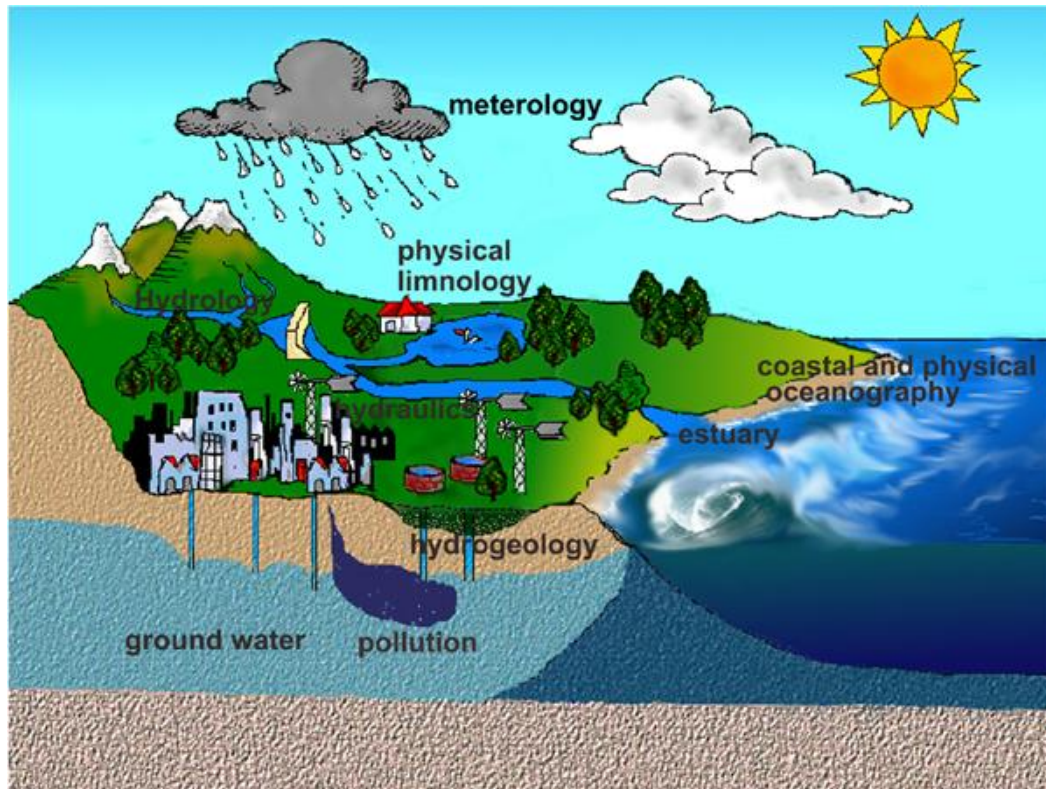
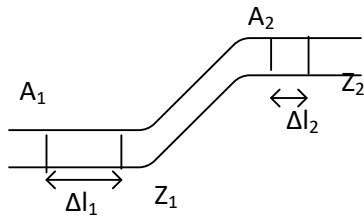


Κινηματική των Ρευστών - 2



Εξισώσεις Bernoulli & Euler



κίνηση ρευστού
κατά μήκος λεπτού
ρευματικού
σωλήνα

$$E_2 = \frac{1}{2} \Delta m u_2^2 + \Delta m g z_2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \Delta m u_1^2 + \Delta m g z_1$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \Delta W$$

$$W_1 = P_1 \cdot A_1 \Delta l_1$$

$$W_2 = P_2 \cdot A_2 \Delta l_2$$

Έργο που παράγεται
κατά τη μετακίνηση του
όγκου ΔV στο κάτω άκρο

Έργο που καταναλώνεται
για τη μετακίνηση του
όγκου ΔV στο πάνω άκρο

Για $u=0$ (στατικό ρευστό) $\Rightarrow$

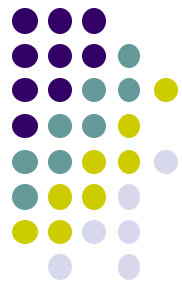
$$P + \rho g z = \text{σταθ.}$$

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z + P = \text{σταθ}$$

$$\frac{1}{2} u^2 + g z + \frac{P}{\rho} = \text{σταθ}$$

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{P}{\gamma} = \text{σταθ}$$

διαιρώ με ρ
διαιρώ με g



$$\frac{1}{2} \Delta m u_2^2 + \Delta m g z_2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 - \Delta m g z_1 = W_1 - W_2$$

$$= (P_1 - P_2) \Delta V$$

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_2^2 + \frac{\Delta m}{\Delta V} g z_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_1^2 - \frac{\Delta m}{\Delta V} g z_1 = P_1 - P_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g z_2 + P_2 = \text{σταθ.}$$

Εξίσωση Bernoulli

2ος νόμος Νεύτωνα:

$$\Sigma F = ma$$

(κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς)

$$pdA - (p + dP)dA - \rho g dS dA \cos \theta = (\rho dS dA) \alpha \Rightarrow$$

$$-dP dA - \rho g dS dA \cos \theta = (\rho dS dA) a$$

$$\bullet a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial S} \frac{dS}{dt} = \frac{\partial v}{\partial S} v$$

$$\bullet \cos \theta = \frac{\partial h}{\partial S}$$

διαίρω
με $dS dA$

Εξίσωση Euler 1) για μόνιμη ροή, 2) κατά μήκος μιας γραμμής ροής

$$\frac{1}{2} d(v^2) + \frac{1}{\rho} dP + g dh = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial S} - \rho g \frac{\partial h}{\partial S} = \rho v \frac{\partial v}{\partial S} \Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial S} - \rho g \frac{\partial h}{\partial S} = \rho \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Συνολικό ύψος

διαίρω με το ρ

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gh \right) = 0$$

Επειδή η S είναι η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή η εξίσωση μπορεί να γραφεί

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gh = \text{σταθ.}$$

Εξίσωση Bernoulli

Προϋποθέσεις

- 1) Ιδανικό ρευστό
- 2) Μόνιμη ροή
- 3) Σταθ. Πυκνότητα κατά μήκος ροϊκής γραμμής

Η εξίσωση δεν ισχύει όταν μια εξωτερική συσκευή (π.χ. αντλία) παράγει έργο στο ρευστό (προσθέτει/ αφαιρεί ενέργεια)

Σωματίδιο κινούμενο κατά μήκος μιας τροχιάς

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{g} + \frac{P}{\gamma} + h = \text{σταθ.}$$

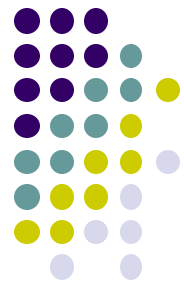
Διαιρώντας με το g

Πιεζομετρικό ύψος

Ενέργεια πίεσης ή
Ενέργεια ροής

Οφείλεται στην κίνηση του ρευστού μεταξύ των 2 σημείων με διαφ. πίεσης.
Δεν είναι ενέργεια που κατέχει το ρευστό. Είναι απλά ενέργεια

που το ρευστό μπορεί να μεταφέρει



Εξισώσεις Bernoulli & Euler



$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{σταθ.}$$

$\frac{p}{\gamma}$ (Ενέργεια πίεσης ή Ενέργεια ροής) :

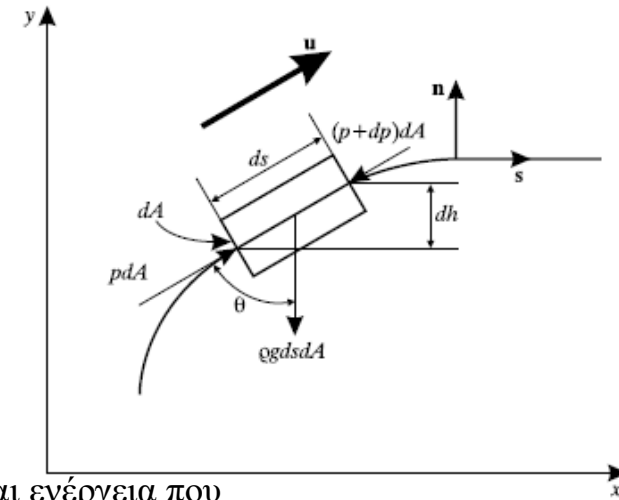
Οφείλεται στην κίνηση του ρευστού μεταξύ 2 σημείων με διαφορά πίεσης. Δεν είναι ενέργεια που κατέχει το ρευστό. Είναι απλά ενέργεια που το ρευστό μπορεί να μεταφέρει.

$\frac{p}{\gamma} + h$ (Πιεζομετρικό ύψος)

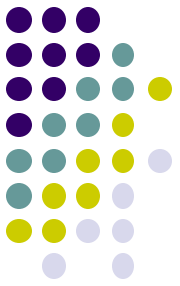
Προϋποθέσεις :

- 1) Ιδανικό ρευστό
- 2) Μόνιμη ροή
- 3) Σταθερή Πυκνότητα κατά μήκος ροικής γραμμής

Η Εξίσωση δεν ισχύει όταν μη εξωτερική συσκευή (π.χ. αντλία) παράγει έργο στο ρευστό (προσθέτει / αφαιρεί ενέργεια)



Εφαρμογή - Ανυψωτική δύναμη αεροπλάνου



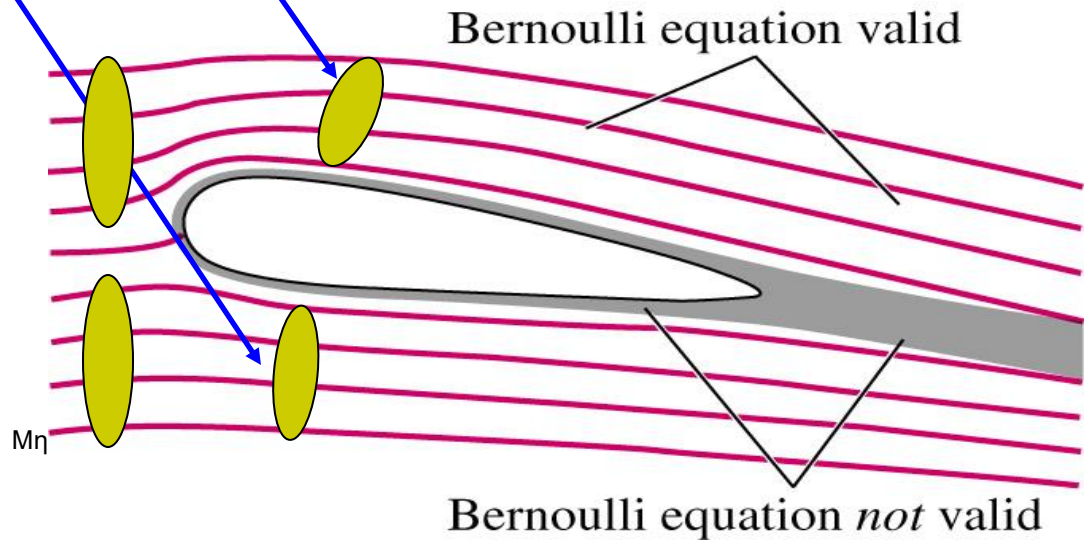
Μεγάλη ταχύτητα (μικρή πίεση) (μέγιστη πυκνότητα ρευματικών γραμμών)

Μικρή ταχύτητα (μεγάλη πίεση) (μικρή πυκνότητα ρευματικών γραμμών)

$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{σταθ.}$$

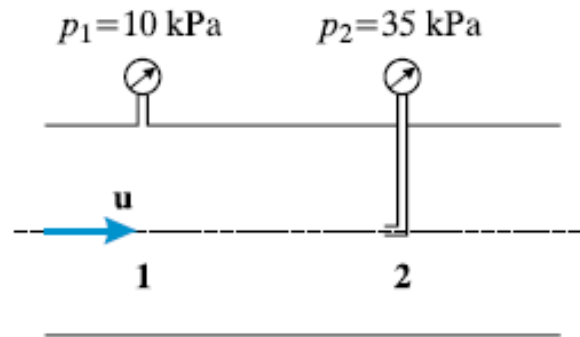
Για h : σταθερό (κίνηση αεροπλάνου)

Η ταχύτητα ελαττώνεται όταν αυξάνει η πίεση κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής



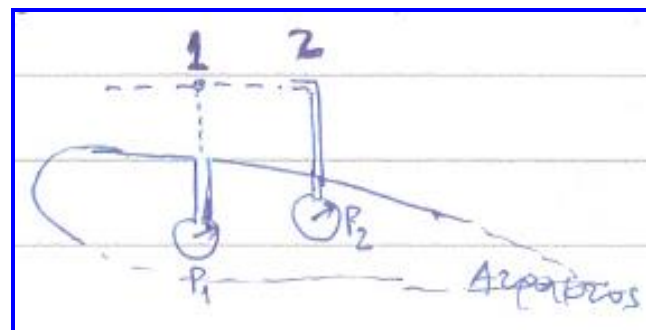
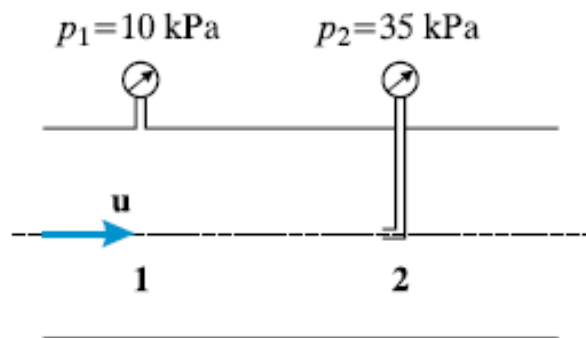
Παράδειγμα 3.3

Να υπολογισθεί η ταχύτητα ροής ρευστού σε οριζόντιο σωλήνα με την βοήθεια των μανόμετρων όπως στο Σχήμα. Δίνεται $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$.



