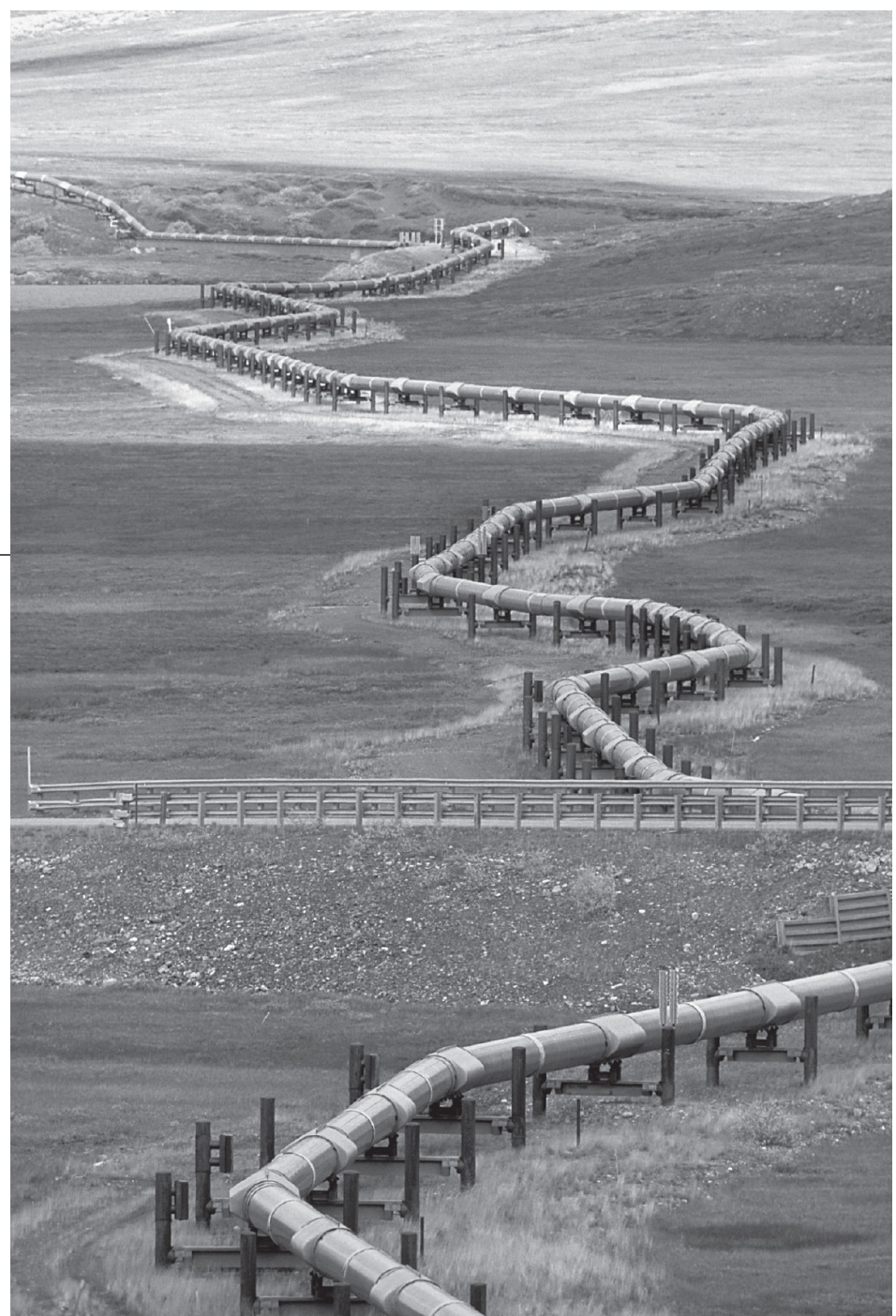
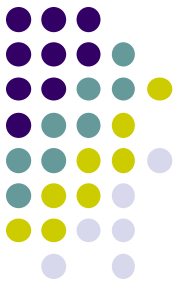


Ρευστομηχανική

Ροές σε κλειστούς αγωγούς 2



Εισαγωγή



- Ροή σε κυλινδρικό αγωγό – εξέταση της επίδρασης του ιξώδους
- Απώλειες σε δίκτυα αγωγών
- Γραμμή ενέργειας
- Σιφωνισμός
- Συνδυασμοί αγωγών

Απώλειες ενέργειας κατά τη ροή

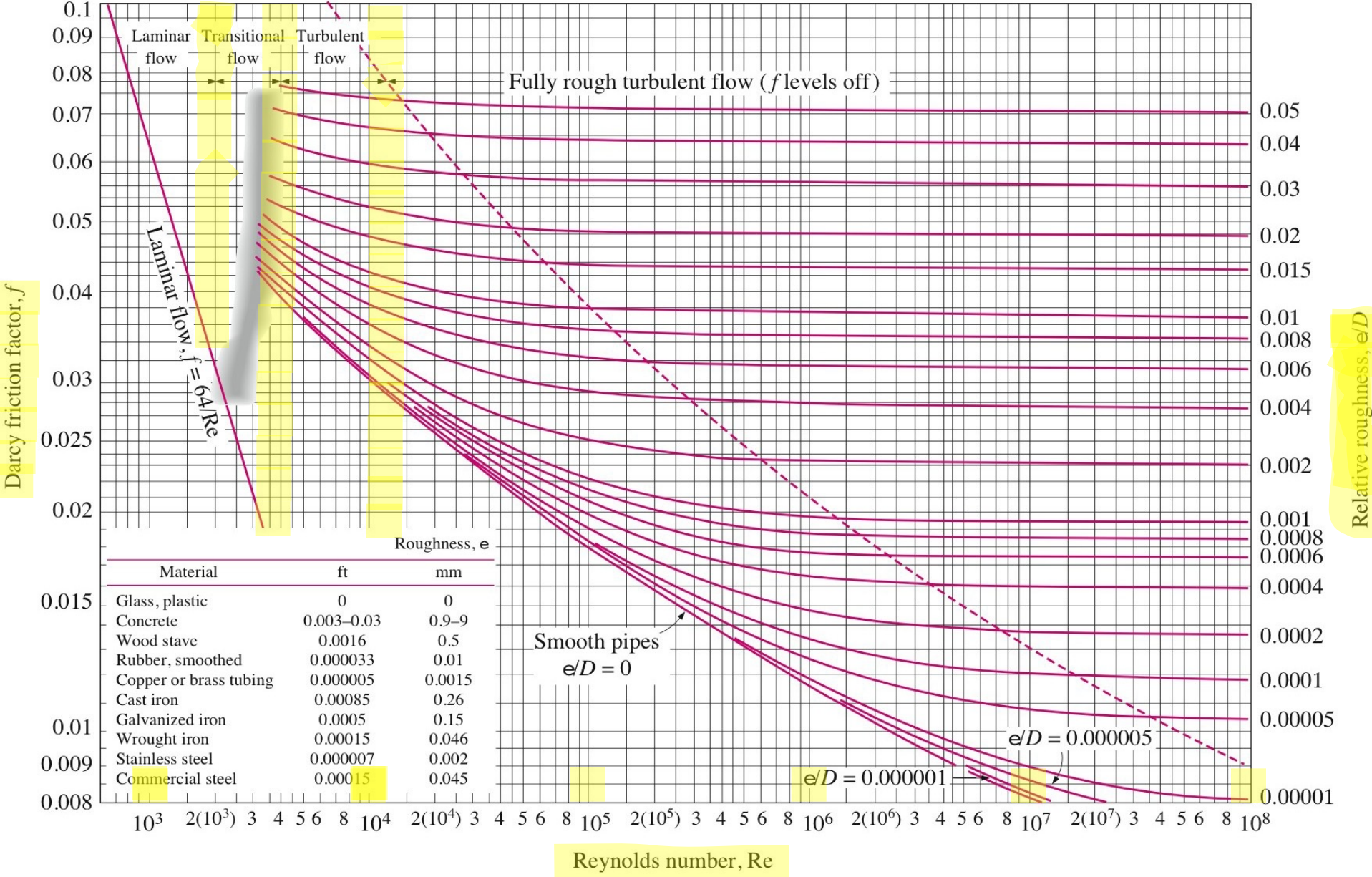


$$\left[\begin{array}{c} \text{Υψος} \\ \text{Απωλειών } (m) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Συντελεστής} \\ \text{Τριβής } (f) \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \text{μήκος, } L(m) \\ \text{διάμετρος, } d(m) \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \text{Υψος} \\ \text{κινητικής} \\ \text{ενέργειας, } (u^2/2g)(m) \end{array} \right] \quad (1)$$

(Σχέση Darcy-Weisbach)
$$h_L = \frac{\Delta P}{\gamma} = f \frac{L}{d} \frac{\bar{u}^2}{2g} = f \frac{8L\dot{V}^2}{d^5 \pi^2 g},$$

όπου f είναι ο συντελεστής τριβής Moody και $\bar{u} = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2}$.

The Moody Chart



Απώλειες ενέργειας για τη στρωτή ροή



Για στρωτή ροή επειδή $f = \frac{64}{\text{Re}}$ (2), $h_L = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{u^2}{2g}$ (3), $\text{Re} = \frac{du\rho}{\mu}$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει η σχέση

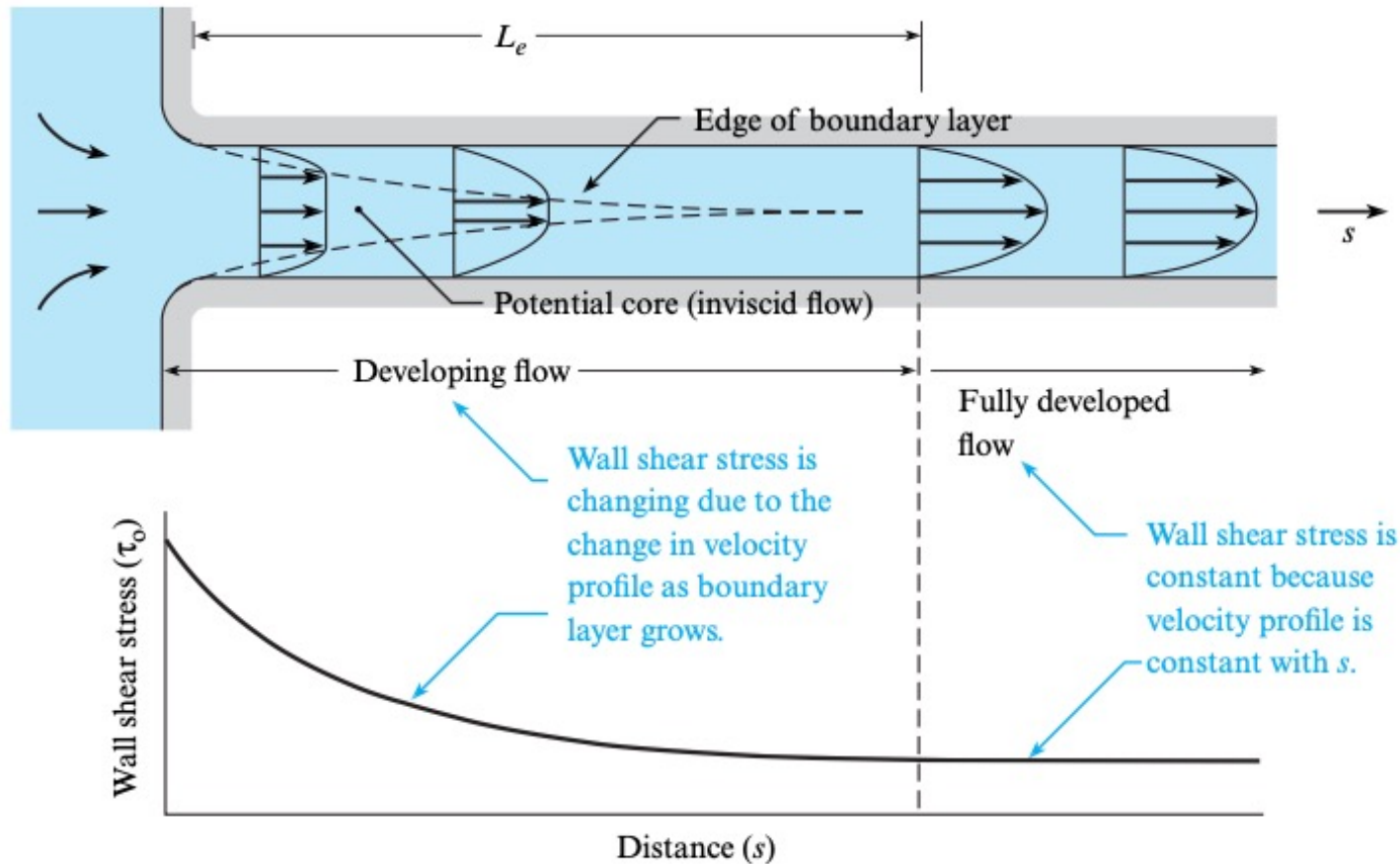
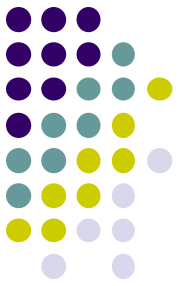
$$h_L = \frac{32\mu L \bar{u}}{\rho d^2 g} \quad (5) \text{ (εξίσωση Hagen-Poiseuille)}$$

