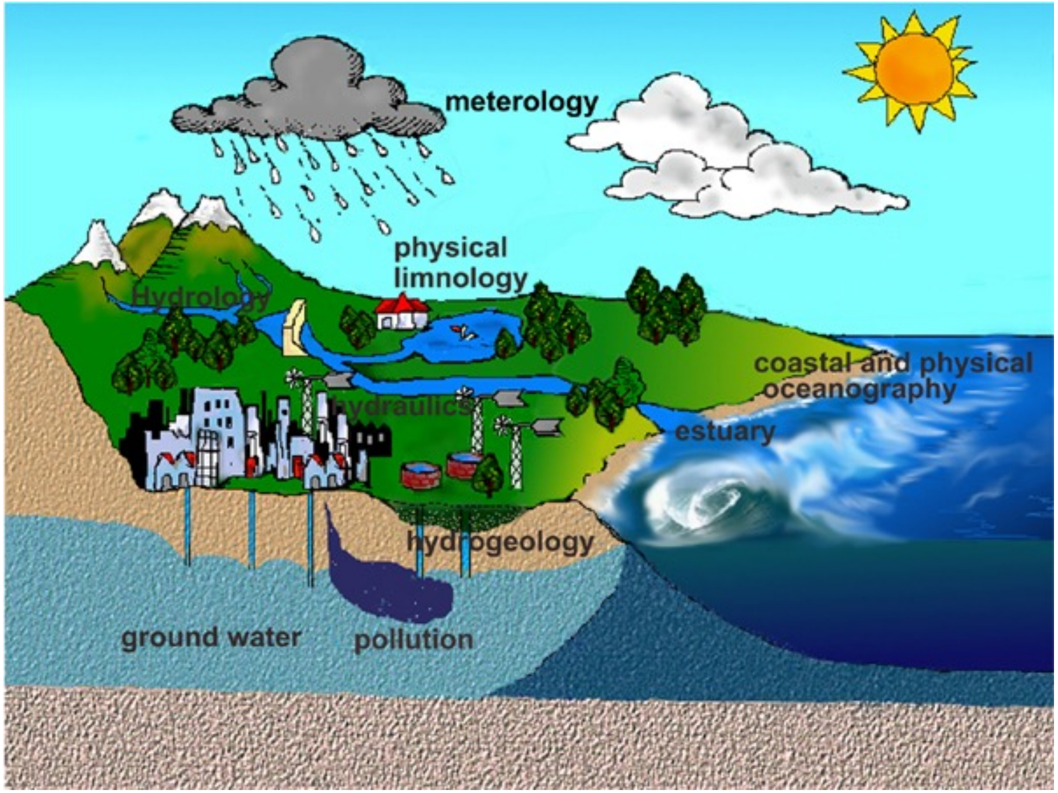
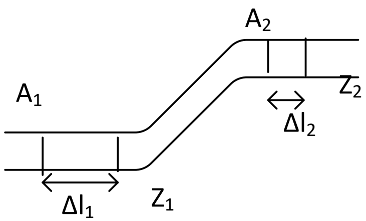
Κινηματική των Ρευστών - 2



Εξισώσεις Bernoulli & Euler



κίνηση ρευστού κατά μήκος λεπτού ρευματικού σωλήνα

$$E_2 = \frac{1}{2}\Delta m u_2^2 + \Delta m g z_2$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\Delta m u_1^2 + \Delta m g z_1$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \Delta W$$

$$W_1 = P_1 \cdot A_1 \Delta l_1$$

Έργο που **παράγεται** κατά τη μετακίνηση του όγκου ΔV στο κάτω άκρο

$$W_2 = P_2 \cdot A_2 \Delta l_2$$

Έργο που **καταναλώνεται** για τη μετακίνηση του όγκου ΔV στο πάνω άκρο

$$\frac{1}{2}\Delta m u_2^2 + \Delta m g z_2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 - \Delta m g z_1 = W_1 - W_2$$

$$= (P_1 - P_2)\Delta V$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V} v_2^2 + \frac{\Delta m}{\Delta V} g z_2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V} v_1^2 - \frac{\Delta m}{\Delta V} g z_1 = P_1 - P_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g z_2 + P_2 = \sigma\tau\alpha\theta.}$$

Εξίσωση Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + P = \sigma\tau\alpha\theta$$

διαιρώ με ρ

$$\frac{1}{2}u^2 + g z + \frac{P}{\rho} = \sigma\tau\alpha\theta$$

διαιρώ με g

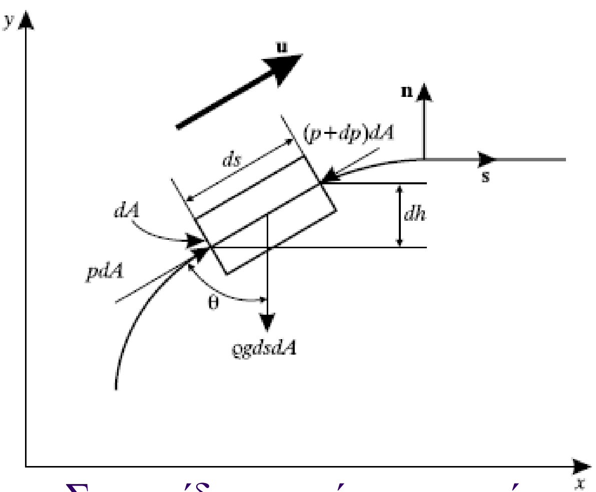
$$\boxed{\frac{u^2}{2g} + z + \frac{P}{\gamma} = \sigma\tau\alpha\theta}$$

Για u=0 (στατικό ρευστό) $\Rightarrow$

$$\boxed{P - \sigma\tau\alpha\theta = -\rho g z}$$

$2^{ος}$ νόμος Νεύτωνα: $\Sigma F = m\alpha$

(κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς)



Σωματίδιο κινούμενο κατά μήκος μιας τροχιάς

$$pdA - (p + dP)dA - \rho g dS dA cos\theta = (\rho ds dA)\alpha \Rightarrow$$

$$-dPdA - \rho g dS dA cos\theta = (\rho dS dA)a$$

- $a = \frac{dv}{dt} = \frac{\vartheta v}{\vartheta S}\frac{dS}{dt} = \frac{\vartheta v}{\vartheta S} v$
- $cos\theta = \frac{\vartheta h}{\vartheta S}$

$\Rightarrow$ διαιρώ με $dSdA$

$$-\frac{\vartheta P}{\vartheta S} - \rho g \frac{\vartheta h}{\vartheta S} = \rho v \frac{\vartheta v}{\vartheta S} \Rightarrow -\frac{\vartheta P}{\vartheta S} - \rho g \frac{\vartheta h}{\vartheta S} = \rho \frac{\vartheta\left(\frac{v^2}{2}\right)}{\vartheta S}$$

διαιρώ με το ρ

$$\Rightarrow \frac{\vartheta}{\vartheta S}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gh\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gh = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Εξίσωση Euler 1)για μόνιμη ροή, 2)κατά μήκος μιας γραμμής ροής

$$\frac{1}{2}d(v^2) + \frac{1}{\rho}dP + gdh = 0$$

Επειδή η S είναι η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή η εξίσωση μπορεί να γραφεί

Εξίσωση Bernoulli

Διαιρώντας με το g

Συνολικό ύψος

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} + \frac{P}{\gamma} + h = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Πιεζομετρικό ύψος

Ενέργεια πίεσης ή Ενέργεια ροής

Οφείλεται στην κίνηση του ρευστού μεταξύ των 2 σημείων με διαφ. πίεσης. Δεν είναι ενέργεια που κατέχει το ρευστό. Είναι απλά ενέργεια που το ρευστό μπορεί να μεταφέρει

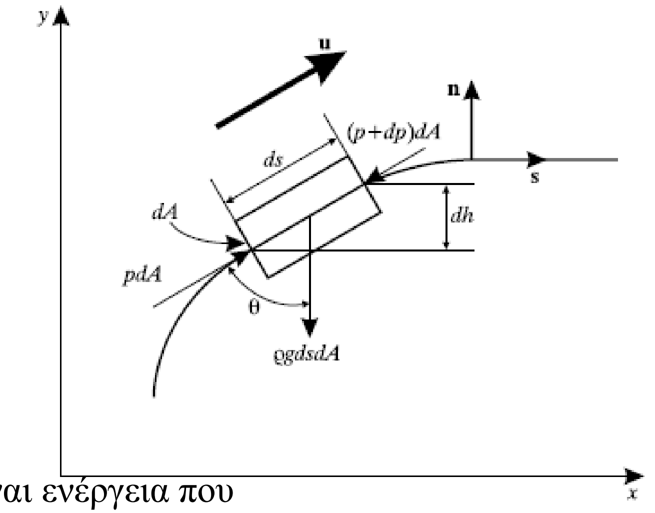
Προϋποθέσεις

1) Ιδανικό ρευστό
2) Μόνιμη ροή
3) Σταθ. Πυκνότητα κατά μήκος ροϊκής γραμμής

Η εξίσωση δεν ισχύει όταν μια εξωτερική συσκευή (π.χ. αντλία) παράγει έργο στο ρευστό (προσθέτει/αφαιρεί ενέργεια)

Εξισώσεις Bernoulli & Euler

$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g}+\frac{p}{\gamma}+h=\sigma\tau\alpha\theta.$$



$\frac{p}{\gamma}$ **(Ενέργεια πίεσης ή Ενέργεια ροής)** :

Οφείλεται στην κίνηση του ρευστού μεταξύ 2 σημείων με διαφορά πίεσης. Δεν είναι ενέργεια που κατέχει το ρευστό. Είναι απλά ενέργεια που το ρευστό μπορεί να μεταφέρει.