Παράδειγμα 3.3

Να υπολογισθεί η ταχύτητα ροής ρευστού σε οριζόντιο σωλήνα με την βοήθεια των μανόμετρων όπως στο Σχήμα. Δίνεται $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$.



Λύση

Το ρευστό ρέει με ταχύτητα u στο σημείο 1 και είναι ακίνητο στο σημείο 2 του άξονα του σωλήνα. Η πίεση του ρευστού στο σημείο 1 είναι μεγαλύτερη από την στατική πίεση. Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2 του ρευστού, έχουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{σταθ.} \quad \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho},$$

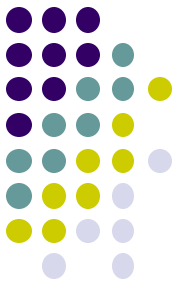
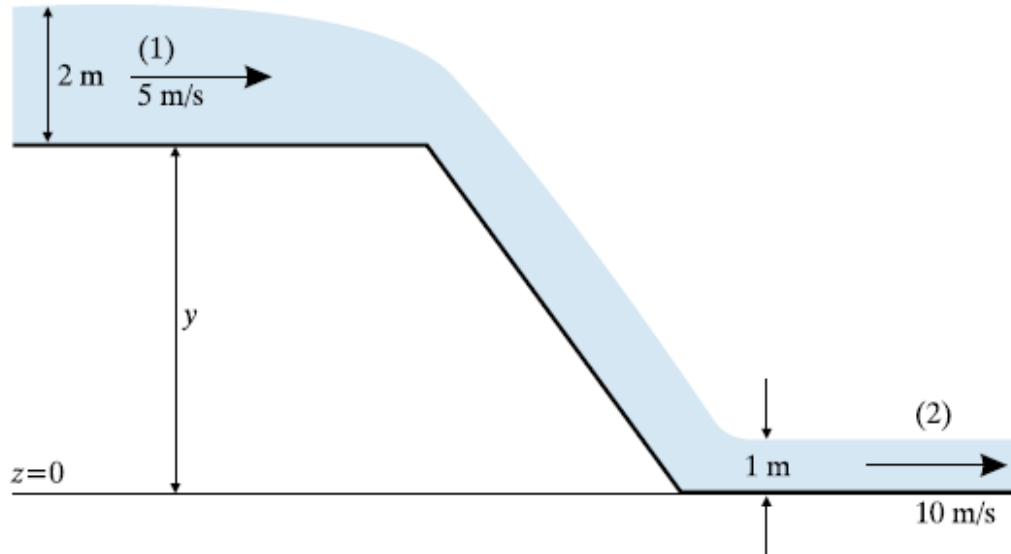
και επειδή $u_2 = 0$, προκύπτει:

$$u_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(35 - 10) \times 10^3}{1,2}} = 204 \text{ m/s}$$

Παράδειγμα 3.4

Νερό ρέει σε ανοιχτό αγωγό όπως στο παρατιθέμενο Σχήμα. Εάν η ροή είναι ομοιόμορφη και οι απώλειες λόγω τριβών μπορούν να αγνοηθούν, να υπολογίσετε την υψομετρική διαφορά y .

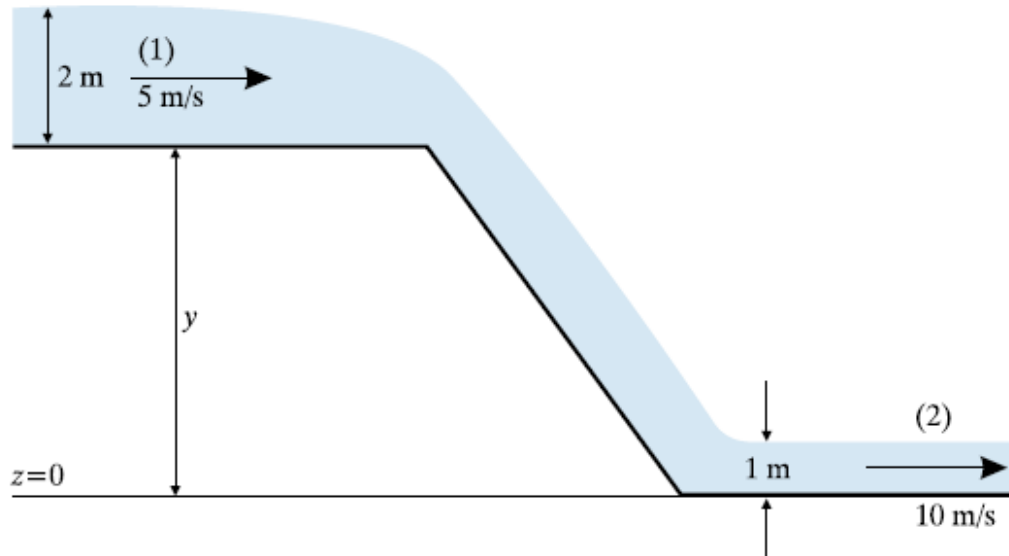
Λύση



Παράδειγμα 3.4

Νερό ρέει σε ανοιχτό αγωγό όπως στο παρατιθέμενο Σχήμα. Εάν η ροή είναι ομοιόμορφη και οι απώλειες λόγω τριβών μπορούν να αγνοηθούν, να υπολογίσετε την υψομετρική διαφορά y .

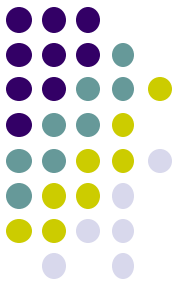
Λύση

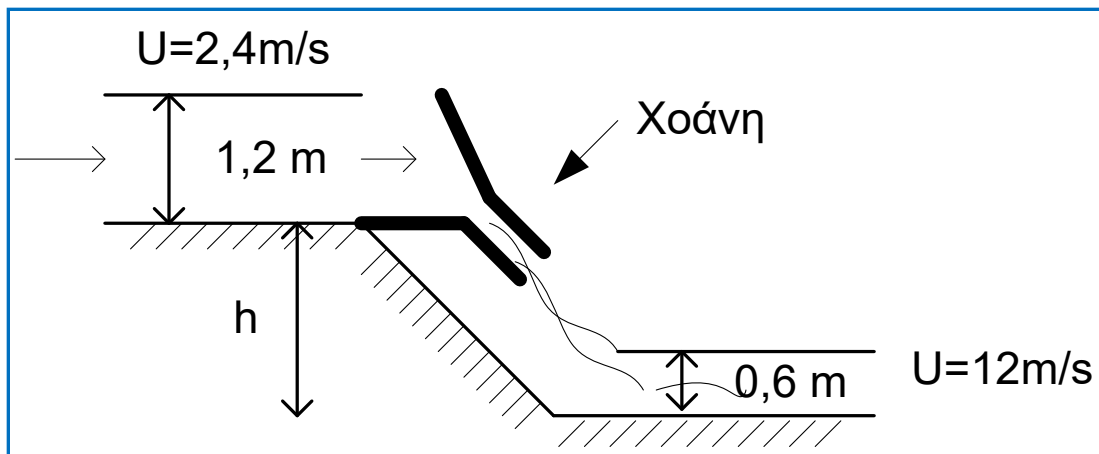


$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{σταθ.} \quad \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2$$

Αντικαθιστώντας $h_1 = (y+2)$ m, $h_2 = 1$ m, $p_2 = p_1$ προκύπτει:

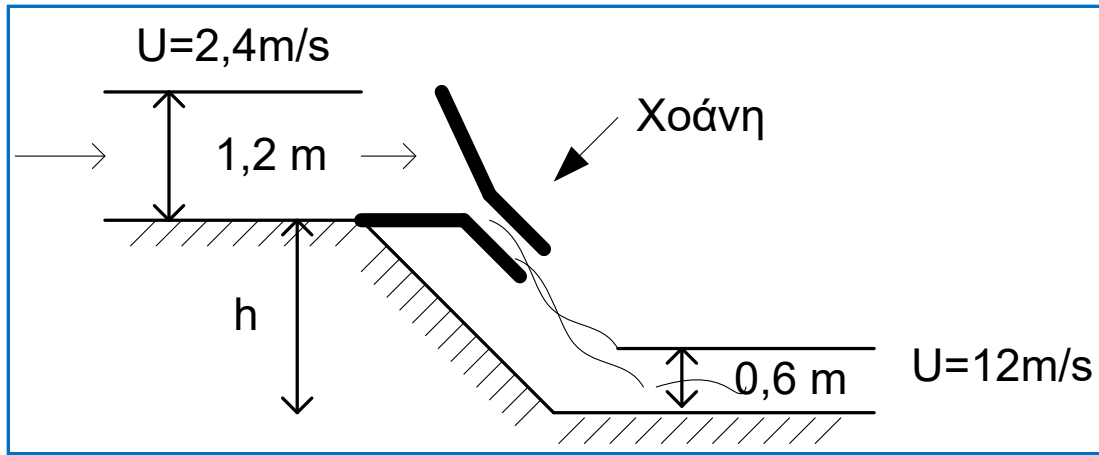
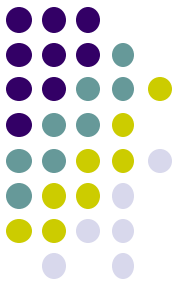
$$\frac{5^2}{2 \times 9,8} + y + 2 = \frac{10^2}{2 \times 9,8} + 1 \Rightarrow y = 2,82 \text{ m}$$





Να βρεθεί η υψομετρική διαφορά h





Να βρεθεί η υψομετρική διαφορά h

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + h_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + h_2$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$h_1 = h + 1,2$$

$$h_2 = 0,6$$

$$\Rightarrow \frac{2,4^2}{19,6} + h + 1,2 = \frac{12^2}{19,6} + 0,6$$

$$\Rightarrow h = 6,46m$$

Ρυθμός ροής μάζας και όγκου
Ογκομετρική Παροχή, Μέση Ταχύτητα

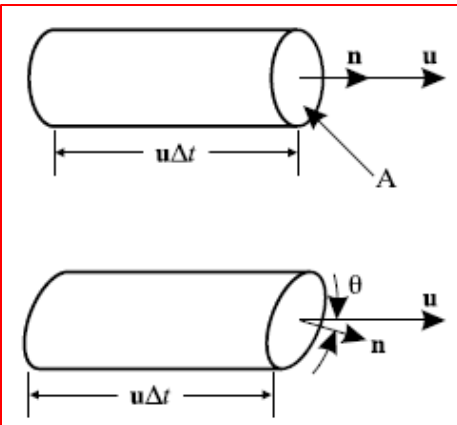
$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho V}{\Delta t} = \frac{\rho A u \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \dot{m} = \rho A u$$

Αν η ταχύτητα δεν είναι κάθετη στην επιφάνεια:

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho V}{\Delta t} = \frac{\rho A u \cos \theta \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \dot{m} = \rho A u \cos \theta = \rho A (\vec{u} \cdot \vec{n})$$

$\vec{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια A

$\vec{u} \cdot \vec{n}$ εσωτερικό γινόμενο



Αν η ταχύτητα δεν παραμένει σταθερή σε όλα τα σημεία της επιφάνειας A $\Rightarrow$

$$d\dot{m} = \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \Rightarrow \dot{m} = \iint_A \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$$

① $\vec{u}, \vec{n}$ ομόρροπα: $0 \leq \theta \leq \pi/2 \Rightarrow 0 \leq \cos \theta \leq 1 \Rightarrow$ εσωτ. γινόμενο θετικό $\Rightarrow$ ρευστό εκρέει από την επιφ. A

ροή μάζας

② $\vec{u}, \vec{n}$ αντίρροπα: $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -1 \leq \cos \theta < 0 \Rightarrow$ εσωτ. γινόμενο αρνητικό $\Rightarrow$ ρευστό εισρέει στην επιφ. A

$$\text{Ογκομετρική παροχή} = \frac{\text{ροή μάζας } (\dot{m})}{\text{πυκνότητα } (\rho)} = \frac{\dot{V}}{\rho} \Rightarrow \dot{V} = \iint_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\text{Μέση Ταχύτητα Ρευστού} = \frac{\dot{V}}{A} \Rightarrow$$

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \iint_A (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$$

Αρχή διατήρησης της μάζας

Όπως ήδη έχει αναφερθεί ο νόμος αυτός δηλώνει ότι η μάζα δεν δημιουργείται αλλά ούτε και καταστρέφεται. Η μάζα ενός στοιχειώδους όγκου dV ρευστού είναι ρdV . Επειδή η πυκνότητα μπορεί να αλλάζει από σημείο σε σημείο, η ολική μάζα σε ένα όγκο ελέγχου (Ο.Ε.) υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα $\iiint_{\text{Ο.Ε.}} \rho dV$. Έτσι ο

