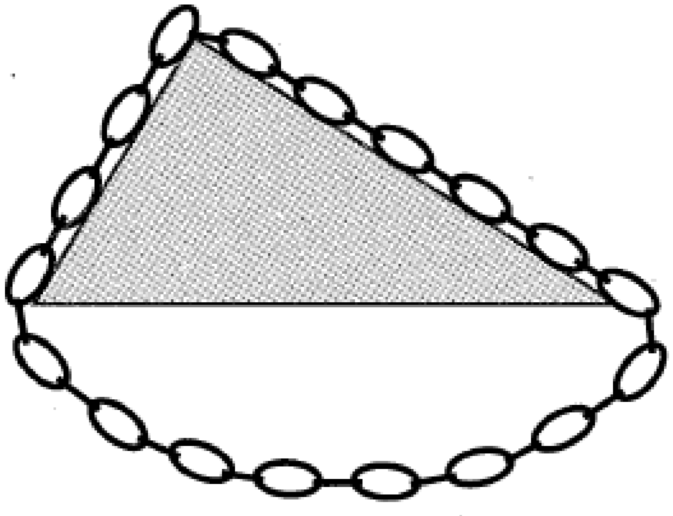
Δύναμη που απαιτείται για ομοιόμορφη κυκλική κίνηση: μέτρο: mv^2/r
φορά: Κεντρομόλος

Ερωτήσεις

13. Μία αλυσίδα κρέμεται, χωρίς τριβή, πάνω από δύο όμορα κεκλιμένα επίπεδα (Σχ. 6.30a). Αποδείξτε ότι η αλυσίδα ισορροπεί, δηλαδή, ότι η αλυσίδα δεν θα ολισθήσει ούτε προς τ' αριστερά ούτε προς τα δεξιά. [Βοήθημα: Μία μέθοδος απόδειξης, που οφείλεται στο μηχανικό και μαθηματικό του δέκατου έβδομου αιώνα Simon Stevin, σας προτείνει να προσποιηθείτε ότι ένα πρόσθετο τμήμα αλυσίδας κρέμεται από τα άκρα της αρχικής αλυσίδας (Σχ. 6.30b). Τούτο σας δίνει τη δυνατότητα ν' αποδείξετε ότι η αρχική αλυσίδα δεν θα ολισθήσει.]



(a)



(b)

Ερωτήσεις

14. Οπως φαίνεται από ένα σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με το κύμα, η κίνηση ενός αθλητή του σέρφιγκ μοιάζει με την κίνηση ενός χιονοδρόμου που κατέρχεται σε μια πλαγιά με τα σκι[4]. Εάν το κύμα επρόκειτο να διατηρηθεί παντονινά, θα μπορούσε ο αθλητής να το ιππεύει παντοτινά; Για να μπορέσει να παραμείνει στο κύμα επί όσο το δυνατό μακρότερο χρόνο, προς ποιά κατεύθυνση θα έπρεπε ο αθλητής να ιππεύει το κύμα;

15. Η υπερβολική λείανση μιας μεταλλικής επιφάνειας αυξάνει την τριβή της. Εξηγήστε το φαινόμενο.

16. Σε μερικούς οδηγούς αρέσει να "σπινάρουν" (οι τροχοί γυρίζουν επί τόπου) τους τροχούς των αυτοκινήτων τους για να ξεκινήσουν γρηγορότερα. Νομίζετε ότι αυτή η πρακτική τους προσφέρει μεγαλύτερη επιτάχυνση; (Βοήθημα: $\mu_s > \mu_k$).