$\frac{p}{\gamma}+h$ **(Πιεζομετρικό ύψος)**

Προϋποθέσεις : 1) Ιδανικό ρευστό
2) Μόνιμη ροή
3) Σταθερή Πυκνότητα κατά μήκος ροικής γραμμής

Η Εξίσωση δεν ισχύει όταν μη εξωτερική συσκευή (π.χ.αντλία) παράγει έργο στο ρευστό (προσθέτει /αφαιρεί ενέργεια)

Εφαρμογή - Ανυψωτική δύναμη αεροπλάνου

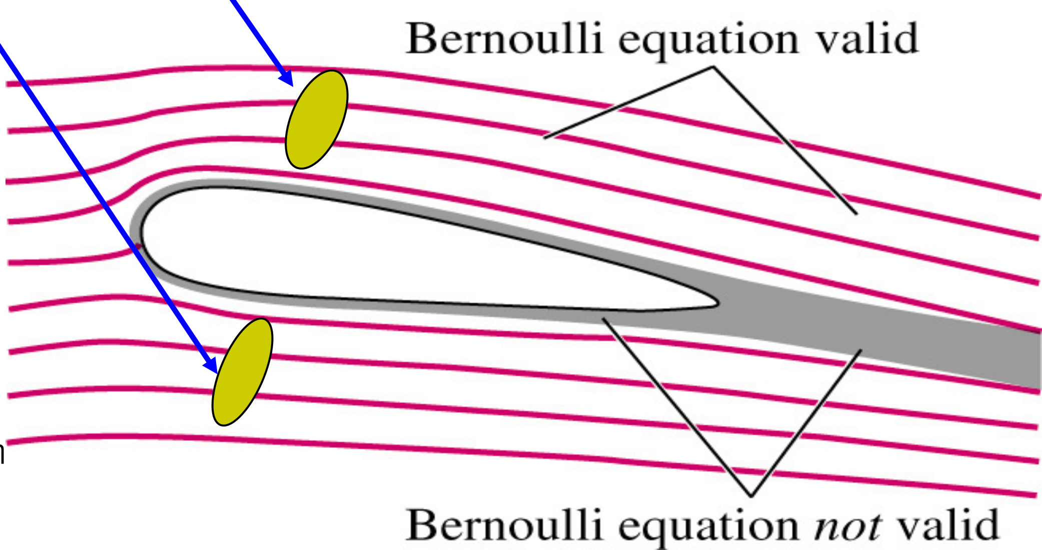
Μεγάλη ταχύτητα (μικρή πίεση) (μέγιστη πυκνότητα ρευματικών γραμμών)

Μικρή ταχύτητα (μεγάλη πίεση) (μικρή πυκνότητα ρευματικών γραμμών)

$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g}+\frac{p}{\gamma}+h=\sigma\tau\alpha\theta.$$

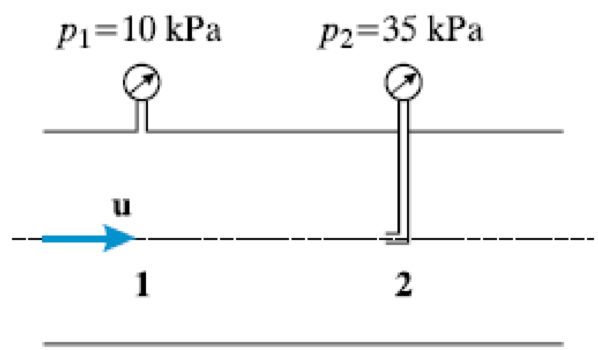
Για h : σταθερό (κίνηση αεροπλάνου)

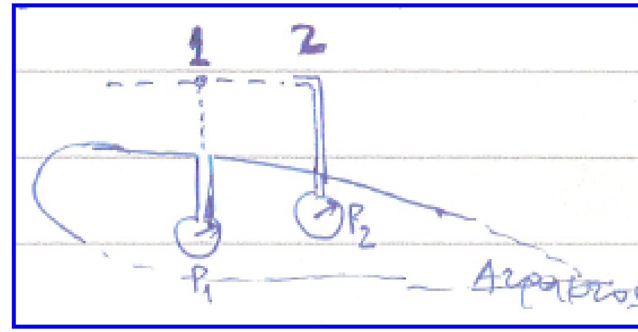
Η ταχύτητα ελαττώνεται όταν αυξάνει η πίεση κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής



Παράδειγμα 3.3

Να υπολογισθεί η ταχύτητα ροής ρευστού σε οριζόντιο σωλήνα με την βοήθεια των μανόμετρων όπως στο Σχήμα. Δίνεται $\varrho = 1{,}20\ \text{kg/m}^3$.





Λύση

Το ρευστό ρέει με ταχύτητα **u** στο σημείο 1 και είναι ακίνητο στο σημείο 2 του άξονα του σωλήνα. Η πίεση του ρευστού στο σημείο 1 είναι μεγαλύτερη από την στατική πίεση. Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2 του ρευστού, έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\varrho} = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\varrho},$$

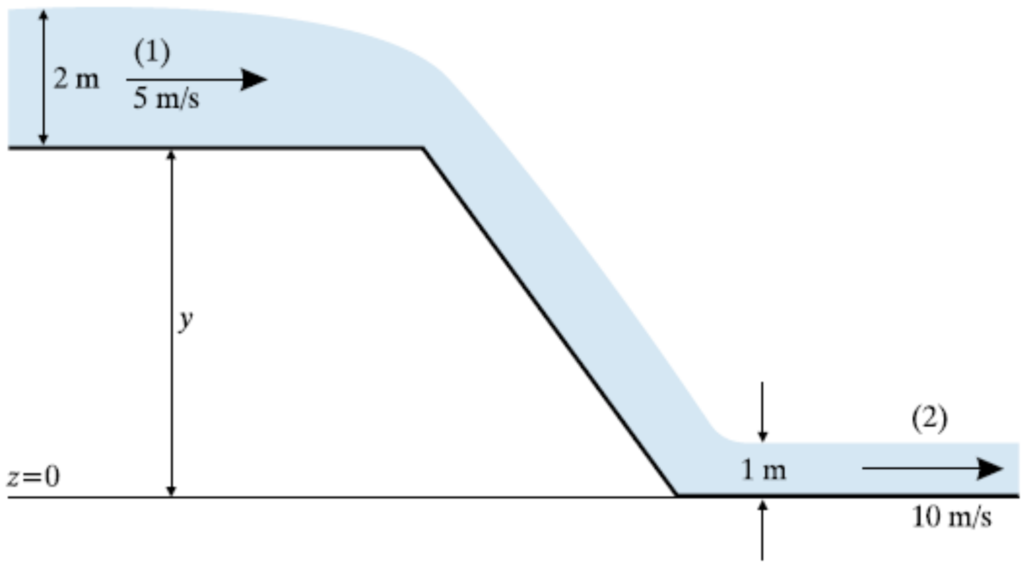
και επειδή $u_2 = 0$, προκύπτει:

$$u_1 = \sqrt{\frac{1\,(p_2 - p_1)}{\varrho}} = \sqrt{\frac{2(35-10)\times 10^3}{1{,}2}} = 204\ \text{m/s}$$

Παράδειγμα 3.4

Νερό ρέει σε ανοιχτό αγωγό όπως στο παρατιθέμενο Σχήμα. Εάν η ροή είναι ομοιόμορφη και οι απώλειες λόγω τριβών μπορούν να αγνοηθούν, να υπολογίσετε την υψομετρική διαφορά *y*.

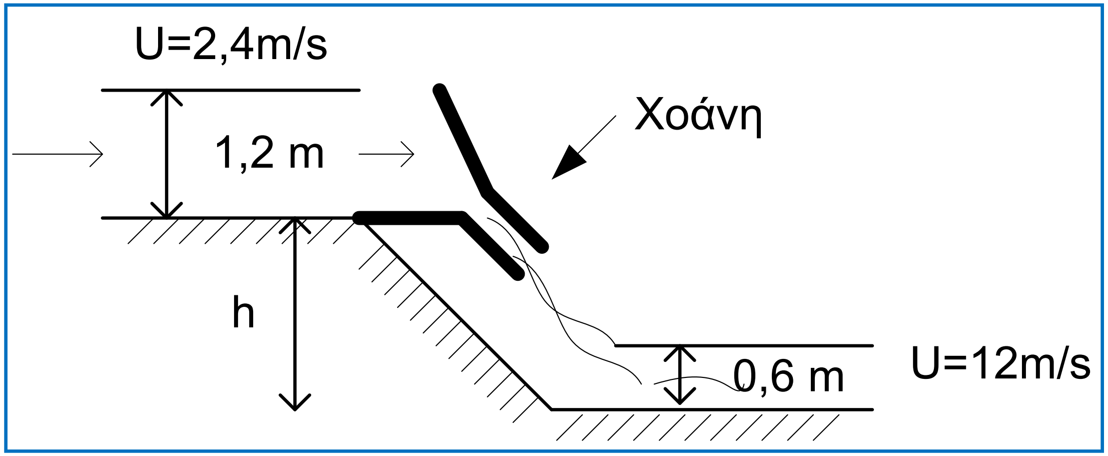
Λύση



$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g}+\frac{p}{\gamma}+h=\sigma\tau\alpha\theta. \qquad \frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+h_1=\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+h_2$$

Αντικαθιστώντας $h_1=(y+2)$ m, $h_2=1$ m, $p_2=p_1$ προκύπτει:

$$\frac{5^2}{2\times 9{,}8}+y+2=\frac{10^2}{2\times 9{,}8}+1 \;\Rightarrow\; y=2{,}82\text{ m}$$



Να βρεθεί η υψομετρική διαφορά h

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + h_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + h_2$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$h_1 = h + 1{,}2$$

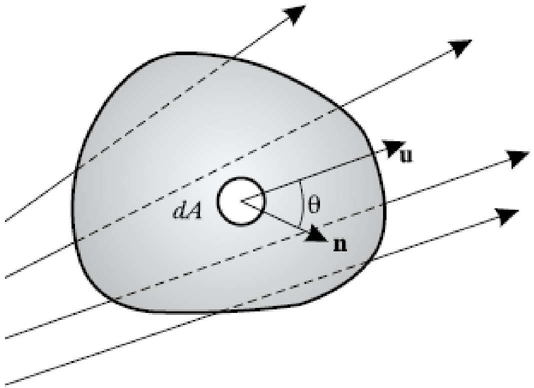
$$h_2 = 0{,}6$$

$$\Rightarrow \frac{2{,}4^2}{19{,}6} + h + 1{,}2 = \frac{12^2}{19{,}6} + 0{,}6$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 6{,}46m}$$