ρυθμός μεταβολής μάζας στον όγκο ελέγχου είναι $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{Ο.Ε.}} \rho dV$. Εάν η μάζα διατηρείται σταθερή στον όγκο ελέγχου, ο ρυθμός μεταβολής μάζας είναι μηδέν και ισχύει:

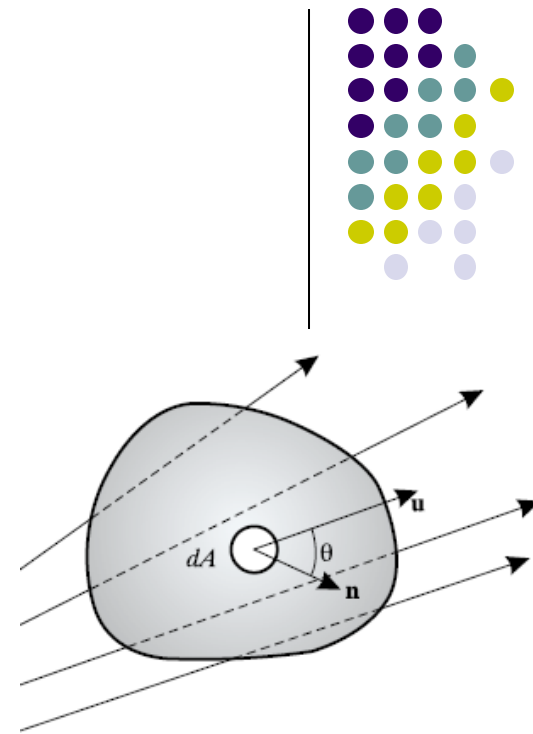
$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{Ο.Ε.}} \rho dV = 0 \quad (3.36)$$

$$\left(\text{Ρυθμός εισροής} \right) - \left(\text{Ρυθμός εκροής} \right) + \left(\text{Ρυθμός συσσώρευσης} \right) = 0$$

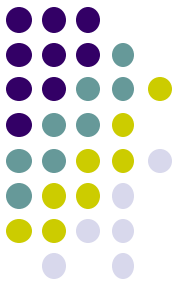
(μάζας στον Ο.Ε.) (μάζας από τον Ο.Ε.) (μάζας στον Ο.Ε.)

$$\oiint_{\text{Ε.Ε.}} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{Ο.Ε.}} \rho dV = 0$$

Εξίσωση συνέχειας



Ειδικές μορφές της ολοκληρωμένης εξίσωσης συνέχειας



$$\oiint_{EE} \varrho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{O.E.} \varrho dV = 0$$

Μόνιμη ροή

Η πυκνότητα και οι υπόλοιπες δραστηριότητες του ρευστού δεν μεταβάλλονται με το χρόνο και η εξίσωση συνέχειας απλοποιείται στη μορφή:

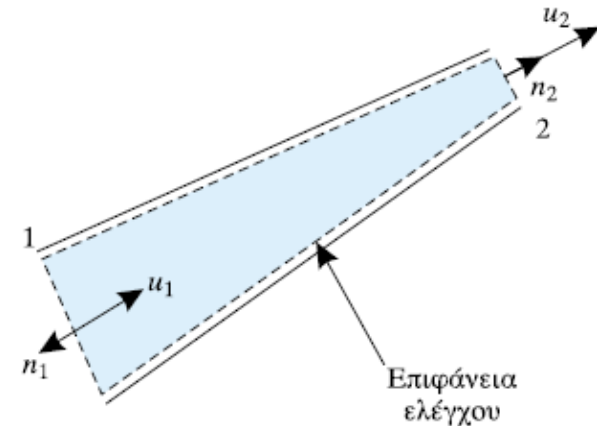
$$\oiint_{EE} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

αν ροή ρευστού σε αγωγό μεταβλητής διατομής τότε:

$$\oiint_{EE} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \Rightarrow \oiint_{A_1} -\rho_1 u_1 dA + \oiint_{A_2} \rho_2 u_2 dA = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_1 \mathbf{u}_1 A_1 = \bar{\rho}_2 \mathbf{u}_2 A_2$$

Μόνιμη και Ασυμπίεστη ροή

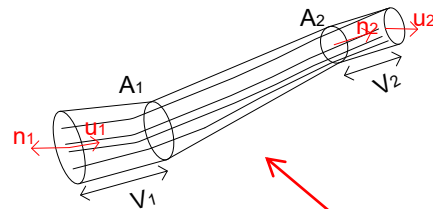
$$\bar{\rho}_1 \mathbf{u}_1 A_1 = \bar{\rho}_2 \mathbf{u}_2 A_2 \Rightarrow \mathbf{u}_1 A_1 = \mathbf{u}_2 A_2$$



Αρχή Διατήρησης της Μάζας

Για μόνιμη ροή (πυκνότητα και ιδιότητες δεν μεταβάλλονται με το χρόνο)

Για ασυμπίεστη ροή (πυκνότητα ρευστού σταθερή)



Σε Δt περνά από A_1 όγκος $A_1 u_1 \Delta t$
 » » A_2 » $A_2 u_2 \Delta t$

Εξίσωση συνέχειας

$$\Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2$$

Ολοκληρωμένη Εξίσωση Συνέχειας

Μάζα στοιχειώδους όγκου $dV = \rho \cdot dV$

Μάζα σε όγκο ελέγχου $= \iiint_{OE} \rho \cdot dV$

Ρυθμός μεταβολής μάζας στον όγκο ελέγχου $= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{OE} \rho \cdot dV$

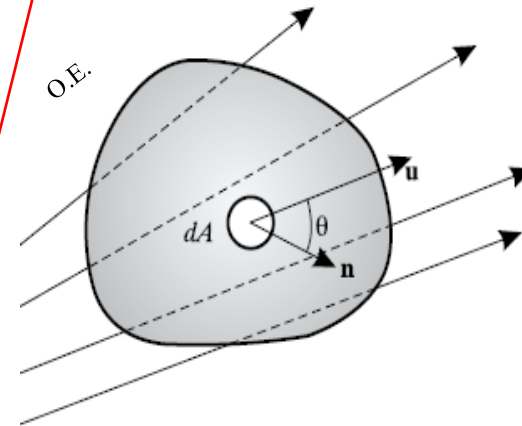
Αν η μάζα διατηρείται σταθερή στον όγκο ελέγχου $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{OE} \rho \cdot dV = 0$

$$\left(\text{Ρυθμός Εισροής} \right) - \left(\text{Ρυθμός Εκροής} \right) + \left(\text{Ρυθμός Συσσώρευσης} \right) = 0$$

(μάζας στην EE) (μάζας στην EE) (μάζας στην OE)

$$\int_{EE} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \rho dV = 0$$

Εξίσωση συνέχειας



Μόνιμη ροή: $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{OE} \rho \cdot dV = 0 \Rightarrow$ η εξίσωση συνέχειας γίνεται (βλ. Σχήμα)

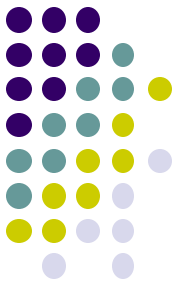
$$\iint_{A_1} \rho_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1) dA + \iint_{A_2} \rho_2 (\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2) dA = 0 \Rightarrow \iint_{A_1} -\rho_1 u_1 dA + \iint_{A_2} \rho_2 u_2 dA = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 A_1 = \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 A_2$$

Μόνιμη και ασυμπίεστη

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow \bar{u}_1 A_1 = \bar{u}_2 A_2$$

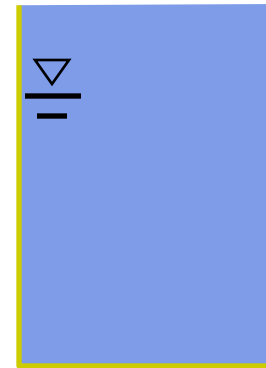
$\bar{\rho}$: μέση πυκνότητα

Χωρικές – χρονικές ταξινομήσεις



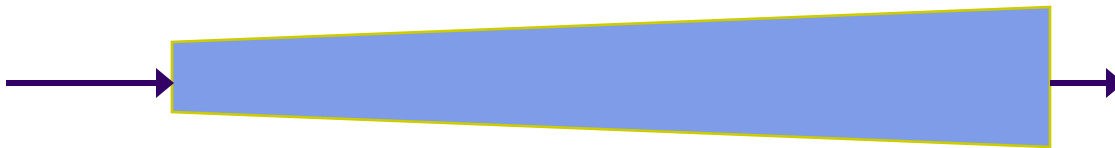
- Σταθερό – μη σταθερό

Χρονική μεταβολή



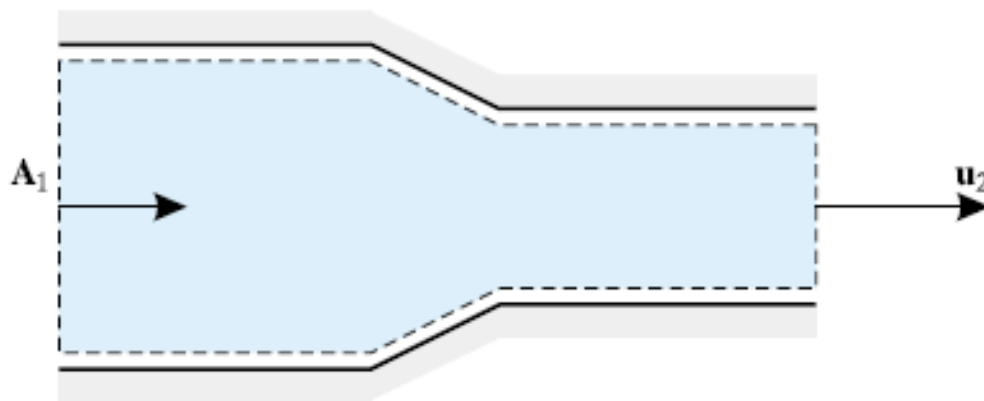
- Ομοιόμορφη – μη ομοιόμορφη

Χωρική μεταβολή



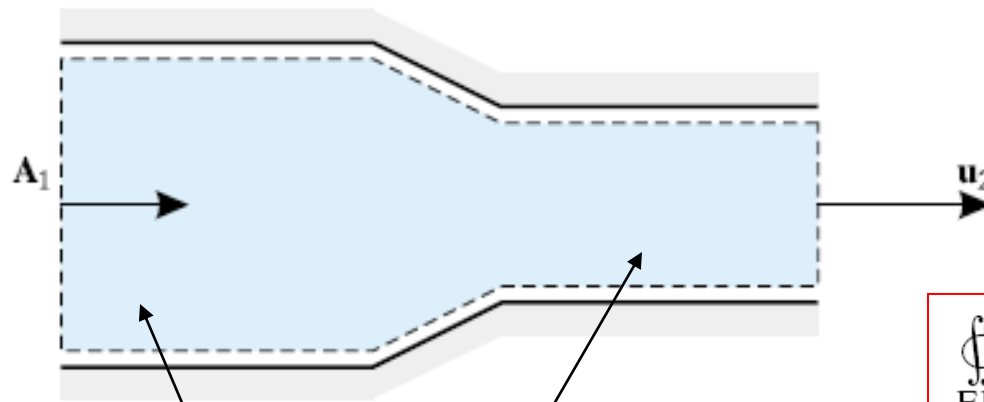
Σε ένα τμήμα κυκλικού αγωγού η διάμετρος ελαττώνεται από 10 cm σε 5 cm. Αν νερό εισέρχεται με ομοιόμορφη σταθερή ταχύτητα $u_1 = 2 \text{ m/s}$ στο άνοιγμα διαμέτρου 10 cm, να υπολογισθεί η ταχύτητα εξόδου του νερού.

Λύση



Σε ένα τμήμα κυκλικού αγωγού η διάμετρος ελαττώνεται από 10 cm σε 5 cm. Αν νερό εισέρχεται με ομοιόμορφη σταθερή ταχύτητα $u_1 = 2 \text{ m/s}$ στο άνοιγμα διαμέτρου 10 cm, να υπολογισθεί η ταχύτητα εξόδου του νερού.

Λύση



$$\oint_{EE} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{O.E.} \rho dV = 0$$

$$\oint_{EE} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \Rightarrow \oint_{A_1} -\rho_1 u_1 dA + \oint_{A_2} \rho_2 u_2 dA = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_1 \mathbf{u}_1 A_1 = \bar{\rho}_2 \mathbf{u}_2 A_2$$

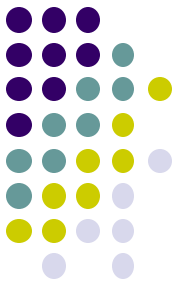
Θεωρούμε ως **όγκο ελέγχου τον** όγκο στο εσωτερικό του αγωγού όπως φαίνεται από την εστιγμένη γραμμή στο διπλανό Σχήμα.