Ερωτήσεις

21. Για δεδομένη αρχική ταχύτητα η απόσταση σταματήματος ενός τρένου είναι πολύ μεγαλύτερη, από την απόσταση σταματήματος ενός φορτηγού. Γιατί;

22. Γιατί το "κράτημα" στο χιόνι, ή στον πάγο, ενός αυτοκινήτου με μετάδοση κίνησης στους πίσω τροχούς βελτιώνεται όταν τοποθετήσετε πρόσθετο βάρος στους πίσω τροχούς;

23. Γιατί οι βρεγμένοι δρόμοι είναι ολισθηροί;

24. Για να σταματήσετε ένα αυτοκίνητο σε ολισθηρό δρόμο στη μικρότερη δυνατή απόσταση, είναι καλύτερο να φρενάρετε όσο δυνατά μπορείτε χωρίς όμως να προκαλέσετε ντεραπάρισμα. Γιατί το ντεραπάρισμα αυξάνει την απόσταση σταματήματος;

Ασκήσεις

2. Μία ράβδος χρυσού μάζας 500 g μεταφέρεται από το Παρίσι ($g = 9{,}8094\ m/s^2$) στο San Francisco ($g = 9{,}7996\ m/s^2$).
   (a) Πόση είναι η ελάττωση του βάρους του χρυσού; Εκφράστε την απάντηση σας ως κλάσμα του αρχικού βάρους.
   (b) Σημαίνει η ελάττωση του βάρους ότι η ράβδος χρυσού θα έχει μικρότερη αξία στο San Francisco;

Βάρος Παρίσι = 0,5 kg * 9,8094

Βάρος SF = 0.5 kg * 9.7996

$\Delta B = 0{,}5\ (9{,}8084 - 9{,}7996) = 4{,}9 * 10^{-3}$ N

Κλάσμα $\frac{9{,}8089 - 9{,}7996}{9{,}8089} * 100 = 0{,}0948\ \%$

Δεν θα έχει μικρότερη αξία

Ασκήσεις

25. Κατά την τροχοπέδηση (χωρίς ντεραπάρισμα) σε στεγνό δρόμο, η απόσταση σταματήματος ενός αυτοκινήτου σπορ με μεγάλη αρχική ταχύτητα είναι 38 m. Ποιά θα είναι η απόσταση σταματήματος του ίδιου αυτοκινήτου με την ίδια αρχική ταχύτητα σε παγωμένο δρόμο; Υποθέστε ότι $\mu_s = 0{,}95$ για τον στεγνό δρόμο και $\mu_s = 0{,}20$ για τον παγωμένο δρόμο.

$$\alpha = \frac{u^2 - u_o^2}{2(x - x_o)} \qquad \alpha_d = \frac{u_i^2}{2x_d}$$

$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{\mu_s mg}{m}$ (μέγιστη πιθανή επιβράδυνση)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_d &= \mu_{s,d}\, g = \frac{u_i^2}{2x_d} \quad (1) \\ \alpha_f &= \mu_{s,f}\, g = \frac{u_i^2}{2x_f} \quad (2) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\frac{(1)}{(2)} = \frac{\mu_{s,d}}{\mu_{s,f}} = \frac{x_f}{x_d} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_f = \left(\frac{\mu_{s,d}}{\mu_{s,f}}\right) x_d = \frac{0.95}{0.20} * 38 = 180 \text{ m} \end{aligned}$$

Ασκήσεις

27. Σ' ένα σπάνιο αυτοκινητιστικό δυστύχημα στην εθνική οδό Μ.1 (στην Αγγλία), μία Jaguar, με αρχική ταχύτητα "που υπερέβαινε τα 100 μίλια την ώρα" ντεραπάρησε 290 m προτού σταματήσει. Αν υποθέσουμε ότι οι τροχοί ήταν τελείως "κλειδωμένοι" σ' όλη αυτή την απόσταση και ότι συντελεστής κινητικής τριβής ανάμεσα στους τροχούς και στο δρόμο ήταν 0,8, να βρεθεί η αρχική ταχύτητα.