Αρχή διατήρησης της μάζας

Όπως ήδη έχει αναφερθεί ο νόμος αυτός δηλώνει ότι η μάζα δεν δημιουργείται αλλά ούτε και καταστρέφεται. Η μάζα ενός στοιχειώδους όγκου dV ρευστού είναι ϱdV. Επειδή η πυκνότητα μπορεί να αλλάζει από σημείο σε σημείο, η ολική μάζα σε ένα όγκο ελέγχου (Ο.Ε.) υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα $\iiint_{\text{O.E.}} \varrho\, dV$. Έτσι ο ρυθμόςμεταβολής μάζας στον όγκο ελέγχου είναι $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{O.E.}} \varrho dV$. Εάν η μάζα διατηρείται σταθερή στον όγκο ελέγχου, ο ρυθμός μεταβολής μάζας είναι μηδέν και ισχύει:



$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{O.E.}} \varrho\, dV = 0 \qquad (3.36)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{Ρυθμός εισροής}\\ \text{μάζας στον Ο.Ε.}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Ρυθμός εκροής}\\ \text{μάζας από τον Ο.Ε.}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Ρυθμός συσσώρευσης}\\ \text{μάζας στον Ο.Ε.}\end{pmatrix} = 0}$$

$$\boxed{\oiint_{\text{E.E.}} \varrho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{O.E.}} \varrho dV = 0}$$ **Εξίσωση συνέχειας**

Ειδικές μορφές της ολοκληρωμένης εξίσωσης συνέχειας

$$\boxed{\oiint_{E.E.} \varrho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{O.E.} \varrho dV = 0}$$

Μόνιμη ροή

Η πυκνότητα και οι υπόλοιπες δραστηριότητες του ρευστού δεν μεταβάλλονται με το χρόνο και η εξίσωση συνέχειας απλοποιείται στη μορφή:

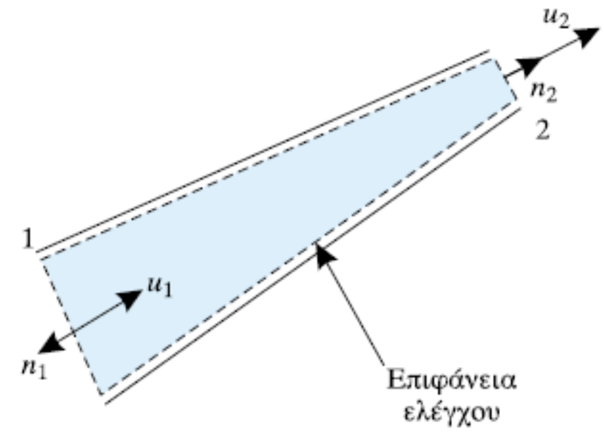
$$\oiint_{EE} \rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dA = 0$$

αν ροή ρευστού σε αγωγό μεταβλητής διατομής τότε:

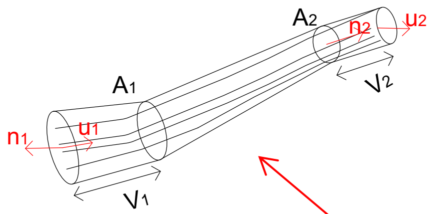
$$\oiint_{EE} \rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dA = 0 \Rightarrow \oiint_{A_1} -\rho_1 u_1 dA + \oiint_{A_2} \rho_2 u_2 dA = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_1 \mathbf{u}_1 A_1 = \bar{\rho}_2 \mathbf{u}_2 A_2$$

Μόνιμη και Ασυμπίεστη ροή

$$\bar{\rho}_1 \mathbf{u}_1 A_1 = \bar{\rho}_2 \mathbf{u}_2 A_2 \Rightarrow \mathbf{u}_1 A_1 = \mathbf{u}_2 A_2$$



Αρχή Διατήρησης της Μάζας



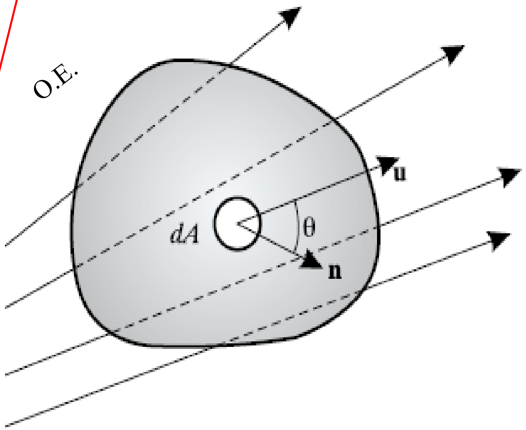
Για μόνιμη ροή (πυκνότητα και ιδιότητες δεν μεταβάλλονται με το χρόνο)
Για ασυμπίεστη ροή (πυκνότητα ρευστού σταθερή)

Σε Δt περνά από A_1 όγκος $A_1 u_1 \Delta t$
» » A_2 » $A_2 u_2 \Delta t$

Εξίσωση συνέχειας

$$\Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2$$

Ολοκληρωμένη Εξίσωση Συνέχειας



Μάζα στοιχειώδους όγκου $dV = \rho \cdot dV$

Μάζα σε όγκο ελέγχου $= \iiint_{OE} \rho \cdot dV$

Ρυθμός μεταβολής μάζας στον όγκο ελέγχου $= \frac{\vartheta}{\vartheta t} \iiint_{OE} \rho \cdot dV$

Αν η μάζα διατηρείται σταθερή στον όγκο ελέγχου $\Rightarrow \frac{\vartheta}{\vartheta t} \iiint_{OE} \rho \cdot dV = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \text{Ρυθμός Εισροής} \\ \text{μάζας στην ΕΕ} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός Εκροής} \\ \text{μάζας στην ΕΕ} \end{pmatrix}}_{\dot{m} = \iint_A \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dA} + \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός Συσσώρευσης} \\ \text{μάζας στην ΟΕ} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{EE} \rho(\bar{u} \cdot \bar{n}) dA + \frac{\vartheta}{\vartheta t} \int_{OE} \rho dV = 0}$$

Εξίσωση συνέχειας

Μόνιμη ροή:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta t} \iiint_{OE} \rho \cdot dV = 0 \quad \Rightarrow \text{η εξίσωση συνέχειας γίνεται (βλ. Σχήμα)}$$

$$\iint_{A_1} \rho_1 (\overline{u_1} \cdot \overline{n_1}) dA + \int_{A_2} \rho_2 (\overline{u_2} \cdot \overline{n_2}) dA = 0 \Rightarrow \iint_{A_1} -\rho_1 u_1 dA + \iint_{A_2} \rho_2 u_2 dA = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\overline{\rho_1}\, \overline{u_1} A_1 = \overline{\rho_2}\, \overline{u_2} A_2}$$

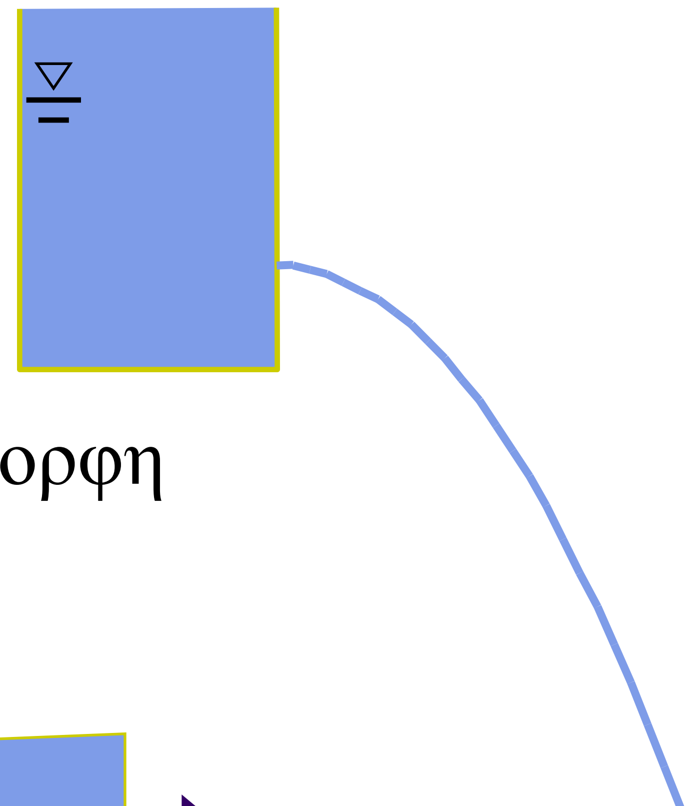
Μόνιμη και ασυμπίεστη

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow \overline{u_1} A_1 = \overline{u_2} A_2$$

$\bar{\rho}$: μέση πυκνότητα

Χωρικές – χρονικές ταξινομήσεις

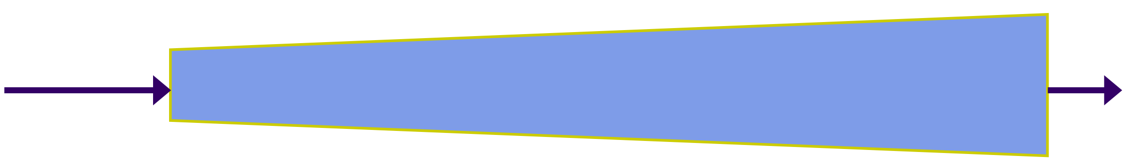
- Σταθερό – μη σταθερό



Χρονική μεταβολή

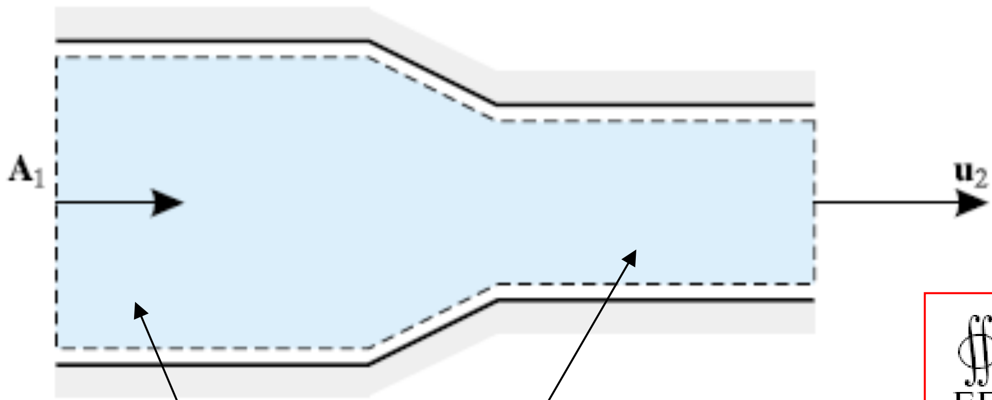
- Ομοιόμορφη – μη ομοιόμορφη

Χωρική μεταβολή



Σε ένα τμήμα κυκλικού αγωγού η διάμετρος ελαττώνεται από 10 cm σε 5 cm. Αν νερό εισέρχεται με ομοιόμορφη σταθερή ταχύτητα u_1=2 m/s στο άνοιγμα διαμέτρου 10 cm, να υπολογισθεί η ταχύτητα εξόδου του νερού.

