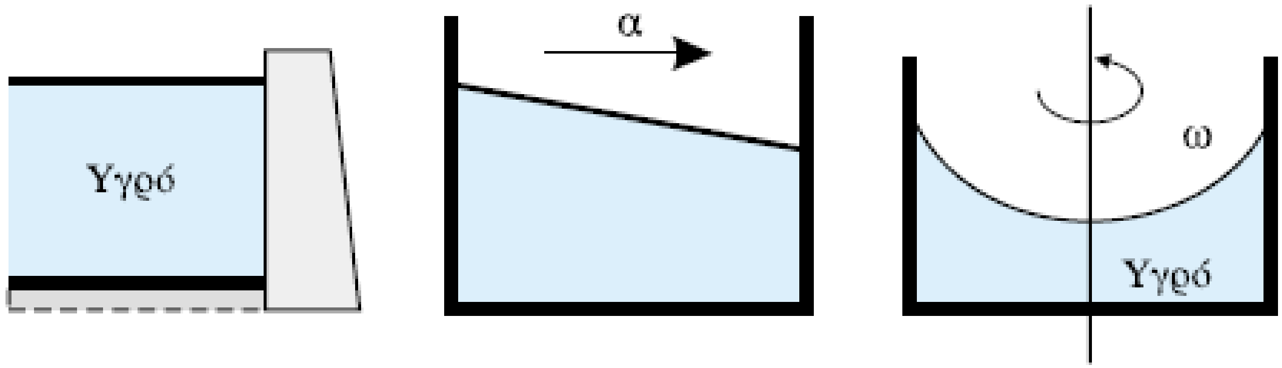
Στατική των Ρευστών (2)