Από την σχέση (5) και την σχέση $h_L = \frac{\Delta p}{\gamma}$ (6) προκύπτει τελικά

$$\Delta p = 32 \frac{\mu L}{d^2} \bar{u}$$

Δηλαδή, οι απώλειες ύψους και η πτώση πίεσης λόγω τριβών είναι ανάλογες της μέσης ταχύτητας του ρευστού.

$$Re_D = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu}$$



$$\frac{L_e}{D} = 0.05 Re_D \quad (\text{laminar flow: } Re_D \leq 2000)$$

$$\frac{L_e}{D} = 50 \quad (\text{turbulent flow: } Re_D \geq 3000)$$

EXAMPLE 10.1

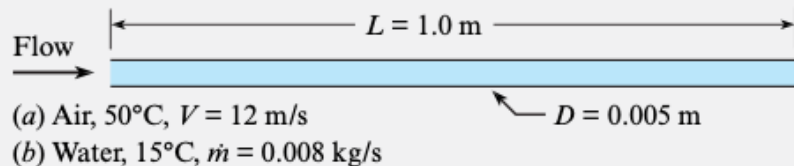
Classifying Flow in Conduits

Problem Statement

Consider fluid flowing in a round tube of length 1 m and diameter 5 mm. Classify the flow as laminar or turbulent and calculate the entrance length for (a) air (50°C) with a speed of 12 m/s and (b) water (15°C) with a mass flow rate of $\dot{m} = 8$ g/s.

Define the Situation

Fluid is flowing in a round tube (two cases given).



Properties:

- Air (50°C): Table A.3, $\nu = 1.79 \times 10^{-5}$ m²/s
- Water (15°C): Table A.5, $\mu = 1.14 \times 10^{-3}$ N·s/m²

Assumptions:

- The pipe is connected to a reservoir.
- The entrance is smooth and tapered.

State the Goal

- Determine whether each flow is laminar or turbulent.
- Calculate the entrance length (in meters) for each case.

Generate Ideas and Make a Plan

- Calculate the Reynolds number using Eq. (10.1).
- Establish whether the flow is laminar or turbulent using Eq. (10.2).
- Calculate the entrance length using Eq. (10.3).

Take Action (Execute the Plan)

a. Air:

$$Re_D = \frac{VD}{\nu} = \frac{(12 \text{ m/s})(0.005 \text{ m})}{1.79 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 3350$$

Because $Re_D > 3000$, the flow is turbulent.

$$L_e = 50D = 50(0.005 \text{ m}) = 0.25 \text{ m}$$

b. Water:

$$Re_D = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} = \frac{4(0.008 \text{ kg/s})}{\pi(0.005 \text{ m})(1.14 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2)} = 1787$$

Because $Re_D < 2000$, the flow is laminar.

$$L_e = 0.05Re_D D = 0.05(1787)(0.005 \text{ m}) = 0.447 \text{ m}$$

EXAMPLE 10.2

Head Loss for Laminar Flow

Problem Statement

Oil ($SG = 0.85$) with a kinematic viscosity of $6 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ flows in a 15 cm diameter pipe at a rate of $0.020 \text{ m}^3/\text{s}$. What is the head loss for a 100 m length of pipe?

Define the Situation

- Oil is flowing in a pipe at a flow rate of $Q = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$.
- Pipe diameter is $D = 0.15 \text{ m}$.

Assumptions: Fully developed, steady flow

Properties: Oil: $S = 0.85$, $\nu = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

State the Goal

Calculate head loss (in meters) for a pipe length of 100 m.

Generate Ideas and Make a Plan

1. Calculate the mean velocity using the flow rate equation.
2. Calculate the Reynolds number using Eq. (10.1).
3. Check whether the flow is laminar or turbulent using Eq. (10.2).
4. Calculate head loss using Eq. (10.32).

Take Action (Execute the Plan)

1. Mean velocity:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.020 \text{ m}^3/\text{s}}{(\pi D^2)/4} = \frac{0.020 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi((0.15 \text{ m})^2/4)} = 1.13 \text{ m/s}$$

2. Reynolds number:

$$\text{Re}_D = \frac{VD}{\nu} = \frac{(1.13 \text{ m/s})(0.15 \text{ m})}{6 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}} = 283$$

3. Because $\text{Re}_D < 2000$, the flow is laminar.

4. Head loss (laminar flow):

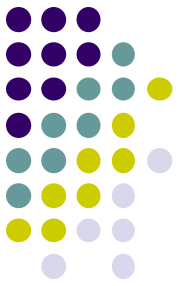
$$\begin{aligned} h_f &= \frac{32\mu LV}{\gamma D^2} = \frac{32\rho\nu LV}{\rho g D^2} = \frac{32\nu LV}{g D^2} \\ &= \frac{32(6 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s})(100 \text{ m})(1.13 \text{ m/s})}{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.15 \text{ m})^2} \\ &= \boxed{9.83 \text{ m}} \end{aligned}$$

Review the Solution and the Process

Knowledge. An alternative way to calculate head loss for laminar flow is to use the Darcy-Weisbach equation (10.12) as follows:

$$\begin{aligned} f &= \frac{64}{\text{Re}_D} = \frac{64}{283} = 0.226 \\ h_f &= f \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) = 0.226 \left(\frac{100 \text{ m}}{0.15 \text{ m}} \right) \left(\frac{(1.13 \text{ m/s})^2}{2 \times 9.81 \text{ m/s}^2} \right) \\ &= 9.83 \text{ m} \end{aligned}$$

Δευτερεύουσες απώλειες σε δίκτυα αγωγών



- Piping systems include fittings, valves, bends, elbows, tees, inlets, exits, enlargements, and contractions.
- These components interrupt the smooth flow of fluid and cause additional losses because of flow separation and mixing
- We introduce a relation for the minor losses associated with these components

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g}$$

- K_L is the loss coefficient.
- Is different for each component.
- Is assumed to be independent of Re.
- Typically provided by manufacturer or generic Table.

Απώλειες λόγω απότομης διαστολής



- Σχηματισμός τυρβωδών στροβίλων στις γωνίες και απώλειες υπό μορφή θερμότητας.
- Αποκατάσταση ροής σε **8 διαμέτρους** από τη διαστολή.
- Εφαρμογή των νόμων διατήρησης για τον ΟΕ.

(1) Διατήρηση Ορμής: $\Sigma F = \dot{m} \cdot (u_2 - u_1)$

(2) Διατήρηση Ενέργειας: $\frac{\Delta u^2}{2g} + \Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} + h_f = 0$

(3) Διατήρηση Μάζας: $u_1 \cdot A_1 = u_2 \cdot A_2$

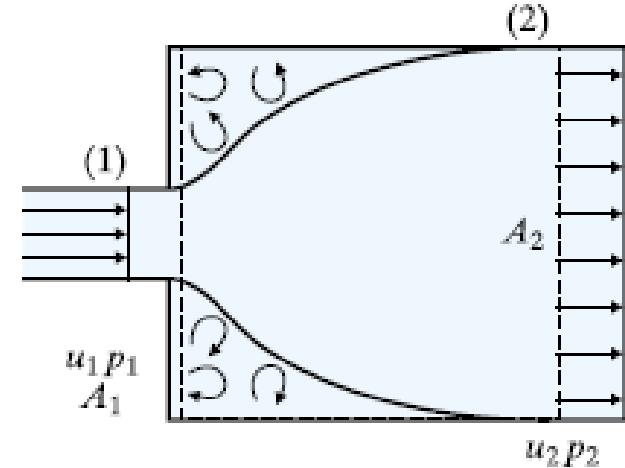
Από τις τρεις παραπάνω σχέσεις και την σχέση $h_L = K \frac{\bar{u}^2}{2g}$ έχουμε

$$h_f = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \cdot \frac{u_1^2}{2g} \Rightarrow K = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

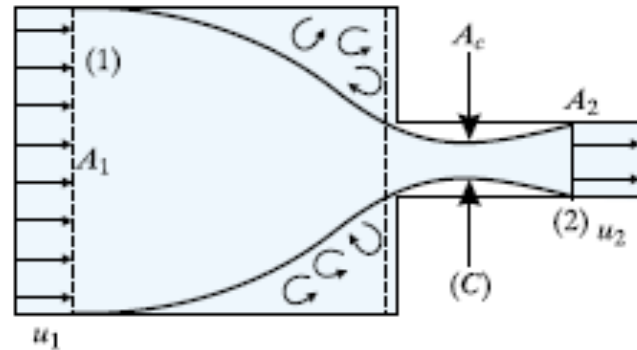
Από αγωγό σε δεξαμενή:

$$\frac{A_1}{A_2} \rightarrow 0 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow h_f = \frac{u^2}{2g}$$

δηλαδή η κινητική ενέργεια του ρευστού μετατρέπεται σε θερμότητα και αν ο αγωγός είναι μονωμένος, αυξάνεται η θερμοκρασία του ρευστού.



Απώλειες λόγω απότομης συστολής



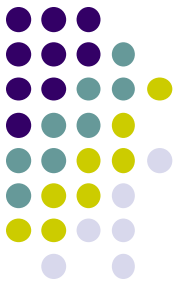
- Στένωση (vena contracta) μετά τη συστολή των αγωγών.

- $$h_f = \frac{u_2^2}{2g} \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 = \frac{u_2^2}{2g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2$$

Από πίνακες $c_c = \frac{A_c}{A_2}$, και η τιμή του εξαρτάται από το λόγο A_2/A_1 και μεταβάλλεται από 0,6-1,0 όταν ο λόγος των διαμέτρων μεταβάλλεται από 0 έως 1

| d_2/d_1 | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|-----------|-----|------|------|------|------|-----|
| K | 0,6 | 0,45 | 0,38 | 0,28 | 0,14 | 0 |

Απώλειες από εξαρτήματα

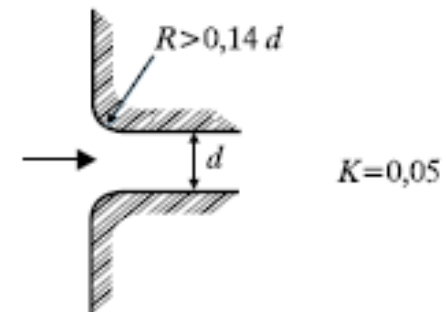
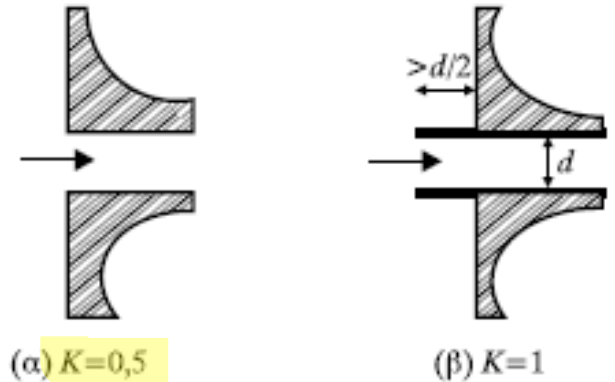


- Όλα τα εξαρτήματα σε ένα αγωγό προκαλούν επιπλέον απώλεια ενέργειας
- Πολλές φορές εκφράζονται οι «απώλειες ενέργειας» ως «ισοδύναμο μήκος αγωγού»

$$h_f = K \frac{u^2}{2g}$$

$$h_f = f \frac{L}{d} \cdot \frac{u^2}{2g}$$

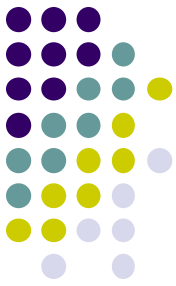
$$K = f \frac{L}{d} \Rightarrow Le = K \frac{d}{f}$$



