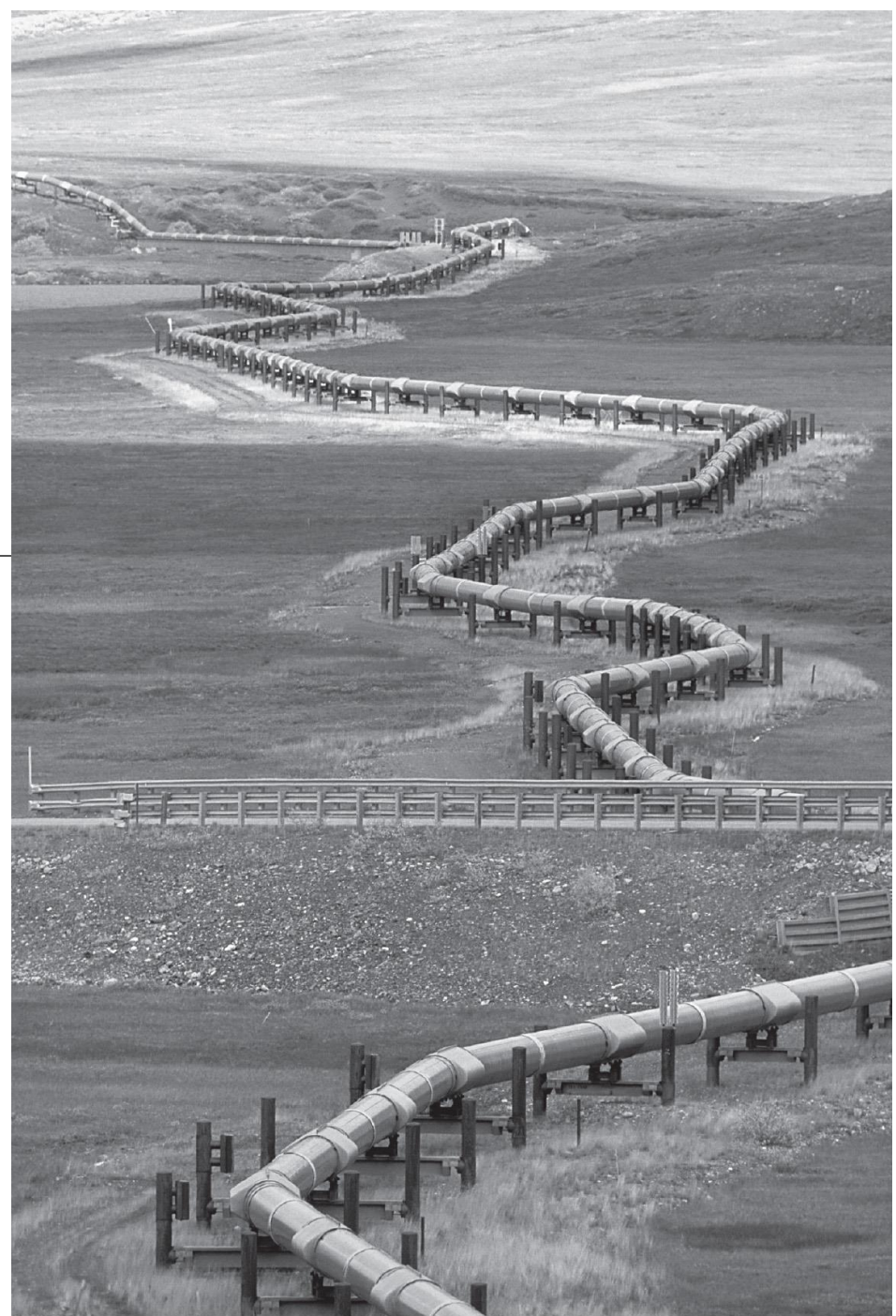
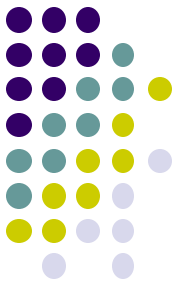


Ρευστομηχανική

Ροές σε κλειστούς αγωγούς 1

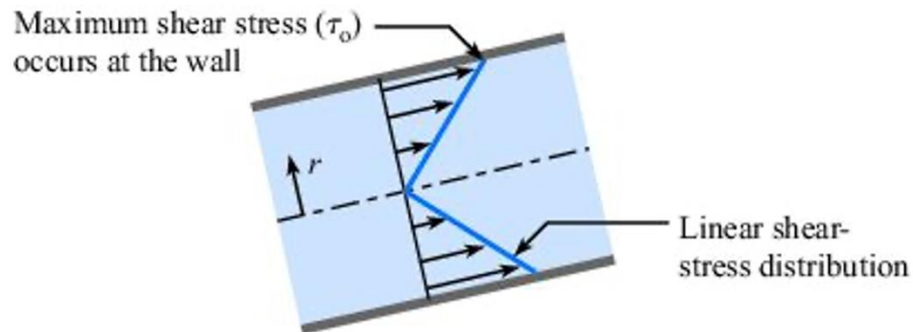
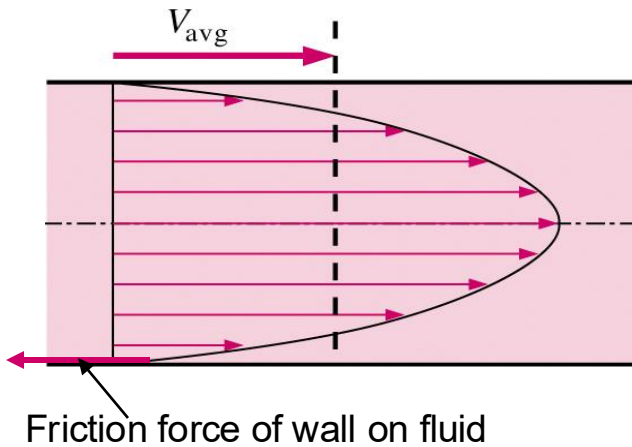
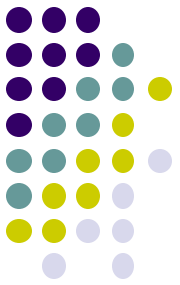


Εισαγωγή



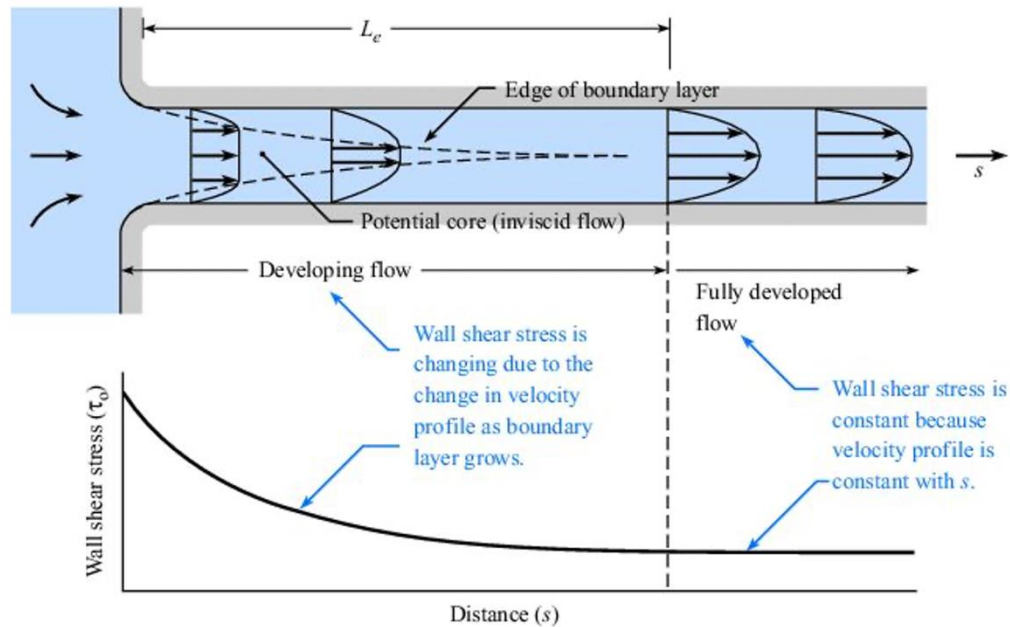
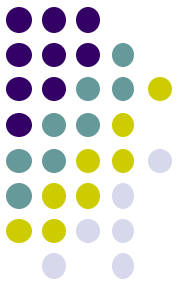
- Ροή σε κυλινδρικό αγωγό – εξέταση της επίδρασης του ιξώδους
- Εξέταση της Πλήρως Ανεπτυγμένης Ροής (η κατανομή της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται κατά τη διεύθυνση της ροής)
- Εξέταση πραγματικών ρευστών – Ιξώδες, Στρωτή -Τυρβώδης ροή (Αριθμός Reynolds)

Εισαγωγή



- Average velocity in a pipe
 - The velocity at the walls of a pipe or duct flow is **zero**
 - We are often interested only in **V_{avg}** , which we usually call just V
 - Keep in mind the **shear stress and friction is maximum** along the pipe walls

Εισαγωγή



- For pipes of **constant diameter** and **incompressible flow**

- **V_{avg} stays the same** down the pipe, even if the velocity profile changes

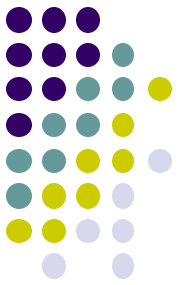
- Why? Conservation of Mass



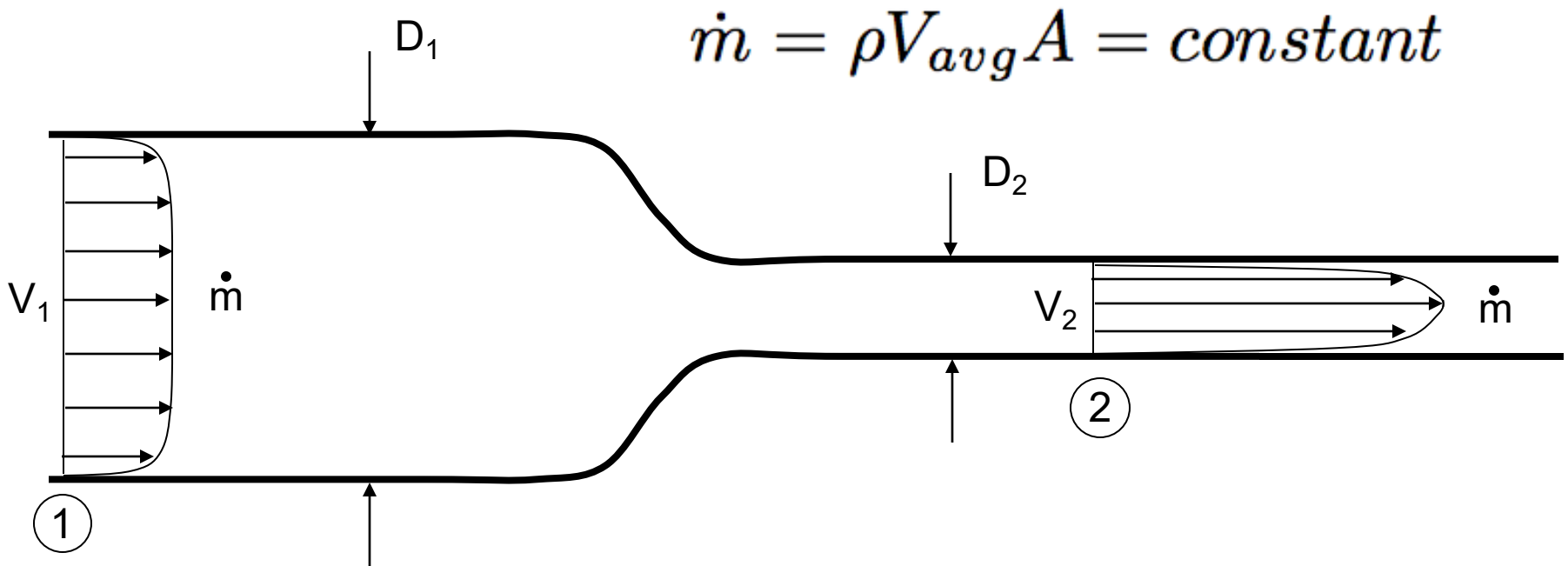
$$\dot{m} = \rho V_{avg} A = \text{constant}$$

same same same

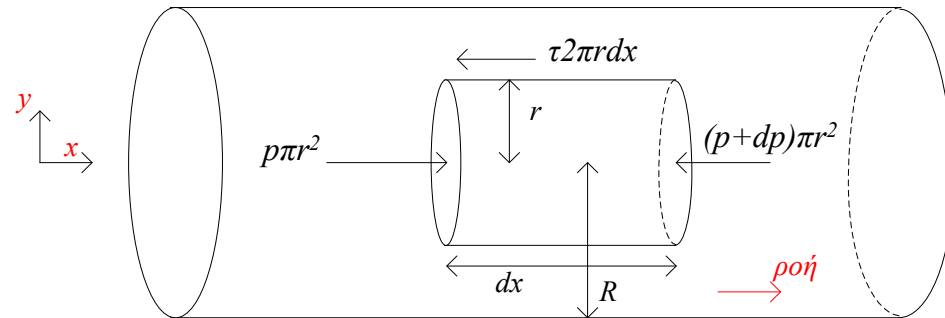
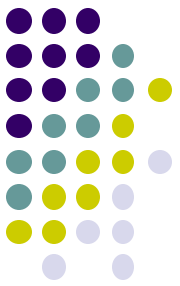
Εισαγωγή