Στατική των Ρευστών



α. Υγρό σε ισορροπία

β. Υγρό που κινείται με επιτάχυνση

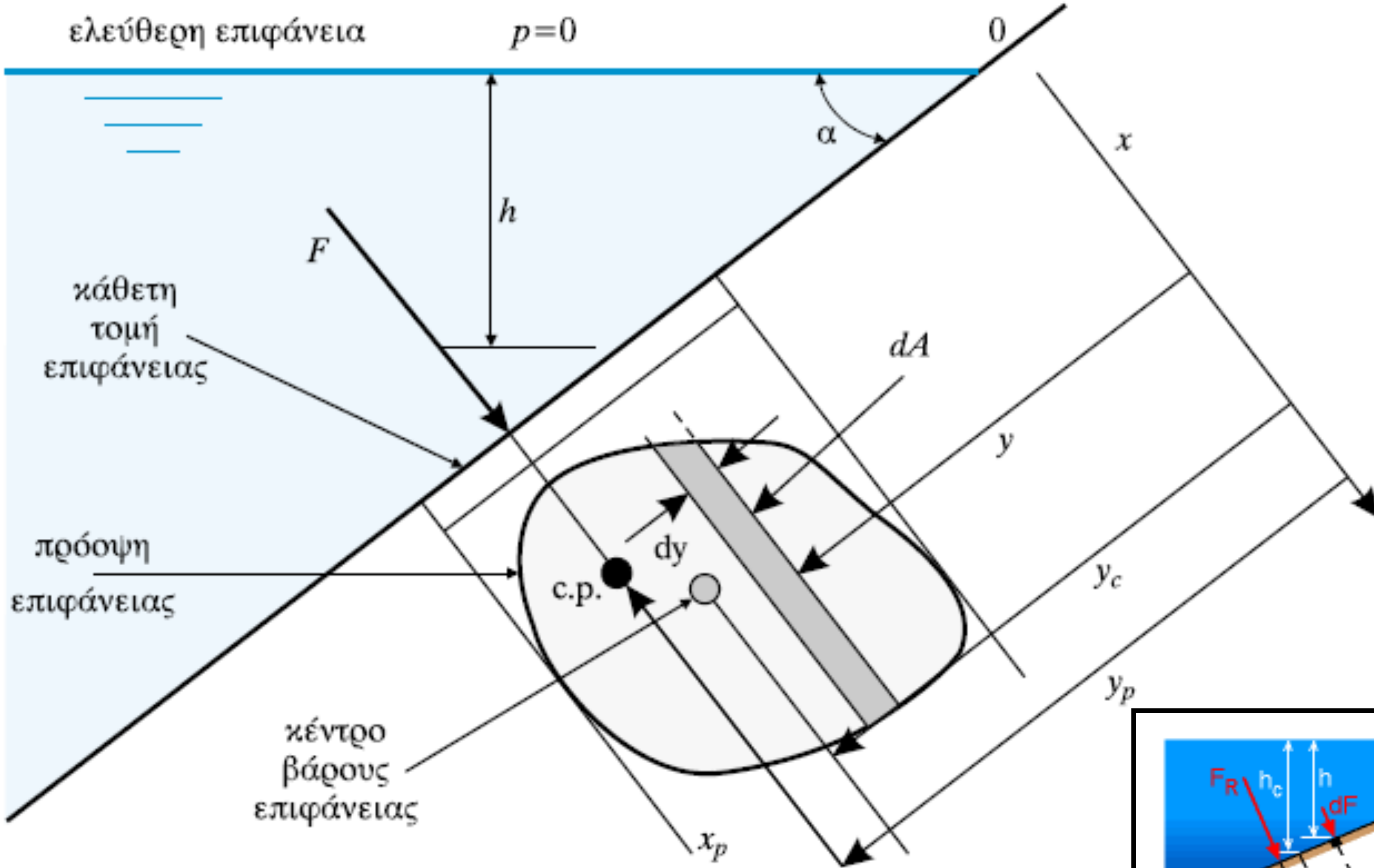
γ. Υγρό που περιστρέφεται

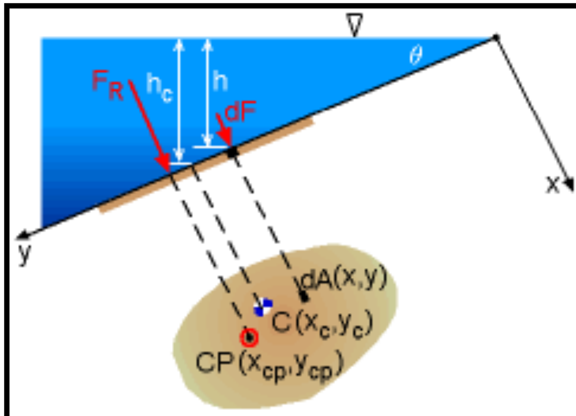
Ρευστά σε ισορροπία → Όχι σχετική κίνηση του ενός μορίου του ρευστού ως προς κάποιο άλλο

→ Διατμητική τάση (τ) = 0 → $\Delta F_s = 0$ → μόνο $\Delta F_n \neq 0$ (κάθετη δύναμη)