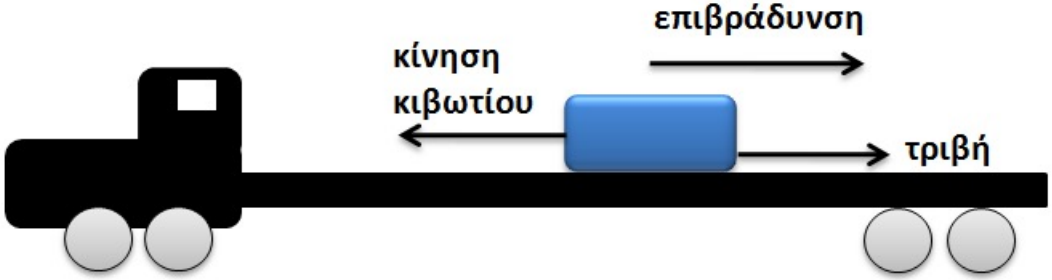
$F = \mu_s\, m\, g = m\, a \Rightarrow a = \mu_s\, g$

$\alpha = \frac{u^2 - u_o^2}{2(x - x_o)} \Rightarrow u^2 - u_o^2 = 2\,\alpha\, x = 2\,\mu_s\, g\, x \Rightarrow x = \frac{u_o^2}{2\mu_s g} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_o = \sqrt{2\mu_s g x} = \sqrt{2 * 0.8 * 9.8 * 290} = 67.4$ m/s $= 243$ km/h

Ασκήσεις

*31. Κατά την τροχοπέδηση, ένα φορτηγό έχει σταθερή επιβράδυνση $7{,}0\ m/s^2$. Ενα κιβώτιο είναι τοποθετημένο στην καρότσα αυτού του φορτηγού. Το κιβώτιο αρχίζει να ολισθαίνει όταν αρχίζει η τροχοπέδηση και, αφού διανύσει απόσταση 2,0 m (ως προς το φορτηγό) κτυπάει το θάλαμο του οδηγού. Με ποιά ταχύτητα (ως προς το φορτηγό) προσκρούει στο θάλαμο; Ο συντελεστής κινητικής τριβής του κιβωτίου είναι $\mu_k = 0{,}50$.



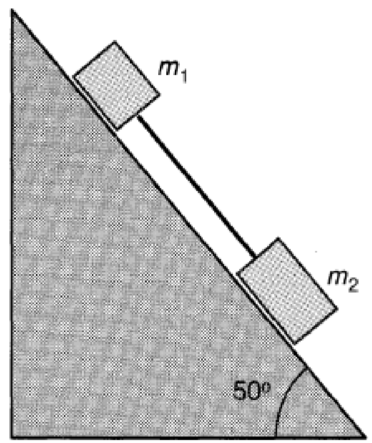
$F = \mu_\kappa\, m\, g = m\, \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \mu_\kappa\, g$

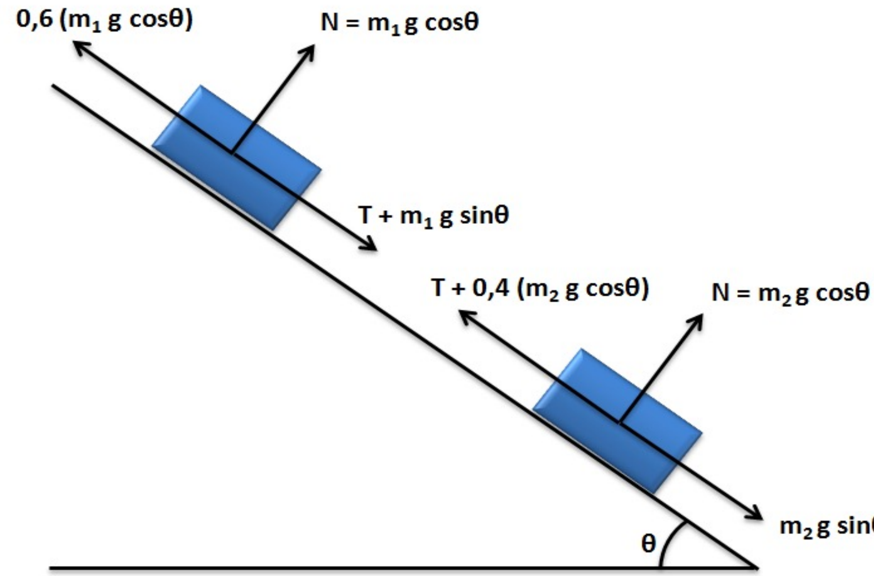
Η τελική επιβράδυνση του κιβωτίου είναι: $\alpha_{truck} - \alpha_{\kappa\iota\beta\omega\tau\acute{\iota}o\upsilon}$ (επιτάχυνση)