- For pipes with **variable diameter**, $\dot{m}$ is still the same due to conservation of mass, but $V_1 \neq V_2$



Ροή σε οριζόντιο κυκλικό αγωγό



- Αγωγός ακτίνας R με ροή ρευστού
- Ροή μόνιμη $\rightarrow \Sigma F = 0$ στον στοιχειώδη κύλινδρο

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow p\pi r^2 - (p + dp)\pi r^2 - \tau(2\pi r dx) = 0 \Rightarrow \tau = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dx}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \text{(ορισμός ιξώδους)} \tau = -\mu \frac{du}{dr} \end{array} \right\} -\mu \frac{du}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} r dr \Rightarrow \int du = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \int r dr \Rightarrow u_x(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + \text{σταθ.}$$

Επειδή για $r = R$ $u_x = 0 \Rightarrow \text{σταθ.} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \Rightarrow u_x(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2)$

- Κατανομή ταχύτητας παραβολική — Ροή Poiseuille

- Για $r = 0 \Rightarrow u_x(r) = u_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \Rightarrow u_x(r) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$

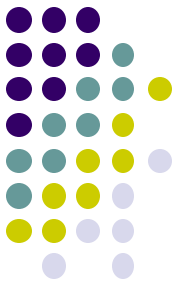
Ποια η φορά ροής?

$$u_{\max} \text{ θετική} \Rightarrow \frac{dp}{dx} < 0 \Rightarrow$$

η πίεση ελαττώνεται κατά τον άξονα x

$\Rightarrow$ το ρευστό ρέει από την υψηλή προς τη χαμηλή πίεση

Υπολογισμός της μέσης ταχύτητας



Ως γνωστό ισχύει ότι: $\bar{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \int \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$.

$$\text{Έτσι έχουμε: } \bar{u} = \frac{\int_0^R u_x(r) 2\pi r \, dr}{\pi R^2} = \frac{\int_0^R u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r \, dr}{\pi R^2} = \frac{u_{max}}{2}$$

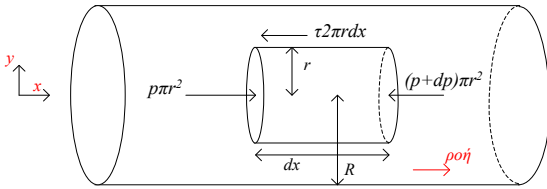
$$u_{max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \quad \bar{u} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \Rightarrow \Delta p = \frac{8\mu L \bar{u}}{R^2},$$

όπου: L είναι το μήκος του αγωγού και Δp η πτώση πίεσης σε μήκος L .

Αν αντί της μέσης ταχύτητας
χρησιμοποιηθεί η ογκομετρική παροχή ..

$$\Delta p = \frac{8\mu L \dot{V}}{\pi R^4} = \frac{128\mu L \dot{V}}{\pi d^4}$$

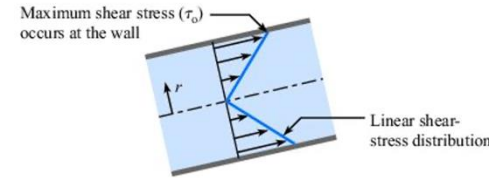
Υπολογισμός διατμητικής τάσης



$$p\pi r^2 - (p + dp)\pi r^2 - \tau 2\pi r dx = 0 \Rightarrow \tau = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dx} \Rightarrow \tau = \frac{\Delta p}{2L} r$$

η διατμητική τάση είναι γραμμική συνάρτηση της ακτίνας και η μέγιστη τιμή της είναι στα τοιχώματα του αγωγού

$$\tau_0 = \frac{\Delta p}{2L} r$$



Υπολογισμός Συντελεστού Διόρθωσης Κινητικής Ενέργειας

$$a \frac{1}{2} \dot{m} \bar{v}^2 = a \frac{1}{2} \rho \bar{v} A \bar{v}^2 = a \frac{1}{2} \rho A \bar{v}^3 = \int_A \frac{1}{2} \rho v^3 dA \Rightarrow$$

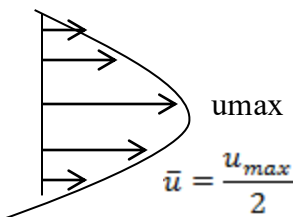
$$a = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^3 dA$$

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{\bar{u}} \right)^3 dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left[2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^3 d(\pi r^2) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left(2 - 2 \frac{r^2}{R^2} \right)^3 2\pi r dr = 2$$

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{u}{u_{max}/2} = 2 \frac{u}{u_{max}} = 2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Συμπέρασμα

$u=0$



Στρωτή Μόνιμη ροή

$$E_{κιν} = \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) \cdot a$$

$$a = 2$$

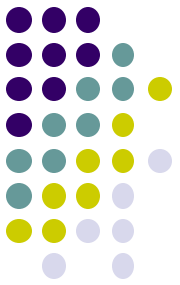
Ομοιόμορφη ροή

$$u = \bar{u} \quad E_{κιν} = \frac{1}{2} \bar{u}^2$$

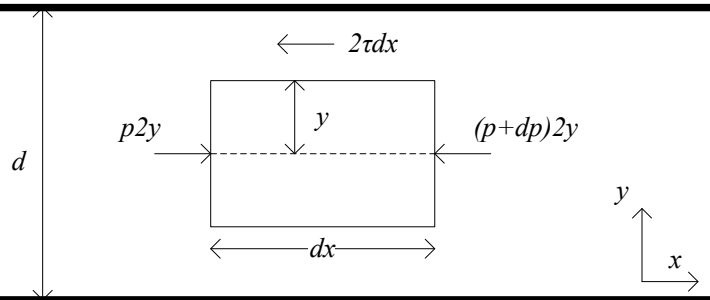
Η $E_{κιν}$ της στρωτής ροής είναι 2-πλάσια της $E_{κιν}$ της ομοιόμορφης ροής της ίδιας μέσης ταχύτητας

9

Στρωτή ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών



Ροή ρευστού μεταξύ δύο παράλληλων πλακών
μεγάλου μήκους που απέχουν απόσταση d



$$\Rightarrow py - py - ydp - \tau dx = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \tau &= -\mu \frac{du_x}{dy} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 2py - 2(p + dp)y - 2\tau dx = 0$$

$$du_x = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y dy \Rightarrow$$

$$\int du_x = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \int y dy \Rightarrow$$

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + \text{σταθ.}$$

Παραβολοειδής μεταβολή της ταχύτητας με την απόσταση

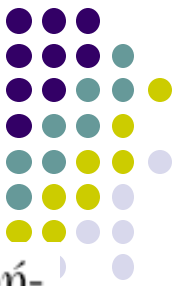
$$\text{Για } y = \frac{d}{2}, u_x = 0 \Rightarrow u_x = 0 = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{d^2}{4} + \text{σταθ.} \Rightarrow \text{σταθ.} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(y^2 - \frac{d^2}{4} \right)$$

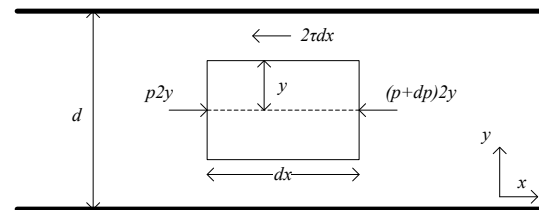
$$\text{Για } y = 0 \Rightarrow u_{max} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{d^2}{4}$$

$$u_x = u_{max} \left[1 - \frac{y^2}{\left(d/2 \right)^2} \right]$$

Στρωτή ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών



Η ογκομετρική ροή ανά μονάδα πλάτους z μπορεί να υπολογισθεί αν θεωρήσουμε στοιχειώδες στρώμα ρευστού πάχους dy σε απόσταση y από το επίπεδο συμμετρίας των δύο πλακών, και ολοκληρώσουμε μέχρι τη μία πλάκα και διπλασιάσουμε ταυτόχρονα. Δηλαδή:



$$\dot{V} = \int_A \vec{u}_x d\vec{A} \Rightarrow \dot{V} = 2 \int_0^{d/2} u_x dy$$

$$\frac{\dot{V}}{z} = 2 \int_0^{d/2} u_x dy = 2 \int_0^{d/2} \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) dy \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{V}}{z} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{d^3}{8} - \frac{d^3}{24} \right) = \frac{dp}{dx} \frac{d^3}{12\mu}$$

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{z} = \frac{dp}{dx} \frac{d^3}{12\mu} = \frac{dp}{dx} \frac{d^2}{12\mu}$$

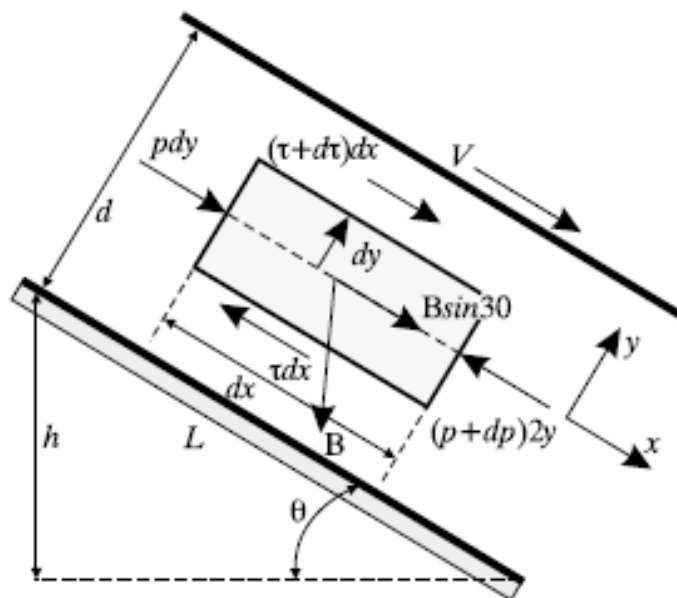
$$u_{max} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{d^2}{4}$$

$$u_{max} (\text{μεταξύ πλακών}) = 1,5\bar{u}$$

$$u_{max} (\text{σε αγωγό}) = 2\bar{u}$$

Παράδειγμα 6.2

Να υπολογισθεί η κατανομή ταχύτητας μεταξύ των δύο πλάκων του Σχήματος. Η μία πλάκα είναι ακίνητη και η άλλη κινείται με σταθερή ταχύτητα V .