Λύση



$$\boxed{\oiint_{E.E.} \varrho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{O.E.} \varrho dV = 0}$$

$$\oiint_{EE} \rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dA = 0 \Rightarrow \oiint_{A_1} -\rho_1 u_1 dA + \oiint_{A_2} \rho_2 u_2 dA = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_1\mathbf{u}_1 A_1 = \bar{\rho}_2\mathbf{u}_2 A_2$$

Θεωρούμε ως όγκο ελέγχου τον όγκο στο εσωτερικό του αγωγού όπως φαίνεται από την εστιγμένη γραμμή στο διπλανό Σχήμα.

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \;\Rightarrow\; u_2 = u_1\frac{A_1}{A_2} = u_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 2\text{ m/s}\times\left(\frac{10}{5}\right)^2 = 8\text{ m/s}$$

Νερό εισέρχεται και εξέρχεται από την συσκευή του Σχήματος σύμφωνα με τα δεδομένα που αναφέρονται στο Σχήμα. Να υπολογισθεί ο ρυθμός συσσώρευσης της μάζας του νερού στη συσκευή.

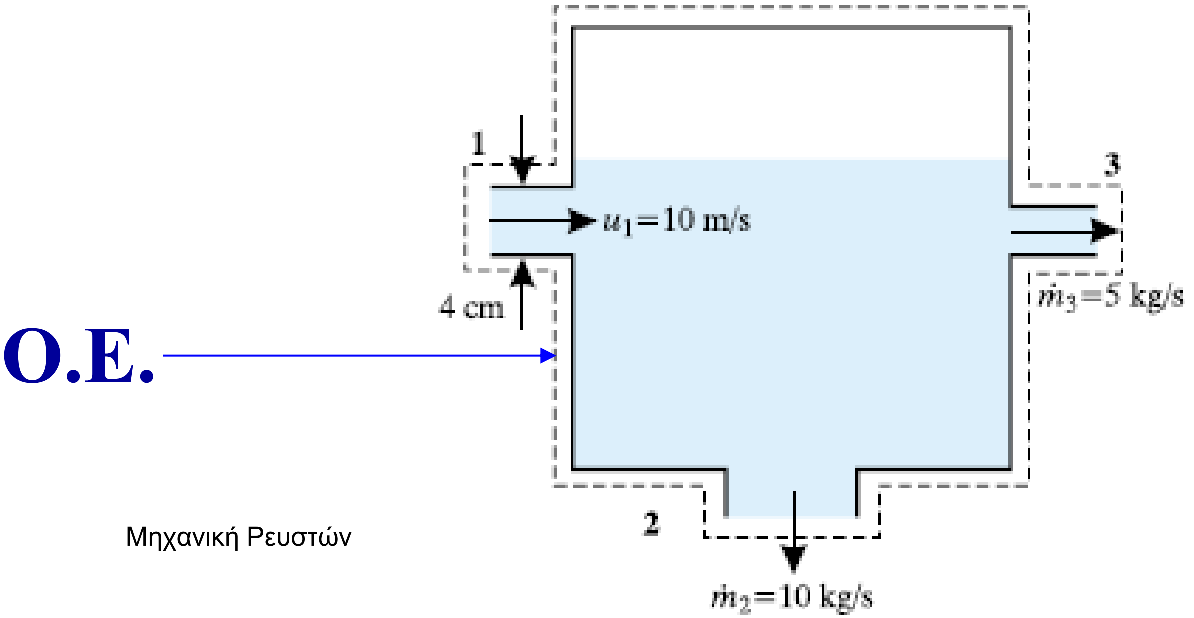
Λύση

$$\boxed{\oiint_{\text{E.E.}} \varrho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{O.E.}} \varrho\, dV = 0}$$

$$\iint_{A_1} \varrho_1(\mathbf{u_1}\cdot\mathbf{n_1})\,dA + \iint_{A_2} \varrho_2\,(\mathbf{u_2}\cdot\mathbf{n_2})\,dA + \iint_{A_3} \varrho_3\,(\mathbf{u_3}\cdot\mathbf{n_3})\,dA + \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow$$

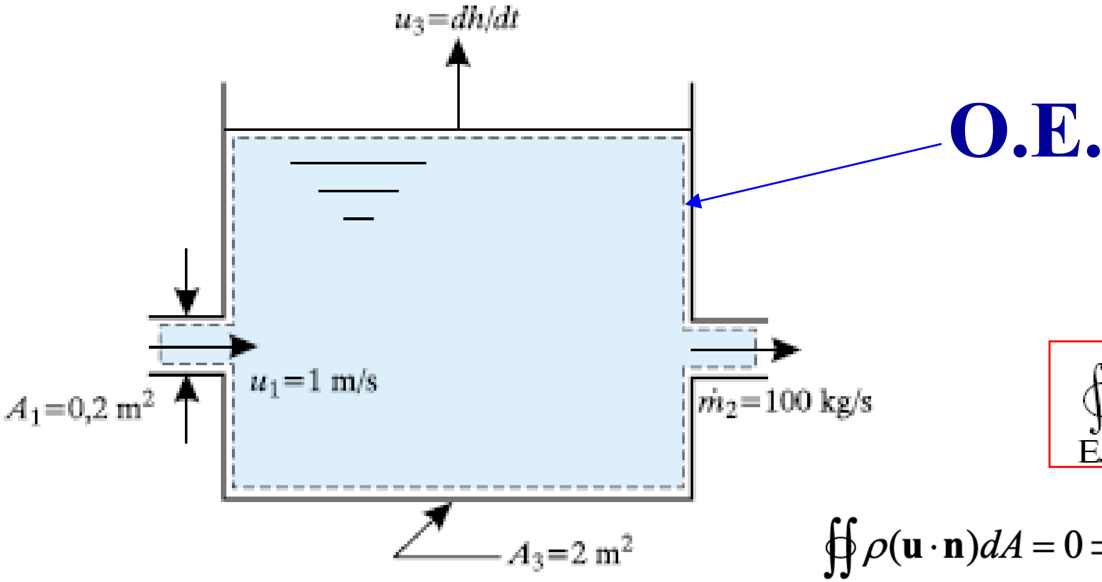
$$-\varrho u_1 A_1 + \varrho u_2 A_2 + \varrho u_3 A_3 + \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \; -\varrho u_1 A_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 + \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dm}{dt} = \varrho u_1 A_1 - \dot{m}_2 - \dot{m}_3 = -2{,}44 \text{ kg/s}$$



Νερό ρέει στο δοχείο του Σχήματος σύμφωνα με τα δεδομένα που αναγράφονται σε αυτό. Να υπολογισθεί ο ρυθμός ανόδου της στάθμης του νερού.

Λύση



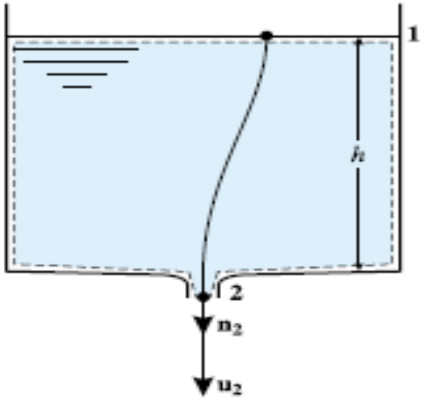
$$\boxed{\oint\!\!\oint_{E.E.} \varrho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{O.E.} \varrho dV = 0}$$

$$\oint\!\!\oint_{EE} \rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dA = 0 \Rightarrow \oint\!\!\oint_{A_1} -\rho_1 u_1 dA + \oint\!\!\oint_{A_2} \rho_2 u_2 dA = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_1 \mathbf{u}_1 A_1 = \bar{\rho}_2 \mathbf{u}_2 A_2$$

$$-\varrho u_1 A_1 + \varrho u_2 A_2 + \varrho u_3 A_3 = 0 \Rightarrow -\varrho\, u_1 A_1 + \dot{m}_2 + \varrho \frac{dh}{dt} A_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\varrho u_1 A_1 - \dot{m}_2}{\varrho A_3} = \frac{1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}2\ \text{m}^2 - 100\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}}{1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 2\text{m}^2} = 0{,}05\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Παράδειγμα 3.8 Μεταβλητός όγκος ελέγχου



Ανοιχτή δεξαμενή διατομής A φέρει υγρό πυκνότητας ρ και είναι γεμάτη μέχρι ύψος h. Να υπολογισθούν: (α) Η ταχύτητα ελεύθερης εκροής του υγρού από οπή εμβαδού S, που βρίσκεται στον πυθμένα της δεξαμενής, (β) Το ύψος της στάθμης του υγρού μετά από χρόνο t, (γ) Ο απαιτούμενος χρόνος για την εκκένωση της δεξαμενής.