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε

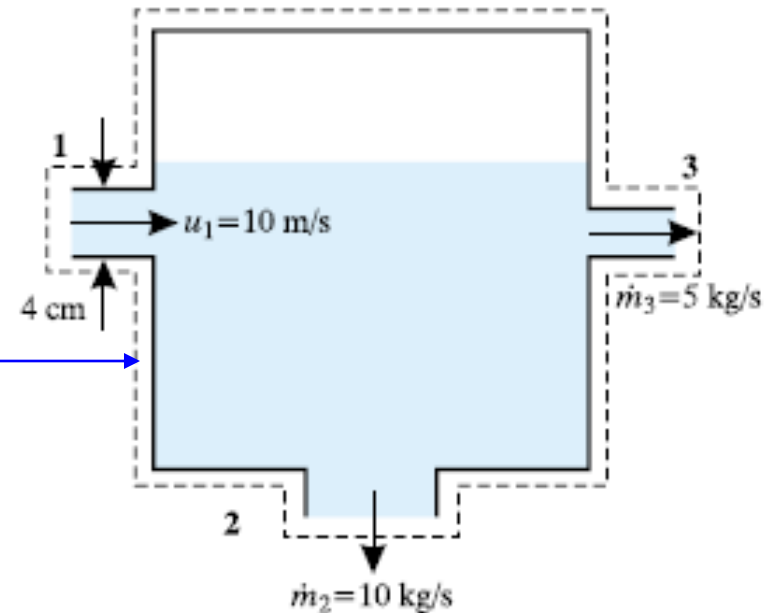
$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \Rightarrow u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2} = u_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 2 \text{ m/s} \times \left(\frac{10}{5} \right)^2 = 8 \text{ m/s}$$

Νερό εισέρχεται και εξέρχεται από την συσκευή του Σχήματος σύμφωνα με τα δεδομένα που αναφέρονται στο Σχήμα. Να υπολογισθεί ο ρυθμός συσσώρευσης της μάζας του νερού στη συσκευή.

Λύση



Ο.Ε.



Νερό εισέρχεται και εξέρχεται από την συσκευή του Σχήματος σύμφωνα με τα δεδομένα που αναφέρονται στο Σχήμα. Να υπολογισθεί ο ρυθμός συσσώρευσης της μάζας του νερού στη συσκευή.

Λύση

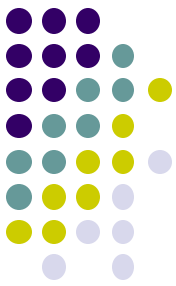
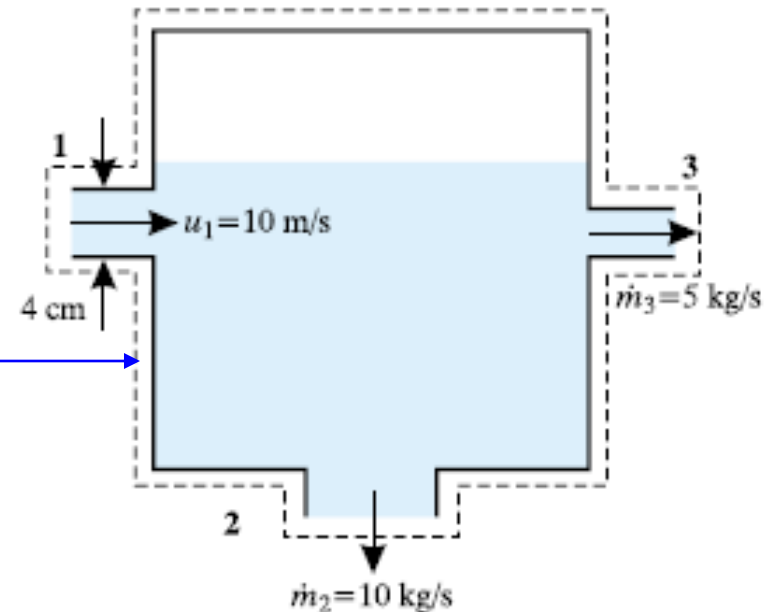
$$\oiint_{\text{E.E.}} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{\text{O.E.}} \rho dV = 0$$

$$\iint_{A_1} \rho_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA + \iint_{A_2} \rho_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA + \iint_{A_3} \rho_3(\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3) dA + \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$-\rho u_1 A_1 + \rho u_2 A_2 + \rho u_3 A_3 + \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow -\rho u_1 A_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 + \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow$$

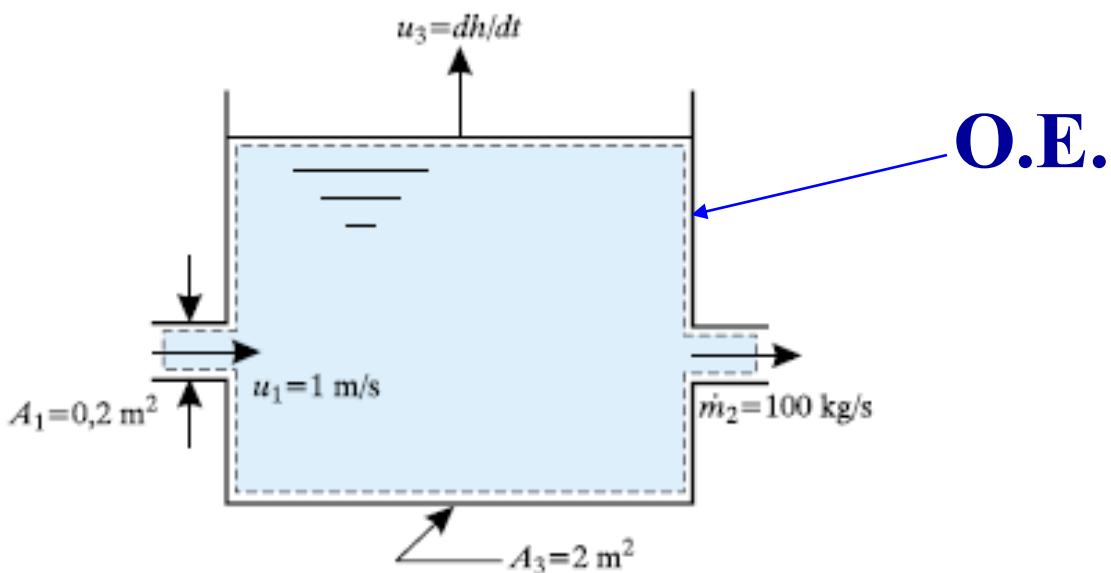
$$\frac{dm}{dt} = \rho u_1 A_1 - \dot{m}_2 - \dot{m}_3 = -2,44 \text{ kg/s}$$

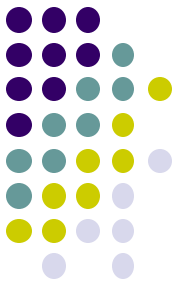
O.E.



Νερό ρέει στο δοχείο του Σχήματος σύμφωνα με τα δεδομένα που αναγράφονται σε αυτό. Να υπολογισθεί ο ρυθμός ανόδου της στάθμης του νερού.

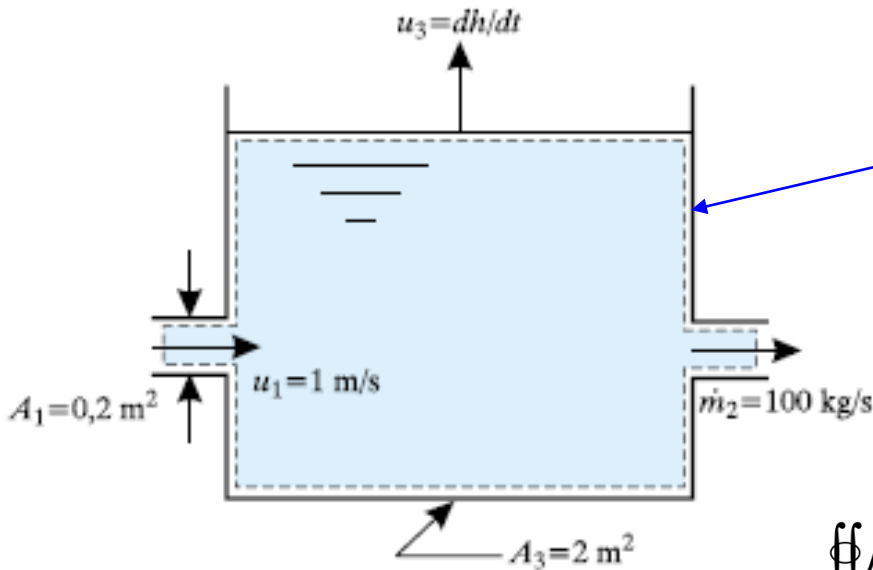
Λύση





Νερό ρέει στο δοχείο του Σχήματος σύμφωνα με τα δεδομένα που αναγράφονται σε αυτό. Να υπολογισθεί ο ρυθμός ανόδου της στάθμης του νερού.

Λύση



O.E.

$$\oint_{EE} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{O.E.} \rho dV = 0$$

$$\oint_{EE} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \Rightarrow \oint_{A_1} -\rho_1 u_1 dA + \oint_{A_2} \rho_2 u_2 dA = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_1 \mathbf{u}_1 A_1 = \bar{\rho}_2 \mathbf{u}_2 A_2$$

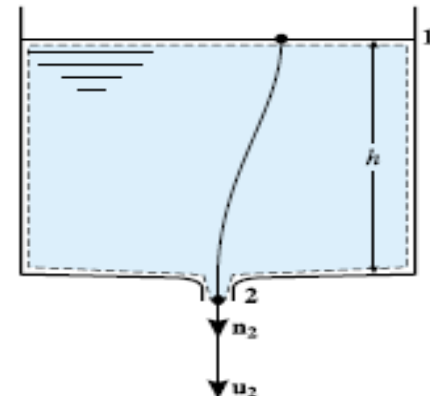
$$-\rho u_1 A_1 + \rho u_2 A_2 + \rho u_3 A_3 = 0 \Rightarrow -\rho u_1 A_1 + \dot{m}_2 + \rho \frac{dh}{dt} A_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho u_1 A_1 - \dot{m}_2}{\rho A_3} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,2 \text{ m}^2 - 100 \frac{\text{kg}}{\text{s}}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 2 \text{ m}^2} = 0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Παράδειγμα 3.8 Μεταβλητός όγκος ελέγχου

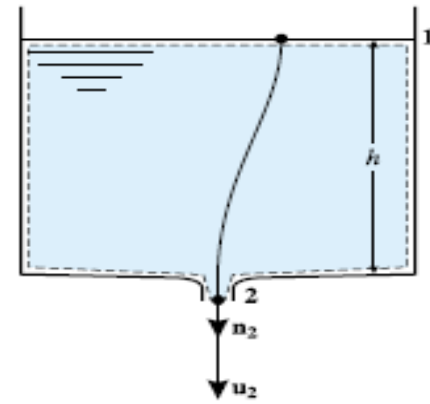
Ανοιχτή δεξαμενή διατομής A φέρει υγρό πυκνότητας ρ και είναι γεμάτη μέχρι ύψος h . Να υπολογισθούν: (α) Η ταχύτητα ελεύθερης εκροής του υγρού από οπή εμβαδού S , που βρίσκεται στον πυθμένα της δεξαμενής, (β) Το ύψος της στάθμης του υγρού μετά από χρόνο t , (γ) Ο απαιτούμενος χρόνος για την εκκένωση της δεξαμενής.

Λύση



Παράδειγμα 3.8 Μεταβλητός όγκος ελέγχου

Ανοιχτή δεξαμενή διατομής A φέρει υγρό πυκνότητας ρ και είναι γεμάτη μέχρι ύψος h . Να υπολογισθούν: (α) Η ταχύτητα ελεύθερης εκροής του υγρού από οπή εμβαδού S , που βρίσκεται στον πυθμένα της δεξαμενής, (β) Το ύψος της στάθμης του υγρού μετά από χρόνο t , (γ) Ο απαιτούμενος χρόνος για την εκκένωση της δεξαμενής.



Λύση

$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{σταθ.}$$

$$\alpha) \frac{1}{2} \rho \cancel{u_1^2}^{\cancel{u_1=0}} + \rho g h + \cancel{P_1}^{\cancel{P_{atm}}} = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g \cancel{h'}^{\cancel{h'=0}} + \cancel{P_2}^{\cancel{P_{atm}}} \Rightarrow \cancel{\rho} g h = \frac{1}{2} \cancel{\rho} v_2^2 \Rightarrow \boxed{u_2 = \sqrt{2gh}}$$

Ίδια ταχύτητα με εκείνη που θα είχε αν έπεφτε από ύψος h **(Θεώρημα Toricelli)**

$$\beta) \iint_{EE} \rho(u_2 n_2) dA + \frac{\vartheta}{\vartheta t} \iiint_{OE} \rho dV = 0 \Rightarrow \Rightarrow \rho u_2 S + \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \rho S \sqrt{2gh} + \rho A \frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} dh = -\sqrt{2g} \frac{S}{A} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int h^{-1/2} dh = -\sqrt{2g} \frac{S}{A} \int dt \Rightarrow 2h^{1/2} \Big|_h^y = -\sqrt{2g} \frac{S}{A} t \Big|_0^t \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{h} = -\frac{S}{2A} \sqrt{2g} t$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{h} - \frac{S}{2A} \sqrt{2g} t \Rightarrow y = \left(\sqrt{h} - \frac{S}{2A} \sqrt{2g} t \right)^2$$

$$\gamma) \text{ Η δεξαμενή αδειάζει όταν } y = 0 \Rightarrow \sqrt{h} = \frac{S}{2A} \sqrt{2g} t \Rightarrow t = \frac{\sqrt{h} \cdot 2A}{S \sqrt{2g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{h}{2g}} \frac{2A}{S}$$

Ο υψηλότερος πίδακας του κόσμου (Fountain Hills, Arizona) πετάει το νερό σε ύψος $170m$ με ρυθμό $26 m^3/min$.