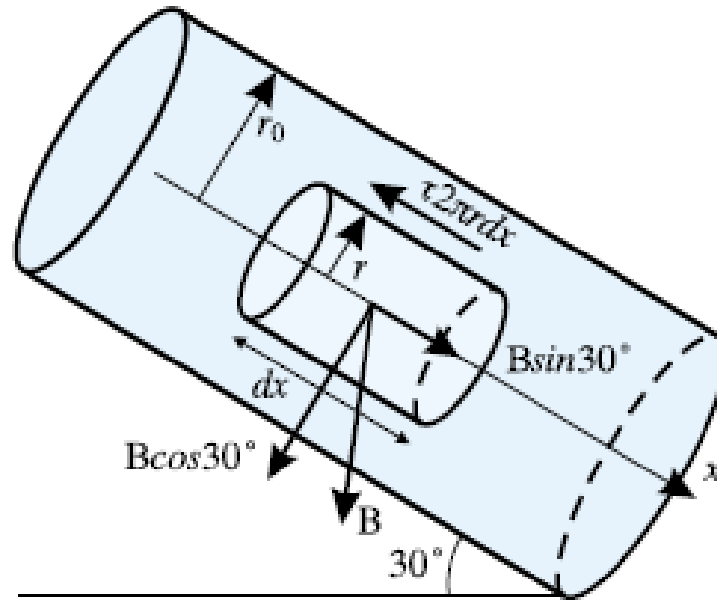
Άρα η κατανομή ταχύτητα δίνεται ως,

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{d(p + \gamma h)}{dx} (y^2 - dy) + \frac{V}{d} y$$

Αν οι πλάκες είναι οριζόντιες τότε η εξίσωση γίνεται, $u(y) = \frac{V}{d} y$, που είναι η γνωστή ροή **Couette**.

Παράδειγμα 6.3

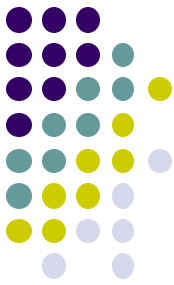
Υγρό, υψηλού ιξώδους μ ρέει σε αγωγό μικρής διαμέτρου, όπως στο Σχήμα. Αν υποθέσουμε πλήρως αναπτυγμένη στρωτή ροή και $\Delta p=0$, να βρεθούν: α) Η διαφορική εξίσωση της ροής αν το ρευστό κινείται υπό την επίδραση του βάρους του, β) Την κατανομή ταχυτήτων, γ) Να υπολογίσετε το μ σαν συνάρτηση της ογκομετρικής παροχής $\dot{V}$.



$$\mu = \frac{\pi Q g r_o^4}{16 \dot{V}}$$

Πειραματικός υπολογισμός του ιξώδους

Τυρβώδης ροή



- Όχι μόνιμη ροή, τροχιές των σωματιδίων του ρευστού: τυχαίες
- Δημιουργία στροβίλων, άρα:
 - αύξηση ανταλλαγής ορμής και στις 3 διευθύνσεις
 - τυχαία μεταβολή ταχύτητας ($u_x, u_y, u_z \neq 0$)
 - αύξηση της διατμητικής τάσης

- Η στιγμιαία ταχύτητα δεν έχει καμιά πρακτική σημασία

- Μέση ταχύτητα
$$u_x = \frac{1}{T} \int_0^T u_x(t) dt$$

(T: χρόνος τέτοιας τιμής ώστε να εξουδετερώνει την εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο)

- Η μέση ταχύτητα έχει τη διεύθυνση του άξονα του αγωγού
- Η κατανομή ταχυτήτων είναι συμμετρική ως προς τον άξονα του αγωγού
- Η ταχύτητα στα τοιχώματα του αγωγού είναι μηδέν

Laminar and Turbulent Flows



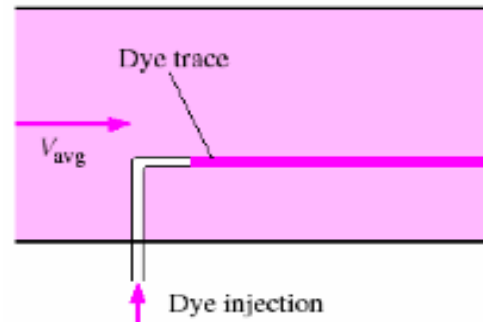
Laminar Flow

Can be steady or unsteady.

(Steady means that the flow field at any instant in time is the same as at any other instant in time.)

Can be one-, two-, or three-dimensional.

Has regular, *predictable* behavior



Analytical solutions are possible (see Chapter 9).

Occurs at *low* Reynolds numbers.

Turbulent Flow

Is always *unsteady*.

Why? There are always random, swirling motions (vortices or eddies) in a turbulent flow.

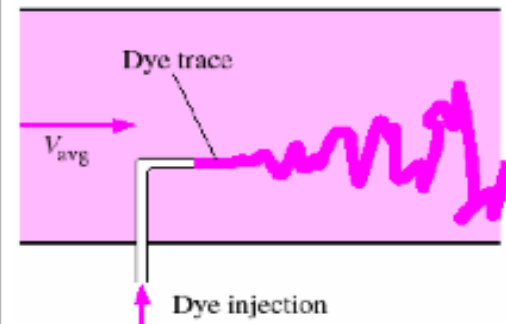
Note: However, a turbulent flow can be steady *in the mean*. We call this a *stationary turbulent flow*.

Is always *three-dimensional*.

Why? Again because of the random swirling eddies, which are in all directions.

Note: However, a turbulent flow can be 1-D or 2-D *in the mean*.

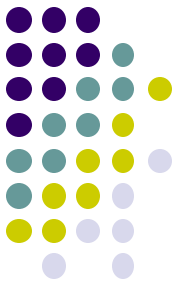
Has irregular or *chaotic* behavior (cannot predict exactly – there is some randomness associated with any turbulent flow).



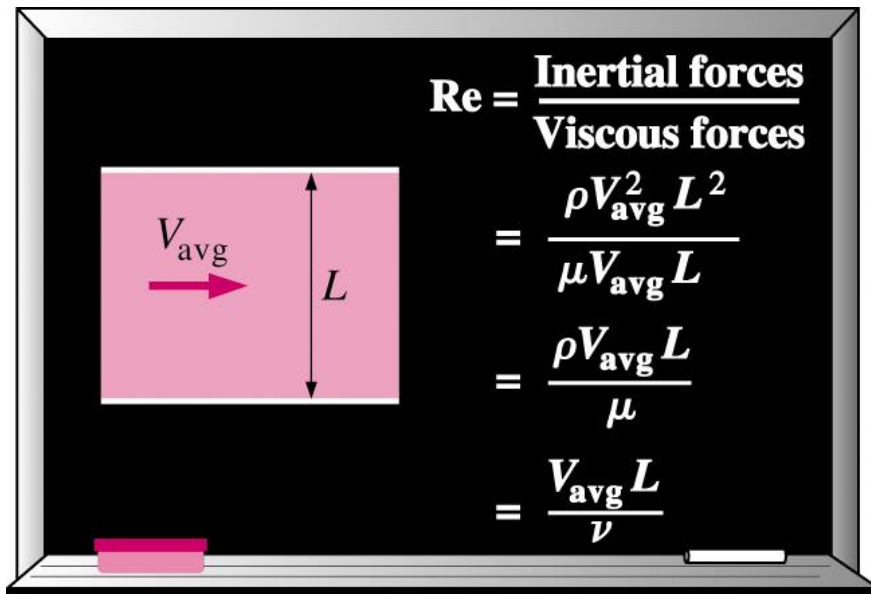
No analytical solutions exist! (It is too complicated, again because of the 3-D, unsteady, chaotic swirling eddies.)

Occurs at *high* Reynolds numbers.

Laminar and Turbulent Flows



Definition of Reynolds number



The diagram shows a rectangular duct with width L and average velocity V_{avg} . The Reynolds number is defined as the ratio of inertial forces to viscous forces, and is derived as follows:

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\text{Inertial forces}}{\text{Viscous forces}} \\ &= \frac{\rho V_{avg}^2 L^2}{\mu V_{avg} L} \\ &= \frac{\rho V_{avg} L}{\mu} \\ &= \frac{V_{avg} L}{\nu} \end{aligned}$$

- Critical Reynolds number (Re_{cr}) for flow in a round pipe

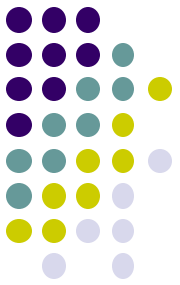
$Re < 2300 \Rightarrow$ laminar

$2300 \leq Re \leq 4000 \Rightarrow$ transitional

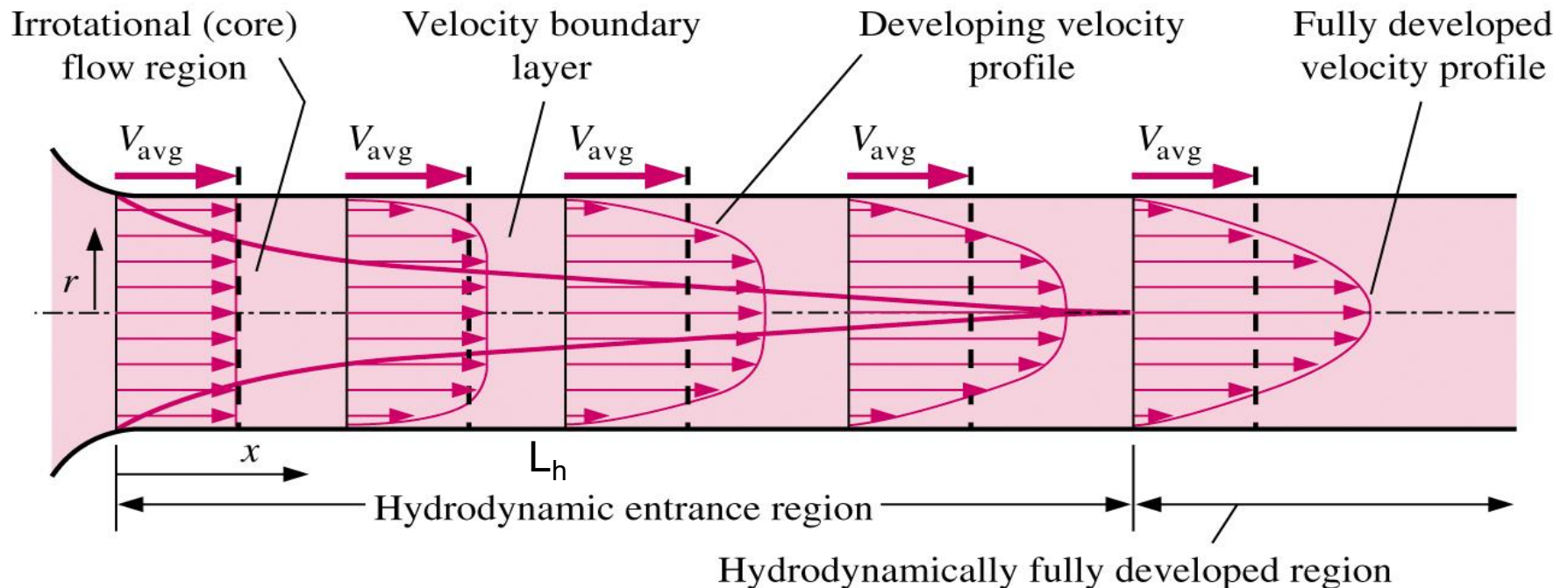
$Re > 4000 \Rightarrow$ turbulent

- These values are approximate
- For a given application, Re_{cr} depends upon
 - Pipe roughness
 - Vibrations
 - Upstream fluctuations, disturbances (valves, elbows, etc. that may disturb the flow)

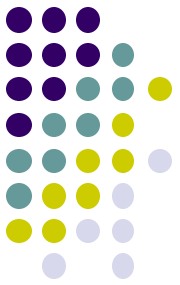
Περιοχή εισόδου (Entrance Region or entry length)



- Consider a round pipe of diameter D . The flow can be laminar or turbulent. In either case, the profile develops downstream over several diameters called the **entry length L_h**
- L_h/D is a function of Re**



Πλήρως ανεπτυγμένη ροή (Fully Developed Pipe Flow)