$\alpha_{\tau\varepsilon\lambda.\ \kappa\iota\beta\omega\tau\acute{\iota}o\upsilon} = \alpha_{truck} - \alpha_{\tau\rho\iota\beta\acute{\eta}\varsigma\ \kappa\iota\beta\omega\tau\acute{\iota}o\upsilon} = 7 - 0{,}5 * 9{,}8 = 2{,}1\ m/s^2$

Άρα χτυπά με ταχύτητα $u = \sqrt{2\alpha x} = \sqrt{2 * 2{,}1 * 2} = 2{,}9\ m/s$

**38. Δύο μάζες, 2,0 kg η καθεμιά, συνδεδεμένες με νήμα ολισθαίνουν σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία 50° με την οριζόντιο (Σχ. 6.40). Η μάζα m_1 έχει συντελεστή κινητικής τριβής 0,6 και η μάζα m_2 έχει συντελεστή κινητικής τριβής 0,40. Να βρεθεί η επιτάχυνση των μαζών και η τάση του νήματος.





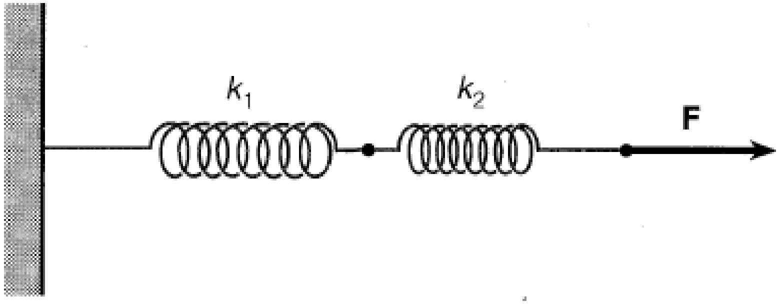
$T + m_1\, g \sin\theta - 0{,}6\, m_1\, g \cos\theta = m_1\, \alpha$ (1)

$-T + m_2\, g \sin\theta - 0{,}4\, m_2\, g \cos\theta = m_2\, \alpha$ (2)

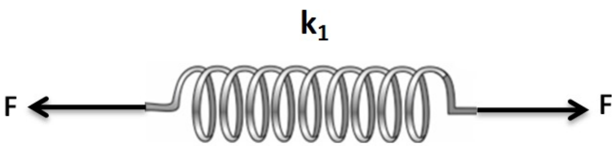
Από τις (1) + (2)

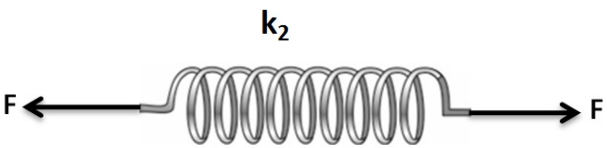
$(m_1 + m_2)\, g \sin\theta - g\,(0.6\, m_1 + 0.4\, m_2) \cos\theta = (m_1 + m_2)\, \alpha \Rightarrow \alpha = 4{,}4\ m/s^2$