- 1) Πόση είναι η ταχύτητα ροής στη βάση;
- 2) Σε ύψος $100m$;
- 3) Πόση είναι η ακτίνα της υδάτινης στήλης στη βάση/ σε ύψος $100m$;

Υποθέσεις: α) Ροή σταθερή, ασυμπίεστη.

β) Το νερό που πέφτει πίσω στο έδαφος δεν εμποδίζει το ανερχόμενο νερό.

γ) Αμελήστε τις τριβές.



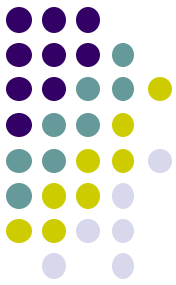
Ο υψηλότερος πίδακας του κόσμου (Fountain Hills, Arizona) πετάει το νερό σε ύψος $170m$ με ρυθμό $26 m^3/min$.

- 1) Πόση είναι η ταχύτητα ροής στη βάση;
- 2) Σε ύψος $100m$;
- 3) Πόση είναι η ακτίνα της υδάτινης στήλης στη βάση/ σε ύψος $100m$;

Υποθέσεις: α) Ροή σταθερή, ασυμπίεστη.

β) Το νερό που πέφτει πίσω στο έδαφος δεν εμποδίζει το ανερχόμενο νερό.

γ) Αμελήστε τις τριβές.

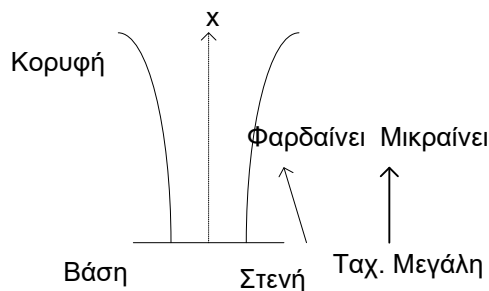


$$1) \frac{1}{2} m u_0^2 = m g h \Rightarrow u_0 = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 170} \Rightarrow u_0 = 58 m/s$$

$$2) \frac{1}{2} m u^2 + m g h = \frac{1}{2} m u_0^2 \Rightarrow u = \sqrt{u_0^2 - 2 g h} = \sqrt{58^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 100} \Rightarrow u = 37 m/s$$

$$3) Q = A_0 u_0 \Rightarrow 26 \frac{m^3}{min} = \frac{26}{60} m^3/s = A_0 \cdot 58 m/s \Rightarrow A_0 = 7,47 \times 10^{-3} m^2 = \pi R_0^2 \Rightarrow \Rightarrow R_0 = 0,049 m$$

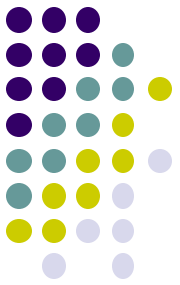
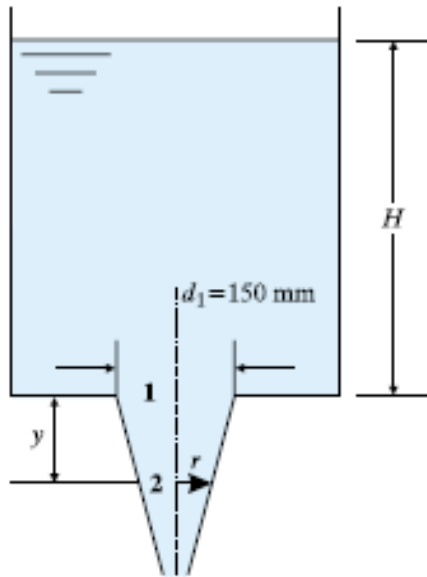
$$A_0 u_0 = A_1 u_1 \Rightarrow \pi R_0^2 \cdot u_0 = \pi R_1^2 \cdot u_1 \Rightarrow 0,049^2 \cdot 58 = R_1^2 \cdot 37 \Rightarrow R_1 = 0,061 m$$



Το στένεμα μιας στήλης νερού όπως κατέρχεται φαίνεται καλύτερα σε μια βρύση που ρέει νερό

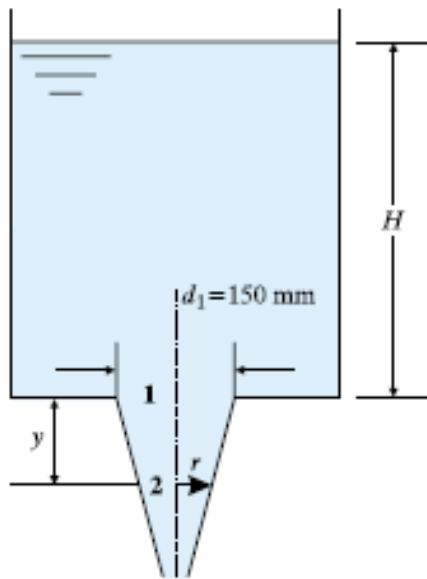
Αν αγνοήσετε τις απώλειες και τα φαινόμενα επιφανειακής τάσης, να υπολογίσετε την ακτίνα r του πίδακα του Σχήματος σε απόσταση y από το άνοιγμα στον πυθμένα. Στο δοχείο υπάρχει νερό σε σταθερό ύψος H και η διάμετρος της οπής είναι d_1 .

Λύση



Αν αγνοήσετε τις απώλειες και τα φαινόμενα επιφανειακής τάσης, να υπολογίσετε την ακτίνα r του πίδακα του Σχήματος σε απόσταση y από το άνοιγμα στον πυθμένα. Στο δοχείο υπάρχει νερό σε σταθερό ύψος H και η διάμετρος της οπής είναι d_1 .

Λύση



Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.8, η ταχύτητα εξόδου του νερού στη θέση (1) είναι $u_1 = \sqrt{2gH}$.

Από την εξίσωση συνέχειας μεταξύ των θέσεων (1) και (2) έχουμε:

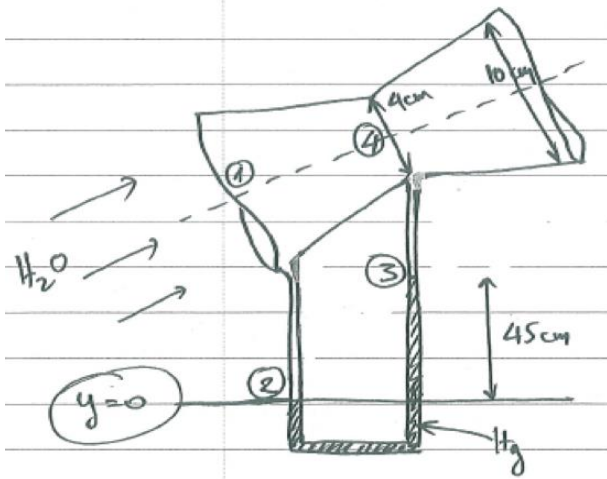
$$S_1 u_1 = S_2 u_2 \Rightarrow S_2 = S_1 \frac{u_1}{u_2} \Rightarrow r^2 = \frac{d_1^2 \sqrt{2gH}}{4u_2} \Rightarrow r = \frac{d_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2gH}}{\sqrt{u_2}}$$

Εξάλλου, αν εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli, (3.34), μεταξύ των θέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{σταθ.} \quad yg + \frac{u_1^2}{2} = \frac{u_2^2}{2} \Rightarrow u_2 = \sqrt{2gy + u_1^2} = \sqrt{2g(y+H)}$$

Με συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων, λαμβάνουμε:

$$r = \frac{d_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2gH}}{\sqrt[4]{2g(y+H)}} = \frac{d_1}{2} \sqrt{\frac{H}{y+H}}$$

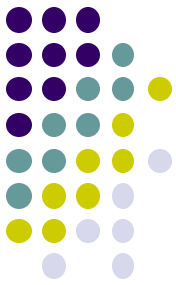


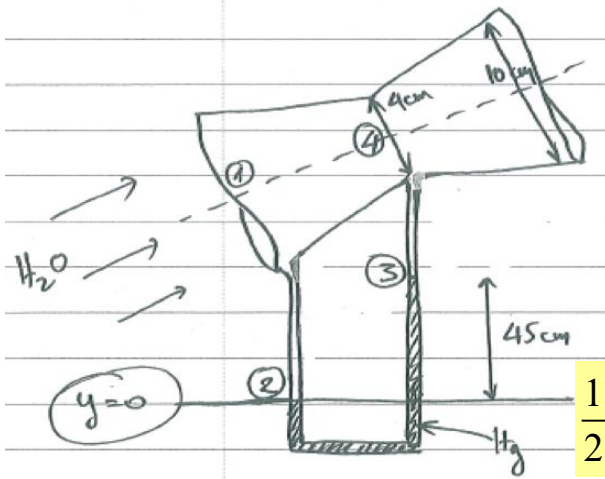
Μετρητής ροής Venturi διαστάσεων που δίνονται στο Σχήμα
χρησιμοποιείται για τη μέτρηση παροχής H_2O

$$\gamma = 1.000 \text{ kp/m}^3$$

$$\gamma_{Hg} = 13.600 \text{ kp/m}^3$$

Να υπολογιστεί η παροχή



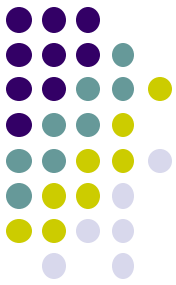


Μετρητής ροής Venturi διαστάσεων που δίνονται στο Σχήμα χρησιμοποιείται για τη μέτρηση παροχής H_2O

$$\gamma = 1.000 \text{ kp/m}^3$$

$$\gamma_{Hg} = 13.600 \text{ kp/m}^3$$

Να υπολογιστεί η παροχή



$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{σταθ.}$$

$$\text{Σχέση Bernoulli: } \frac{P_1}{\gamma} + y_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{P_4}{\gamma} + y_4 + \frac{u_4^2}{2g} \Rightarrow \frac{u_4^2 - u_1^2}{2g} = \frac{P_1 - P_4}{\gamma} + y_1 - y_4 \quad (1)$$

$$P_1 - P_2 = -\rho g(y_1 - y_2) = -\gamma(y_1 - y_2)$$

$$P_2 - P_3 = -\rho g(y_2 - y_3) = -\gamma_{Hg}(y_2 - y_3)$$

$$P_3 - P_4 = -\rho g(y_3 - y_4) = -\gamma(y_3 - y_4)$$

$$P_1 - P_4 = -\gamma y_1 + \cancel{\gamma y_2} - \cancel{\gamma_{Hg} y_2} + \gamma_{Hg} y_3 - \gamma y_3 + \gamma y_4 \Rightarrow \frac{P_1 - P_4}{\gamma} = y_4 - y_1 - y_3 + \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} y_3$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_4}{\gamma} = (y_4 - y_1) + (5,67) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{u_4^2 - u_1^2}{2g} = y_4 - y_1 + 5,67 + y_1 - y_4 = 5,67$$

$$Q = u_1 A_1 \Rightarrow u_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi \cdot (0,05)^2}$$

$$Q = u_4 A_4 \Rightarrow u_4 = \frac{Q}{A_4} = \frac{Q}{\pi \cdot (0,02)^2}$$

$$\frac{\frac{Q^2}{\pi^2 (0,02)^4} - \frac{Q^2}{\pi^2 (0,05)^4}}{2g} = 5,67$$

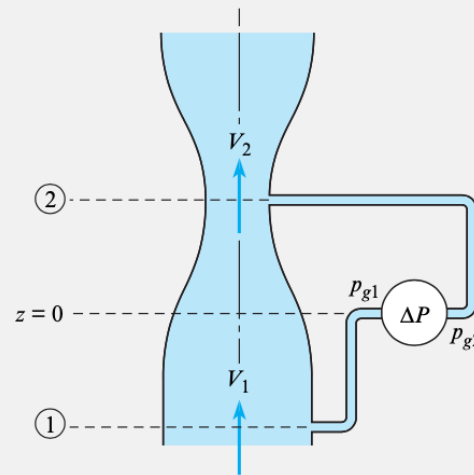
$$Q = 1,34 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

EXAMPLE 5.9

Applying the Bernoulli and Continuity Equations to Flow through a Venturi

Problem Statement

Water with a density of 1000 kg/m^3 flows through a vertical venturimeter as shown. A pressure gage is connected across two taps in the pipe (station 1) and the throat (station 2). The area ratio $A_{\text{throat}}/A_{\text{pipe}}$ is 0.5. The velocity in the pipe is 10 m/s . Find the pressure difference recorded by the pressure gage. Assume the flow has a uniform velocity distribution and that viscous effects are not important.