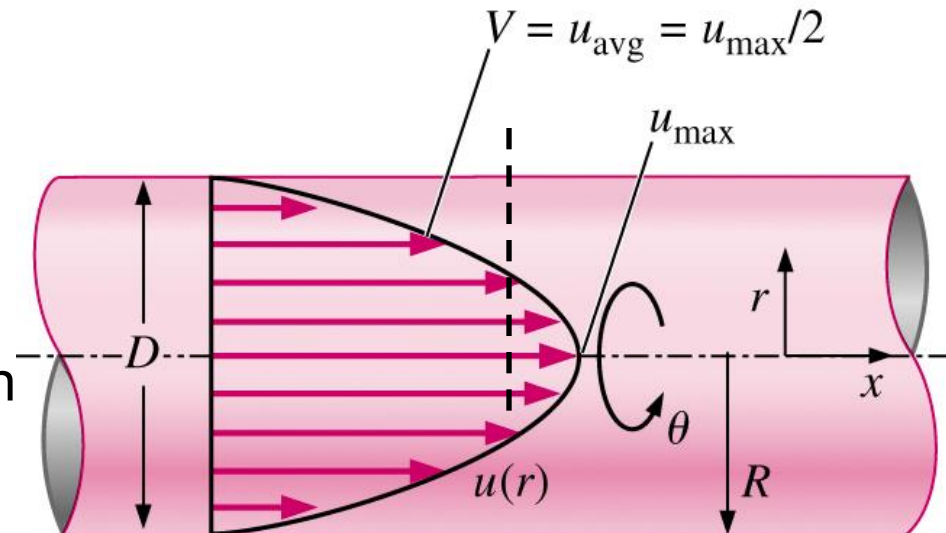


- Comparison of laminar and turbulent flow

There are some major differences between laminar and turbulent fully developed pipe flows

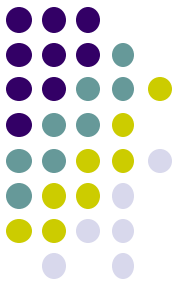
Laminar

- Can solve exactly
- Flow is steady
- Velocity profile is parabolic
- Pipe roughness not important



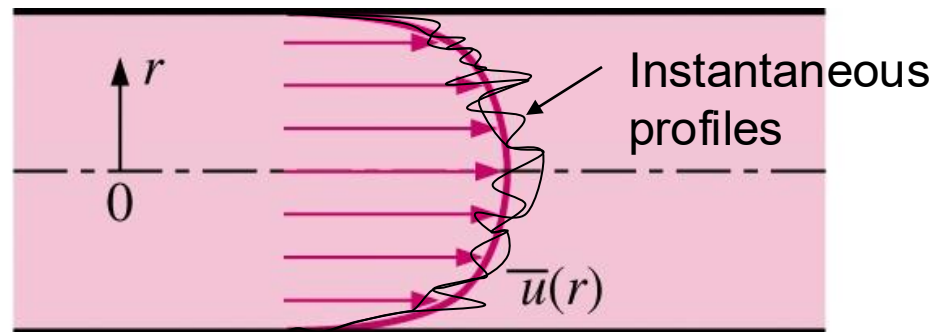
It turns out that $V_{avg} = 1/2 U_{max}$ and $u(r) = 2V_{avg}(1 - r^2/R^2)$

Πλήρως ανεπτυγμένη ροή (Fully Developed Pipe Flow)



Turbulent

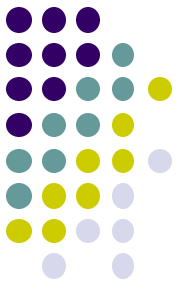
- Cannot solve exactly (too complex)
- Flow is unsteady (3D swirling eddies), but it is steady in the mean
- Mean velocity profile is fuller (shape more like a top-hat profile, with very sharp slope at the wall)
- Pipe roughness is very important



- V_{avg} 85% of U_{max} (depends on Re a bit)
- No analytical solution, but there are some good semi-empirical expressions that approximate the velocity profile shape.

Logarithmic law

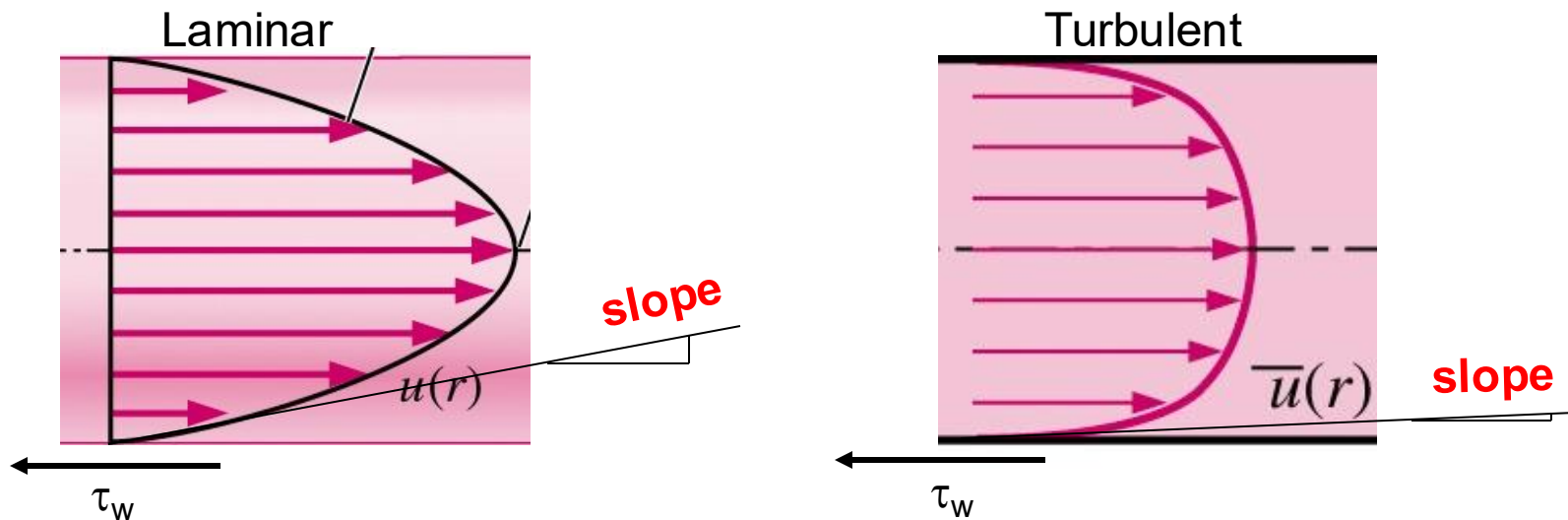
Power law



Πλήρως ανεπτυγμένη ροή (Fully Developed Pipe Flow)

Διατμητική τάση (Wall-shear stress)

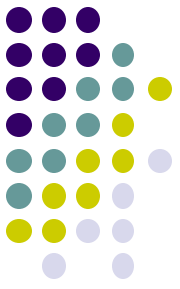
- Recall, for simple shear flows $u=u(y)$, we had $\tau = \mu du/dy$
- In fully developed pipe flow, it turns out that $\tau = \mu du/dr$



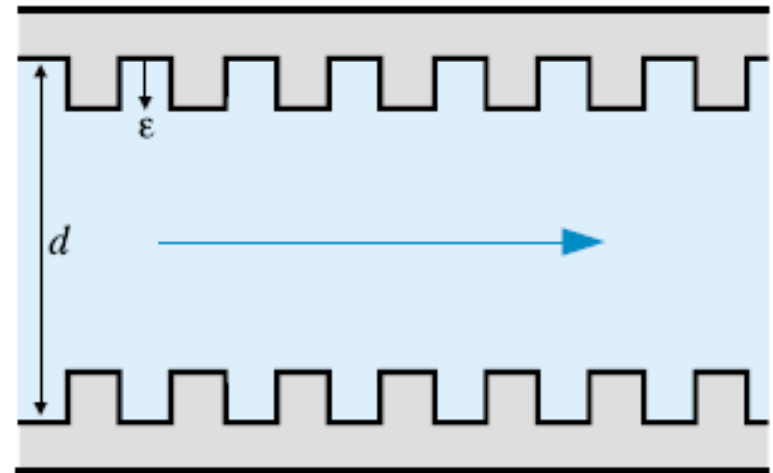
τ_w = shear stress at the wall, acting on the fluid

$$\tau_{w,turb} > \tau_{w,lam}$$

Απώλειες ενέργειας κατά τη ροή



- Υπολογισμός σε **ύψος στήλης ρέοντος ρευστού h** , λόγω εσωτερικής τριβής κατά τη διάρκεια της ροής
- **Υπολογισμός απαραίτητος** για τον υπολογισμό της κατάλληλης ισχύος αντλίας
- Απώλειες ενέργειας **συνάρτηση των**
 - u : ταχύτητας ρευστού
 - μ : ιξώδους ρευστού
 - ρ : πυκνότητας ρευστού
 - d : διαμέτρου αγωγού
 - L : μήκους αγωγού
 - ϵ : τραχύτητας αγωγού (διαστάσεις μήκους)

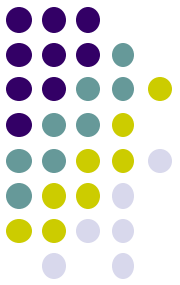


Τραχύτητες διαφόρων υλικών



Υλικό	Κατάσταση τοιχώματος (mm) 	Τραχύτητα ε
Χαλυβδοσωλήνες χωρίς ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Καθαρισμένο με οξέα Επιψευδαργυρωμένο	0,02 - 0,06 0,03 - 0,04 0,07 - 0,05
Χυτοσίδηρος	Ασφαλτωμένο Σκουριασμένο Με επικαθήσεις	0,1 - 0,13 1,0 - 1,5 1,5 - 3,0
Χαλυβδοσωλήνες με ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Ασφαλτωμένο Γαλβανισμένο	0,04 - 0,1 0,01 - 0,05 0,008
Αγωγοί αποχέτευσης από κεραμικό	Εμπορίου	0,07
Ασφαλτωμένος χυτοσίδηρος	0,0048	0,012
Πέτρινο ή βραχώδες τοίχωμα		80 - 1000
Ξύλο	Λείο	0,9 - 1,83
Μεταχειρισμένοι χαλυβδοσωλήνες	Ομοιόμορφη σκουριά Πολλές επικαθήσεις	0,15 2 - 4
Σκυρόδεμα	Λεία τοιχώματα τραχέα τοιχώματα Μετά από πολυετή χρήση νερού	0,3 - 0,8 2,0 - 3,0 0,2 - 0,3
Σωλήνας Πολυαιθυλαινίου	Καινούργιο	0,01
Σωλήνες από χαλκό, μπρούτζο, ελαφριά μέταλλα	Καινούργιο, λείο	0,0013 - 0,0015
Ελαστικός σωλήνας	Καινούργιο	0,0016
Εμπορικός χάλυβας ή σίδηρος	0,0018	0,046

Απώλειες ενέργειας κατά τη ροή



$$\left[\begin{array}{c} \text{Υψος} \\ \text{Απωλειών } \nu(m) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Συντελεστής} \\ \text{Τριβής } (f) \end{array} \right] \times \left[\frac{\text{μήκος, } L(m)}{\text{διάμετρος, } d(m)} \right] \times \left[\begin{array}{c} \text{Υψος} \\ \text{κινητικής} \\ \text{ενέργειας, } (u^2/2g)(m) \end{array} \right] \quad (1)$$

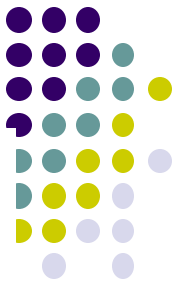
(Σχέση Darcy-Weisbach)

$$h_L = \frac{\Delta P}{\gamma} = f \frac{L}{d} \frac{\bar{u}^2}{2g} = f \frac{8 L \dot{V}^2}{d^5 \pi^2 g},$$