Πίνακας. Συντελεστές απωλειών εξαρτημάτων σωληνώσεων



| Εξάρτημα | K |
|---|------|
| Τυποποιημένη γωνία 90° | 0,9 |
| Μεταβολή ροής κατά 90° | |
| Μεταβολή ροής σε κλειστή στροφή κατά 180° | 2,2 |
| Διακόπτης ανοικτός | 10 |
| Βρύση ανοιχτή | 2,6 |
| Διχασμός ροής και μεταβολή κατά 90° | 1,8 |
| Συρταρωτή βαλβίδα ανοιχτή | 0,17 |
| Συρταρωτή βαλβίδα 1/2 ανοιχτή | 4,6 |
| Συρταρωτή βαλβίδα 1/4 ανοιχτή | 24 |
| Σφαιρική Βαλβίδα ανοιχτή | 9 |
| Σφαιρική βαλβίδα 1/2 ανοιχτή | 36 |
| Σφαιρική βαλβίδα 1/4 ανοιχτή | 112 |
| Βαλβίδα αντεπιστροφής | 2 |



| Εξάρτημα | Σχήμα | Συντελεστής απωλειών | |
|--|-------|---|------|
| | | r/d | K |
| Καμπύλη, ομαλή, 90° $\Delta P = K \frac{\rho u^2}{2}$ | | r/d | K |
| | | 0,5 | 1,0 |
| | | 1,0 | 0,35 |
| | | 2,0 | 0,20 |
| | | 3,0 | 0,15 |
| Γωνία $\Delta P = K \frac{\rho u^2}{2}$ | | θ° | K |
| | | 90 | 1,3 |
| | | 60 | 0,8 |
| | | 45 | 0,4 |
| | | 30 | 0,16 |
| Διαστολή απότομη $\Delta P = K \frac{\rho u_1^2}{2}$ | | $K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$, | |
| | | $S = \pi d^2/4$ | |
| Διαστολή, 20° $\Delta P = K \frac{\rho u_1^2}{2}$ | | d_1/d_2 | K |
| | | 0,20 | 0,30 |
| | | 0,40 | 0,25 |
| | | 0,60 | 0,15 |
| | | 0,80 | 0,10 |
| Στόμιο εξόδου $\Delta P = K \frac{\rho u_1^2}{2}$ | | $K = 1,0$ | |
| | | | |
| Συστολή απότομη $\Delta P = K \frac{\rho u_2^2}{2}$ | | $K \cong 0,42 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2$, | |
| | | $S = \pi d^2/4$ | |
| Συστολή 60° $\Delta P = K \frac{\rho u_2^2}{2}$ | | d_2/d_1 | K |
| | | 0,20 | 0,08 |
| | | 0,40 | 0,07 |
| | | 0,60 | 0,06 |
| | | 0,80 | 0,06 |
| Στόμιο εισόδου $\Delta P = K \frac{\rho u_2^2}{2}$ | | r/d | K |
| | | 0,0 | 0,50 |
| | | 0,1 | 0,12 |
| | | >0,2 | 0,03 |

Συντελεστές απωλειών εξαρτημάτων σωληνώσεων

$$h_f = K \frac{u^2}{2g} \Rightarrow$$

$$h_f \cdot \rho g = K \frac{u^2}{2g} \rho g \Rightarrow$$

$$\Delta P = K \frac{\rho u^2}{2}$$

Minor Losses

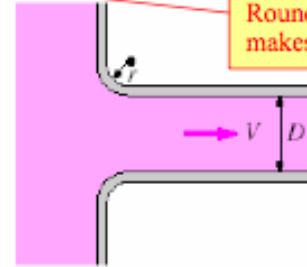
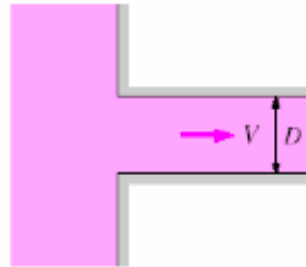
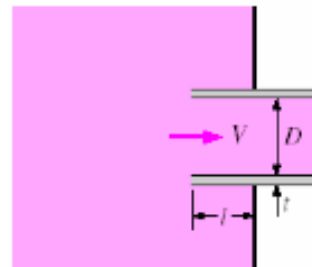
Here are some sample loss coefficients for various minor loss components. More values are listed in Table 8-4, page 350 of the Çengel-Cimbala textbook:

Pipe Inlet

Reentrant: $K_L = 0.80$
($t \ll D$ and $l \approx 0.1D$)

Sharp-edged: $K_L = 0.50$

Well-rounded ($r/D > 0.2$): $K_L = 0.03$
Slightly rounded ($r/D = 0.1$): $K_L = 0.12$
(see Fig. 8-36)



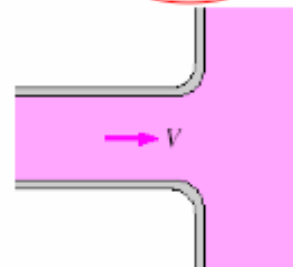
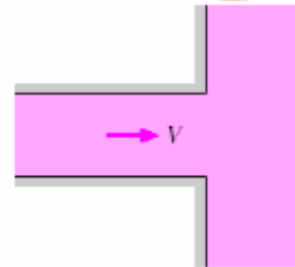
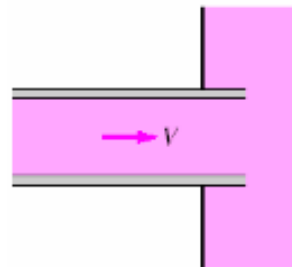
Rounding of an inlet makes a big difference.

Pipe Exit

Reentrant: $K_L = \alpha$

Sharp-edged: $K_L = \alpha$

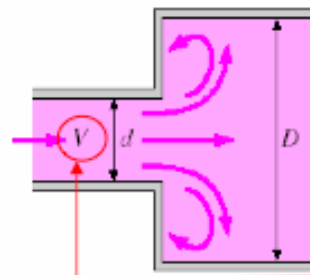
Rounded: $K_L = \alpha$



Rounding of an outlet makes no difference.

Sudden Expansion and Contraction (based on the velocity in the smaller-diameter pipe)

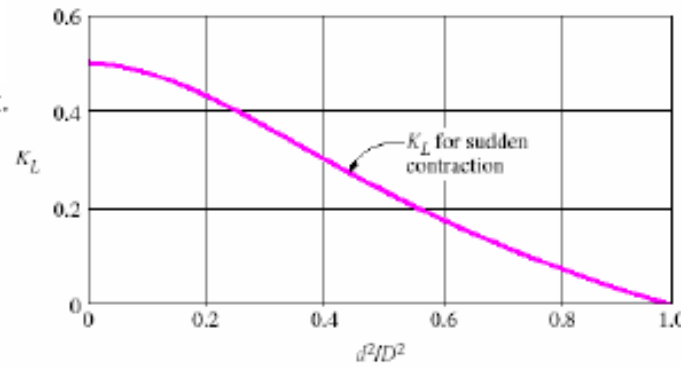
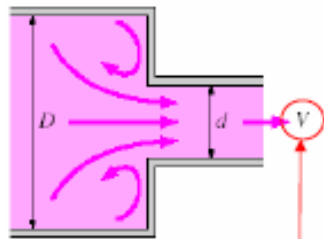
Sudden expansion: $K_L = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$



Note that the *larger velocity* (the velocity associated with the *smaller pipe section*) is used by convention in the equation for minor head loss, i.e.,

$$h_{L, \text{minor}} = K_L \frac{V^2}{2g}$$

Sudden contraction: See chart.



Note: These are backwards. The K_L values listed for Expansion should be those for Contraction, and vice-versa.

Note again that the *larger velocity* (the velocity associated with the *smaller pipe section*) is used by convention in the equation for minor head loss, i.e., $h_{L,minor} = K_L \frac{V^2}{2g}$.

Gradual Expansion and Contraction (based on the velocity in the smaller-diameter pipe)

Expansion:

- $K_L = 0.02$ for $\theta = 20^\circ$
- $K_L = 0.04$ for $\theta = 45^\circ$
- $K_L = 0.07$ for $\theta = 60^\circ$

Contraction (for $\theta = 20^\circ$):

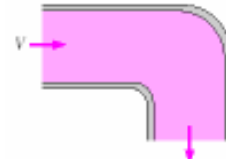
- $K_L = 0.30$ for $d/D = 0.2$
- $K_L = 0.25$ for $d/D = 0.4$
- $K_L = 0.15$ for $d/D = 0.6$
- $K_L = 0.10$ for $d/D = 0.8$

These are for contractions

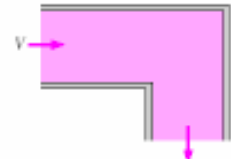
These are for expansions

Bends and Branches

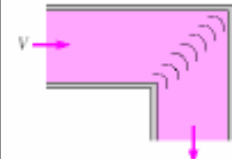
90° smooth bend:
Flanged: $K_L = 0.3$
Threaded: $K_L = 0.9$



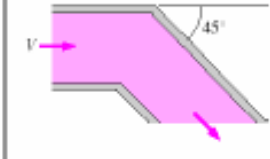
90° miter bend (without vanes): $K_L = 1.1$



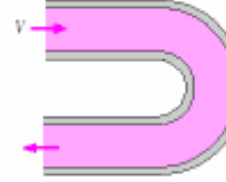
90° miter bend (with vanes): $K_L = 0.2$



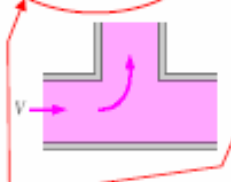
45° threaded elbow:
 $K_L = 0.4$



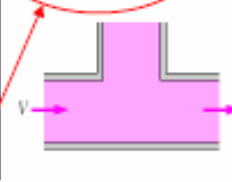
180° return bend:
Flanged: $K_L = 0.2$
Threaded: $K_L = 1.5$



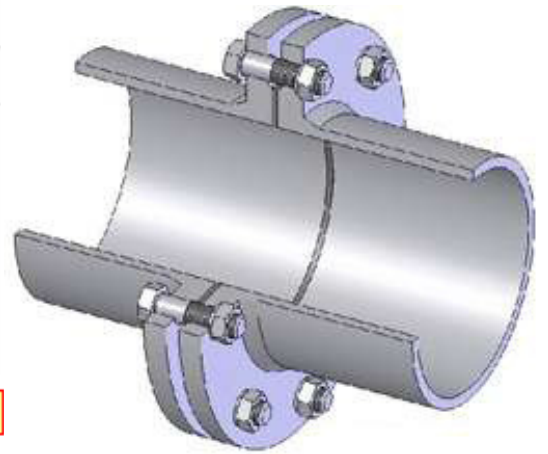
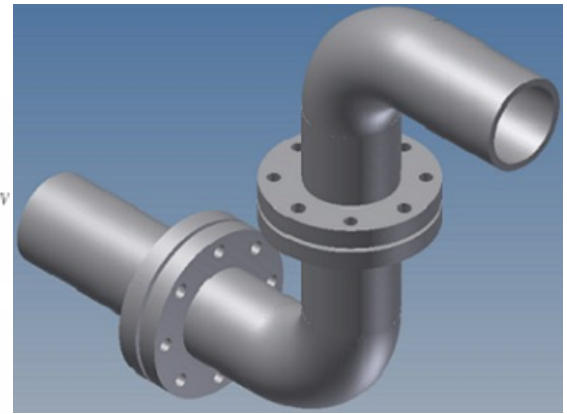
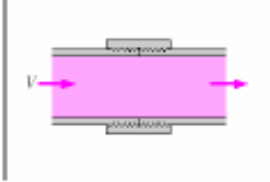
Tee (branch flow):
Flanged: $K_L = 1.0$
Threaded: $K_L = 2.0$



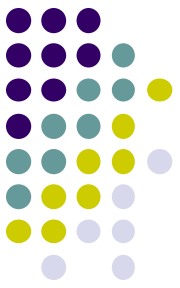
Tee (line flow):
Flanged: $K_L = 0.2$
Threaded: $K_L = 0.9$



Threaded union:
 $K_L = 0.08$



For tees, there are two values of K_L , one for branch flow and one for line flow.