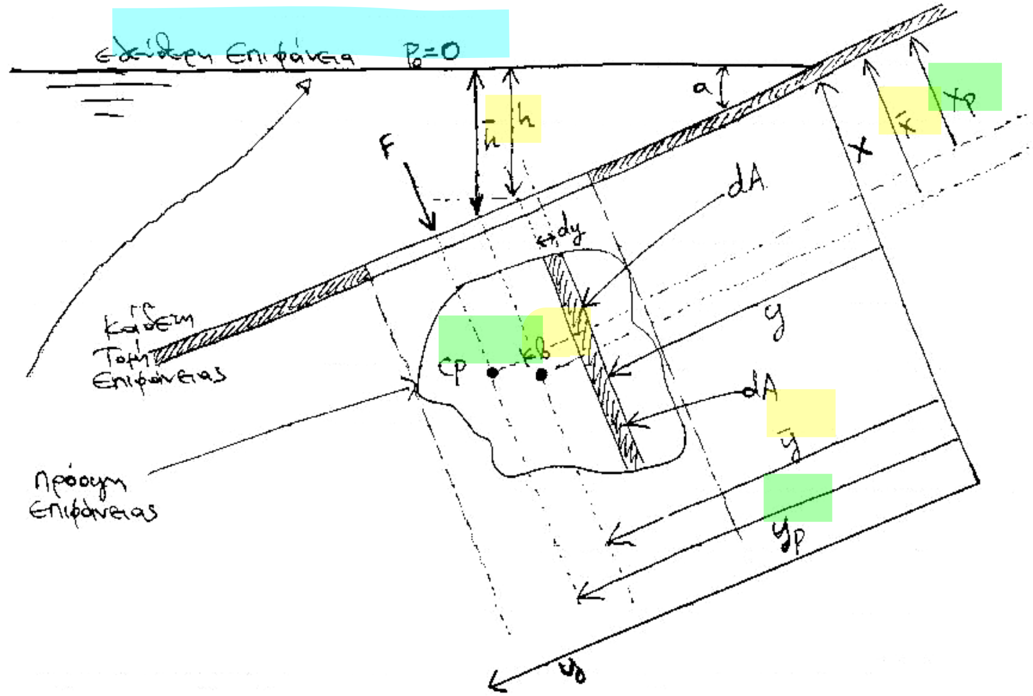
→ Ταχύτητα διάτμησης $du(\psi) / d\psi = 0$

Δυνάμεις σε επίπεδη επιφάνεια μέσα σε ρευστό





Δυνάμεις σε επίπεδη επιφάνεια μέσα σε ρευστό



- Η στοιχειώδης δύναμη dF σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA : $dF = p \cdot dA$
- Η συνολική δύναμη του υγρού προκύπτει από την άθροιση : $F = \int_A p \cdot dA$ (1)
- Αν στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού είναι $p_o = 0$ τότε $p = \gamma \cdot h = \gamma \cdot y \cdot \text{sina}$ (2)

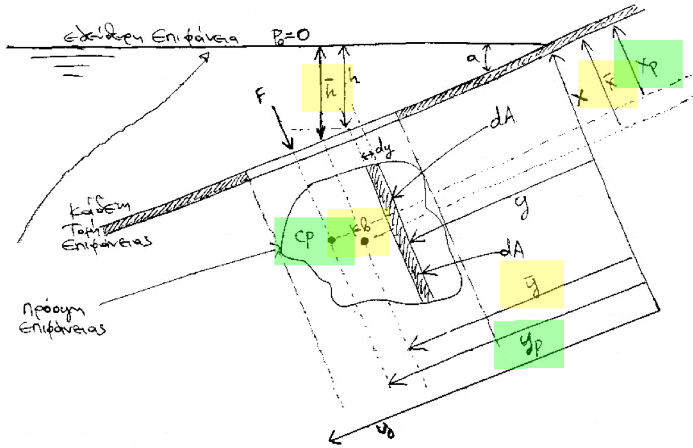
$$\{ (1),(2) \} \Rightarrow F = \gamma \cdot \text{sina} \int_A y \cdot dA \;,\quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y \cdot dA \;\Big\}\Rightarrow F = \gamma \cdot \bar{y} \cdot A \cdot \text{sina} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \gamma \cdot \bar{h} \cdot A \Rightarrow F = p_{\kappa\beta} \cdot A}$$

F = Δύναμη που ασκεί ρευστό σε επιφάνεια βυθισμένη σ' αυτό.
$p_{\kappa\beta}$ = Πίεση στο κέντρο βάρους της επιφάνειας ($\bar{x}, \bar{y}$)

(*) Η δύναμη δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας (δεν υπάρχει η γωνία)

Δυνάμεις σε επίπεδη επιφάνεια μέσα σε ρευστό



- Για να υπολογίσουμε το σημείο που ασκείται η δύναμη αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ροπών: «*Η ροπή της συνισταμένης δύναμης είναι ίση με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών*»

- Έστω ότι η δύναμη ασκείται στο σημείο c_p (x_p , y_p) , τότε :