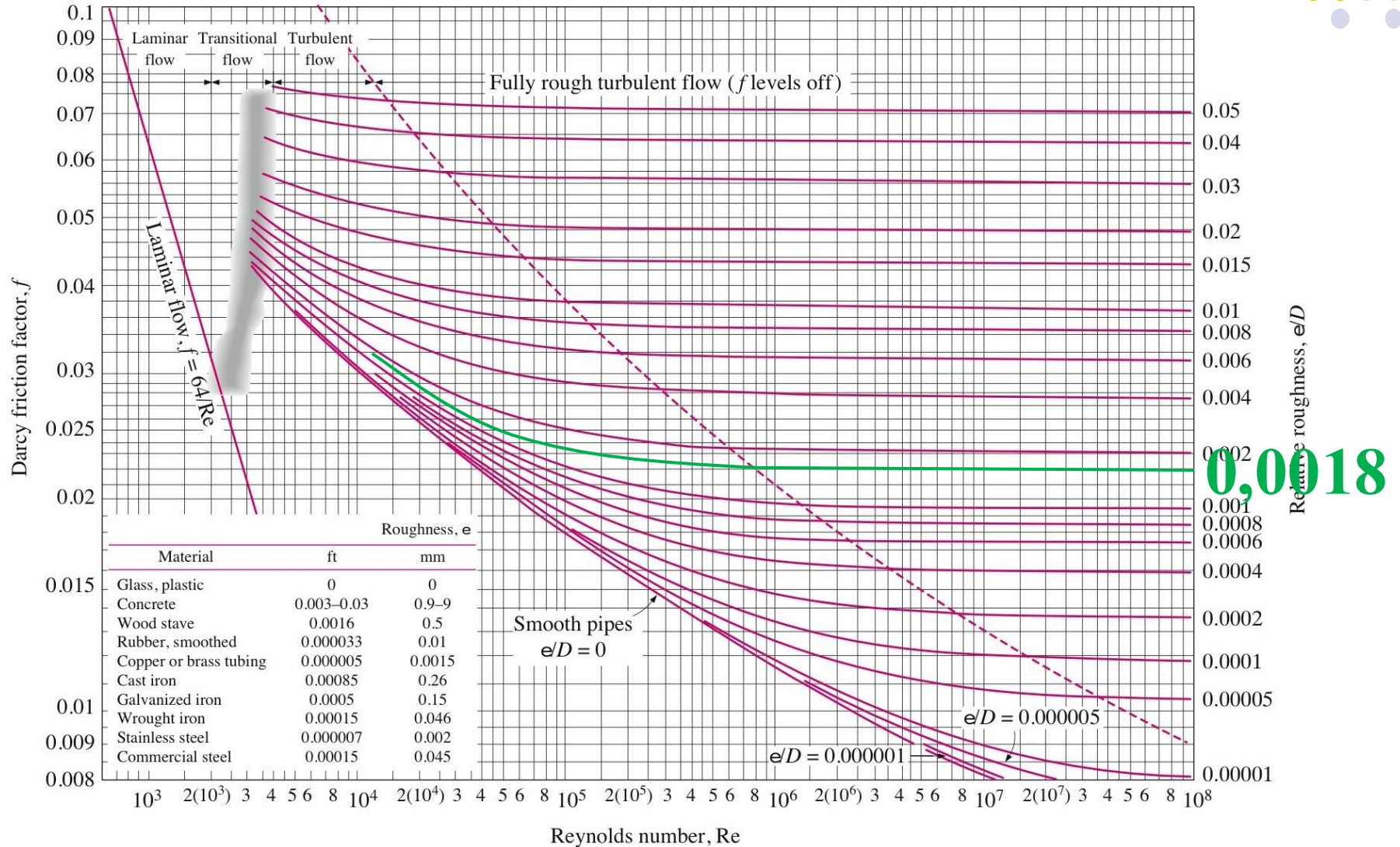
όπου f είναι ο συντελεστής τριβής Moody και $\bar{u} = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2}$.

Διάγραμμα Moody

Εύρεση του Συντελεστή τριβής για ροή σε αγωγό

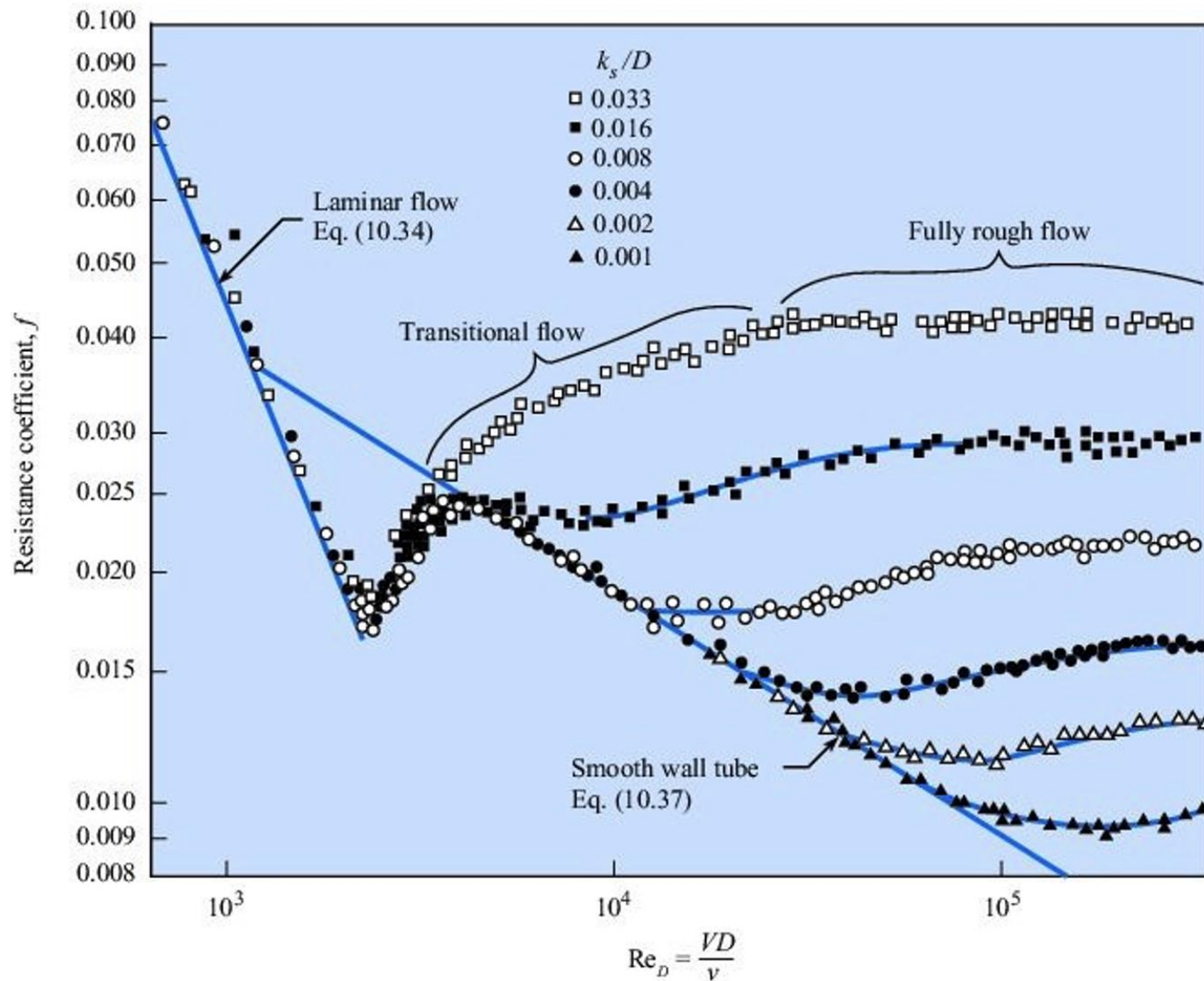
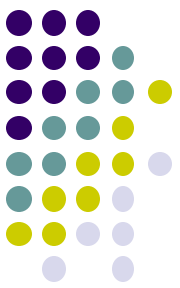


The Moody Chart

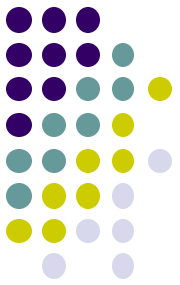


Διάγραμμα Moody

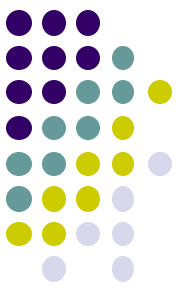
Εύρεση του Συντελεστή τριβής για ροή σε αγωγό



Χαρακτηριστικά διαγράμματος Moody



- ♦ Για μικρούς αριθμούς Reynolds, οπότε η ροή είναι στρωτή, ο συντελεστής τριβής είναι ανεξάρτητος της σχετικής τραχύτητας του αγωγού και το διάγραμμα είναι ευθεία γραμμή.
- ♦ Για αριθμούς Reynolds > 3000 , εφόσον έχουμε τυρβώδη ροή, ο συντελεστής τριβής εξαρτάται από τη σχετική τραχύτητα και μάλιστα όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός Reynolds τόσο μεγαλύτερη επίδραση έχει η σχετική τραχύτητα.
- ♦ Για αριθμούς Reynolds μεταξύ 2000 και 3000 έχουμε μεταβατική περιοχή και τα αποτελέσματα της πώσης πίεσης δεν είναι επαναλήψιμα.
- ♦ Για πολύ μεγάλους αριθμούς Reynolds ο συντελεστής τριβής δεν εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds.



- ♦ Λείοι αγωγοί, **Re>3000**, τυρβώδης ροή.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,86 \ln (\text{Re} \sqrt{f}) - 0,8 \quad (6.36.\alpha)$$

Σε περίπτωση που οι αγωγοί είναι λείοι και $2,5 \times 10^3 < \text{Re} < 10^5$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την **εξίσωση Blasius**

$$f = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}} \quad (6.36.\beta)$$

Για αριθμούς Reynolds $2,5 \times 10^3 < \text{Re} < 10^7$ μπορεί να εφαρμοσθεί η εξίσωση

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,5 \ln (\text{Re} \sqrt{f}) + 0,3 \quad (6.36.\gamma)$$

- ♦ Μη λείοι αγωγοί, τυρβώδης ροή

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,5 \ln \left(0,27 \frac{\varepsilon}{d} + 0,885 \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\sqrt{f}} \right) \quad (6.36.\delta)$$

- ♦ Πλήρως Τυρβώδης Ροή

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,86 \ln \frac{e}{3,7d} \quad (6.37)$$

- ♦ Πλήρως Τυρβώδης Ροή, **Re>4000** (εξίσωση Colebrook)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,80 \ln \left(\frac{e}{3,7d} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right), \quad (6.38)$$

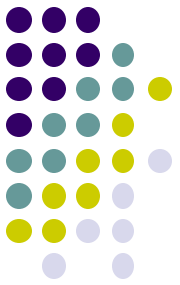
όπου, d είναι η διάμετρος του αγωγού.

- ♦ Στρωτή Ροή σε οποιοδήποτε κυκλικό αγωγό με **Re<2000**

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (6.39)$$

Άλλες
εξισώσεις

Απώλειες ενέργειας για τη στρωτή ροή



Για στρωτή ροή επειδή $f = \frac{64}{\text{Re}} (2), \quad h_L = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D} \frac{u^2}{2g} (3), \quad \text{Re} = \frac{du\rho}{\mu} (4)$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει η σχέση

$$h_L = \frac{32 \mu L \bar{u}}{\rho d^2 g} \quad (5) \text{ (εξίσωση Hagen-Poiseuille)}$$

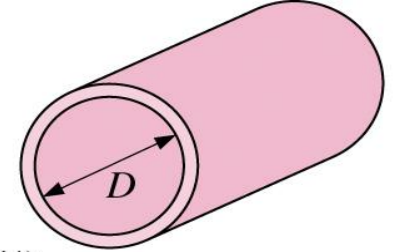
Από την σχέση (5) και την σχέση $h_L = \frac{\Delta p}{\gamma} (6)$ προκύπτει τελικά

$$\Delta p = 32 \frac{\mu L}{d^2} \bar{u}$$

Δηλαδή, οι απώλειες ύψους και η πτώση πίεσης λόγω τριβών είναι ανάλογες της μέσης ταχύτητας του ρευστού.