Αντικαθιστώντας στην (1) ή (2) => T = 1,3 N



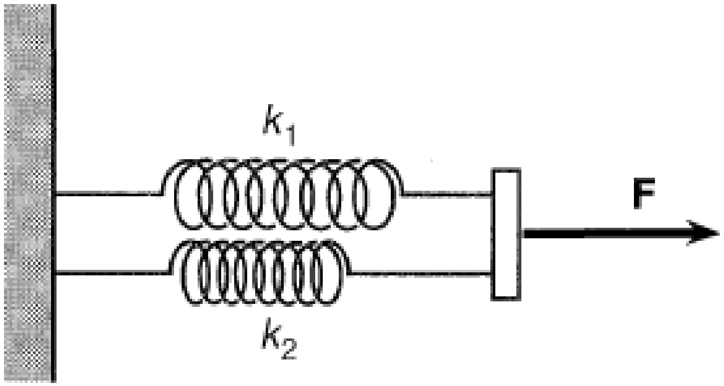
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



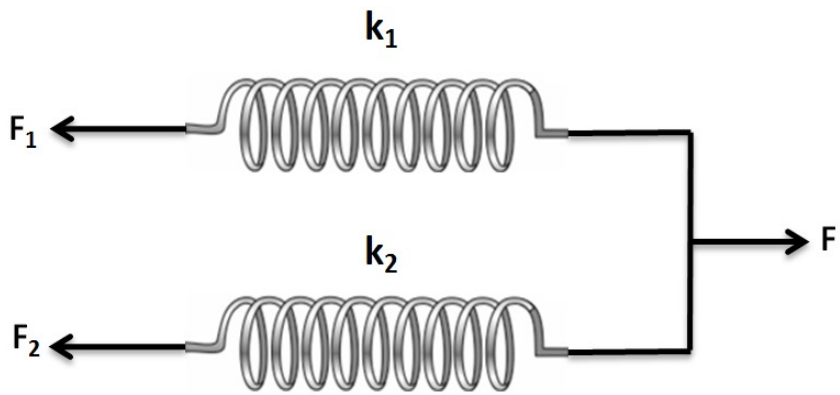


$\Delta x_1 = \frac{F}{k_1}$ $\Delta x_2 = \frac{F}{k_2}$

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$



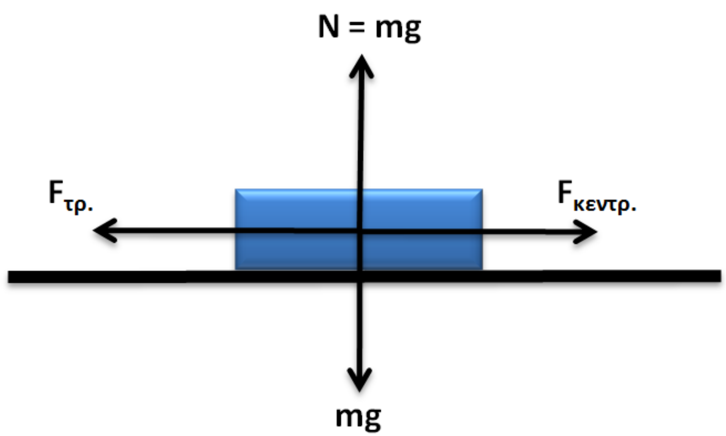
$$k = k_1 + k_2$$



θα έχουν την ίδια έκταση στην εφαρμογή της δύναμης F

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= k_1\, x \\ F_2 &= k_2\, x \\ F &= F_1 + F_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = k * x = (k_1 + k_2)\, x \Rightarrow k = k_1 + k_2$$

60. Μερικά χάλκινα νομίσματα είναι τοποθετημένα στην (οριζόντια) επιφάνεια του ταμπλώ ενός αυτοκινήτου. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στα νομίσματα και στο ταμπλώ είναι 0,5. Υποθέστε ότι το αυτοκίνητο παίρνει στροφή ακτίνας 90 m. Με ποιά ταχύτητα του αυτοκινήτου θ' αρχίσουν τα νομίσματα να ολισθαίνουν; Η στροφή δεν είναι επιχωματωμένη.