Λύση

$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \sigma\tau\alpha\theta.$$

α) $\frac{1}{2}\rho \overset{\substack{u_1=0\\ \approx 0}}{\cancel{u_1^2}} + \rho g h + \overset{P_{atm}}{\cancel{P_1}} = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g \overset{h'=0}{\cancel{h'}} + \overset{P_{atm}}{\cancel{P_2}} \Rightarrow \cancel{\rho} g h = \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_2^2 \Rightarrow \boxed{u_2 = \sqrt{2gh}}$

Ίδια ταχύτητα με εκείνη που θα είχε αν έπεφτε από ύψος h $\boxed{\textbf{(Θεώρημα Toricelli)}}$

β) $$\iint_{EE} \rho(u_2 n_2)dA + \frac{\vartheta}{\vartheta t}\iiint_{OE} \rho dV = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho u_2 S + \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \rho S\sqrt{2gh} + \rho A\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}}dh = -\sqrt{2g}\frac{S}{A}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int h^{-1/2}dh = -\sqrt{2g}\frac{S}{A}\int dt \Rightarrow 2h^{1/2}\Big|_h^y = -\sqrt{2g}\frac{S}{A}t\Big|_0^t \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{h} = -\frac{S}{2A}\sqrt{2g}t$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{h} - \frac{S}{2A}\sqrt{2g}t \Rightarrow y = \left(\sqrt{h} - \frac{S}{2A}\sqrt{2g}t\right)^2$$

γ) $Η\ δεξαμενή\ αδειάζει\ όταν\ y = 0 \Rightarrow \sqrt{h} = \frac{S}{2A}\sqrt{2g}t \Rightarrow t = \frac{\sqrt{h}\cdot 2A}{S\sqrt{2g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{h}{2g}}\frac{2A}{S}$

Ο υψηλότερος πίδακας του κόσμου (Fountain Hills, Arizona) πετάει το νερό σε ύψος *170m* με ρυθμό *26* m^3/min.

1) Πόση είναι η ταχύτητα ροής στη βάση;
2) Σε ύψος *100m*;
3) Πόση είναι η ακτίνα της υδάτινης στήλης στη βάση/ σε ύψος *100m;*

<u>Υποθέσεις</u>: α) Ροή σταθερή, ασυμπίεστη.

β) Το νερό που πέφτει πίσω στο έδαφος δεν εμποδίζει το ανερχόμενο νερό.

γ) Αμελήστε τις τριβές.

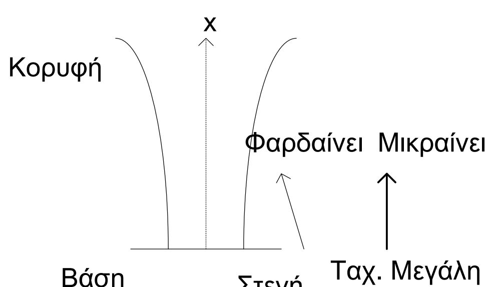
$$1)\ \frac{1}{2}mu_0^2 = mgh \Rightarrow u_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 170} \Rightarrow \boxed{u_0 = 58\,{}^{m}/_{s}}$$

$$2)\ \frac{1}{2}mu^2 + mgh = \frac{1}{2}mu_0^2 \Rightarrow u = \sqrt{u_0^2 - 2gh} = \sqrt{58^2 - 2\cdot 9{,}8\cdot 100} \Rightarrow \boxed{u = 37\,{}^{m}/_{s}}$$

$$3)\ Q = A_0 u_0 \Rightarrow 26\frac{m^3}{min} = \frac{26}{60}{m^3}/_{s} = A_0\cdot 58\,{}^{m}/_{s} \Rightarrow A_0 = 7{,}47\times 10^{-3}m^2 = \pi R_0^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow R_0 = 0{,}049m}$$

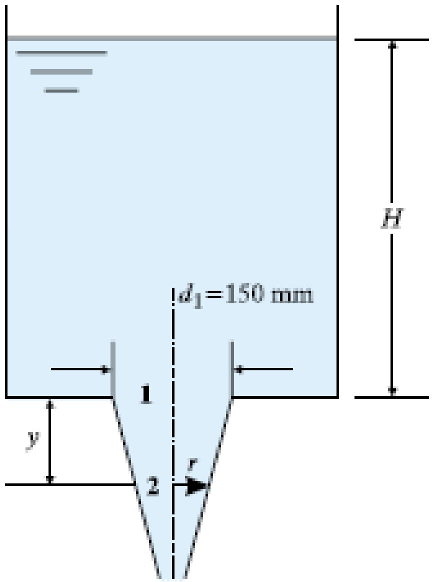
$$A_0u_0 = A_1u_1 \Rightarrow \pi R_0^2\cdot u_0 = \pi R_1^2\cdot u_1 \Rightarrow 0{,}049^2\cdot 58 = R_1^2\cdot 37 \Rightarrow \boxed{R_1 = 0{,}061m}$$



Το στένεμα μιας στήλης νερού όπως κατέρχεται φαίνεται καλύτερα σε μια βρύση που ρέει νερό

Αν αγνοήσετε τις απώλειες και τα φαινόμενα επιφανειακής τάσης, να υπολογίσετε την ακτίνα r του πίδακα του Σχήματος σε απόσταση y από το άνοιγμα στον πυθμένα. Στο δοχείο υπάρχει νερό σε σταθερό ύψος H και η διάμετρος της οπής είναι d_1.

Λύση



Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.8, η ταχύτητα εξόδου του νερού στη θέση (1) είναι $u_1=\sqrt{2}\,gH$.

Από την εξίσωση συνέχειας μεταξύ των θέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$S_1u_1 = S_2u_2 \Rightarrow S_2 = S_1\frac{u_1}{u_2} \Rightarrow r^2 = \frac{d_1^2\sqrt{2gH}}{4u_2} \Rightarrow r = \frac{d_1}{2}\frac{\sqrt[4]{2gH}}{\sqrt{u_2}}$$

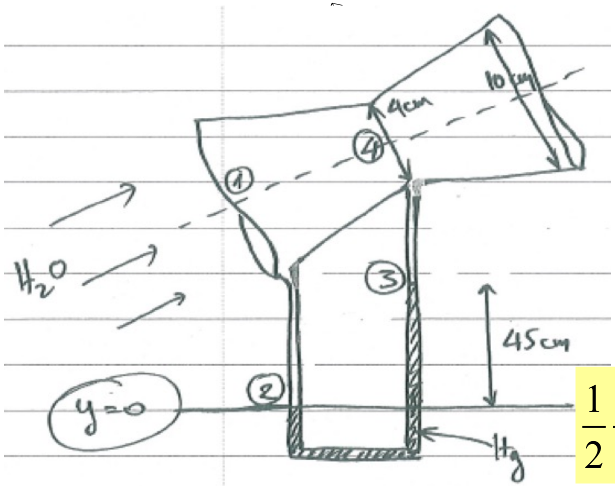
Εξάλλου, αν εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli, (3.34), μεταξύ των θέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g}+\frac{p}{\gamma}+h=\sigma\tau\alpha\theta.$$

$$yg + \frac{u_1^2}{2} = \frac{u_2^2}{2} \Rightarrow u_2 = \sqrt{2gy+u_1^2} = \sqrt{2g(y+H)}$$

Με συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων, λαμβάνουμε:

$$r = \frac{d_1}{2}\frac{\sqrt[4]{2gH}}{\sqrt[4]{2g\,(y+H)}} = \frac{d_1}{2}\sqrt{\frac{H}{y+H}}$$



Μετρητής ροής Venturi διαστάσεων που δίνονται στο Σχήμα χρησιμοποιείται για τη μέτρηση παροχής H_2O

$\gamma = 1.000 \ kp/m^3$

$\gamma_{Hg} = 13.600 \ kp/m^3$

Να υπολογιστεί η παροχή

$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Σχέση Bernoulli: $\dfrac{P_1}{\gamma} + y_1 + \dfrac{u_1^2}{2g} = \dfrac{P_4}{\gamma} + y_4 + \dfrac{u_4^2}{2g} \Rightarrow \boxed{\dfrac{u_4^2 - u_1^2}{2g} = \dfrac{P_1 - P_4}{\gamma} + y_1 - y_4}$ (1)

$$P_1 - P_2 = -\rho g(y_1 - y_2) = -\gamma(y_1 - y_2)$$

$$P_2 - P_3 = -\rho g(y_2 - y_3) = -\gamma_{Hg}(y_2 - y_3)$$

$$P_3 - P_4 = -\rho g(y_3 - y_4) = -\gamma(y_3 - y_4)$$

$$P_1 - P_4 = -\gamma y_1 + \cancel{\gamma y_2} - \cancel{\gamma_{Hg} y_2} + \gamma_{Hg} y_3 - \gamma y_3 + \gamma y_4 \Rightarrow \frac{P_1 - P_4}{\gamma} = y_4 - y_1 - y_3 + \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} y_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_1 - P_4}{\gamma} = (y_4 - y_1) + (5{,}67)} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{u_4^2 - u_1^2}{2g} = y_4 - y_1 + 5{,}67 + y_1 - y_4 = 5{,}67$$

$$Q = u_1 A_1 \Rightarrow u_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi \cdot (0{,}05)^2}$$

$$Q = u_4 A_4 \Rightarrow u_4 = \frac{Q}{A_4} = \frac{Q}{\pi \cdot (0{,}02)^2}$$

$$\frac{\dfrac{Q^2}{\pi^2 (0{,}02)^4} - \dfrac{Q^2}{\pi^2 (0{,}05)^4}}{2g} = 5{,}67$$

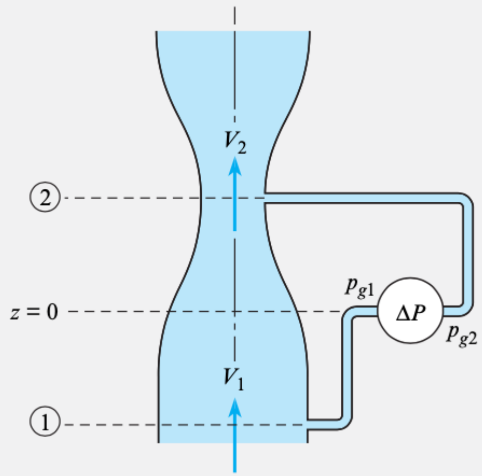
$$\boxed{Q = 1{,}34 \times 10^{-2} \ m^3/s}$$

EXAMPLE 5.9

Applying the Bernoulli and Continuity Equations to Flow through a Venturi

Problem Statement

Water with a density of 1000 kg/m^3 flows through a vertical venturimeter as shown. A pressure gage is connected across two taps in the pipe (station 1) and the throat (station 2). The area ratio $A_{\text{throat}}/A_{\text{pipe}}$ is 0.5. The velocity in the pipe is 10 m/s. Find the pressure difference recorded by the pressure gage. Assume the flow has a uniform velocity distribution and that viscous effects are not important.