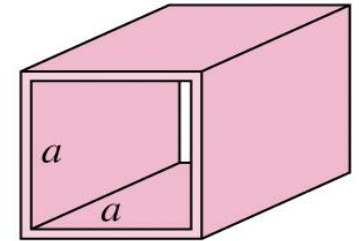
Υδραυλική διάμετρος

Circular tube:



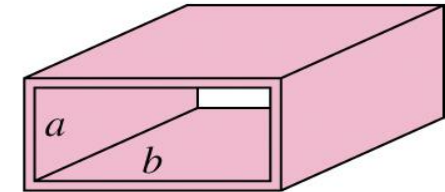
$$D_h = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$$

Square duct:



$$D_h = \frac{4a^2}{4a} = a$$

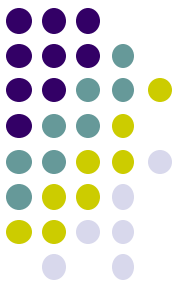
Rectangular duct:



$$D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

Μέχρι τώρα αναφερόμαστε σε αγωγούς κυκλικής διατομής. Αν ο αγωγός έχει άλλη μορφή τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους ίδιους τύπους, αρκεί αντί της διαμέτρου d να χρησιμοποιούμε την **υδραυλική διάμετρο, d_h** . Ως υδραυλική διάμετρος ορίζεται το τετραπλάσιο της διατομής του αγωγού δια της περιμέτρου του αγωγού **που διαβρέχεται** από το ρευστό **$d_h = 4 A/P$** π.χ. για αγωγό ορθογωνικής διατομής διαστάσεων a και b ή υδραυλική διάμετρος είναι **$d_h = 2ab/(a+b)$** και για ομόκεντρο δακτύλιο διαμέτρων d_2 και d_1 η υδραυλική διάμετρος είναι $d_h = d_2 \uparrow d_1$.

Υδραυλική διάμετρος

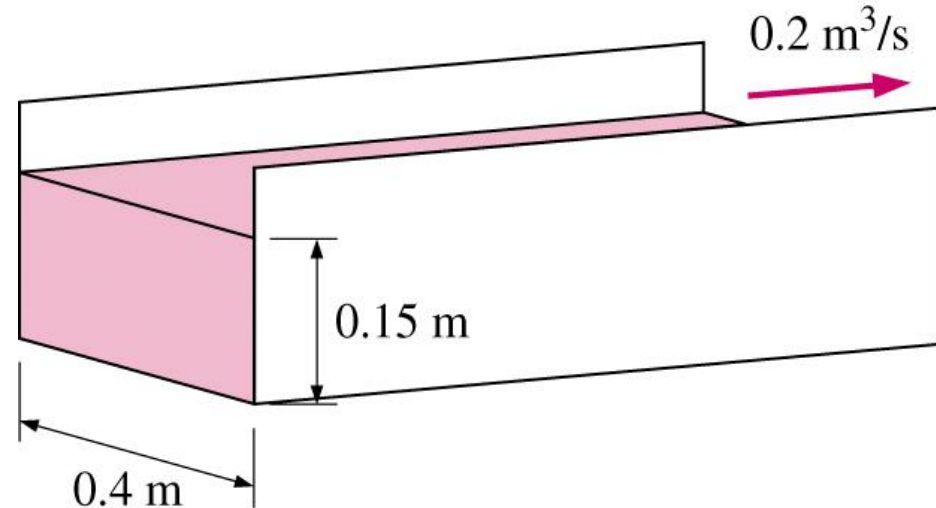


- For non-round pipes, define the hydraulic diameter

$$D_h = 4A_c/P$$

A_c = cross-section area

P = wetted perimeter



- Example: open channel**

$$A_c = 0.15 * 0.4 = 0.06\text{m}^2$$

$$P = 0.15 + 0.15 + 0.4 = 0.7\text{m}$$

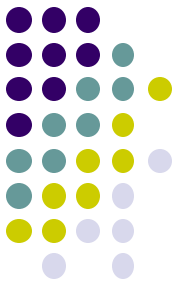
Δεν υπολογίζεται η ελεύθερη επιφάνεια αφού δε συνεισφέρει στις τριβές κατά μήκος της ροής μέσα στον αγωγό

$$D_h = 4A_c/P = 4*0.06/0.7 = 0.34\text{m}$$

Σημασία Η συγκεκριμένη ροή σε ανοιχτό αγωγό είναι ισοδύναμη με ροή σε κλειστό αγωγό διαμέτρου 0.34 m

Fully Developed Pipe Flow

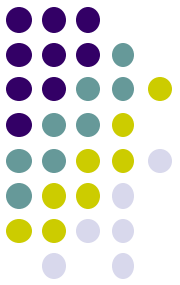
Friction Factor



- **Moody chart** was developed for circular pipes, but can be used for non-circular pipes using hydraulic diameter
- **Colebrook equation** is a curve-fit of the data which is convenient for computations

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right)$$

- Both Moody chart and Colebrook equation are accurate to $\pm 15\%$ due to roughness size, experimental error, curve fitting of data, etc.

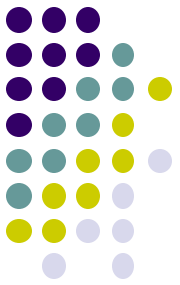


Προβλήματα με αγωγούς

Με τον όρο απλά προβλήματα με αγωγούς δηλώνουμε προβλήματα στα οποία οι απώλειες στους αγωγούς είναι και οι μόνες απώλειες που λαμβάνονται υπ' όψιν. Ο αγωγός μπορεί να είναι οριζόντιος ή να σχηματίζει γωνία με το οριζόντιο επίπεδο. Σε κάθε πρόβλημα ροής ασυμπίεστου ρευστού σε αγωγό υπάρχουν οι εξής μεταβλητές:

- ◆ Ογκομετρική παροχή $\dot{V}$.
- ◆ Μήκος αγωγού L .
- ◆ Διάμετρος αγωγού d .
- ◆ Απώλεια ύψους λόγω τριβών h_L .
- ◆ Ιξώδες, μ , ή κινηματικό ιξώδες ν .
- ◆ Τραχύτητα ϵ .

Προβλήματα με αγωγούς



Γενικά, τα μεγέθη μήκος, διάμετρος αγωγού, ιξώδες, ή κινηματικό ιξώδες, και τραχύτητα του αγωγού δίνονται ή βρίσκονται από πίνακες ή διαγράμματα. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι τα προβλήματα με αγωγούς είναι τριών ειδών, όπως φαίνεται και στον πίνακα που ακολουθεί.

Είδος	Δεδομένα	Ζητούμενα
I	$\dot{V}, L, d, \nu, \varepsilon$	h_L
II	$h_L, L, d, \nu, \varepsilon$	$\dot{V}$
III	$\dot{V}, h_L, L, \nu, \varepsilon$	d

Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις η λύση του προβλήματος γίνεται με τη χρησιμοποίηση της **εξίσωσης συνεχείας**, του **διαγράμματος Moody**, της εξίσωσης **Darcy-Weisbach** και πιθανόν της **εξίσωσης της ενέργειας**. Θα εξετάσουμε παρακάτω τα τρία είδη προβλημάτων ξεχωριστά.

Υπολογισμός των απωλειών ύψους h_L

Η περίπτωση αυτή είναι και η ευκολότερη, επειδή η εφαρμογή των τύπων που έχουμε παραθέσει είναι άμεση δηλαδή υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds, Re και τη σχετική τραχύτητα ε/d άμεσα. Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε το συντελεστή τριβής f και από την εξίσωση Darcy-Weisbach υπολογίζουμε τη ζητούμενη απώλεια ύψους h_L .

Παράδειγμα 6.4

Αντλία τροφοδοτεί με νερό δεξαμενή μέσω οριζόντιου χαλύβδινου αγωγού μήκους $L=30\text{ m}$ και διαμέτρου $d=25\text{ mm}$. Η παροχή είναι $1250\text{ cm}^3/\text{s}$. Το ιξώδες του νερού είναι $\mu=1300 \times 10^{-6}\text{ N s/m}^2$ και η πυκνότητά του $\rho=1000\text{ kg/m}^3$. Να βρεθεί η απώλεια ύψους στον αγωγό.

Υλικό	Κοιτότητα τοιχώματος (mm)	Τραχύτητα ε
Χαλύβδινος αγωγός χωρίς ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Κοιτοκοσμένο με οξεία Επιμεταδοαπορροσμένο	0,02 - 0,06 0,03 - 0,04 0,07 - 0,05
Χυτοσίδηρος	Ασφαλισμένο Σκουριασμένο Με επιπλοήσεις	0,1 - 0,13 1,0 - 1,5 1,5 - 3,0
Χαλύβδινος αγωγός με ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Ασφαλισμένο Γαβανισμένο	0,04 - 0,1 0,01 - 0,05 0,008
Αγωγοί αποχέτευσης από κεραμικό	Εμποτισμένο	0,07
Ασφαλισμένος χυτοσίδηρος	0,0048	0,012
Πέτρινο ή βραστόδες τοίχωμα		80 - 1000
Ξύλο	Λείο	0,9 - 1,83
Μεταχειρισμένοι χαλύβδινος αγωγοί	Ομοιόμορφη σκουριά Πολλές επιπλοήσεις	0,15 2 - 4
Σταυρόδεμα	Λεία τοιχώματα τραχύτατα τοιχώματα Μετά από πολλαπλή χρήση νερού	0,3 - 0,8 2,0 - 3,0 0,2 - 0,3
Σιλόφες Πολυαιθυλενίου	Καινούργιο	0,01
Σιλόφες από χαλκό, μπρούντζο, αλουμίνιο, μέταλλα	Καινούργιο, λείο	0,0013 - 0,0015
Επιπλοήσεις τοιχώματος	Καινούργιο	0,0010
Εμποτισμός χαλκού ή σιδήρου	0,0018	0,046

Υπολογισμός των απωλειών ύψους h_L

Η περίπτωση αυτή είναι και η ευκολότερη, επειδή η εφαρμογή των τύπων που έχουμε παραθέσει είναι άμεση δηλαδή υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds, Re και τη σχετική τραχύτητα ε/d άμεσα. Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε το συντελεστή τριβής f και από την εξίσωση Darcy-Weisbach υπολογίζουμε τη ζητούμενη απώλεια ύψους h_L .

Παράδειγμα 6.4

Αντλία τροφοδοτεί με νερό δεξαμενή μέσω οριζόντιου χαλύβδινου αγωγού μήκους $L=30\text{ m}$ και διαμέτρου $d=25\text{ mm}$. Η παροχή είναι $1250\text{ cm}^3/\text{s}$. Το ιξώδες του νερού είναι $\mu=1300 \times 10^{-6}\text{ N s/m}^2$ και η πυκνότητά του $\rho=1000\text{ kg/m}^3$. Να βρεθεί η απώλεια ύψους στον αγωγό.