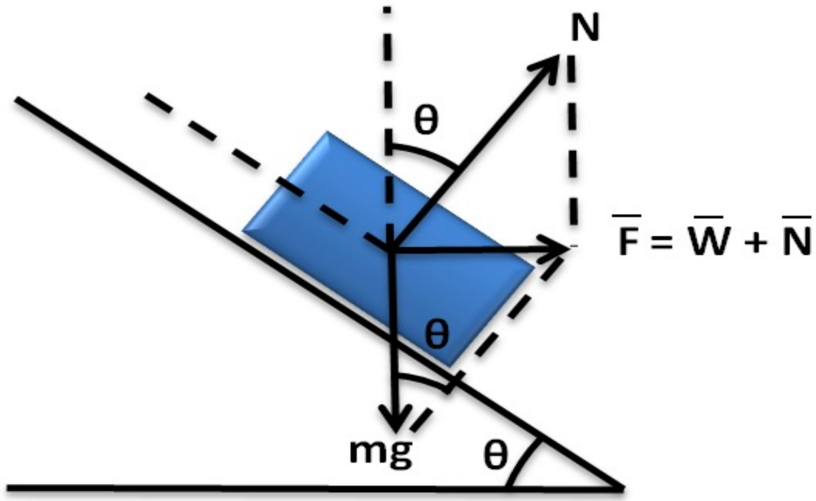


$F_{\tau\rho} \leq F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}$

$\mu_s \cancel{m}\, g \leq \frac{\cancel{m} u^2}{r}$ => $u \geq \sqrt{\mu_s g r}$ = 21 m/s

τα νομίσματα γλιστράνε

61. Μια στροφή ακτίνας 400 m είναι σχεδιασμένη με γωνία αναχώματος τέτοια, ώστε ένα αυτοκίνητο που τρέχει με 75 km/h να μην χρειάζεται τη βοήθεια της τριβής για να κρατηθεί στη στροφή. Πόση είναι η γωνία του αναχώματος;

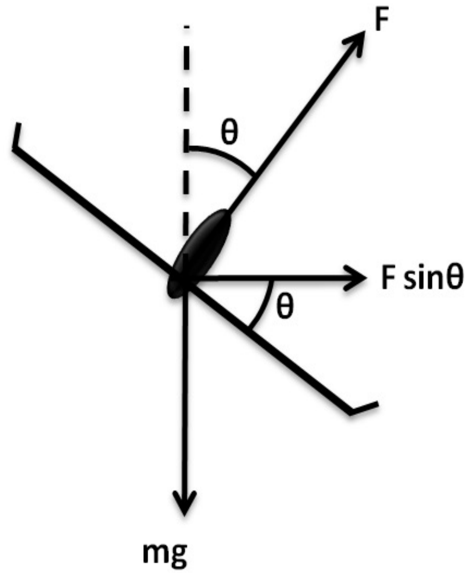


$$\left.\begin{aligned} N\cos\theta &= mg \\ N\sin\theta &= \frac{mu^2}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{u^2}{g\,r} = 0.11 \Rightarrow \theta = 6{,}3^o$$

ή

$$W\tan\theta = F = \frac{mu^2}{r} \Rightarrow \cancel{m}\,g\tan\theta = \frac{\cancel{m}u^2}{r} \Rightarrow \tan\theta = \frac{u^2}{g\,r} = 0.11 \Rightarrow \theta = 6{,}3^o$$