Define the Situation

Water flows in venturimeter. Area ratio = 0.5. $V_1 = 10$ m/s.

Assumptions:

1. Velocity distribution is uniform.
2. Viscous effects are unimportant.

Properties: $\rho = 1000$ kg/m^3.

State the Goal

Find: Pressure difference measured by gage.

Generate Ideas and Make a Plan

1. Because viscous effects are unimportant, apply the Bernoulli equation between stations 1 and 2.
2. Combine the continuity equation (5.33) with the results of step 1.
3. Find the pressure on the gage by applying the hydrostatic equation.

Take Action (Execute the Plan)

$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g}+\frac{p}{\gamma}+h=\sigma\tau\alpha\theta.$$

1. The Bernoulli equation:

$$p_1 + \gamma z_1 + \rho\frac{V_1^2}{2} = p_2 + \gamma z_2 + \rho\frac{V_2^2}{2}$$

Rewrite the equation in terms of piezometric pressure:

$$p_{z_1} - p_{z_2} = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$
$$= \frac{\rho V_1^2}{2}\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right)$$

2. Continuity equation $V_2/V_1 = A_1/A_2$:

$$p_{z_1} - p_{z_2} = \frac{\rho V_1^2}{2}\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$$
$$= \frac{1000\ \text{kg/m}^3}{2} \times (10\ \text{m/s})^2 \times (2^2 - 1)$$
$$= 150\ \text{kPa}$$

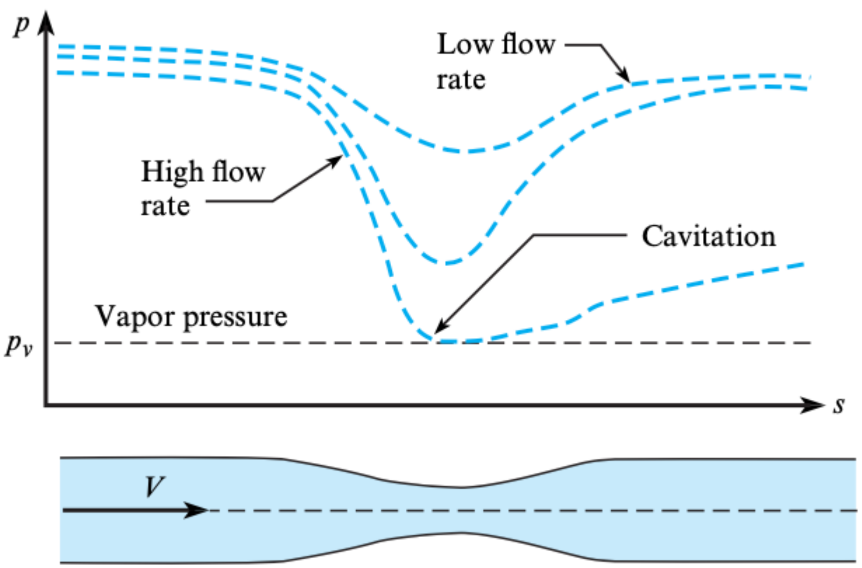
3. Apply the hydrostatic equation between the gage attachment point where the pressure is p_{g_1} and station 1, where the gage line is tapped into the pipe:

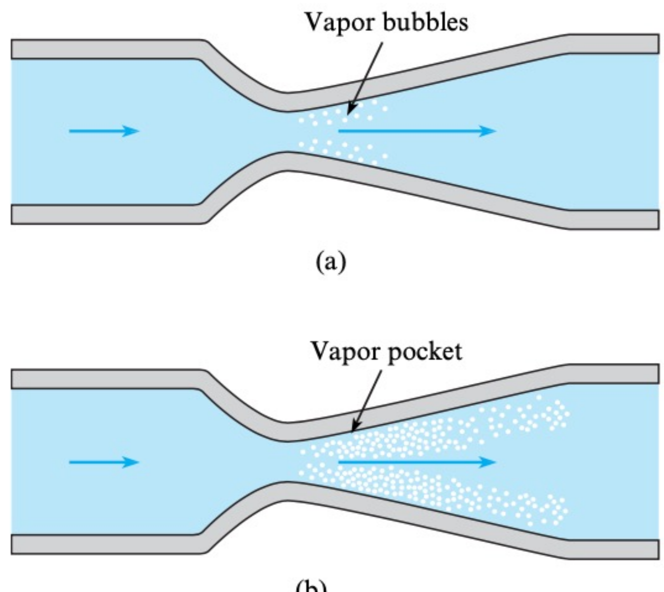
$$p_{z_1} = p_{g_1}$$

Also, $p_{z_2} = p_{g_2}$, so

$$\Delta p_{\text{gage}} = p_{g_1} - p_{g_2} = p_{z_1} - p_{z_2} = \boxed{150\ \text{kPa}}$$

Προβλέποντας τη σπηλαίωση





Αρχή διατήρησης της …

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} \rho \, dV + \int_{EE} \rho \, \bar{u} d\bar{A}$$

Αρχή Διατήρησης της Μάζας

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός αυξήσεως} \\ \text{της ιδιότητας N} \\ \text{του συστήματος} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός αυξήσεως} \\ \text{της N} \\ \text{μέσα στον ΟΕ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός συνολικής} \\ \text{εκροής της N} \\ \text{δια της ΕΕ} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} n\rho dV + \int_{EE} n\rho\bar{u} d\bar{A}$$

N: ιδιότητα

n: τιμή του N ανά μονάδα μάζας

$$\Sigma F = \frac{d(mu)}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} \rho(\boldsymbol{un}) dV + \int_{EE} \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{un}) dA$$

Αρχή Διατήρησης της Ορμής

Αρχή διατήρησης της ορμής

<u>Αρχή Διατήρησης της Ορμής</u>

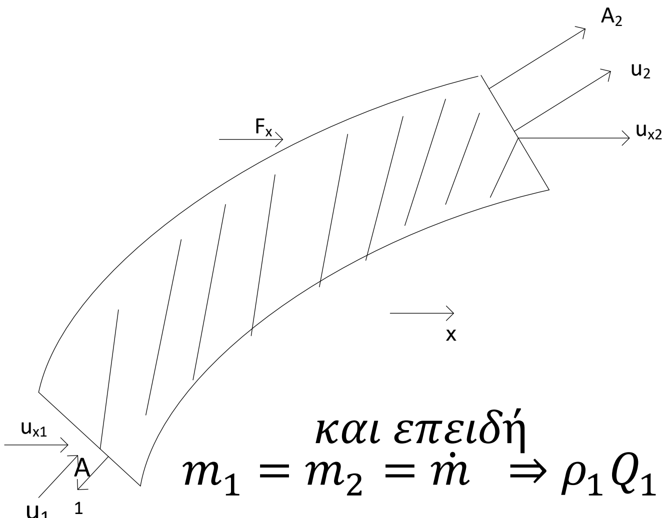
Για μόνιμη ροή

0

$$\Sigma F = \frac{d(mu)}{dt} = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE}\rho(\bar{u}\cdot\bar{n})dV + \int_{EE}\rho\bar{u}(\bar{u}\cdot\bar{n})dA$$

Η ανυσματική αυτή σχέση μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε συνιστώσα

$$\begin{pmatrix}\text{Η συνισταμένη δύναμη}\\ \text{σε έναν όγκο ελέγχου}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Με τον ρυθμό αύξησης της}\\ \text{γραμμικής ορμής}\\ \text{στον όγκο ελέγχου}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{τη συνολική εκροή}\\ \text{της γραμμικής ροής}\\ \text{από την επιφάνεια ελέγχου}\end{pmatrix}$$



0 για μόνιμη ροή

$$\Sigma F_x = \frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE}\rho u_x dV + \int_{EE}\rho u_x \vec{u}\vec{n}dA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = \rho_1 u_{x1}(-u_1)A_1 + \rho_2 u_{x2} u_2 A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = \rho_2 A_2 u_2 u_{x2} - \rho_1 A_1 u_1 u_{x1} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \text{και επειδή} \\ m_1 = m_2 = \dot{m} \Rightarrow \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \rho Q \\ \Rightarrow \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} F_x = \rho Q(u_{x2} - u_{x1}) \\ F_y = \cdots \\ F_z = \cdots \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Sigma F = \rho Q(u_2 - u_1) \\ \Sigma F = \dot{m}(u_2 - u_1) \end{matrix}$$

Αρχή διατήρησης της ορμής

Εάν η ροή δεν είναι ομοιόμορφη στις διατομές εισόδου και εξόδου, η τελευταία εξίσωση (3.61) μπορεί να χρησιμοποιηθεί προσεγγιστικά εάν οι ταχύτητες στην εξίσωση παριστούν *μέσες ταχύτητες* του ρευστού στις αντίστοιχες διατομές. Η μέση ταχύτητα σε μία διατομή ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \iint_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

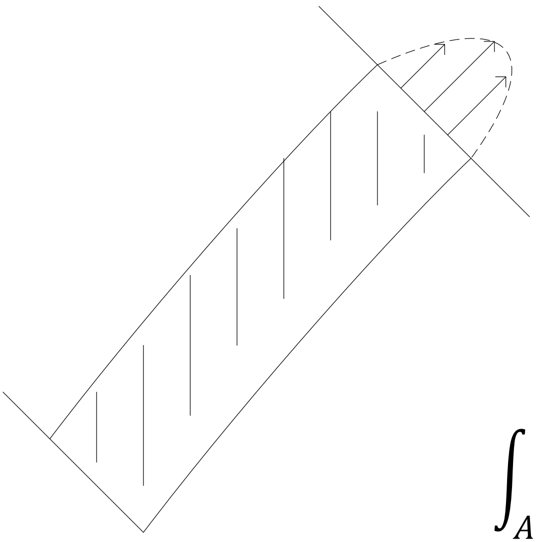
Ανάλογα με την μορφή που έχει η κατανομή ταχυτήτων, η προσέγγιση αυτή μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα. Για να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα σ' αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε το **συντελεστή διόρθωσης ορμής**, β, που ορίζεται από τη σχέση

$$\beta = \frac{1}{\bar{u}^2 A} \iint_A u^2 dA$$

όπου $\bar{u}$ είναι η μέση ταχύτητα του ρευστού στη διατομή A. Ο συντελεστής διόρθωσης ορμής για στρωτή ροή σε κυκλικό αγωγό είναι 4/3, ενώ για τυρβώδη ροή λαμβάνεται 1 και γενικά είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Με την εισαγωγή του συντελεστού διόρθωσης ορμής η εξίσωση (3.61) γίνεται