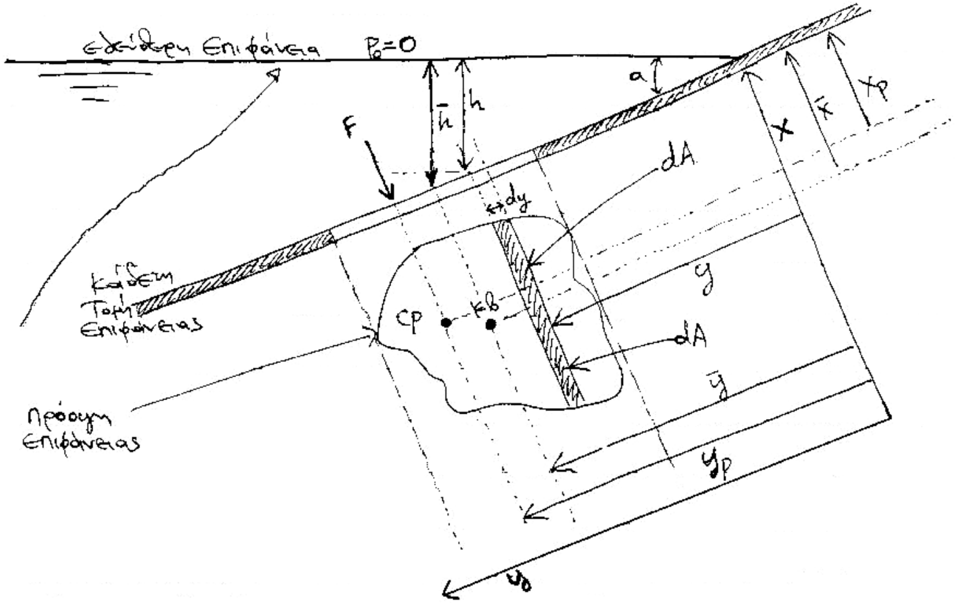
$$y_p \cdot F = \int_A y \cdot p\,dA = \int_A y\,(\gamma \cdot y \cdot \sin a)\,dA = \gamma \cdot \sin a \int_A y^2 \cdot dA \Rightarrow y_p = \frac{\gamma \sin a \int_A y^2 \cdot dA}{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{\cancel{\gamma \sin a} \int_A y^2 \cdot dA}{\cancel{\gamma} \cdot \bar{y} \cdot A \cdot \cancel{\sin a}} = \frac{\int_A y^2 \cdot dA}{\bar{y} \cdot A} \quad (1)$$

Ροπή αδρανείας = Εμβαδόν x (απόσταση)^2 , δηλαδή $I_x = \int_A y^2 \cdot dA \quad (2)$

$$\{\,(1),(2)\,\} \Rightarrow y_p = \frac{I_x}{A \cdot \bar{y}} \quad , \quad I_x = \bar{I} + A \cdot \bar{y}^2 \Rightarrow y_p = \frac{\bar{I} + A \cdot \bar{y}^2}{A \cdot \bar{y}} \Rightarrow \boxed{y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A \cdot \bar{y}}}$$

Δυνάμεις σε επίπεδη επιφάνεια μέσα σε ρευστό



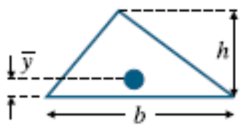
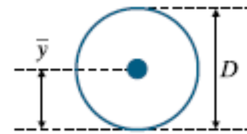
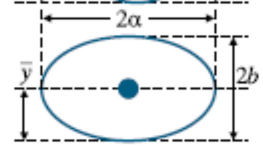
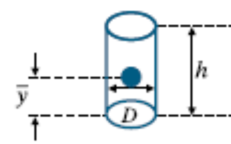
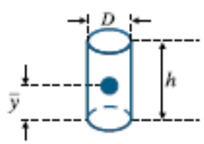
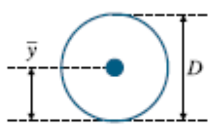
I_x = Ροπή αδράνειας ως προς άξονα x