Define the Situation

Water flows in venturimeter. Area ratio = 0.5. $V_1 = 10 \text{ m/s}$.

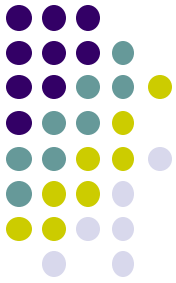
Assumptions:

1. Velocity distribution is uniform.
2. Viscous effects are unimportant.

Properties: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

State the Goal

Find: Pressure difference measured by gage.

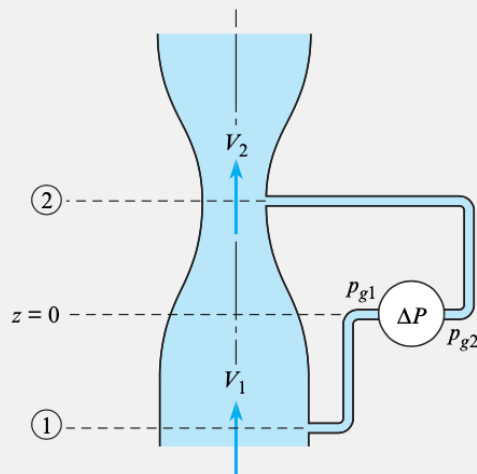


EXAMPLE 5.9

Applying the Bernoulli and Continuity Equations to Flow through a Venturi

Problem Statement

Water with a density of 1000 kg/m^3 flows through a vertical venturimeter as shown. A pressure gage is connected across two taps in the pipe (station 1) and the throat (station 2). The area ratio $A_{\text{throat}}/A_{\text{pipe}}$ is 0.5. The velocity in the pipe is 10 m/s . Find the pressure difference recorded by the pressure gage. Assume the flow has a uniform velocity distribution and that viscous effects are not important.



Define the Situation

Water flows in venturimeter. Area ratio = 0.5. $V_1 = 10 \text{ m/s}$.

Assumptions:

1. Velocity distribution is uniform.
2. Viscous effects are unimportant.

Properties: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

State the Goal

Find: Pressure difference measured by gage.

Generate Ideas and Make a Plan

1. Because viscous effects are unimportant, apply the Bernoulli equation between stations 1 and 2.
2. Combine the continuity equation (5.33) with the results of step 1.
3. Find the pressure on the gage by applying the hydrostatic equation.

Take Action (Execute the Plan)

$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \sigma \tau \alpha \theta.$$

1. The Bernoulli equation:

$$p_1 + \gamma z_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \gamma z_2 + \rho \frac{V_2^2}{2}$$

Rewrite the equation in terms of piezometric pressure:

$$\begin{aligned} p_{z_1} - p_{z_2} &= \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) \\ &= \frac{\rho V_1^2}{2} \left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

2. Continuity equation $V_2/V_1 = A_1/A_2$:

$$\begin{aligned} p_{z_1} - p_{z_2} &= \frac{\rho V_1^2}{2} \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1000 \text{ kg/m}^3}{2} \times (10 \text{ m/s})^2 \times (2^2 - 1) \\ &= 150 \text{ kPa} \end{aligned}$$

3. Apply the hydrostatic equation between the gage attachment point where the pressure is p_{g_1} and station 1, where the gage line is tapped into the pipe:

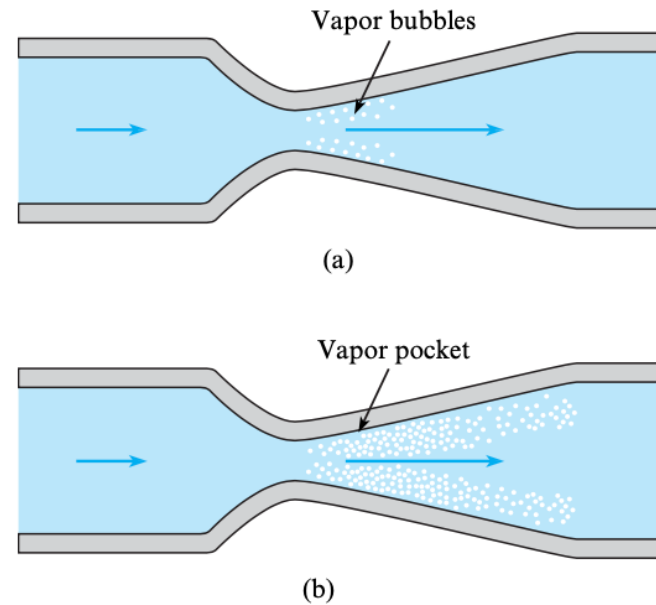
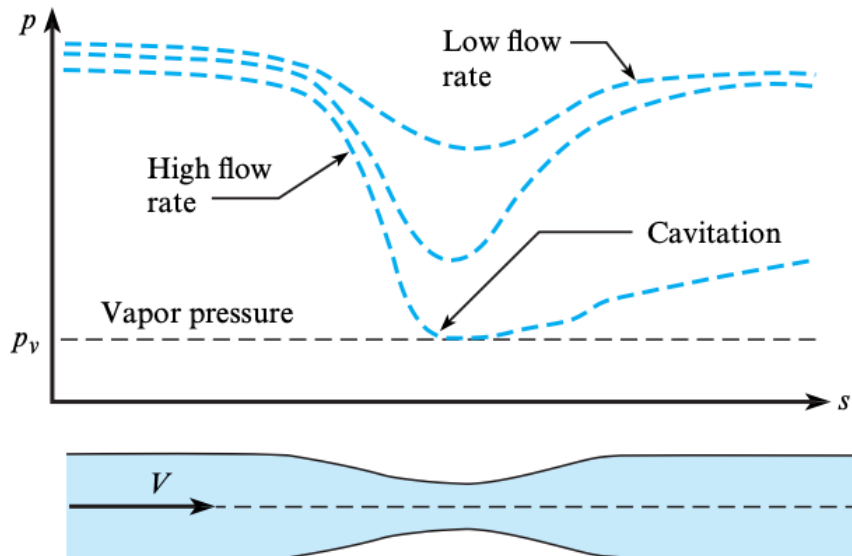
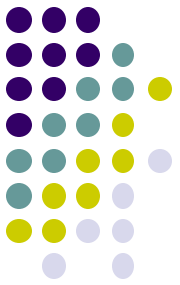
$$p_{z_1} = p_{g_1}$$

Also, $p_{z_2} = p_{g_2}$, so

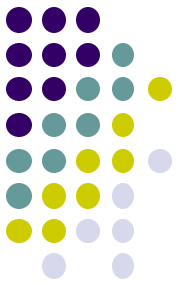
$$\Delta p_{\text{gage}} = p_{g_1} - p_{g_2} = p_{z_1} - p_{z_2} = \boxed{150 \text{ kPa}}$$



Προβλέποντας τη σπηλαίωση



Αρχή διατήρησης της ...



$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \rho dV + \int_{EE} \rho \bar{u} d\bar{A}$$

Αρχή Διατήρησης της Μάζας

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός αυξήσεως} \\ \text{της ιδιότητας N} \\ \text{του συστήματος} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός αυξήσεως} \\ \text{της N} \\ \text{μέσα στον OE} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός συνολικής} \\ \text{εκροής της N} \\ \text{δια της EE} \end{array} \right]$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} n \rho dV + \int_{EE} n \rho \bar{u} d\bar{A}$$

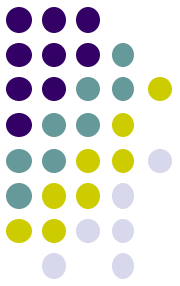
N: ιδιότητα

n: τιμή του N ανά μονάδα μάζας

$$\Sigma F = \frac{d(mu)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \rho(\mathbf{u}\mathbf{n}) dV + \int_{EE} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u}\mathbf{n}) dA$$

Αρχή Διατήρησης της Ορμής

Αρχή διατήρησης της ορμής



Αρχή Διατήρησης της Ορμής

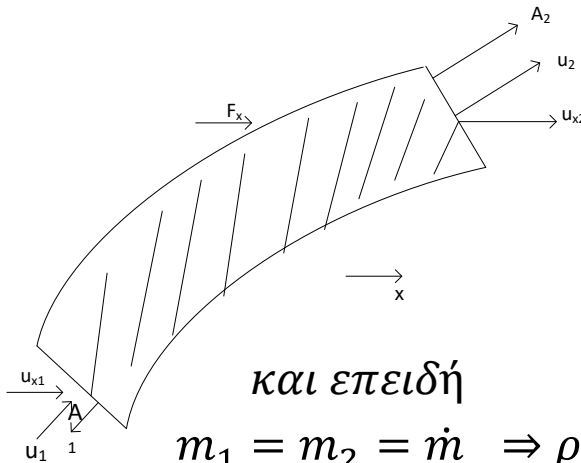
Για μόνιμη ροή

0

Η ανυσματική αυτή σχέση μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε συνιστώσα

$$\Sigma F = \frac{d(mu)}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t} \int_{OE} \rho(\bar{u} \cdot \bar{n}) dV + \int_{EE} \rho \bar{u}(\bar{u} \cdot \bar{n}) dA$$

(Η συνισταμένη δύναμη σε έναν όγκο ελέγχου) = $\left(\begin{array}{c} \text{Με τον ρυθμό αύξησης της} \\ \text{γραμμικής ορμής} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{τη συνολική εκροή} \\ \text{της γραμμικής ροής} \\ \text{από την επιφάνεια ελέγχου} \end{array} \right)$



και επειδή

$$m_1 = m_2 = \dot{m}$$

$$\Rightarrow \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \rho Q$$

$$\Rightarrow \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

0 για μόνιμη ροή

$$\Sigma F_x = \frac{\vartheta}{\vartheta t} \int_{OE} \rho u_x dV + \int_{EE} \rho u_x \bar{u} \bar{n} dA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = \rho_1 u_{x1} (-u_1) A_1 + \rho_2 u_{x2} u_2 A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = \rho_2 A_2 u_2 u_{x2} - \rho_1 A_1 u_1 u_{x1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = \rho Q (u_{x2} - u_{x1})$$

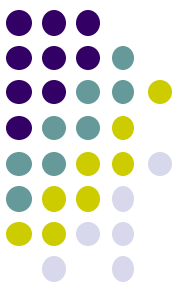
$$F_y = \dots$$

$$F_z = \dots$$

$$\Sigma F = \rho Q (u_2 - u_1)$$

$$\Sigma F = \dot{m} (u_2 - u_1)$$

Αρχή διατήρησης της ορμής



Εάν η ροή **δεν είναι ομοιόμορφη** στις διατομές εισόδου και εξόδου, η τελευταία εξίσωση (3.61) μπορεί να χρησιμοποιηθεί προσεγγιστικά εάν οι ταχύτητες στην εξίσωση παριστούν **μέσες ταχύτητες** του ρευστού στις αντίστοιχες διατομές. Η μέση ταχύτητα σε μία διατομή ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \iint_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

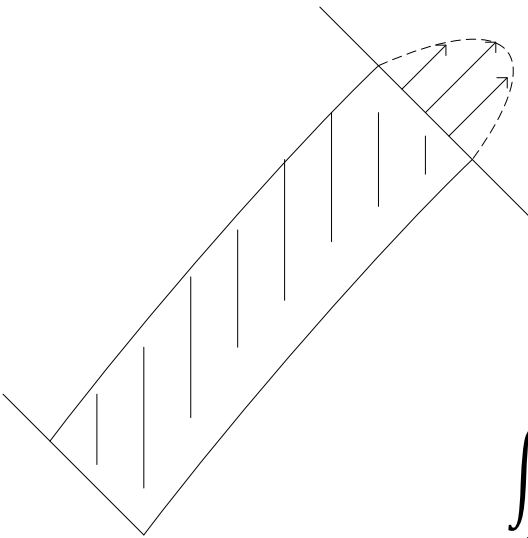
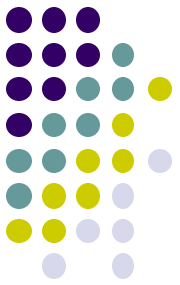
Ανάλογα με την μορφή που έχει η κατανομή ταχυτήτων, η προσέγγιση αυτή μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα. Για να **ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα** σ' αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε το **συντελεστή διόρθωσης ορμής, β** , που ορίζεται από τη σχέση

$$\beta = \frac{1}{\bar{u}^2 A} \iint_A u^2 dA$$

όπου $\bar{u}$ είναι η μέση ταχύτητα του ρευστού στη διατομή A . Ο συντελεστής διόρθωσης ορμής για στρωτή ροή σε κυκλικό αγωγό είναι **4/3**, ενώ για τυρβώδη ροή λαμβάνεται **1** και γενικά είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Με την εισαγωγή του συντελεστή διόρθωσης ορμής η εξίσωση (3.61) γίνεται

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m} (\beta_2 \mathbf{u}_2 - \beta_1 \mathbf{u}_1) \quad (3.63)$$