Κύριες + Δευτερεύουσες απώλειες

- Total head loss in a system is comprised of major losses (in the pipe sections) and the minor losses (in the components)

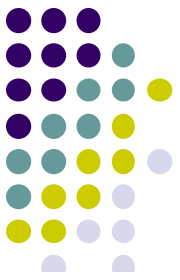
$$h_L = h_{L,major} + h_{L,minor}$$

$$h_L = \sum_{\text{pipes}} f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \sum_{\text{components}} K \frac{V^2}{2g}$$

- If the piping system has constant diameter

$$h_L = \left(f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g}$$

Παράδειγμα 6.10



Δύο μεγάλα δοχεία συνδέονται όπως φαίνεται στο Σχήμα. Αν η παροχή στο σωλήνα είναι $0,04 \text{ m}^3/\text{s}$, να βρεθεί η υψομετρική διαφορά της στάθμης του νερού h των δύο δοχείων. Δίνεται $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ και $\varepsilon = 0,046 \text{ mm}$.

$$\frac{\cancel{\Delta u^2}}{2} + \Delta z + \frac{\cancel{\Delta p}}{\gamma} + \frac{wL}{g} + \frac{w_s}{g} = 0$$

$$\Delta z = -h_f \Rightarrow z_1 - z_2 = h_f$$

$$z_1 - z_2 = (K_{\text{εισοδ.}} + \cancel{K_{\text{διακλ.}}}) + 2K_{\text{γωνίες}} + K_{\text{εξοδ.}} \frac{\bar{u}^{-2}}{2g} + f \frac{L}{d} \frac{\bar{u}^{-2}}{2g}$$

$$\bar{u} = \frac{0,04}{\pi \times 0,05^2} = 5,09 \text{ m/s,}$$

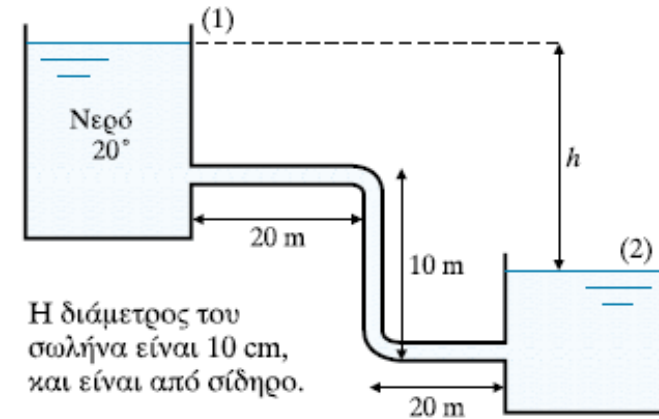
$$Re = \frac{5,09 \times 0,1}{10^{-6}} = 5,09 \times 10^7$$

$$\frac{e}{d} = \frac{0,046}{100} = 0,00046$$

Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε $f = 0,0173$. Έτσι έχουμε:

$$z_1 - z_2 = (0,5 + \cancel{5,7} + 2 \times 0,64 + 1,0) \frac{5,09^2}{2 \times 9,8} + 0,0173 \times \frac{50}{0,1} \frac{5,09^2}{2 \times 9,8} = 24,4 \text{ m}$$

Επομένως $h = 24,4 \text{ m}$.

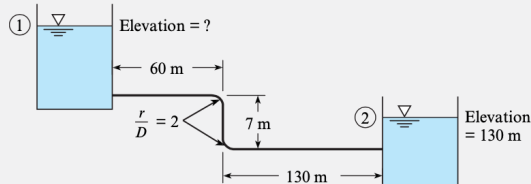


EXAMPLE 10.7

Pipe System with Combined Head Loss

Problem Statement

If oil ($\nu = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; $SG = 0.9$) flows from the upper to the lower reservoir at a rate of $0.028 \text{ m}^3/\text{s}$ in the 15 cm smooth pipe, then what is the elevation of the oil surface in the upper reservoir?



Define the Situation

Oil is flowing from a upper reservoir to a lower reservoir.

Properties:

- Oil: $\nu = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $SG = 0.9$
- Minor head loss coefficients: Table 10.5, entrance = $K_e = 0.5$; bend = $K_b = 0.19$; outlet = $K_E = 1.0$

State the Goal

Calculate the elevation (in meters) of the free surface of the upper reservoir.

Generate Ideas and Make a Plan

This is a case 1 problem because flow rate and pipe dimensions are known. Thus, the solution is straightforward.

1. Apply the energy equation from 1 to 2.
2. Apply the combined head loss equation (10.45).
3. Develop an equation for z_1 by combining results from steps 1 and 2.
4. Calculate the resistance coefficient f .
5. Solve for z_1 using the equation from step 3.

Take Action (Execute the Plan)

1. Energy equation and term-by-term analysis:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_L$$

$$0 + 0 + z_1 + 0 = 0 + 0 + z_2 + 0 + h_L$$

$$z_1 = z_2 + h_L$$

Interpretation: Change in elevation head is balanced by the total head loss.

2. Combined head loss equation:

$$h_L = \sum_{\text{pipes}} f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \sum_{\text{components}} K \frac{V^2}{2g}$$

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \left(2K_b \frac{V^2}{2g} + K_e \frac{V^2}{2g} + K_E \frac{V^2}{2g} \right)$$

$$= \frac{V^2}{2g} \left(f \frac{L}{D} + 2K_b + K_e + K_E \right)$$

3. Combine Eqs. (1) and (2):

$$z_1 = z_2 + \frac{V^2}{2g} \left(f \frac{L}{D} + 2K_b + K_e + K_E \right)$$

4. Resistance coefficient:

- Flow rate equation:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{(0.028 \text{ m}^3/\text{s})}{(\pi/4)(0.15 \text{ m})^2} = 1.58 \text{ m/s}$$

- Reynolds number:

$$\text{Re}_D = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.58 \text{ m/s}(0.15 \text{ m})}{4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 5.93 \times 10^3$$

Thus, flow is turbulent.

- Swamee-Jain equation (10.39):

$$f = \frac{0.25}{\left[\log_{10} \left(\frac{k_s}{3.7D} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right]^2} = \frac{0.25}{\left[\log_{10} \left(0 + \frac{5.74}{5930^{0.9}} \right) \right]^2} = 0.036$$

5. Calculate z_1 using the equation from step (3):

$$z_1 = (130 \text{ m}) + \frac{(1.58 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}$$

$$\left(0.036 \frac{(197 \text{ m})}{(0.15 \text{ m})} + 2(0.19) + 0.5 + 1.0 \right)$$

$$z_1 = 136 \text{ m}$$

Review the Solution and the Process

1. *Discussion.* Notice that the difference is the magnitude of the pipe head loss versus the magnitude of the component head loss:

$$\text{pipe head loss} \sim \sum f \frac{L}{D} = 0.036 \frac{(197 \text{ m})}{(0.15 \text{ m})} = 47.2$$

$$\text{component head loss} \sim \sum K = 2(0.19) + 0.5 + 1.0 = 1.88$$

Thus pipe losses \gg component losses for this problem.

2. *Skill.* When pipe head loss is dominant, make simple estimates of K because these estimates will not impact the prediction very much.

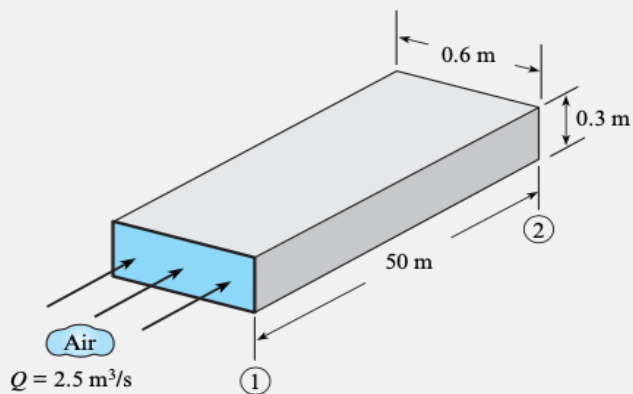


EXAMPLE 10.8

Pressure Drop in an HVAC Duct

Problem Statement

Air ($T = 20^\circ\text{C}$ and $p = 101$ kPa absolute) flows at a rate of $2.5\text{ m}^3/\text{s}$ in a horizontal, commercial steel, HVAC duct. (HVAC is an acronym for heating, ventilating, and air conditioning.) What is the pressure drop in inches of water per 50 m of duct?



Define the Situation

Air is flowing through a duct.

Assumptions:

- Fully developed flow, meaning that $V_1 = V_2$. Thus, the velocity head terms in the energy equation cancel out.
- No sources of component head loss.

Properties:

- Air (20°C , 1 atm, Table A.2): $\rho = 1.2\text{ kg/m}^3$, $\nu = 15.1 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$
- Steel pipe: Table 10.4, $k_s = 0.046\text{ mm}$

State the Goal

Find: Pressure drop (inch H_2O) in a length of 50 m.

Generate Ideas and Make a Plan

This is a case 1 problem because flow rate and duct dimensions are known. Thus, the solution is straightforward.

1. Derive an equation for pressure drop by using the energy equation.
2. Calculate parameters needed to find head loss.
3. Calculate head loss by using the Darcy-Weisbach equation (10.12).
4. Calculate pressure drop Δp by combining steps 1, 2, and 3.

Take Action (Execute the Plan)

1. Energy equation (after term-by-term analysis):

$$p_1 - p_2 = \rho g h_L$$

2. Intermediate calculations:

- Flow rate equation:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{2.5\text{ m}^3/\text{s}}{(0.3\text{ m})(0.6\text{ m})} = 13.9\text{ m/s}$$

- Hydraulic diameter:

$$D_h \equiv \frac{4 \times \text{section area}}{\text{wetted perimeter}} = \frac{4(0.3\text{ m})(0.6\text{ m})}{(2 \times 0.3\text{ m}) + (2 \times 0.6\text{ m})} = 0.4\text{ m}$$

- Reynolds number:

$$\text{Re} = \frac{VD_h}{\nu} = \frac{(13.9\text{ m/s})(0.4\text{ m})}{(15.1 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s})} = 368,000$$

Thus, flow is turbulent.

- Relative roughness:

$$k_s/D_h = (0.000046\text{ m})/(0.4\text{ m}) = 0.000115$$

- Resistance coefficient (Moody diagram): $f = 0.015$

3. Darcy-Weisbach equation:

$$h_f = f \left(\frac{L}{D_h} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) = 0.015 \left(\frac{50\text{ m}}{0.4\text{ m}} \right) \left\{ \frac{(13.9\text{ m/s})^2}{2(9.81\text{ m/s}^2)} \right\} = 18.6\text{ m}$$

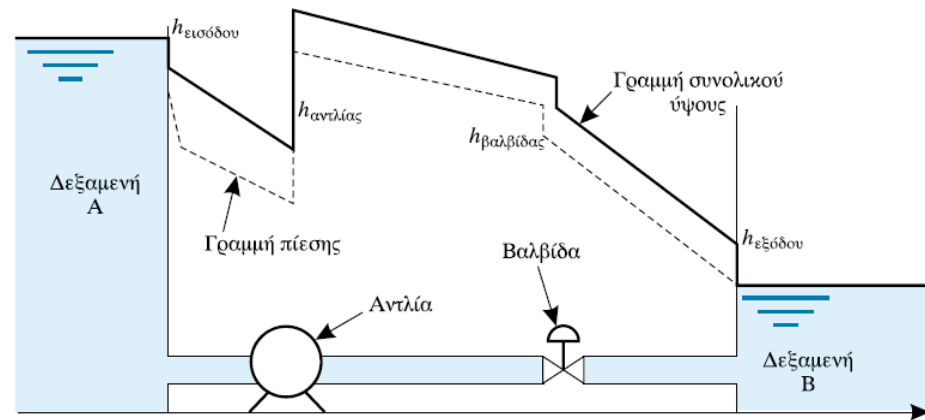
4. Pressure drop (from step 1):

$$p_1 - p_2 = \rho g h_L = (1.2\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(18.6\text{ m}) = 220\text{ Pa}$$

$$p_1 - p_2 = 0.883\text{ inch H}_2\text{O}$$

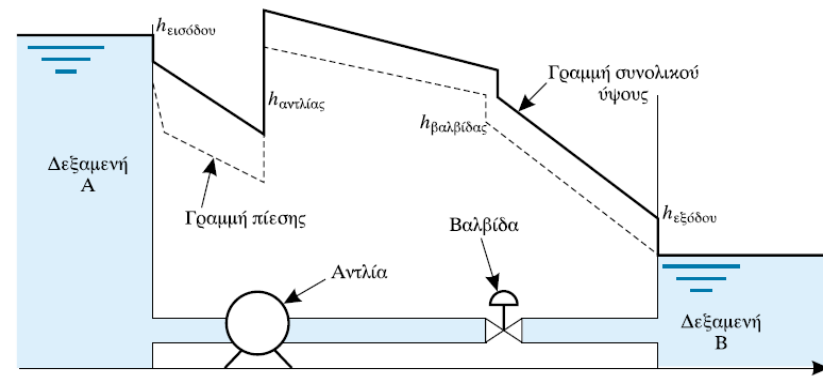


Έστω σύστημα σωλήνων..