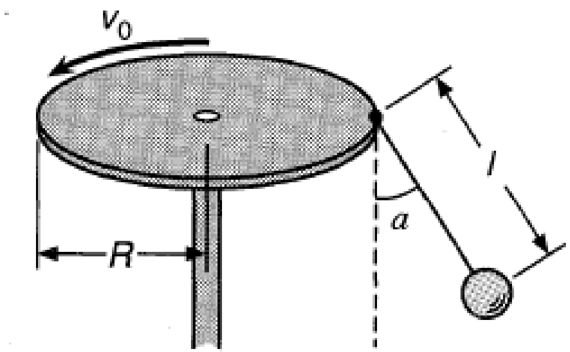
*70. Ενα αεροπλάνο πετάει σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας 1500 m με 320 km/h. Τί κλίση πρέπει να έχουν οι πτέρυγες του; [Βοήθημα: Η δύναμη που ασκείται από τον αέρα στις πτέρυγες (ανυψωτική δύναμη) είναι κάθετη προς τις πτέρυγες.]

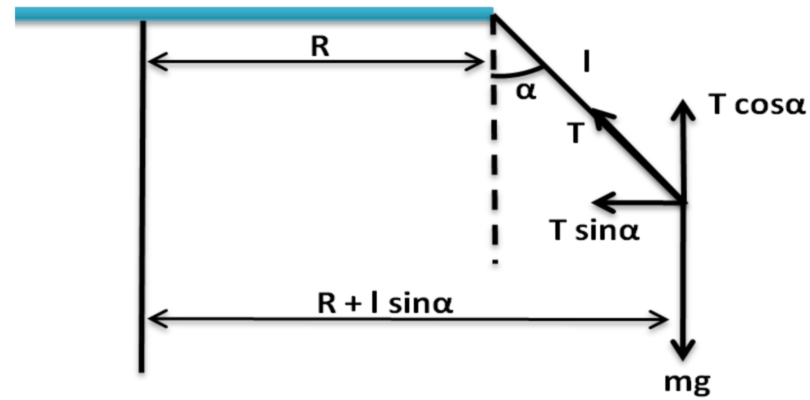


$$\left.\begin{aligned} F\cos\theta &= mg \\ F\sin\theta &= \frac{mu^2}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{u^2}{g\,r} = 0.54$$

$$\Rightarrow \tan\theta = 0.54 \;\Rightarrow \theta = 28.2^{o}$$

**76. Στο Σχ. 6.51 φαίνεται ένα εκκρεμές που κρέμεται από την περιφέρεια ενός οριζόντιου δίσκου, ο οποίος περιστρέφεται, γύρω από τον άξονα του με σταθερή ταχύτητα. Η γωνία α την οποία το περιστρεφόμενο εκκρεμές σχηματίζει με την κατακόρυφο αυξάνει με την ταχύτητα περιστροφής και, ως εκ τούτου, μπορεί να χρησιμεύσει ως ενδείκτης αυτής της ταχύτητας. Να βρεθεί ένας τύπος για την ταχύτητα v_0 της περιφέρειας του δίσκου συναρτήσει της γωνίας α, της ακτίνας R του δίσκου και του μήκους l του εκκρεμούς. Αν $R = 0{,}20\ \text{m}$, και $l = 0{,}30\ \text{m}$ πόση είναι η ταχύτητα όταν $\alpha = 45°$;





Η άκρη του εκκρεμούς έχει γραμμική ταχύτητα:

$$u' = \omega\,(R + l\sin\alpha)$$

Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m u'^2}{(R+l\sin\alpha)} &= m\,\omega^2 (R + l\sin\alpha) = T\sin\alpha \quad (1) \\ m g &= T\cos\alpha \quad (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\omega^2 (R+l\sin\alpha)}{g}$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\omega^2 (R+l\sin\alpha)}{g} \\ \omega^2 &= \frac{u_o^2}{R^2} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{u_o^2\,(R+l\sin\alpha)}{R^2 g} \Rightarrow u_o^{\,2} = \frac{R^2\, g\tan\alpha}{R+l\sin\alpha}$$