Αρχή διατήρησης της ορμής



Όταν η ταχύτητα
σε μια διατομή
μεταβάλλεται

μπορεί να χρησιμοποιηθεί η
Μέση Ταχύτητα με την εισαγωγή ενός
συντελεστή διορθώσεως της ορμής β

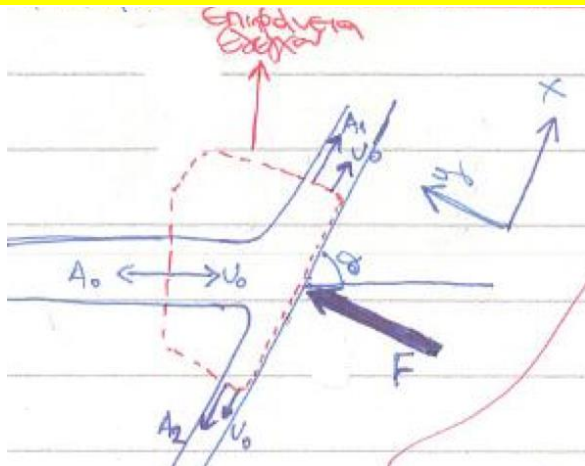
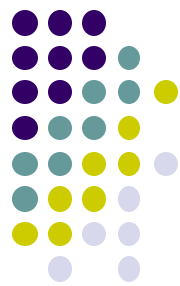
$$\int_A \rho u^2 dA = \beta \rho u_\mu^2 A \Rightarrow \beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{u_\mu} \right)^2 dA \quad \underline{\underline{\text{πάντα} \geq 1}}$$

$$\beta = \frac{4}{3} \left(\begin{array}{l} \text{για στρωτή ροή} \\ \text{σε κυκλικό αγωγό} \end{array} \right)$$

$$\beta = 1 \left(\begin{array}{l} \text{για} \\ \text{τυρβώδη ροή} \end{array} \right)$$

Δύναμη που ασκεί πίδακας σε ακίνητη πλάκα

$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{σταθ.}$$



$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} u_0^2 = \frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} u_1^2 \Rightarrow u_0 = u_1$$

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} u_0^2 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} u_2^2 \Rightarrow u_0 = u_2$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \Rightarrow \rho u_0 A_0 = \rho u_0 A_1 + \rho u_0 A_2 \Rightarrow A_0 = A_1 + A_2$$

$$\Sigma F_x = \int_{EE} \rho u_x (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = (\rho u_0 u_0 A_1) + (\rho (-u_0) u_0 A_2) + (\rho u_0 \cos \theta (-u_0) A_0) = 0$$

$$\Rightarrow \rho u_0 A_0 \cos \theta = \rho u_0 A_1 - \rho u_0 A_2 \Rightarrow Q_0 \cos \theta = Q_1 - Q_2$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_0 \cos \theta = Q_1 - Q_2 \\ Q_0 = Q_1 + Q_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Ρευστό εκρέει από μια σχισμή και προσκρούει σε λεία κεκλιμένη πλάκα.

Πως διαχωρίζεται η ροή; (παροχετευτικά)

Ποια δύναμη ασκείται στην πλάκα;

$$Q_1 = \frac{Q_0}{2} (1 + \cos \theta)$$

$$Q_2 = \frac{Q_0}{2} (1 - \cos \theta)$$

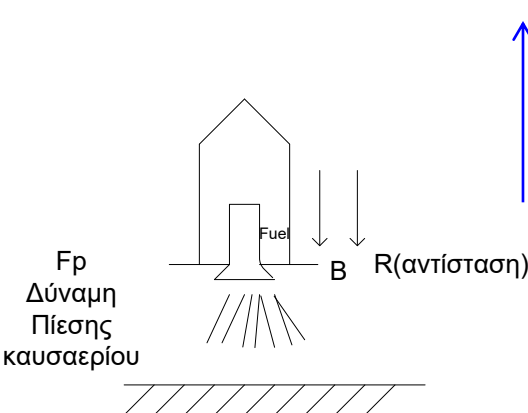
Η δύναμη που ασκείται στην πλάκα θα είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη στήριξης F.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + \int_{EE} \rho u_y \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \Rightarrow F + \rho (-u_0 \sin \theta) (-u_0) A_0 = 0 \Rightarrow F + \rho u_0 A_0 u_0 \sin \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = -\rho Q_0 u_0 \sin \theta \quad \text{ή} \quad F = -\dot{m} u_0 \sin \theta$$

Το (-) δείχνει ότι είναι αντίθετης φοράς από την F

Προωθητική Δύναμη Πυραύλου



↑ F_{Π} (Προωθητική Δύναμη)
 Η αρχική προωθητική δύναμη είναι αριθμητικά ίση με μια εξωτερική δύναμη F_{Π} που πρέπει να ασκείται στον πύραυλο για να αιωρείται ακίνητος

$$F_P = (P_a - P_0)A_0$$

Πίεση καυσαερίου Ατμοσφαιρική Εμβαδόν Βάσης

μανομετρική πίεση των καυσαερίων



Έστω u_a η ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων
 u η ταχύτητα του πυραύλου
 $\dot{m}$ ρυθμός εξόδου των καυσαερίων

Από αθροίσεις δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα

$$F_{ορμής} = \frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} (u_a - u) = \dot{m} u_{σχετ}$$

$$\Sigma F_x = F_{\Pi} = (P_a - P_0)A_0 + \dot{m} u_{σχετ} - Mg - R$$

όπου

$$M = M_0 - \dot{m} t$$

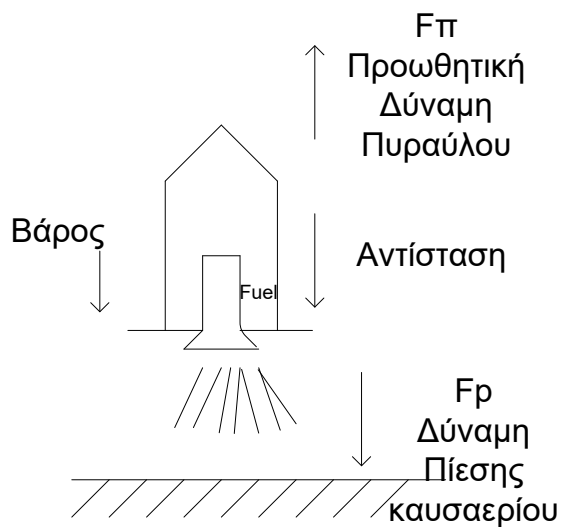
Μάζα πυραύλου

Οι δυνάμεις που τείνουν να ανεβάσουν τον πύραυλο είναι:

1. Η αντίδραση της δύναμης πίεσης των καυσαερίων με μέτρο F_P
2. Η αντίδραση της ορμής των καυσαερίων με μέτρο $F_{ορμής}$

Να τον κατεβάσουν είναι το βάρος του $B=Mg$ και η αντίσταση του αέρα R

μπορούμε να λάβουμε υπόψη και την αντίσταση R



Οι δυνάμεις που τείνουν να τον κατεβάσουν είναι:

- 1) το Βάρος $B = M \cdot g$
- 2) η Αντίσταση R

ΑΡΑ

$$\Sigma F_x = F_T = (P_a - P_0)A_0 + \dot{m}u_{\sigma\chi\epsilon\tau.} - Mg - R$$

$$(M = M_0 - \dot{m}t)$$

Οι δυνάμεις που τείνουν να ανεβάσουν τον πύραυλο είναι:

- 1) Η αντίδραση της δύναμης πίεσης των καυσσαερίων

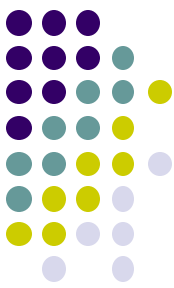
$$F_P = (P_a - P_0)A_0 \longrightarrow \text{Εμβαδόν Βάσης}$$

πίεση καυσσαερίων - ατμοσφαιρική πίεση = μανομετρική πίεση των καυσσαερίων

- 2) Η αντίδραση της ορμής των καυσσαερίων

$$F_{ορμής} = \frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} (u_a - u) = \dot{m}u_{\sigma\chi\epsilon\tau.}$$

ταχύτητα εξόδου καυσσαερίων $\rightarrow$ u_a
ταχύτητα πυραύλου $\rightarrow$ u
ρυθμός εξόδου καυσσαερίων $\rightarrow$ $\dot{m}$



Πύραυλος αρχικής μάζας $M_o=400$ kg, εκλύει καυσσαέρια με ρυθμό $\dot{m}=8$ kg/s τα οποία εξέρχονται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον πύραυλο $(u_a)_{\sigma\chi.}=700$ m/s. Εάν η μανομετρική πίεση των καυσαερίων είναι αμελητέα, να υπολογισθούν: (α) Η αρχική επιτάχυνση του πυραύλου. (β) Η επιτάχυνσή του μετά 5 sec. (γ) Η ταχύτητά του μετά 10 sec.

Λύση

$$\Sigma F_x = F_{\Pi} = (P_a - P_0)A_0 + \dot{m}u_{\sigma\chi\epsilon\tau.} - Mg - R$$

α. Εφαρμογή της εξίσωσης (3.72) στην προκειμένη περίπτωση δίδει

$$F_{\pi} = \dot{m} (u_a)_{\sigma\chi.} - B \quad \text{ή} \quad M_o a_o = \dot{m} (u_a)_{\sigma\chi.} - M_o g$$

όπου a_o είναι η αρχική επιτάχυνση του πυραύλου. Επίλυση και αριθμητική αντι-κατάσταση στην τελευταία εξίσωση δίδει:

$$a_o = \frac{8 \text{ kg/s} \times 700 \text{ m/s} - 400 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2}{400 \text{ kg}} = 4,19 \text{ m/s}^2$$

β. Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση μετά 5 sec χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$(M_o - \dot{m} t) a_o = \dot{m} (u_a)_{\sigma\chi.} - (M_o - \dot{m} t) g \Rightarrow a_o = \frac{\dot{m} (u_a)_{\sigma\chi.}}{M_o - \dot{m} t} - g = 5,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ. Για τον υπολογισμό της ταχύτητας χρησιμοποιούμε την σχέση $a=du/dt$ και έχουμε

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{(u_a)_{\sigma\chi.}}{M_o / \dot{m} - t} - g \Rightarrow \int_0^u du = \int_0^{10} \frac{(u_a)_{\sigma\chi.}}{M_o / \dot{m} - t} dt - \int_0^{10} g dt \Rightarrow$$

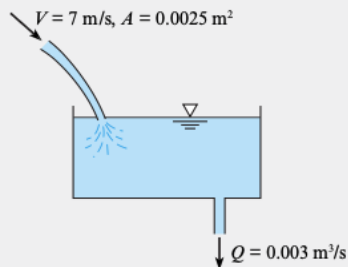
$$u = [700 \ln (50-t) - 9,81t]_0^{10} = 700 \ln 40 - 98,1 + 700 \ln 50 = 5222 \text{ m/s}$$

EXAMPLE 5.4

Applying the Continuity Equation to a Tank with an Inflow and an Outflow

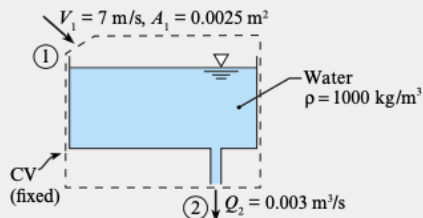
Problem Statement

A stream of water flows into an open tank. The speed of the incoming water is $V = 7 \text{ m/s}$, and the section area is $A = 0.0025 \text{ m}^2$. Water also flows out of the tank at a rate of $Q = 0.003 \text{ m}^3/\text{s}$. Water density is 1000 kg/m^3 . What is the rate at which water is being stored (or removed from) the tank?



Define the Situation

Water flows into a tank at the top and out at the bottom.



State the Goal

$(dm_{cv}/dt) \text{ (kg/s)}$ ← rate of accumulation of water in tank

Generate Ideas and Make a Plan

Selection: Select the simplified form of the continuity equation (Eq. 5.29).

Sketching: Modify the situation diagram to show the CV and sections 1 and 2. Notice that the CV in the upper left corner is sketched so that it is at a right angle to the inlet flow.

Analysis: Write the continuity equation (simplified form):

$$\frac{d}{dt}m_{cv} + \sum_{cs} \dot{m}_o - \sum_{cs} \dot{m}_i = 0 \quad (\text{a})$$

Analyze the outflow and inflow terms:

$$\sum_{cs} \dot{m}_o = \rho Q_2 \quad (\text{b})$$

$$\sum_{cs} \dot{m}_i = \rho A_1 V_1 \quad (\text{c})$$

Combine Eqs. (a), (b), and (c):

$$\frac{d}{dt}m_{cv} = \rho A_1 V_1 - \rho Q_2 \quad (\text{d})$$

Validate: Each term has units of kilograms per second.

Eq. (d) makes physical sense; (rate of accumulation of mass) = (rate of mass flow in) – (rate of mass flow out).