$\bar{I}$ = Ροπή αδράνειας ως προς κ.β. επιφάνειας

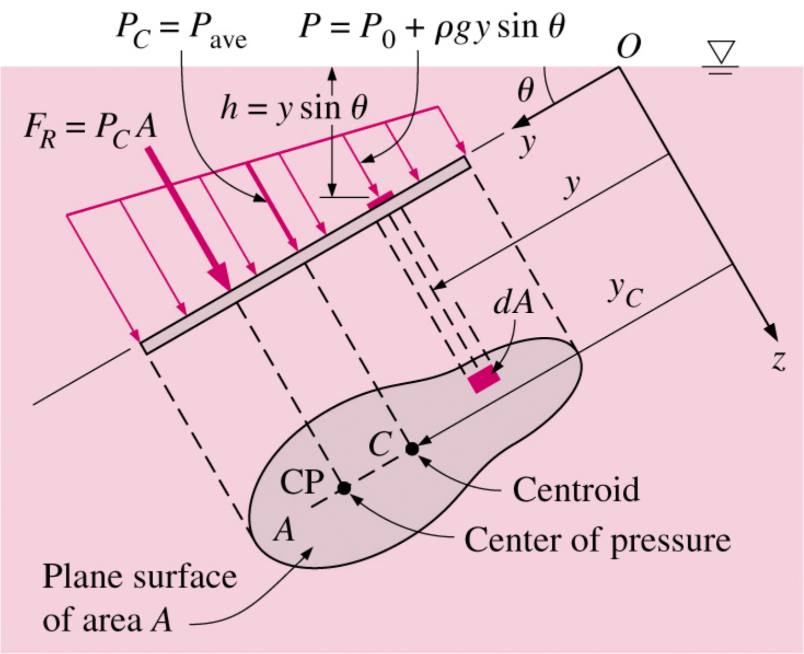
(*) Τα κ.β. ($\bar{x}, \bar{y}$) και οι ροπές αδράνειας $\bar{I}$ θα δίνονται (Παράρτημα βιβλίου)

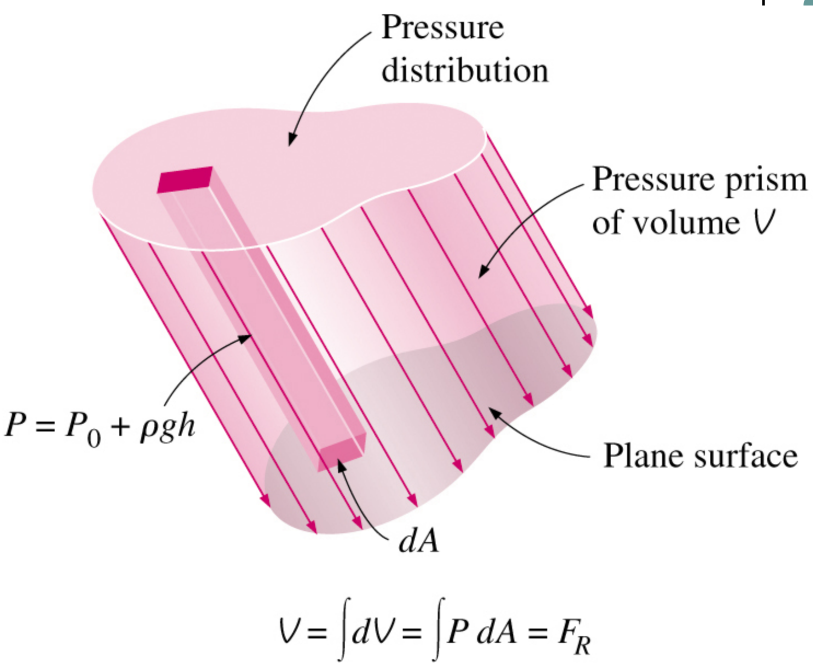
- **Το κέντρο πίεσης (c_p) είναι χαμηλότερα από το κ.β.**
- **Όσο βαθύτερα είναι η επιφάνεια τόσο συγκλίνουν τα c_p και το κ.β.**
- **Το c_p δεν εξαρτάται από τη γωνία *α* και το ειδικό βάρος γ**

$$\boxed{y_{cp} = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{\bar{y}A}}$$