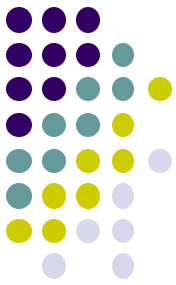
Λύση

Υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα $\bar{u}$ και τον αριθμό Reynolds Re:

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{4 \times 1250 \times 10^{-6}}{3,14 \times (25 \times 10^{-3})^2} = 2,54\text{ m/s},$$
$$\text{Re} = \frac{\bar{u} \rho d}{\mu} = \frac{25 \times 10^{-3} \times 2,54 \times 1000}{1300 \times 10^{-6}} = 48900$$

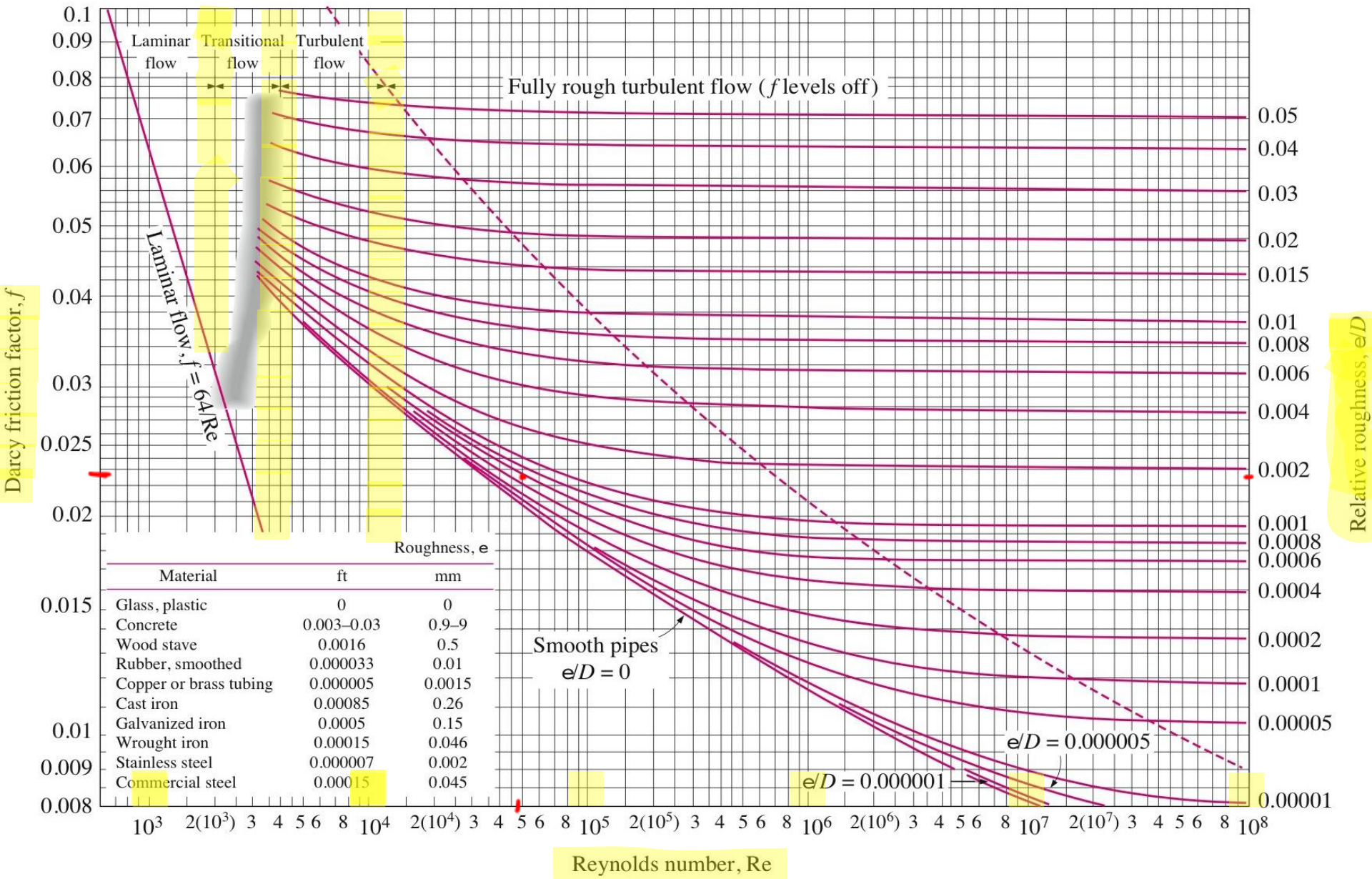
Για τον χαλύβδινο αγωγό βρίσκουμε $\varepsilon=0,046\text{ mm}$. Άρα $\varepsilon/d=0,0018$. Από το διάγραμμα Moody για $\text{Re}=48900$ και $\varepsilon/d=0,0018$ βρίσκουμε $f=0,027$. Έτσι η απώλεια ύψους θα είναι:

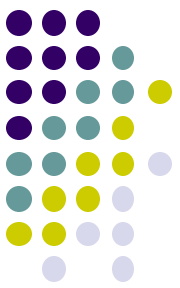
$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{\bar{u}^2}{2g} = 0,027 \times \frac{12}{0,025} \times \frac{2,54^2}{2 \times 9,8} = 4,26\text{ m}$$



Υλικό	Κοκκύτωση τοιχώματος (mm)	Τραχύτητα ε
Χαλύβδινος αγωγός χωρίς ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Κοκκαρισμένο με οξεία Επιμεταλλωμένο	0,02 - 0,06 0,03 - 0,04 0,07 - 0,05
Χυτοσίδηρος	Ασφαλισμένο Σκουριασμένο Με επιμεταλλώσεις	0,1 - 0,13 1,0 - 1,5 1,5 - 3,0
Χαλύβδινος αγωγός με ραφή	Τοίχωμα εξελασμένο Ασφαλισμένο Γαλβανισμένο	0,04 - 0,1 0,01 - 0,05 0,008
Αγωγοί αποχέτευσης από πλαστικό	Εμποτισμένο	0,07
Ασφαλισμένος χυτοσίδηρος		0,0048
Πέτρινος ή βραχώδης τοίχωμα		80 - 1000
Ξύλο	Λείο	0,9 - 1,83
Μεταχειρισμένοι χαλύβδινος αγωγοί	Ομοιόμορφη σκουριά Πολλές επιμεταλλώσεις	0,15 2 - 4
Στοιβάδα	Λεία τοιχώματα Τραχέα τοιχώματα Μετά από πολλαπλή χρήση νερού	0,3 - 0,8 2,0 - 3,0 0,2 - 0,3
Σοάφες Πολυαιθυλενίου	Κανονιστικό	0,01
Σοάφες από χαλκό, μπρούντζο, αλουμίνιο, μέταλλα	Κανονιστικό, λείο	0,0013 - 0,0015
Επιμεταλλωμένος αγωγός	Κανονιστικό	0,0016
Εμποτισμένος αγωγός ή σιδήρος	0,0018	0,046

The Moody Chart



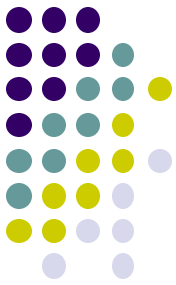


Υπολογισμός της παροχής

Σ' αυτήν την περίπτωση η μέση ταχύτητα $\bar{u}$ και ο συντελεστής τριβής f , που εξαρτάται από την ταχύτητα, είναι άγνωστοι. Έτσι, υποθέτουμε μία τιμή για το συντελεστή τριβής, οπότε από την εξίσωση Darcy-Weisbach υπολογίζουμε την ταχύτητα. Βρίσκουμε τον αριθμό Reynolds και με τη σχετική τραχύτητα από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε το συντελεστή τριβής. Αν η τιμή του συντελεστή τριβής που βρήκαμε και αυτού που υποθέσαμε δεν ταυτίζονται τότε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με την τελευταία τιμή του συντελεστή τριβής.

Παράδειγμα 6.5

Νερό ρέει σε αγωγό διαμέτρου $d=300$ mm και μήκους $L=300$ m και οι απώλειες ύψους είναι $h_L=6$ m. Αν $\varepsilon=4,6$ mm και $\nu=1,13 \times 10^{-6}$ m²/s, να βρεθεί η παροχή του σωλήνα.



Νερό ρέει σε αγωγό διαμέτρου $d=300$ mm και μήκους $L=300$ m και οι απώλειες ύψους είναι $h_L=6$ m. Αν $\varepsilon=4,6$ mm και $\nu=1,13 \times 10^{-6}$ m²/s, να βρεθεί η παροχή του σωλήνα.

Λύση

Ας υποθέσουμε $f=0,04$. Αν λύσουμε την εξίσωση Darcy-Weisbach ως προς την ταχύτητα θα έχουμε:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{h_L d 2g}{fL}} = \sqrt{\frac{6 \times 0,3 \times 2 \times 9,8}{0,04 \times 300}} = 1,714 \text{ m/s}$$

Με τη βοήθεια της ταχύτητας υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds.

$$\text{Re} = \frac{\bar{u}d}{\nu} = \frac{1,714 \times 0,3}{1,13 \times 10^{-6}} = 4,55 \times 10^5$$

Η σχετική τραχύτητα δίνεται από $\varepsilon/d=0,015$. Από τις δύο αυτές τιμές από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε ότι $f=0,0438$. Η τιμή αυτή είναι περίπου ίση με αυτή που υποθέσαμε. Έτσι έχουμε:

$$\dot{V} = \frac{\pi d^2 \bar{u}}{4} = \frac{3,14 \times 0,3^2 \times 1,715}{4} = 0,121 \text{ m}^3/\text{s}$$

Αν ζητείται μεγαλύτερη ακρίβεια, θα έπρεπε να επαναλαμβανόταν η προηγούμενη διαδικασία με $f=0,0438$. Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε

$$\bar{u} = 1,653 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad \text{Re} = 4,67 \times 10^5$$

Από τη νέα τιμή του αριθμού Reynolds και τη σχετική τραχύτητα στο διάγραμμα Moody βρίσκουμε $f=0,042$, που προσεγγίζει την τιμή που υποθέσαμε. Έτσι τελικά έχουμε: $\dot{V}=0,116$ m³/s.

Υπολογισμός της διαμέτρου

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν τρεις άγνωστοι στην εξίσωση Darcy-Weisbach d, u, f και δύο στον υπολογισμό του αριθμού Reynolds d, u . Η σχετική τραχύτητα ε/d είναι επίσης άγνωστη.

Αν στην εξίσωση Darcy-Weisbach χρησιμοποιηθεί η ογκομετρική παροχή, ελαχιστοποιούμε τους αγνώστους.

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{\dot{V}^2}{2g \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)^2} \Rightarrow d^5 = \frac{8L \dot{V}^2}{h_L g \pi^2} f = C_1 f \quad (6.43)$$

Με τον ίδιο τρόπο ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται ως:

$$\text{Re} = \frac{\bar{u}d}{\nu} = \frac{\dot{V}d}{\frac{\pi d^2}{4}\nu} = \frac{4\dot{V}}{\pi \nu d} = \frac{C_2}{d}, \quad (6.44)$$

όπου C_1 και C_2 είναι γνωστές ποσότητες.

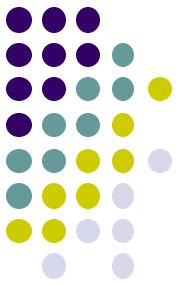
Έτσι ακολουθούμε την εξής διαδικασία σε προβλήματα αυτής της κατηγορίας:

1. Υποθέτουμε μια τιμή για το συντελεστή τριβής f .
2. Λύνουμε την εξίσωση (6.43) ως προς d .
3. Λύνουμε την εξίσωση (6.44) ως προς Re .
4. Υπολογίζουμε τη σχετική τραχύτητα ε/d .
5. Από το διάγραμμα Moody υπολογίζουμε τον συντελεστή τριβής. Αν η τιμή αυτή είναι περίπου ίση με αυτήν που υποθέσαμε έχει καλώς. Αλλιώς με τη νέα αυτή τιμή επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 6.
6. Όταν δύο διαδοχικές τιμές του συντελεστού τριβής προσεγγίζουν αρκετά, το πρόβλημα έχει λυθεί.

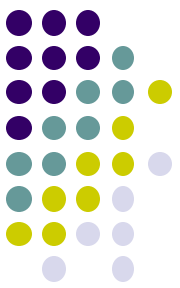


Παράδειγμα 6.6

Λάδι ρέει σε αγωγό μήκους $L=3000$ m με παροχή $0,25$ m³/s. Το κινηματικό ιξώδες του λαδιού είναι $\nu=10^{-6}$ m²/s και οι απώλειες ύψους $h_L=25$ m. Η τραχύτητα του αγωγού είναι $\varepsilon=0,046$ mm. Να υπολογισθεί η διάμετρος που πρέπει να έχει ο αγωγός.



Παράδειγμα 6.6



Λάδι ρέει σε αγωγό μήκους $L=3000$ m με παροχή $0,25$ m³/s. Το κινηματικό ιξώδες του λαδιού είναι $\nu=10^{-6}$ m²/s και οι απώλειες ύψους $h_L=25$ m. Η τραχύτητα του αγωγού είναι $\varepsilon=0,046$ mm. Να υπολογισθεί η διάμετρος που πρέπει να έχει ο αγωγός.