Because variables on the right side of Eq. (d) are known, the problem can be solved. The plan is as follows:

1. Calculate the flow rates on the right side of Eq. (d).
2. Apply Eq. (d) to calculate the rate of accumulation.

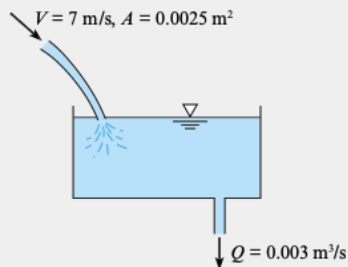


EXAMPLE 5.4

Applying the Continuity Equation to a Tank with an Inflow and an Outflow

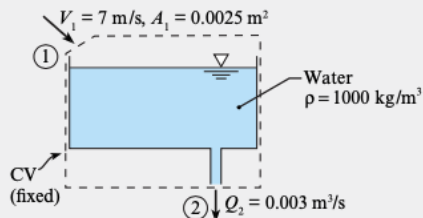
Problem Statement

A stream of water flows into an open tank. The speed of the incoming water is $V = 7 \text{ m/s}$, and the section area is $A = 0.0025 \text{ m}^2$. Water also flows out of the tank at a rate of $Q = 0.003 \text{ m}^3/\text{s}$. Water density is 1000 kg/m^3 . What is the rate at which water is being stored (or removed from) the tank?



Define the Situation

Water flows into a tank at the top and out at the bottom.



State the Goal

$(dm_{cv}/dt) \text{ (kg/s)}$ ← rate of accumulation of water in tank

Generate Ideas and Make a Plan

Selection: Select the simplified form of the continuity equation (Eq. 5.29).

Sketching: Modify the situation diagram to show the CV and sections 1 and 2. Notice that the CV in the upper left corner is sketched so that it is at a right angle to the inlet flow.

Analysis: Write the continuity equation (simplified form):

$$\frac{d}{dt}m_{cv} + \sum_{cs} \dot{m}_o - \sum_{cs} \dot{m}_i = 0 \quad (\text{a})$$

Analyze the outflow and inflow terms:

$$\sum_{cs} \dot{m}_o = \rho Q_2 \quad (\text{b})$$

$$\sum_{cs} \dot{m}_i = \rho A_1 V_1 \quad (\text{c})$$

Combine Eqs. (a), (b), and (c):

$$\frac{d}{dt}m_{cv} = \rho A_1 V_1 - \rho Q_2 \quad (\text{d})$$

Validate: Each term has units of kilograms per second.

Eq. (d) makes physical sense; (rate of accumulation of mass) = (rate of mass flow in) – (rate of mass flow out).

Because variables on the right side of Eq. (d) are known, the problem can be solved. The plan is as follows:

1. Calculate the flow rates on the right side of Eq. (d).
2. Apply Eq. (d) to calculate the rate of accumulation.

Take Action (Execute the Plan)

1. Mass flow rates (inlet and outlet):

$$\rho A_1 V_1 = (1000 \text{ kg/m}^3)(0.0025 \text{ m}^2)(7 \text{ m/s}) = 17.5 \text{ kg/s}$$

$$\rho Q_2 = (1000 \text{ kg/m}^3)(0.003 \text{ m}^3/\text{s}) = 3 \text{ kg/s}$$

2. Accumulation:

$$\begin{aligned} \frac{dm_{cv}}{dt} &= 17.5 \text{ kg/s} - 3 \text{ kg/s} \\ &= \boxed{14.5 \text{ kg/s}} \end{aligned}$$

Review the Solution and the Process

1. *Discussion.* Because the accumulation is positive, the quantity of mass within the control volume is increasing with time.
2. *Discussion.* The rising level of water in the tank causes air to flow out of the CV. Because air has a density that is about 1/1000 of the density of water, this effect is negligible.

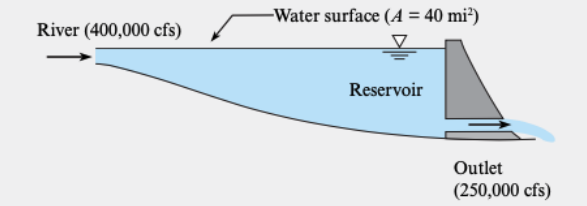


EXAMPLE 5.5

Applying the Continuity Equation to Calculate the Rate of Water Rise in a Reservoir

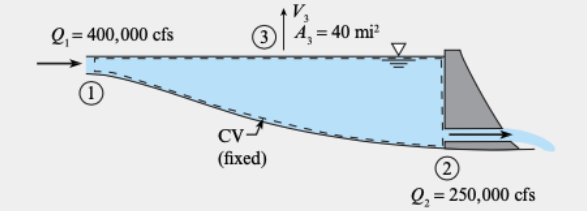
Problem Statement

A river discharges into a reservoir at a rate of 400,000 ft³/s (cfs), and the outflow rate from the reservoir through the flow passages in a dam is 250,000 cfs. If the reservoir surface area is 40 mi², what is the rate of rise of water in the reservoir?



Define the Situation

A reservoir is filling with water.



State the Goal

V₃(ft/h) ⇐ speed at which the water surface is rising

Generate Ideas and Make a Plan

Selection: Select the continuity equation because the problem involves flow rates and accumulation of mass in a reservoir.

Sketching: Select a fixed control volume and sketch this CV on the situation diagram. The control surface at section 3 is just below the water surface and is stationary. Mass passes through control surface 3 as the water level in the reservoir rises (or falls). The mass within the control volume is constant because the volume of the CV is constant.

Analysis: Write the continuity equation (simplified form):

$$\frac{d}{dt}m_{cv} + \sum_{cs} \dot{m}_o - \sum_{cs} \dot{m}_i = 0 \tag{a}$$

Next, analyze each term:

- Mass in the control volume is constant. Thus,

$$dm_{cv}/dt = 0. \tag{b}$$

- There are two outflows, at sections 2 and 3. Thus,

$$\sum_{cs} \dot{m}_o = \rho Q_2 + \rho A_3 V_3 \tag{c}$$

- There is one inflow, at section 1. Thus,

$$\sum_{cs} \dot{m}_i = \rho Q_1. \tag{d}$$

Substitute Eqs. (b), (c), and (d) into Eq. (a). Then, divide each term by density:

$$Q_2 + A_3 V_3 = Q_1 \tag{e}$$

Validation: Eq. (e) is dimensionally homogeneous because each term has dimensions of volume per time. Eq. (e) makes physical sense: (outflow through sections 2 and 3) equals (inflow from section 1).

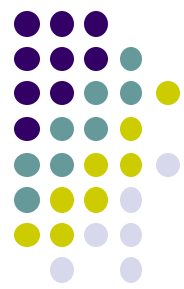
Because Eq. (e) contains the problem goal and all other variables are known, the problem is cracked. The plan is as follows:

1. Use Eq. (e) to derive an equation for V₃.
2. Solve for V₃.

Take Action (Execute the Plan)

1. Continuity equation:

$$V_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{A_3}$$



2. Calculations:

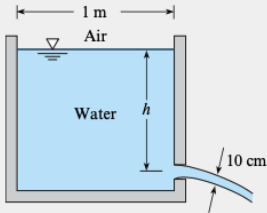
$$\begin{aligned} V_{rise} &= \frac{400,000 \text{ cfs} - 250,000 \text{ cfs}}{40 \text{ mi}^2 \times (5280 \text{ ft/mi})^2} \\ &= 1.34 \times 10^{-4} \text{ ft/s} = \boxed{0.482 \text{ ft/hr}} \end{aligned}$$

EXAMPLE 5.6

Applying the Continuity Equation to Predict the Time for a Tank to Drain

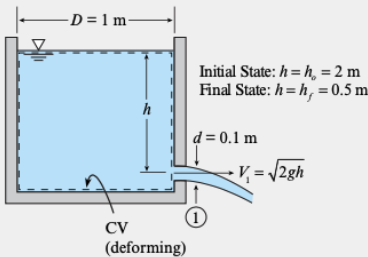
Problem Statement

A 10 cm jet of water issues from a 1.0 m diameter tank. Assume the Bernoulli equation applies, so the velocity in the jet is $\sqrt{2gh}$ m/s, where h is the elevation of the water surface above the outlet jet. How long will it take for the water surface in the tank to drop from $h_o = 2$ m to $h_f = 0.50$ m?



Define the Situation

Water is draining from a tank.



State the Goal

$t_f(s)$ $\Leftarrow$ time for the tank to drain from h_o to h_f

Generate Ideas and Make a Plan

Selection: Select the continuity equation by recognizing that the problem involves outflow and accumulation of mass in a tank.

Also note that the continuity equation will need to be integrated because this problem involves time and a defined initial state and final state.

Sketching: Select a deforming CV that is defined so that the top surface area is coincident with the surface level of the water. Sketch this CV in the situation diagram.

Analysis: Write the continuity equation:

$$\frac{d}{dt} m_{cv} + \sum_{cs} \dot{m}_o - \sum_{cs} \dot{m}_i = 0 \tag{a}$$

Analyze each term in a step-by-step fashion:

- Mass in the control volume is given by*

$$m_{cv} = (\text{density})(\text{volume}) = \rho \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) h \tag{b}$$

- Differentiate Eq. (b) with respect to time. Note that the only variable that changes with time is water depth h , so the other variables can come out of the derivative.

$$\frac{dm_{cv}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\rho \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) h \right) = \rho \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \frac{dh}{dt} \tag{c}$$

- The inflow is zero and the outflow is

Substitute Eqs. (b), (c), and (d) into Eq. (a):

$$\rho \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \frac{dh}{dt} = -\rho \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) \sqrt{2gh} \tag{e}$$

Validation: In Eq. (e), each term has units of kg/s. Also, this equation makes physical sense; (accumulation rate) = (the negative of the outflow rate).

Integration: To begin, simplify Eq. (e)

$$\left(\frac{D}{d} \right)^2 \frac{dh}{dt} = -\sqrt{2gh} \tag{f}$$

Next, apply the method of *separation of variables*. Put the variables involving h on the left side and the other variables on the right side. Integrate using definite integrals:

$$-\int_{h_o}^{h_f} \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int_0^{t_f} \left(\frac{d}{D} \right)^2 dt \tag{g}$$

Perform the integration to give

$$\frac{2(\sqrt{h_o} - \sqrt{h_f})}{\sqrt{2g}} = \left(\frac{d}{D} \right)^2 t_f \tag{h}$$

Because Eq. (h) contains the problem goal (t_f) and all other variables in this equation are known, the plan is to use Eq. (h) to calculate (t_f).

Take Action (Execute the Plan)

$$\begin{aligned} t_f &= \left(\frac{D}{d} \right)^2 \left(\frac{2(\sqrt{h_o} - \sqrt{h_f})}{\sqrt{2g}} \right) \\ &= \left(\frac{1 \text{ m}}{0.1 \text{ m}} \right)^2 \left(\frac{2(\sqrt{(2 \text{ m})} - \sqrt{(0.5 \text{ m})})}{\sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)}} \right) \end{aligned}$$

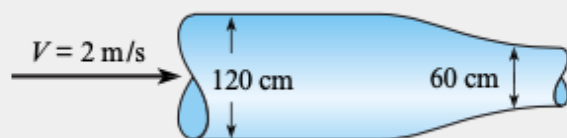
$$t_f = 31.9 \text{ s}$$

EXAMPLE 5.8

Applying the Continuity Equation to Flow in a Variable Area Pipe

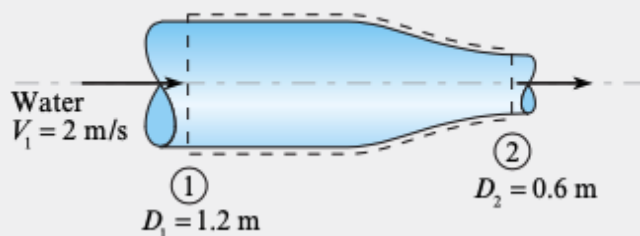
Problem Statement

A 120 cm pipe is in series with a 60 cm pipe. The speed of the water in the 120 cm pipe is 2 m/s. What is the water speed in the 60 cm pipe?



Define the Situation

Water flows through a contraction in a pipe.



State the Goal

V_2 (m/s) ← mean velocity at section 2

Generate Ideas and Make a Plan

Selection: Select the continuity equation because the problem variables are velocity and pipe diameter.

Sketching: Select a fixed CV. Sketch this CV on the situation diagram. Label the inlet as section 1 and outlet as section 2.

Analysis: Select the pipe flow form of continuity (i.e., Eq. 5.33) because the problem involves flow in a pipe:

$$\rho A_1 V_1 = \rho A_2 V_2 \quad (\text{a})$$

Assume density is constant (this is standard practice for steady flow of a liquid). The continuity equation reduces to

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad (\text{b})$$

Validate: To validate Eq. (b), notice that the primary dimensions of each term are L^3/T . Also, this equation makes physical sense because it can be interpreted as (inflow) = (outflow).

Plan: Eq. (b) contains the goal (V_2), and all other variables are known. Thus, the plan is to substitute numbers into this equation.

Take Action (Execute the Plan)

Continuity equation:

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

$$V_2 = (2 \text{ m/s}) \left(\frac{1.2 \text{ m}}{0.6 \text{ m}} \right)^2 = \boxed{8 \text{ m/s}}$$