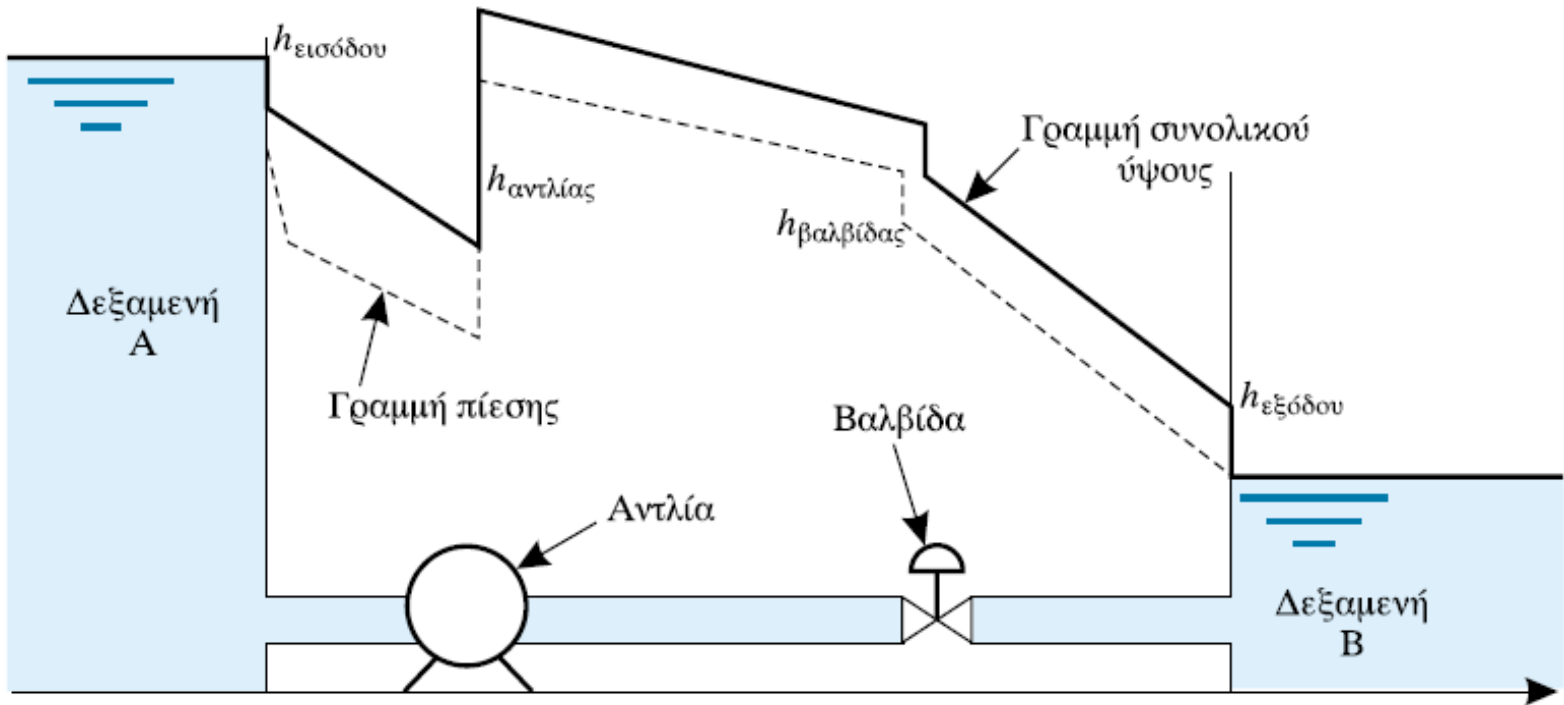
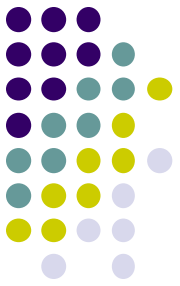
- Η γραφική παράσταση με τεταγμένη (y) το άθροισμα $\frac{p}{\gamma} + z$ και τετμημένη (x) την απόσταση κατά μήκος του σωλήνα δίνει τη **γραμμή ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΛΙΣΗΣ**. Είναι με άλλα λόγια, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που θα έφτανε το υγρό σε κατακόρυφους γυάλινους σωλήνες συνδεδεμένους με πιεζομετρικά ανοίγματα του σωλήνα.
- Η γραφική παράσταση με τεταγμένη (y) το άθροισμα $\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$ και τετμημένη (x) την απόσταση κατά μήκος του σωλήνα δίνει τη **γραμμή ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**. Εξ' ορισμού είναι πάντα πάνω από την υδραυλική γραμμή κατά $\frac{v^2}{2g}$
- Η **ροή** έχει πάντοτε τη διεύθυνση κατά την οποία **κατέρχεται η γραμμή ενέργειας** (εκτός αν παρεμβάλλεται αντλία)
- Η γραμμή υδραυλικής κλίσης **υψώνεται απότομα σε μια αντλία**.
- Η γραμμή υδραυλικής κλίσης **κατέρχεται απότομα σε έναν στρόβιλο**.
- **Η επιφάνεια του υγρού σε μία δεξαμενή** αποτελεί μέρος της γραμμής υδραυλικής κλίσης αλλά και της γραμμής ενέργειας.

Γραμμή ενέργειας & Υδραυλική γραμμή

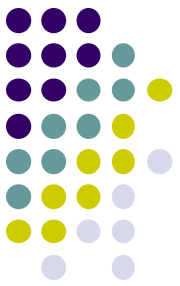


- **Γραμμή Ενέργειας:** Γραμμή που ενώνει τα σημεία που βρίσκονται σε απόσταση $\left(\frac{u^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z \right)$ από το επίπεδο δυναμικής ενέργειας μηδέν (0), που συνήθως είναι η κεντρική γραμμή του αγωγού.
- **Υδραυλική Γραμμή:** (Γραμμή πίεσης ή πιεζομετρικού ύψους): Ενώνει τα σημεία που βρίσκονται σε απόσταση $\left(\frac{P}{\gamma} + z \right)$ από το ορισμένο επίπεδο δυναμικής ενέργειας μηδέν.
- Μεταξύ τους κατακόρυφη απόσταση $\frac{u^2}{2g}$
- $h_{\text{εισόδου}} - h_{\text{εξόδου}} = h_f$ (οι απώλειες του συστήματος)
- Ροή ρευστού έχουμε από σημείο υψηλής ενέργειας \rightarrow σημείο χαμηλής ενέργειας
- Σε δοχείο που ηρεμεί οι γραμμές ενέργειας και πίεσης ταυτίζονται και βρίσκονται στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού
- Στα σημεία που η υδραυλική γραμμή ταυτίζεται με τον άξονα του αγωγού η πίεση = 0

Γραμμή ενέργειας και υδραυλική γραμμή

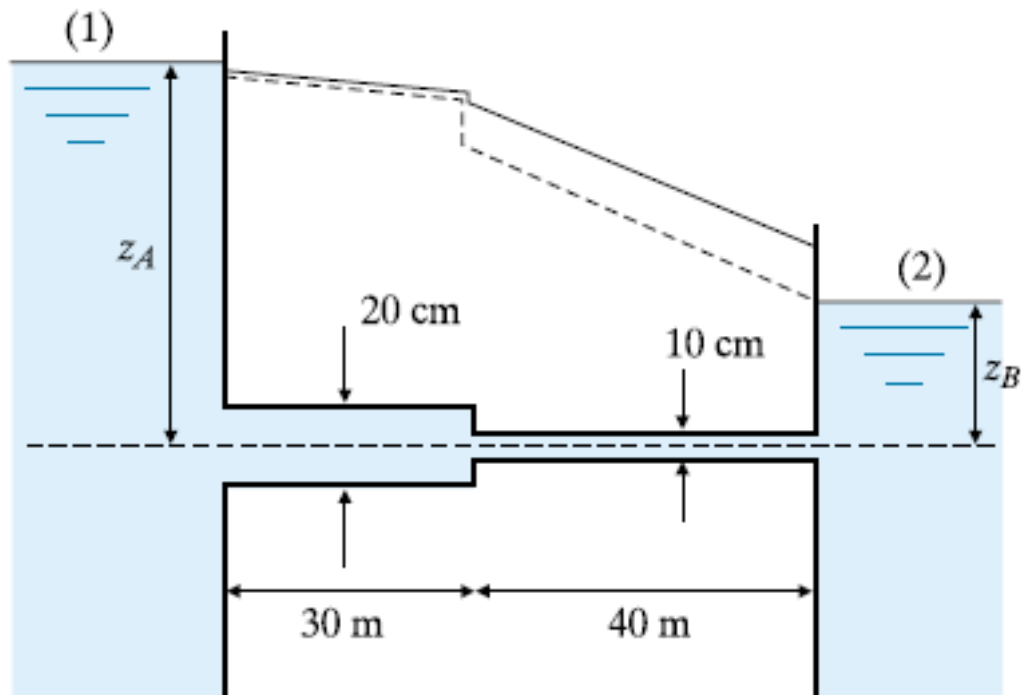


Παράδειγμα 6.11



Νερό θερμοκρασίας $\theta = 20^\circ\text{C}$ ρέει μεταξύ των δύο δεξαμενών με ρυθμό $0,06\text{ m}^3/\text{s}$. Να σχεδιάσετε την υδραυλική γραμμή και την γραμμή συνολικής ενέργειας. Το υλικό του σωλήνα είναι χυτοσίδηρος με $\varepsilon = 0,26\text{ mm}$. Τα μήκη και οι διαμέτροι των αγωγών φαίνονται στο σχήμα.

Λύση



Λύση

Στον αγωγό διαμέτρου 20 cm έχουμε:

$$\bar{u}_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{0,06}{\pi \times \frac{0,20^2}{4}} = 1,91 \text{ m/s,}$$

$$Re = \frac{\bar{u}_1 d_1}{\nu} = \frac{1,91 \times 0,2}{10^{-6}} = 3,8 \times 10^5,$$

$$\frac{e}{d} = \frac{0,26}{200} = 0,0013$$

και $f_1 = 0,022$

Για τον αγωγό διαμέτρου 10 cm έχουμε:

$$\bar{u}_2 = \frac{\dot{V}}{A_2} = \frac{0,06}{\pi \times \frac{0,1^2}{4}} = 7,64 \text{ m/s,}$$

$$Re = \frac{\bar{u}_2 d_2}{\nu} = \frac{7,64 \times 0,1}{10^{-6}} = 7,64 \times 10^5,$$

$$\frac{e}{d} = \frac{0,00026}{0,1} = 0,0026$$

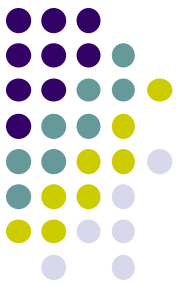
και $f_2 = 0,026$

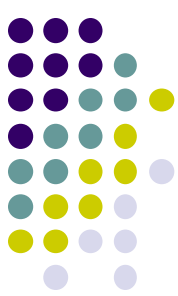
Το ρευστό ξεκινώντας από τη δεξαμενή έχει μια απώλεια ύψους λόγω εισόδου, που δίνεται ως:

$$h_{\text{εισόδου}} = K_{\text{εισόδ}} \frac{\bar{u}_1^2}{2g} = 0,5 \times \frac{1,91^2}{2 \times 9,8} = 0,093 \text{ m}$$

Έτσι έχουμε μία μείωση της γραμμής ενέργειας σε εκείνο το σημείο κατά το ύψος που βρήκαμε. Κατά μήκος του αγωγού 1 αν υποθέσουμε ομοιόμορφη ροή θα έχουμε απώλειες ύψους, που δίνονται από τον τύπο:

$$h_{f_1} = f_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{\bar{u}_1^2}{2g} = 0,022 \times \frac{3,0}{0,2} \frac{1,91^2}{2 \times 9,8} = 0,6 \text{ m}$$





Στη συστολή του αγωγού έχουμε απώλεια ύψους που υπολογίζεται από τη η σχέση:

$$h_{\text{συστ}} = K_{\text{συστ}} \frac{u_1^2}{2g} = 0,25 \times \frac{1,91^2}{2 \times 9,8} = 0,046 \text{ m}$$

Ακόμη κατά μήκος του αγωγού 2 έχουμε απώλειες ύψους που δίνονται ως,

$$h_{f_2} = f \frac{L_2}{d_2} \frac{u_2^2}{2g} = 0,026 \times \frac{40}{0,1} \frac{7,64^2}{2 \times 9,8} = 30,9 \text{ m}$$

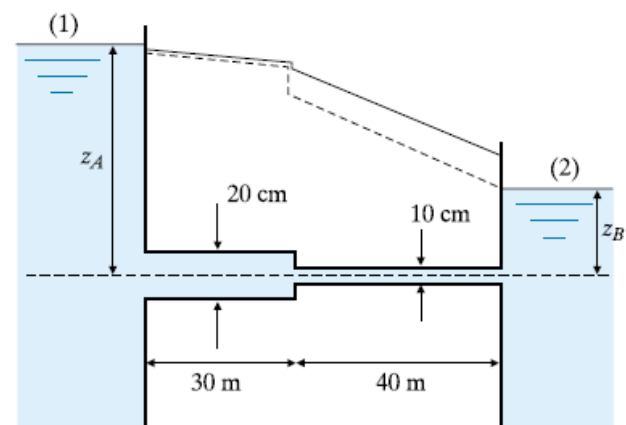
Τέλος οι απώλειες εξόδου είναι: $h_{\text{εξοδ.}} = K_{\text{εξ}} \frac{u_2^2}{2g} = \frac{7,64^2}{2 \times 9,8} = 2,9 \text{ m}$