Λύση

Υποθέτουμε ότι ο συντελεστής τριβής είναι $f=0,02$. Από την εξίσωση (6.43) υπολογίζουμε τη διάμετρο: $d=0,416$ m. Συνεπώς από την εξίσωση (6.44) θα έχουμε: $Re=76500$ και $\varepsilon/d=0,00011$.

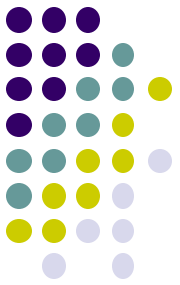
Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε ότι $f=0,0195$. Έτσι για τη νέα αυτή τιμή επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και βρίσκουμε:

$$d=0,413 \text{ m, } Re=75700 \text{ και } \varepsilon/d=0,00011 \text{ και } f=0,0196.$$

Συνεπώς $d=0,413$ m.

Παράδειγμα 6.7

Υγρό ρέει σε λείο αγωγό μήκους $L=20$ m. Η μέση ταχύτητα ροής στον αγωγό είναι $\bar{u}=4$ m/s και το κινηματικό ιξώδες $\nu=10^{-4}$ m²/s. Αν υποθέσουμε στρωτή πλήρως ανεπτυγμένη ροή να υπολογίσετε την ισχύ αντλίας έτσι ώστε να τροφοδοτεί με υγρό πυκνότητας 1274 kg/m³.



Παράδειγμα 6.7

Υγρό ρέει σε λείο αγωγό μήκους $L=20$ m. Η μέση ταχύτητα ροής στον αγωγό είναι $\bar{u}=4$ m/s και το κινηματικό ιξώδες $\nu=10^{-4}$ m²/s. Αν υποθέσουμε στρωτή πλήρως ανεπτυγμένη ροή να υπολογίσετε την ισχύ αντλίας έτσι ώστε να τροφοδοτεί με υγρό πυκνότητας 1274 kg/m³.

Λύση

Ως γνωστό η πτώση πίεσης λόγω απωλειών στην είσοδο και έξοδο του αγωγού θα δίνεται από την εξίσωση (6.42).

$$\Delta p = \frac{8\mu L \bar{u}}{R^2} \quad \text{ή} \quad \Delta p = \frac{32\mu L \bar{u}}{d^2}$$

Εφαρμογή της εξίσωσης (3.110) στον όγκο ελέγχου που περιλαμβάνει την είσοδο και έξοδο του αγωγού, δίνει ότι:

$$\frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + w_L + w_s = 0 \quad \cancel{\frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + w_s + w_f = 0}$$

όπου w_s είναι το παραγόμενο από το ρευστό έργο ανά μονάδα μάζας ρευστού. Αλλά ισχύει:

$$\frac{\Delta u^2}{2} = 0, \quad g\Delta z = 0 \quad \text{και} \quad w_s = 0$$

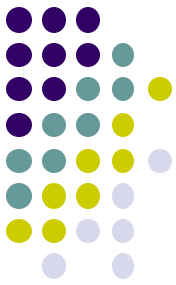
$$\text{Έτσι έχουμε: } w_f = \frac{\Delta p}{\rho} = -\frac{32\mu L \bar{u}}{d^2 \rho} = -\frac{32\nu L \bar{u}}{d^2}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι απαιτείται προσφορά έργου ίση με τις απώλειες. Αν η προηγούμενη εξίσωση πολλαπλασιαστεί με τον ρυθμό μάζας θα έχουμε

$$w_f \dot{m} = -\frac{32\nu L \bar{u} \dot{m}}{d^2} = -\frac{32\nu L \bar{u} \rho \dot{V}}{d^2} = -\frac{32\nu L \bar{u} \rho \cdot \bar{u} \pi d^2}{4 \cdot d^2} = -8\nu \pi L \bar{u}^2$$

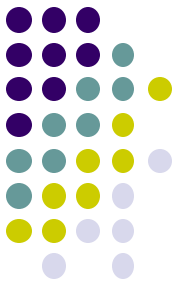
Οι απώλειες όμως ανά μονάδα μάζας w_f είναι ίσες με το έργο ανά μονάδα μάζας που πρέπει να προσφέρει η αντλία και το γινόμενο: $w_f \dot{m}$ δίνει την ισχύ που απαιτείται. Συνεπώς έχουμε:

$$\text{Ισχύς} = -8 \nu \pi L \bar{u}^2 = -8 \cdot 10^{-4} \times 1274 \times 3,14 \times 20 \times 4^2 = 1024 \text{ W}$$

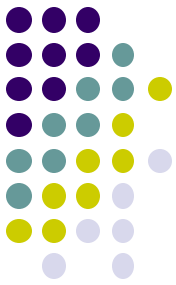


Παράδειγμα 6.8

Θεωκό οξύ πυκνότητας $\rho=1650 \text{ kg/m}^3$ και ιξώδους $\mu=8,6 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}$ πρόκειται να μεταφερθεί με αγωγό μήκους $L=0,8 \text{ km}$ και διαμέτρου $d=50 \text{ mm}$ με ρυθμό $3,0 \text{ kg/s}$ και σε ύψος $h=15 \text{ m}$. Αν η αντλία που θα χρησιμοποιηθεί έχει απόδοση 50% , να βρεθεί η ισχύς της αντλίας. Δίνεται $\varepsilon=0,08 \text{ mm}$.



Παράδειγμα 6.8



Θεωκό οξύ πυκνότητας $\rho = 1650 \text{ kg/m}^3$ και ιξώδους $\mu = 8,6 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}$ πρόκειται να μεταφερθεί με αγωγό μήκους $L = 0,8 \text{ km}$ και διαμέτρου $d = 50 \text{ mm}$ με ρυθμό $3,0 \text{ kg/s}$ και σε ύψος $h = 15 \text{ m}$. Αν η αντλία που θα χρησιμοποιηθεί έχει απόδοση 50% , να βρεθεί η ισχύς της αντλίας. Δίνεται $\varepsilon = 0,08 \text{ mm}$.

Λύση

Εμβαδόν διατομής του αγωγού: $\frac{\pi d^2}{4} = 0,00196 \text{ m}^2$.

$$\text{Μέση ταχύτητα: } \bar{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{1650}{0,00196} = 0,93 \text{ m/s.}$$

$$\text{Αριθμός Reynolds: } \text{Re} = \frac{du\rho}{\mu} = \frac{0,05 \times 0,93 \times 1650}{8,6 \times 10^{-3}} = 8921.$$

Η ροή είναι τυρβώδης και συνεπώς η εξίσωση Hagen-Poiseuille δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Η σχετική τραχύτητα είναι $\varepsilon/d = 0,0016$. Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε $f = 0,0232$. Έτσι οι απώλειες ύψους λόγω τριβών είναι:

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{\bar{u}^2}{2g} = 0,022 \times \frac{800}{0,05} \times \frac{0,93^2}{2 \times 9,81} = 15,5 \text{ m}$$

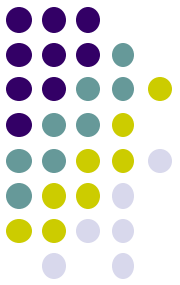
Συνεπώς το συνολικό ύψος είναι: $h = 15,5 + 15 = 30,5 \text{ m}$.

Η απαιτούμενη ισχύς P μπορεί να βρεθεί ως:

$$P = \text{ρυθμός μάζας} \times \text{ύψος} \times g = 3,0 \times 30,5 \times 9,81 = 897,6 \text{ W.}$$

Επειδή η απόδοση της αντλίας είναι $n = 50 \%$ η απαιτούμενη ισχύς της είναι:

$$n = \frac{P_{\omega\phi.}}{P_{\delta\alpha\pi.}} \Rightarrow P_{\delta\alpha\pi.} = \frac{P_{\omega\phi.}}{n} = 1795 \text{ W}$$

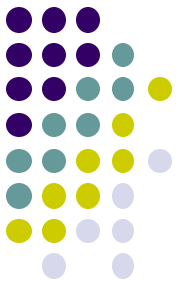


Άσκηση (Υπολογισμός απωλειών)

$$\text{Μον. ιξώδους: } N \cdot s / m^2 = Pa \cdot s$$

Λάδι απόλυτης συνεκτικότητας $0,1 \text{ Pa} \cdot s$ και σχετικής πυκνότητας $0,850$ ρέει σε σωλήνα από μαντέμι μήκους 3048 m και διαμέτρου 305 mm με παροχή $44,4 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

- α) Προσδιορίστε το είδος της ροής
- β) Ποιο το ύψος απωλειών στον σωλήνα



Άσκηση (Υπολογισμός απωλειών)

Μον. ιξώδους: $N \cdot s / m^2 = Pa \cdot s$

Λάδι απόλυτης συνεκτικότητας $0,1 Pa \cdot s$ και σχετικής πυκνότητας 0,850 ρέει σε σωλήνα από μαντέμι μήκους 3048 m και διαμέτρου 305 mm με παροχή $44,4 \times 10^{-3} m^3/s$

- α) Προσδιορίστε το είδος της ροής
- β) Ποιο το ύψος απωλειών στον σωλήνα

Λύση

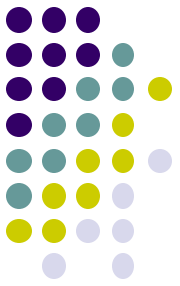
$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{44,4 \times 10^{-3}}{\frac{1}{4} \pi (0,305)^2} = 0,61 m/s \quad Re = \frac{d \bar{u} \rho}{\mu} = \frac{0,305 \cdot 0,61 \cdot 850}{0,1} = 1580 \quad \text{Στρωτή ροή}$$

$$f = \frac{64}{Re} \Rightarrow f = 0,0407 \Rightarrow h_L = f \frac{L}{d} \frac{u^2}{2g} = 0,0407 \cdot \frac{3048}{0,305} \cdot \frac{0,61^2}{2g} = 7,71 m$$

Άσκηση (Υπολογισμός παροχής)

Πετρέλαιο ρέει από το Α στο Β σε οριζόντιο χαλυβδοσωλήνα των 153 mm, μήκους 104.4 m. Η πίεση στο Α είναι 1,069 MPa και στο Β είναι 34,48 kPa.

Η **κινηματική συνεκτικότητα είναι $412,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$** και η σχετική πυκνότητα 0,918. Πόση είναι η παροχή σε m^3/s



Άσκηση (Υπολογισμός παροχής)

Πετρέλαιο ρέει από το Α στο Β σε οριζόντιο χαλυβδοσωλήνα των 153 mm, μήκους 104.4 m. Η πίεση στο Α είναι 1,069 Μpa και στο Β είναι 34,48 kPa.

Η **κινηματική συνεκτικότητα** είναι $412,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ και η σχετική πυκνότητα 0,918. Πόση είναι η παροχή σε m^3/s

Λύση

$Q = A \cdot \bar{u}$, άρα πρέπει να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα

Εξίσωση Bernoulli ή

$$\frac{\Delta u^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + w_L + w_s = 0$$

$$\left(\frac{p_A}{\gamma_A} + \cancel{\frac{u_A^2}{2g}} + \cancel{z_A} \right) - H_L = \left(\frac{p_B}{\gamma_B} + \cancel{\frac{u_B^2}{2g}} + \cancel{z_B} \right) \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta p}{\gamma} + \cancel{\frac{\Delta u^2}{2g}} + \cancel{\Delta z} - H_L = 0$$

$$\frac{1.069.000 - 34.480}{918 \cdot 9,81} - f \frac{L}{d} \frac{u^2}{2g} = 0 \Rightarrow f \frac{u^2}{2g} 682,4 = 114,88 \quad f, u \text{ άγνωστα}$$

Αν στρωτή ροή τότε $\Delta p = 32 \frac{\mu L}{d^2} \bar{u} \Rightarrow \boxed{\bar{u} = 2,17 \text{ m/s}}$

$$Re = \frac{d \bar{u} \rho}{\mu} = \frac{d \bar{u}}{\nu} = 800, \quad \text{άρα όντως η ροή είναι στρωτή} \quad \Rightarrow Q = A \cdot \bar{u} = 0,0396 \text{ m}^3/\text{s}$$