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m}\, (\beta_2\, \mathbf{u}_2 - \beta_1\, \mathbf{u}_1) \qquad (3.63)$$

Αρχή διατήρησης της ορμής



Όταν η ταχύτητα σε μια διατομή μεταβάλλεται → μπορεί να χρησιμοποιηθεί η <u>Μέση Ταχύτητα</u> με την εισαγωγή ενός συντελεστή διορθώσεως της ορμής β

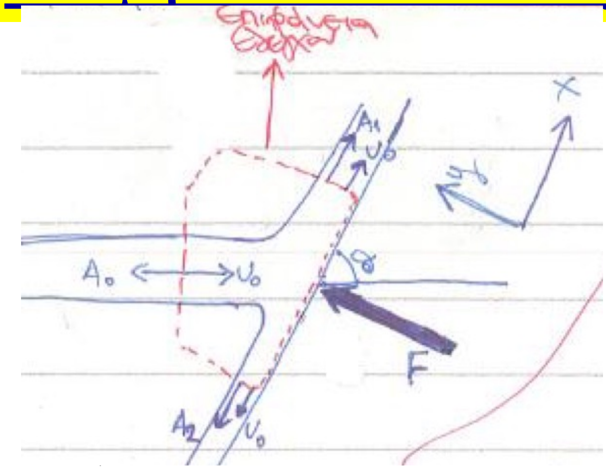
$$\int_A \rho u v^2 dA = \beta \rho u_\mu^2 A \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{u}{u_\mu}\right)^2 dA}$$

πάντα ≥1

$$\beta = \frac{4}{3}\left(\begin{matrix}\text{για στρωτή ροή}\\ \text{σε κυκλικό αγωγό}\end{matrix}\right) \qquad \beta = 1\left(\begin{matrix}\text{για}\\ \text{τυρβώδη ροή}\end{matrix}\right)$$

Δύναμη που ασκεί πίδακας σε ακίνητη πλάκα

$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g}+\frac{p}{\gamma}+h=\sigma\tau\alpha\theta.$$



$$\frac{P_0}{\rho}+\frac{1}{2}u_0^2=\frac{P_1}{\rho}+\frac{1}{2}u_1^2 \Rightarrow u_0=u_1$$

$$\frac{P_0}{\rho}+\frac{1}{2}u_0^2=\frac{P_2}{\rho}+\frac{1}{2}u_2^2 \Rightarrow u_0=u_2$$

$$\boxed{Q_0=Q_1+Q_2} \Rightarrow \rho u_0 A_0=\rho u_0 A_1+\rho u_0 A_2 \Rightarrow \boxed{A_0=A_1+A_2}$$

$$\Sigma F_x=\int_{EE}\rho u_x(\vec{u}\vec{n})dA=(\rho \cancelto{A_1}{u_0} u_0 A_1)+(\rho(-u_0)\cancelto{A_2}{u_0} A_2)+(\rho \cancelto{A_0}{u_0} cos\theta(-u_0)A_0)=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \rho u_0 A_0 cos\theta=\rho u_0 A_1-\rho u_0 A_2 \Rightarrow Q_0 cos\theta=Q_1-Q_2\\ &Q_0=Q_1+Q_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Ρευστό εκρέει από μια σχισμή και προσκρούει σε λεία κεκλιμένη πλάκα.

Πως διαχωρίζεται η ροή; (παροχετευτικά)

Ποια δύναμη ασκείται στην πλάκα;

$$\boxed{Q_1=\frac{Q_0}{2}(1+cos\theta)}$$

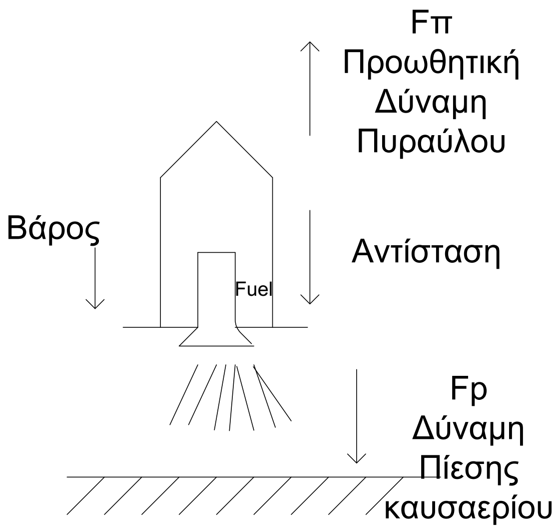
$$\boxed{Q_2=\frac{Q_0}{2}(1-cos\theta)}$$

Η δύναμη που ασκείται στην πλάκα θα είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη στήριξης F.

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F+\int_{EE}\rho\, u_y\vec{u}\vec{n}dA=0 \Rightarrow F+\rho(-u_0 sin\theta)(-u_0)A_0=0 \Rightarrow F+\rho u_0 A_0 u_0 sin\theta=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F=-\rho Q_0 u_0 sin\theta} \quad \text{ή} \quad \boxed{F=-\dot{m}u_0 sin\theta}$$

Το (-) δείχνει ότι είναι αντίθετης φοράς από την F



Οι δυνάμεις που τείνουν να **<u>ανεβάσουν</u>** τον πύραυλο είναι:

1) Η αντίδραση της δύναμης πίεσης των καυσαερίων

$$\boxed{F_P = (P_a - P_0)A_0}$$

→ Εμβαδόν Βάσης

πίεση καυσαερίων - ατμοσφαιρική πίεση = μανομετρική πίεση των καυσαερίων

2) Η αντίδραση της ορμής των καυσαερίων

$$\boxed{F_{\text{ορμής}} = \frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}(u_a - u) = \dot{m}u_{\sigma\chi\varepsilon\tau}.}$$

ρυθμός εξόδου καυσαερίων

ταχύτητα εξόδου καυσαερίων

ταχύτητα πυραύλου

Οι δυνάμεις που τείνουν να τον **<u>κατεβάσουν</u>** είναι:

1) το Βάρος $B = M \cdot g$

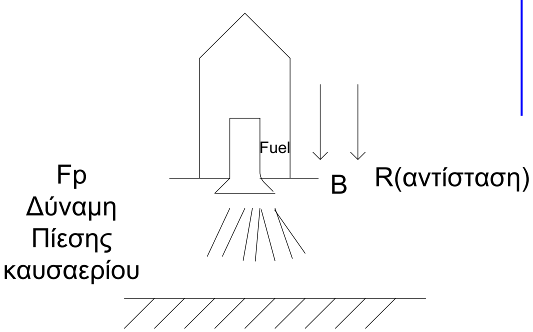
2) η Αντίσταση R

ΑΡΑ

$$\Sigma F_x = F_\Pi = (P_a - P_0)A_0 + \dot{m}u_{\sigma\chi\varepsilon\tau.} - Mg - R$$

$$(M = M_0 - \dot{m}t)$$

<u>Προωθητική Δύναμη Πυραύλου</u>



F_Π (Προωθητική Δύναμη)

Η αρχική προωθητική δύναμη είναι αριθμητικά ίση με μια εξωτερική δύναμη F_Π που πρέπει να ασκείται στον πύραυλο για να αιωρείται ακίνητος

μανομετρική πίεση των καυσαερίων

$$F_P = (P_a - P_0)A_0$$

Πίεση καυσαερίου

Ατμοσφαιρική

Εμβαδόν Βάσης

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } u_a \text{ η ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων} \\ u \text{ η ταχύτητα του πυραύλου} \\ \dot{m} \text{ ρυθμός εξόδου των καυσαερίων} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$F_{ορμής} = \frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}(u_a - u) = \dot{m}u_{σχετ}$$

<u>Από αθροίσεις δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα</u>

$$F_{ορμής} = F_\pi - F_P \Rightarrow F_\pi = F_{ορμής} + F_P \longrightarrow F_\pi = (P_a - P_0)A_0 + \dot{m}u_{σχετ} - Mg - R$$

Μάζα πυραύλων

$$όπου\ \boxed{M = M_0 - \dot{m}t}$$

Οι δυνάμεις που τείνουν να ανεβάσουν τον πύραυλο είναι:

1. Η αντίδραση της δύναμης πίεσης των καυσαερίων με μέτρο F_p
2. Η αντίδραση της ορμής των καυσαερίων με μέτρο $F_{ορμής}$

Να τον κατεβάσουν είναι το βάρος του B=Mg και η αντίσταση του αέρα R

μπορούμε να λάβουμε υπόψη και την αντίσταση R

Πύραυλος αρχικής μάζας M_o=400 kg, εκλύει καυσαέρια με ρυθμό $\dot{m}$=8 kg/s τα οποία εξέρχονται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον πύραυλο $(u_a)_{σχ.}$=700 m/s. Εάν η μανομετρική πίεση των καυσαερίων είναι αμελητέα, να υπολογισθούν: (α) Η αρχική επιτάχυνση του πυραύλου. (β) Η επιτάχυνσή του μετά 5 sec. (γ) Η ταχύτητά του μετά 10 sec.