Έτσι οι συνολικές απώλειες είναι:

$$h_f = 0,093 + 0,61 + 0,046 + 30,9 + 2,9 = 34,62 \text{ m}$$

$$z_A + \frac{u_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{u_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} + h_f$$

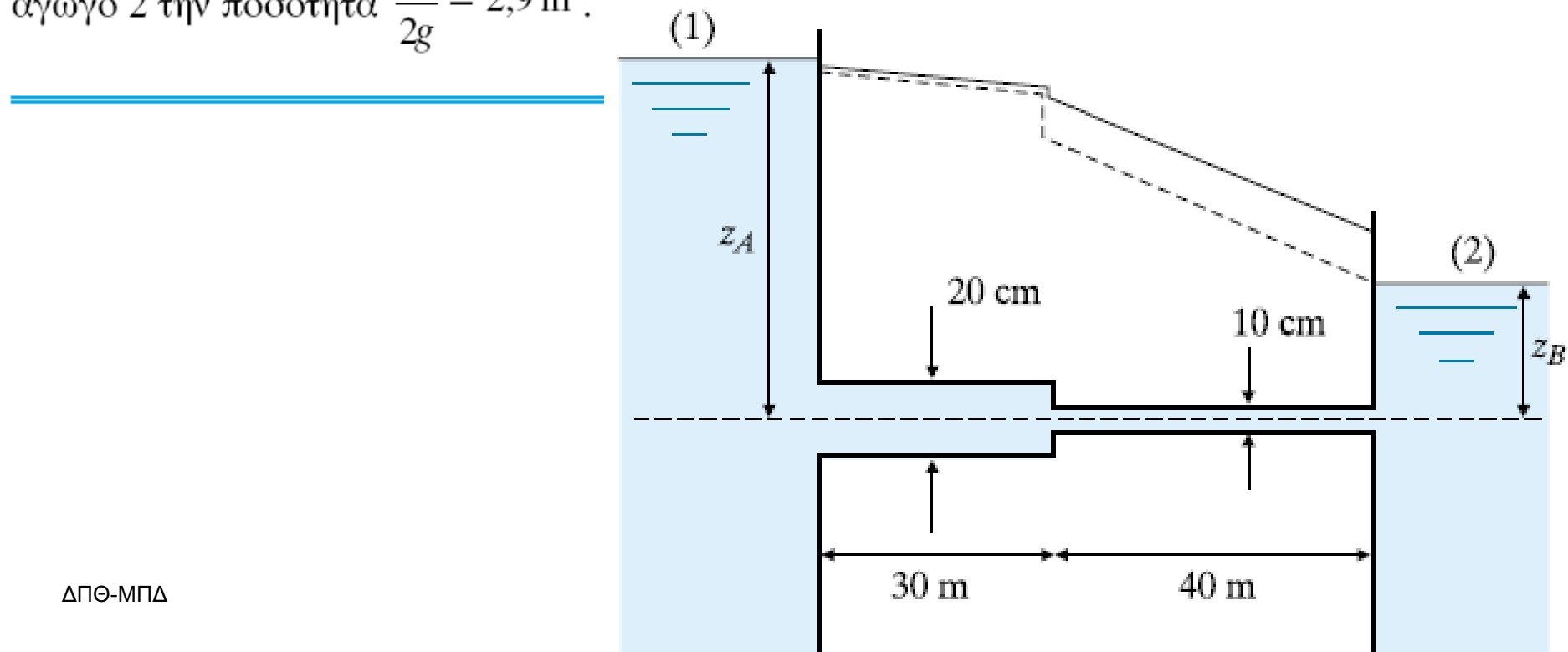
Αλλά $\bar{u}_A = \bar{u}_B = 0$ και $p_A = p_B = p_{\text{atm}}$ άρα $z_A - z_B = h_f$





Δηλαδή η υψομετρική διαφορά των επιφανειών του ρευστού στα δύο δοχεία πρέπει να είναι ίση με τις απώλειες ύψους κατά την ροή. Με απλά λόγια η ροή προσαρμόζεται, έτσι ώστε οι απώλειες λόγω της ροής να είναι ίσες με την υψομετρική διαφορά των επιφανειών των δύο δεξαμενών. Σύμφωνα με τους προηγούμενους υπολογισμούς μπορούμε να φέρουμε την γραμμή συνολικής ενέργειας.

Για τον προσδιορισμό της υδραυλικής γραμμής από τους προηγούμενους υπολογισμούς αφαιρούμε για τον αγωγό 1 την ποσότητα $\frac{u_1^2}{2g} = 0,186 \text{ m}$ και για τον αγωγό 2 την ποσότητα $\frac{u_2^2}{2g} = 2,9 \text{ m}$.



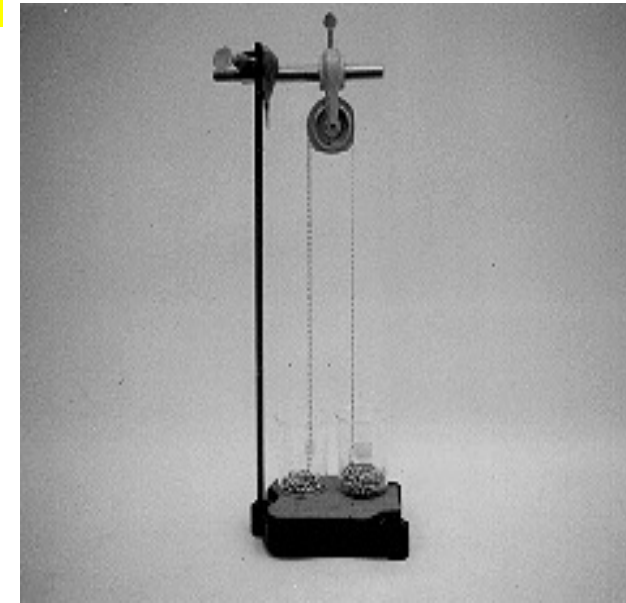
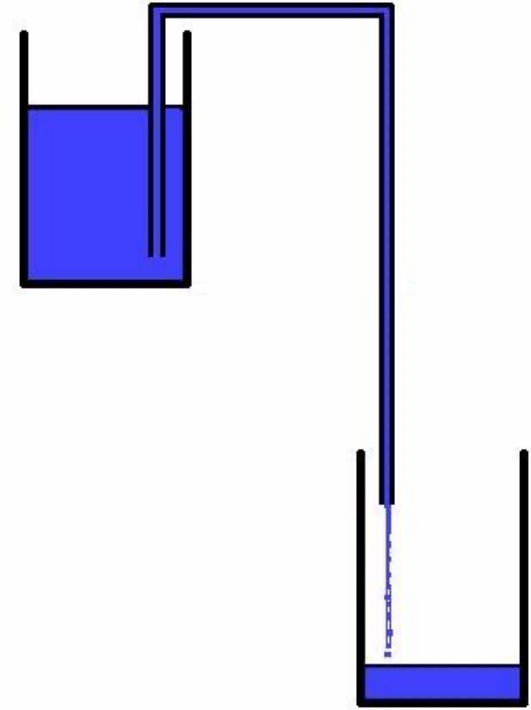
Σιφωνισμός

Ένα σιφόνι είναι ένας συνεχής σωλήνας που επιτρέπει στο υγρό να στραγγίζει από μια δεξαμενή μέσω ενός ενδιάμεσου σημείου που είναι υψηλότερο από τη δεξαμενή, χωρίς να χρειάζεται άντληση. Είναι απαραίτητο το τελικό άκρο του σωλήνα να είναι χαμηλότερο από την επιφάνεια του υγρού στη δεξαμενή.

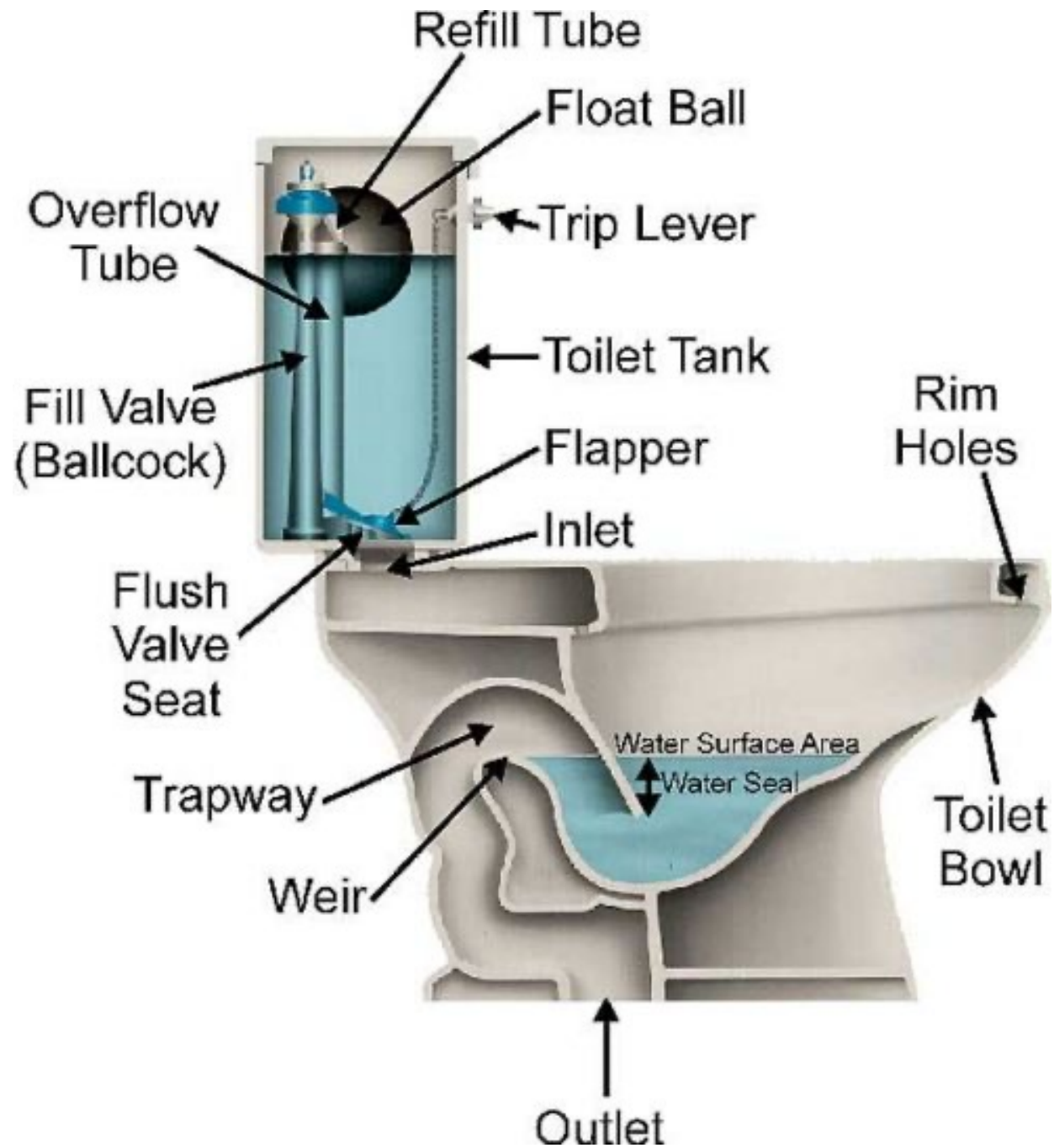
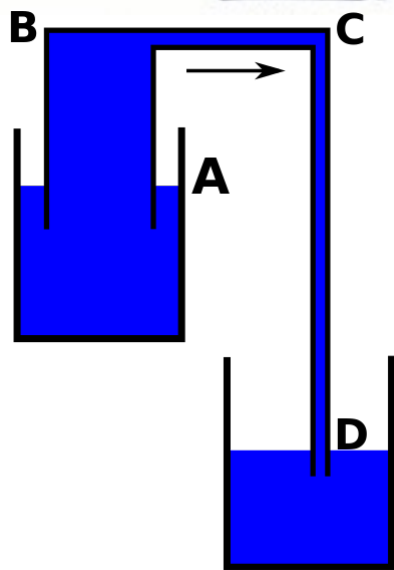
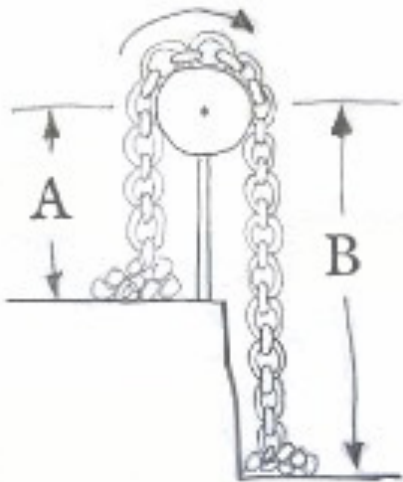
Μια αναλογία για να κατανοήσουμε το σιφωνισμό είναι να φανταστούμε ένα μακρύ τρένο χωρίς τριβές που εκτείνεται από μια πεδιάδα, πάνω σε ένα λόφο και μετά κάτω από το λόφο σε μια κοιλάδα. Το τμήμα του τρένου που γλιστράει στην κοιλάδα μπορεί να τραβήξει το υπόλοιπο τρένο στον λόφο και στην κοιλάδα.