ΟΝΟΜΑ	ΣΧΕΔΙΟ	ΕΜΒΑΔΟ	ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ	ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ
Ορθογώνιο		bh	$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$	$\bar{y} = \frac{h}{3}$
Τρίγωνο	$\bar{y} = \frac{h}{2}$	bh/2	$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$	
Κύκλος	$\bar{y} = r$	$\pi D^2/4$	$\bar{I}_x = \frac{\pi D^4}{64}$	
Έλλειψη	$\bar{y} = b$	πab	$\bar{I}_x = \frac{\pi a b^3}{4}$	
Κύλινδρος		$\pi D h + \pi D^2/2$	$\pi D^2 h/4$	$\bar{y} = h/2$
Σφαίρα		πD^2	$\pi D^3/6$	$\bar{y} = D/2$
Κώνος		$\pi\left(r^2 + r\sqrt{r^2 + h^2}\right)$	$\pi D^2 h/12$	$\bar{y} = h/4$

Δύναμη ρευστού σε εμβαπτισμένο σώμα

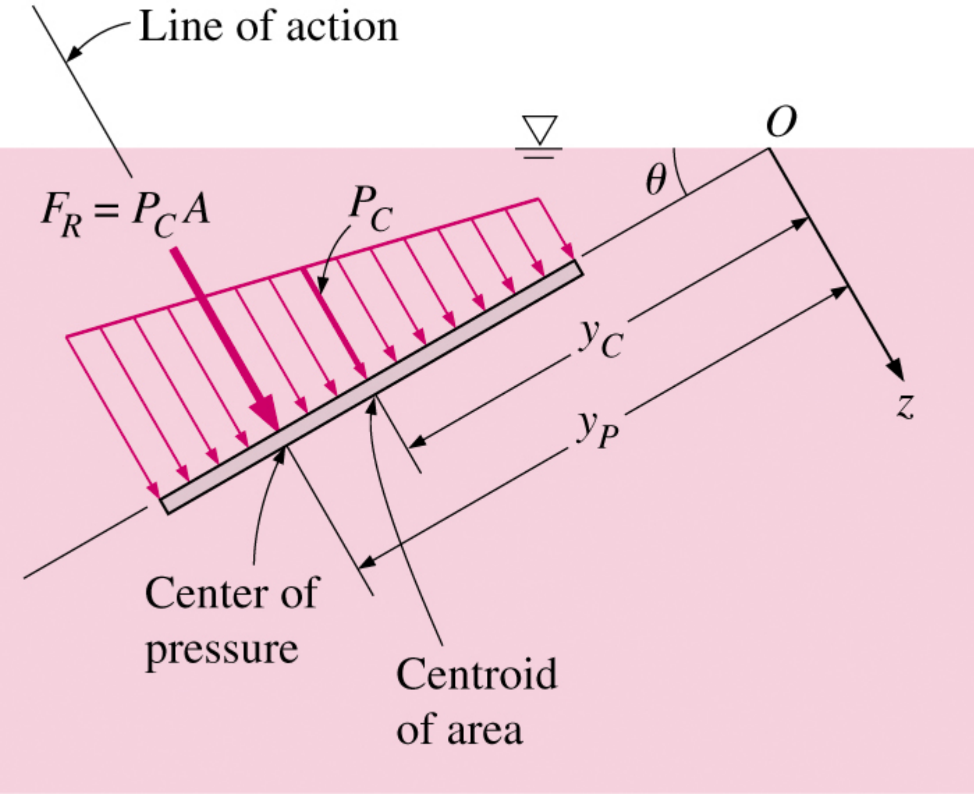




Η δύναμη F_R που ενεργεί σε επίπεδη επιφάνεια τελείως βυθισμένη σε ομογενές ρευστό είναι ίση με

$$\mathbf{F_R = P_{CP} * A}$$

Κέντρο πίεσης



- Line of action of resultant force $F_R=P_CA$ does not pass through the centroid of the surface. In general, it lies underneath where the pressure is higher.
- Vertical location of **Center of Pressure** is determined by equation the moment of the resultant force to the moment of the distributed pressure force.

$$y_p = y_C + \frac{I_{xx,C}}{y_c A}$$

- $I_{xx,C}$ is tabulated for simple geometries.