Λύση

$$\Sigma F_x = F_{\Pi} = (P_a - P_0)A_0 + \dot{m}u_{σχετ.} - Mg - R$$

α. Εφαρμογή της εξίσωσης (3.72) στην προκειμένη περίπτωση δίδει

$$F_\pi = \dot{m}\,(u_a)_{σχ.} - B \text{ ή } M_o a_o = \dot{m}\,(u_a)_{σχ.} - M_o g$$

όπου a_o είναι η αρχική επιτάχυνση του πυραύλου. Επίλυση και αριθμητική αντικατάσταση στην τελευταία εξίσωση δίδει:

$$a_o = \frac{8\text{ kg/s} \times 700\text{ m/s} - 400\text{ kg} \times 9{,}81\text{ m/s}^2}{400\text{ kg}} = 4{,}19\text{ m/s}^2$$

β. Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση μετά 5 sec χρησιμοποιούμε τη σχέση

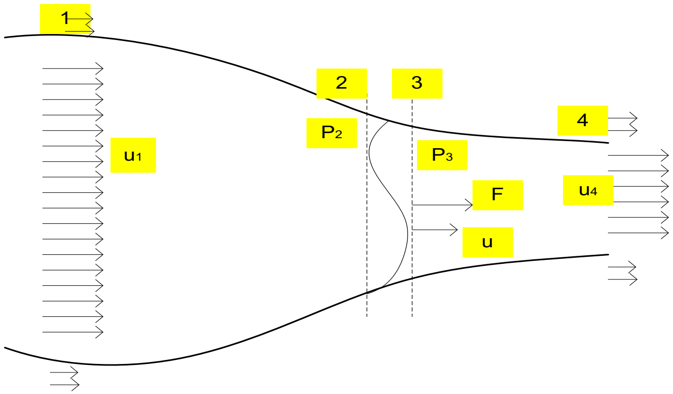
$$(M_o - \dot{m}\,t)\,a_o = \dot{m}\,(u_a)_{σχ.} - (M_o - \dot{m}t)\,g \Rightarrow a_o = \frac{\dot{m}\,(u_a)_{σχ.}}{M_o - \dot{m}t} - g = 5{,}75\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ. Για τον υπολογισμό της ταχύτητας χρησιμοποιούμε την σχέση α=du/dt και έχουμε

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{(u_a)_{σχ.}}{M_o/\dot{m} - t} - g \Rightarrow \int_0^u du = \int_0^{10} \frac{(u_a)_{σχ.}}{M_o/\dot{m} - t}\,dt - \int_0^{10} g dt \Rightarrow$$

$$u = \left[700 \ln(50 - t) - 9{,}81t\right]_0^{10} = 700 \ln 40 - 98{,}1 + 700 \ln 50 = 5222\text{ m/s}$$

Η εξίσωση της ορμής για τη λειτουργία της έλικας



Η έλικα μεταβάλλει την ορμή του ρευστού που είναι βυθισμένη και έτσι αναπτύσσεται ώθηση που χρησιμεύει για την πρόωση.

(1) έλικα σταθερή σε ρέον ρευστό
(2) έλικα κινούμενη με ταχύτητα u_1

Σχετική κίνηση <u>ΙΔΙΑ</u> και στις 2 περιπτώσεις

⇒

- Η ροή στη διατομή (1) δεν επηρεάζεται από την έλικα
- Η ορμή του ρευστού αυξάνει καθώς περνά από την έλικα ⇒ αύξηση ταχύτητας
  ⇒ μείωση της διατομής (εξίσωση συνέχειας)
- Η ταχύτητα δεν μεταβάλλεται μεταξύ (2) και (3)
- Η πίεση στο (1) και (4) είναι αυτή του αδιατάραχτου ρευστού

Η αντίδραση της οποίας κινεί την έλικα και το προσδεδεμένο σώμα (αεροπλάνο) κατά την αντίθετη φορά

Εξίσωση ορμής $\Sigma F = \cancelto{0}{\frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{OE} \rho u\, dV} + \int_{EE} \rho u \bar{u}\, dA$

- F: δύναμη που ασκείται από την έλικα στο ρευστό
- Πίεση αμετάβλητη στην επιφ. ελέγχου

$P_1 = P_4 = P_{atm}$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow F &= \rho u_1(-u_1)A_1 + \rho u_4(u_4)A_4 \\ \rho u_1 A_1 &= \rho u_4 A_4 \\ \rho Q_1 &= \rho Q_4 = \rho Q \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &F = \rho Q(u_4 - u_1) \\ &Επίσης\ F = (P_3 - P_2)A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \rho Q(u_4 - u_1) = (P_3 - P_2)A$$

Εμβαδόν έλικας

$$Q = A \cdot u$$

$$\Rightarrow \rho \cdot A \cdot u(u_4 - u_1) = (P_3 - P_2)A \quad \Rightarrow \boxed{\rho \cdot u(u_4 - u_1) = P_3 - P_2} \quad (1)$$

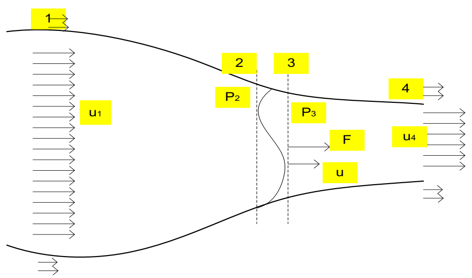
Εξισώσεις Bernoulli | Διατομή 1 – 2, Διατομή 3 – 4

$$\left.\begin{aligned} P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 &= P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \\ P_3 + \frac{1}{2}\rho u_3^2 &= P_4 + \frac{1}{2}\rho u_4^2 \end{aligned}\right] \quad P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + P_3 + \frac{1}{2}\rho u_3^2 = $$

$$= P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + P_4 + \frac{1}{2}\rho u_4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_3 - P_2 = \rho(u_4^2 - u_1^2)\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_3 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(u_4 - u_1)(u_4 + u_1)} \quad (2)$$



$$(1),(2) \Rightarrow \cancel{\rho} u(\cancel{u_4} - \cancel{u_1}) = \frac{1}{2}\cancel{\rho}(\cancel{u_4} - \cancel{u_1})(u_4 + u_1) \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_4}{2}}$$

Θεώρημα Froude

Η ταχύτητα στην έλικα είναι ο Μ.Ο. των ταχυτήτων πριν και μετά

Λόγω συμπιεστότητας η απόδοση της έλικας μειώνεται σε υ > 600 km/hr

$$\boxed{\text{Αποδιδόμενο έργο ανά μονάδα χρόνου}} = \begin{pmatrix}\text{ώθηση}\\ \text{της}\\ \text{έλικας}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{ταχύτητα}\\ \text{της}\\ \text{έλικας}\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{Ισχύς} = F u_1 = \rho Q(u_4 - u_1)u_1}$$

Συνήθης απόδοση: 80–85%
Έλικας πλοίων: ~60% λόγω περιορισμών στη διάμετρο

Μεταβολή κινητικής ενέργειας ανά μονάδα χρόνου

$$\boxed{\text{Απορροφούμενη Ισχύς}} = \frac{1}{2}\rho Q(u_4^2 - u_1^2) = \rho Q(u_4 - u_1)u_1 + \frac{1}{2}\rho Q(u_4 - u_1)^2$$

που απαιτείται για την αύξηση της ταχύτητας από υ_1 σε υ_4

ή

το αποδιδόμενο έργο συν την κινητική ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που παραμένει στη δέσμη

$$n_{έλικας} = \frac{\rho Q(u_4 - u_1)u_1}{\rho Q(u_4 - u_1)u_1 + \frac{1}{2}\rho Q(u_4 - u_1)^2} = \frac{u_1}{u_1 + \frac{1}{2}(u_4 - u_1)} = \frac{2u_1}{u_4 + u_1} = \boxed{\frac{u_1}{u}}$$

$$\text{Αν } \Delta u = u_4 - u_1 \Rightarrow n = \frac{u_1}{u_1 + \frac{\Delta u}{2}}$$

δηλαδή ο μέγιστος βαθμός απόδοσης επιτυγχάνεται με μια έλικα που αυξάνει την ταχύτητα της δέσμης κατά το ελάχιστο δυνατό

Ένα αεροπλάνο πετά με ταχύτητα 400 km/hr σε ήρεμο αέρα ($\gamma = 12\ N/m^3$), και η εκροή αέρα από τις δυο έλικές του διαμέτρου 2,25 m είναι 1.000 m^3/s. Να βρεθούν:

1) Ο θεωρητικός βαθμός απόδοσης
2) Η ώθηση
3) Η διαφορά πιέσεως δια μέσω των ελίκων
4) Η απαιτούμενη θεωρητική ισχύς

Λύση

1) $u_1 = 400 \frac{km}{h} \frac{1000\,m}{1\ km} \frac{1\,h}{3600\,s} = 111\, {}^{m}/_{s}$

Παροχή αέρα$/_{\text{έλικα}} = 500\, {}^{m^3}/_{s} \Rightarrow u = \frac{Q}{A} = \frac{500\, {}^{m^3}/_{s}}{\frac{\pi}{4}(2{,}25)^2} \Rightarrow u = 126\, {}^{m}/_{s}$

$n_{\varepsilon\lambda\iota\kappa.} = \frac{u_1}{u} = \frac{111}{126} = 88\%$

2) Η ώθηση που δημιουργείται από τις έλικες είναι: $F = \rho Q(u_4 - u_1) = (P_3 - P_2)A$

Επειδή $u = \frac{u_1 + u_4}{2} \Rightarrow u_4 = 2u - u_1 \Rightarrow v_4 = 2 \times 126 - 111 = 141\, {}^{m}/_{s}$

Άρα $F = \rho Q(u_4 - u_1) = \frac{12\, {}^{N}/_{m^3}}{9{,}8\, {}^{m}/_{s^2}}(1000\, {}^{m3}/_{s})(141 - 111)\, {}^{m}/_{s} = 36.500N$

3) Η διαφορά πιέσεως είναι: $F = \rho Q(u_4 - u_1) = (P_3 - P_2)A \Rightarrow P_3 - P_2 = \rho \frac{Q}{A}(u_4 - u_1) = \rho u(u_4 - u_1)$

$P_3 - P_2 = \frac{12\, {}^{N}/_{m^3}}{9{,}8\, {}^{m}/_{s^2}}(126\, {}^{m}/_{s})(141 - 111)\, {}^{m}/_{s} = 4.600\, {}^{N}/_{m^2}$

4) $\left.\begin{array}{l} \text{Ισχύς} = Fu_1 = \rho Q(u_4 - u_1)u_1 \\ \text{Απόδοση} = 88\% \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Θεωρητική Ισχύς} = \frac{\text{Ισχύς}}{\text{Απόδοση}} = \frac{Fu_1}{n} = \frac{36.500N \cdot 111\, {}^{m}/_{s}}{0{,}88} =$

$= 4.603.977W = 4.604kW$