Αυτό που δεν είναι προφανές είναι τι συγκρατεί το τρένο **όταν το τρένο είναι ένα υγρό σε ένα σωλήνα. Σε αυτή την αναλογία, η ατμοσφαιρική πίεση συγκρατεί το τρένο ενωμένο.** Μόλις η δύναμη της βαρύτητας στους συνδέσμους μεταξύ των βαγονιών του τρένου που ανεβαίνει στο λόφο υπερβεί εκείνη της ατμοσφαιρικής πίεσης, ο σύνδεσμος σπάει και το τρένο καταρρέει.

Η αναλογία του τρένου αποδεικνύεται σε ένα "μοντέλο αλυσίδας" όπου μια μακριά αλυσίδα σε μια τροχαλία ρέει ανάμεσα σε δύο ποτήρια

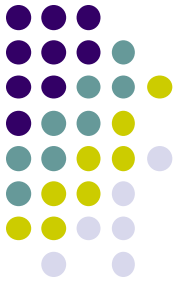
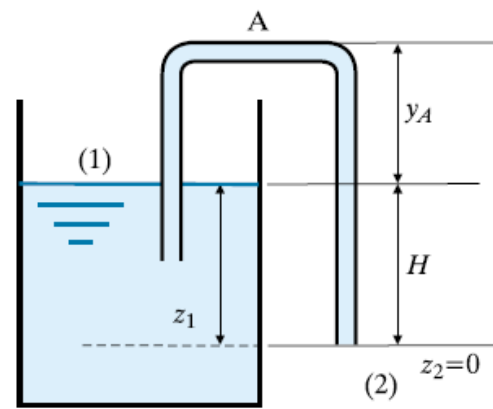


Σιφωνισμός



Σιφωνισμός

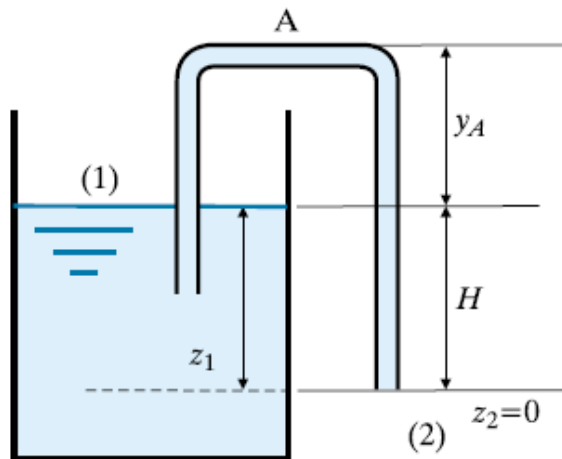
Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας
μεταξύ (1) και (A)



$$\frac{P_{atm}}{\gamma} + 0 + 0 = \frac{P_A}{\gamma} + y_A + \frac{u^2}{2g} + K' \frac{u^2}{2g} + f \frac{L'}{d} \frac{u^2}{2g} \Rightarrow \frac{P_A - P_{atm}}{\gamma} = -y_A - \frac{u^2}{2g} \left(1 + K' + f \frac{L'}{d}\right)$$

- $P_A - P_{atm} < 0$
- και μειώνεται με την αύξηση του y_A και της ταχύτητας
- για να αρχίσει να λειτουργεί πρέπει η πίεση στο A να γίνει $< P_{atm}$
- π.χ. με αναρόφηση
- Για $P_A \leq$ τάσης ατμών του υγρού, τότε δεν ισχύουν οι παραπάνω εξισώσεις γιατί με την εξάτμιση καταρρίπτεται η παραδοχή ασυμπίεστου ρευστού που έγινε για την εξαγωγή εξισώσεως ενέργειας
- Στην πράξη ο σίφωνας δεν λειτουργεί ικανοποιητικά όταν η πίεση στην κορυφή πλησιάζει την τάση ατμών (φαινόμενο σπηλαιώσεως). Αέρας και άλλα εν διαλύσει αέρια συλλέγονται στην κορυφή και έτσι μειώνεται το μήκος της δεξιάς στήλης υγρού που δημιουργεί την χαμηλή πίεση στην κορυφή. Οι μεγάλοι σίφωνες έχουν στήλες κενού που αφαιρούν τα αέρια από την κορυφή.

Σιφωνισμός



Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας μεταξύ ① και ②

Δευτερεύουσες

Απώλειες

Απώλειες

Ενέργειας

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + K \frac{u_2^2}{2g} + f \frac{L}{d} \frac{u_2^2}{2g}$$

Επειδή $u_1 = 0, P_1 = P_2 = P_{atm}, z_1 - z_2 = H, u_2 = U$

$$\Rightarrow H = \frac{u^2}{2g} \left(1 + K + f \frac{L}{d} \right)$$

A) Αν η παροχή είναι γνωστή, το u γνωστό \rightarrow υπολογίζεται το H

B) Αν δίνεται το H , τότε επειδή το f είναι συνάρτηση του u :

\rightarrow Υποθέτουμε μια τιμή του f

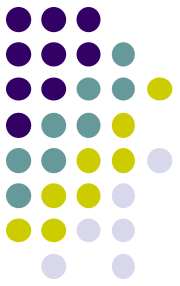
\rightarrow Υπολογίζουμε την ταχύτητα

\rightarrow Υπολογίζουμε το Re

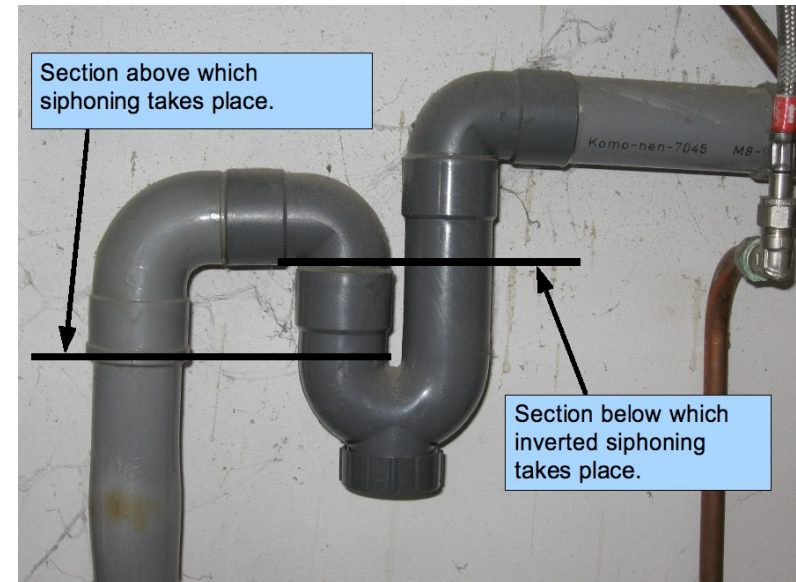
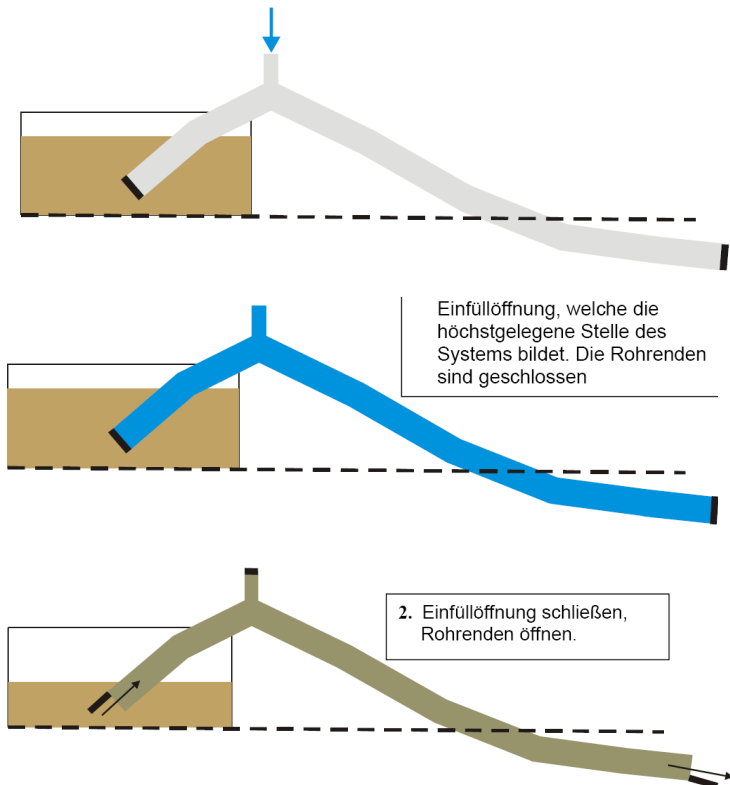
\rightarrow Υπολογίζουμε το f (από το διάγραμμα Moody)

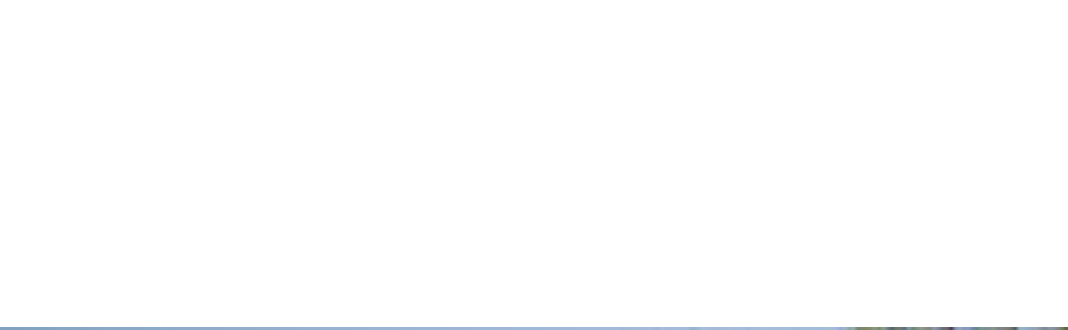
Αν ταυτίζεται καλώς, διαφορετικά επαναλαμβάνεται η διαδικασία.

Σιφωνισμός - Εφαρμογές



- Τουαλέτα – λεκάνη
- Ανεστραμμένο σιφώνιο
- Βενζίνη σε άδειο ρεζερβουάρ

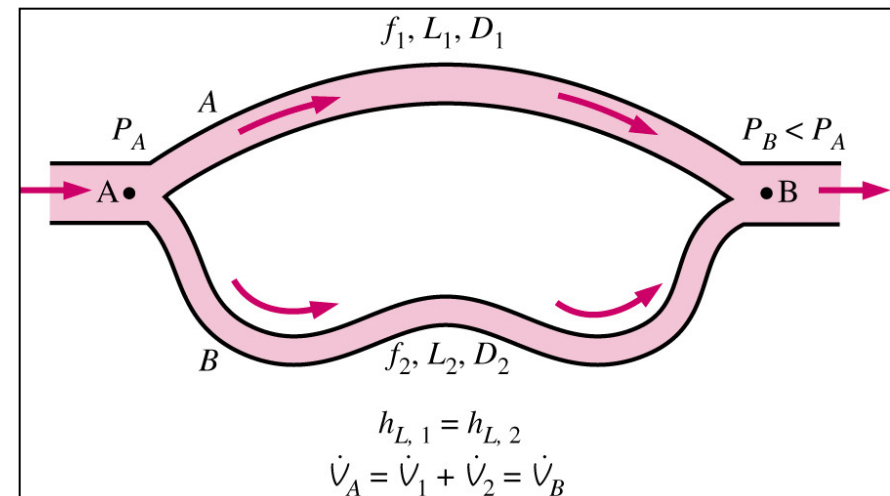
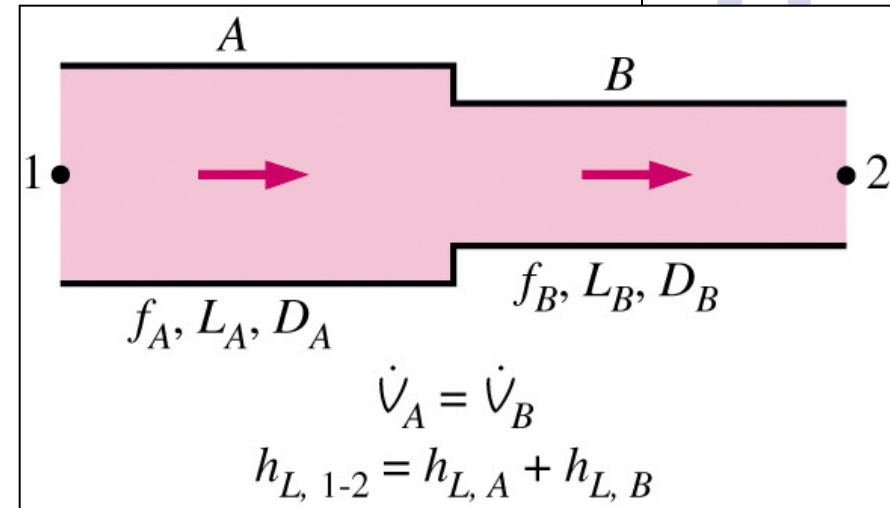




Δίκτυα αγωγών & Επιλογή αντλίας



- Δύο γενικοί τύποι δικτύων αγωγών
 - Αγωγοί σε σειρά
 - Ογκομετρική παροχή σταθερή
 - Απώλειες ροών από την άθροιση των επιμέρους τμημάτων αγωγών
 - Παράλληλοι αγωγοί
 - Η ογκομετρική παροχή είναι το άθροισμα των ογκομετρικών παροχών των επιμέρους τμημάτων
 - Ίδια απώλεια πίεσης κατά μήκος όλων των επιμέρους αγωγών



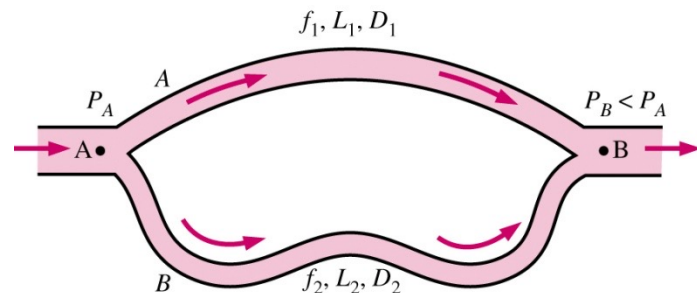
Δίκτυα αγωγών & Επιλογή αντλίας



- Για **παράλληλους αγωγούς**, επίλυση με χρήση όγκου ελέγχου ανάμεσα στα σημεία A και B

$$V_A = V_B$$

$$\frac{P_A}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_B^2}{2g} + z_B + h_L$$



$$h_{L,1} = h_{L,2}$$

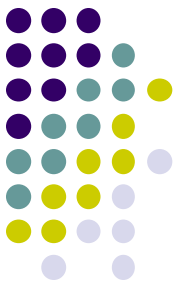
$$\dot{V}_A = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{V}_B$$

$$h_L = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

- Αφού η Δp είναι η ίδια για όλα τα τμήματα, οι απώλειες είναι οι ίδιες για όλα τα τμήματα

$$h_{L,1} = h_{L,2} \longrightarrow f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g}$$

Δίκτυα αγωγών & Επιλογή αντλίας



- Οι σχέσεις απωλειών ύψους ανάμεσα στα τμήματα επιτρέπουν την ανάπτυξη των παρακάτω λόγων

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{f_2 L_2 D_1}{f_1 L_1 D_2} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \left(\frac{f_2 L_2 D_1}{f_1 L_1 D_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Τα πραγματικά συστήματα σωληνώσεων είναι τελικά ένα σύστημα από μη-γραμμικές σχέσεις
- Σημείωση : είναι φανερό η αναλογία με τα ηλεκτρικά κυκλώματα
 - Ογκομετρική παροχή (V) : ένταση ηλεκτρικού ρεύματος (I)
 - Μεταβολή πίεσης (Δp) : Τάση ηλεκτρικού ρεύματος (V)
 - Ύψος απωλειών (h_L): αντίσταση (R), αν και το h_L έχει έντονη μη γραμμική συμπεριφορά

Δίκτυα αγωγών & Επιλογή αντλίας



- Όταν ένα σύστημα σωληνώσεων περιλαμβάνει αντλίες η/και στροβίλους, το ύψος απωλειών των αντλιών και των στροβίλων πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στην εξίσωση ενέργειας

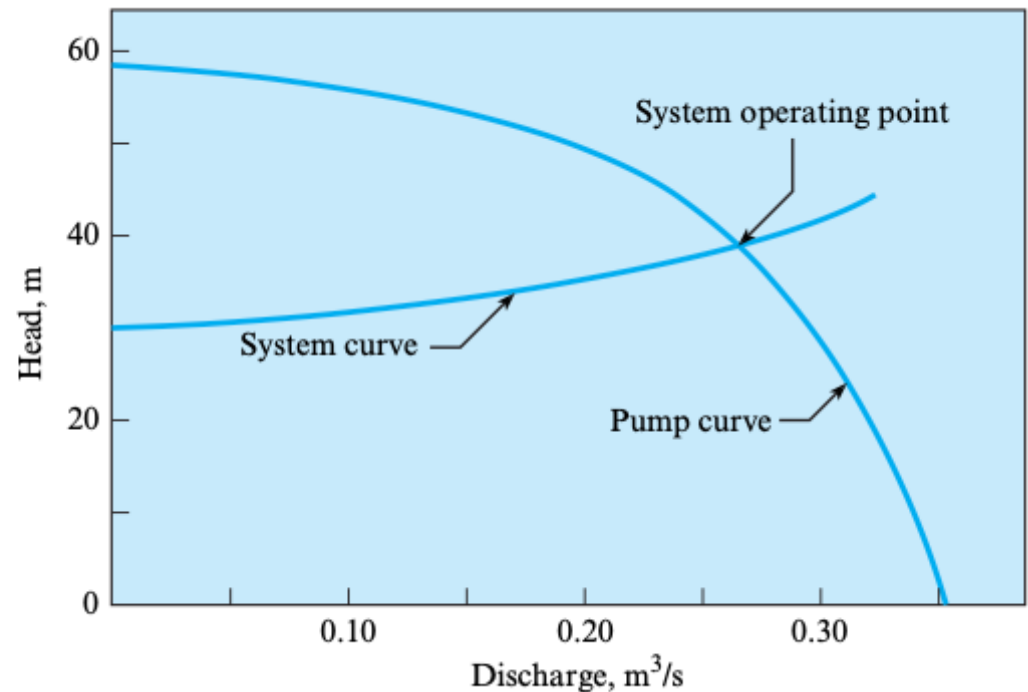
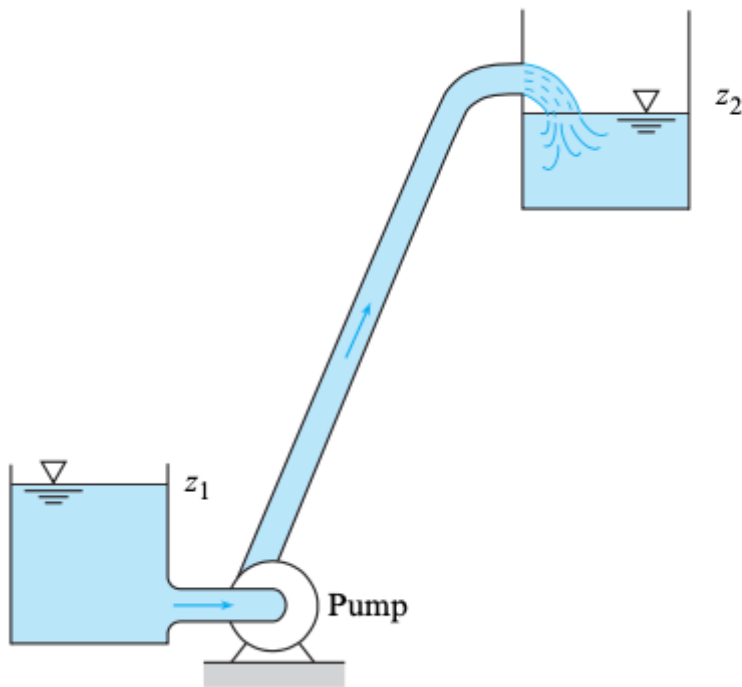
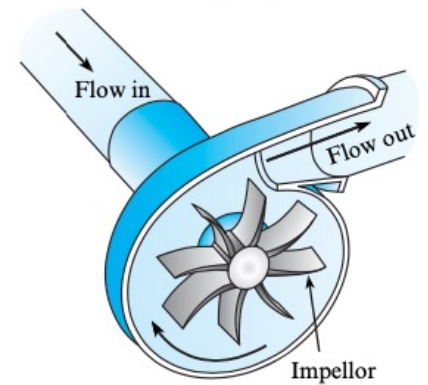
$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pump},u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine},e} + h_L$$

- Το χρήσιμο ύψος που παρέχει η αντλία ($h_{\text{pump},u}$) ή το ύψος που καταναλώνεται από τον στρόβιλο ($h_{\text{turbine},e}$) είναι συναρτήσεις της ογκομετρικής παροχής, δηλαδή **όχι σταθερά**
- Το σημείο λειτουργίας του συστήματος είναι όπου το σύστημα βρίσκεται **σε ισορροπία**, δηλ. όπου το ύψος που παρέχει η αντλία είναι ίσο με τις απώλειες

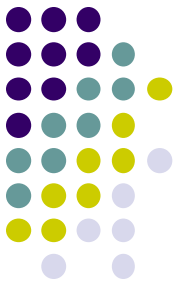
Αντλίες και συστήματα σωλήνων

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \sum K_L \frac{V^2}{2g} + \sum \frac{fL}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_p = (z_2 - z_1) + \frac{V^2}{2g} \left(1 + \sum K_L + \frac{fL}{D} \right)$$



Αντλίες και συστήματα σωλήνων



EXAMPLE 10.9

Finding a System Operating Point

Define the Situation

- The system diagram is sketched ahead.
- The pump curve is given in Fig. 10.20b.
- The friction factor is $f = 0.015$.

State the Goal

Calculate the discharge (m^3/s) in the system.

Generate Ideas and Make a Plan

1. Develop an equation for the system curve by applying the energy equation.
2. Plot the given pump curve and the system curve on the same graph.
3. Find discharge Q by finding the intersection of the system and pump curve.

Take Action (Execute the Plan)

Energy equation:

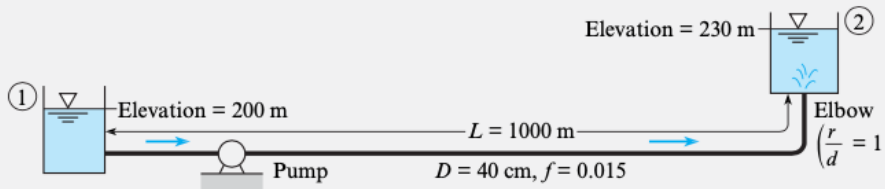
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \sum h_L$$

$$0 + 0 + 200 + h_p = 0 + 0 + 230 + \left(\frac{fL}{D} + K_e + K_b + K_E \right) \frac{V^2}{2g}$$

Here, $K_e = 0.5$, $K_b = 0.35$ and $K_E = 1.0$. Hence

$$\begin{aligned} h_p &= 30 + \frac{Q^2}{2gA^2} \left[\frac{0.015(1000)}{0.40} + 0.5 + 0.35 + 1 \right] \\ &= 30 + \frac{Q^2}{2 \times 9.81 \times [(\pi/4) \times 0.4^2]^2} (39.3) \\ &= 30 \text{ m} + 127Q^2 \text{ m} \end{aligned}$$

Now, make a table of Q versus h_p (as follows) to give values to produce a system curve that will be plotted with the pump curve. When the system curve is plotted on the same graph as the pump curve, it is seen (Fig. 10.20b) that the operating condition occurs at $Q = 0.27 \text{ m}^3/\text{s}$.



| $Q(\text{m}^3/\text{s})$ | $h_p = (30 \text{ m} + 127Q^2) \text{ m}$ |
|--------------------------|---|
| 0 | 30 |
| 0.1 | 31.3 |
| 0.2 | 35.1 |
| 0.3 | 41.4 |