- ΣΤΑΤΙΚΗ ΡΟΠΗ μιας επιφάνειας εμβαδού Α περί τον άξονα των y:

$$\boxed{\int_A x\,dA}$$

- ΚΕΝΤΡΟΒΑΡΙΚΟΣ ΑΞΟΝΑΣ : ένας παράλληλος άξονας

  x=k= $\bar{x}$ περί τον οποίο η ΡΟΠΗ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ

$$\int_A (x-k)\,dA = \int_A x\,dA - kA = 0 \Rightarrow \int_A x\,dA = kA \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{1}{A}\int_A x\,dA}$$

Οι Άξονες Συμμετρίας είναι και κεντροβαρικοί άξονες
(γιατί η ροπή γύρω απ' αυτούς είναι ίση με μηδέν (= 0)

- ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ: Το σημείο τομής των κεντροβαρικών αξόνων.

- Η στατική ροπή περί οποιουδήποτε άξονα διερχόμενο από το κέντρο βάρους = 0 .

- Κέντρο Βάρους γνωστό : Στατική Ροπή = $\int_A z dA = \bar{z} A$

(A: εμβαδό επιφάνειας, $\bar{z}$: απόσταση από κ.β.)

- Στατική Ροπή ενός όγκου V περί ένα επίπεδο yz

Απόσταση του κ.β. του όγκου από το επίπεδο $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{V} \int_V x dV}$

Κέντρο Μάζας (M:ολική μάζα, dm: στοιχείο μάζας)

$$\boxed{x_m = \frac{1}{M} \int_M x dm}$$

ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

1) Ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας περί τον άξονα y (πάντα θετική)

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

2) Με μεταφορά σε παράλληλο άξονα διερχόμενο από το κέντρο βάρους της επιφάνειας

$$I_c = \int_A (x-\bar{x})^2 dA = (\int_A x^2 dA) - (2\bar{x}\int_A x dA) + \bar{x}^2 \int_A dA$$

$$I_y - 2\overline{xx}A + \bar{x}^2 A$$

$$\Rightarrow \boxed{I_c = I_y - \bar{x}^2 A} \Rightarrow \boxed{I_y = I_c + \bar{x}^2 A}$$

Ροπή αδράνειας επιφάνειας περί οποιουδήποτε άξονα = Ροπή αδράνειας περί παράλληλο άξονα διερχόμενου από το Κ.Β. + Εμβαδόν επιφάνειας x (Απόσταση αξόνων)2

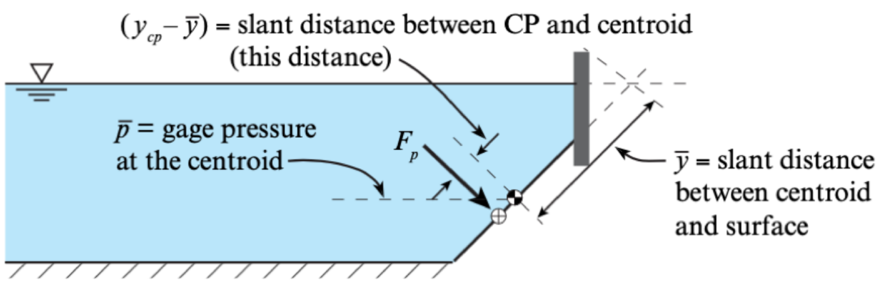
3) Γινόμενο αδράνειας επιφάνειας (θετικό ή αρνητικό)

$$\mathbf{I}_{xy} = \int_A xy dA$$

$$= \int_A (\bar{x}+x')(\bar{y}+y')dA = \overline{xy}A + \int_A x'y'dA + \bar{x}\int_A y'dA + \bar{y}\int_A x'dA \Rightarrow$$

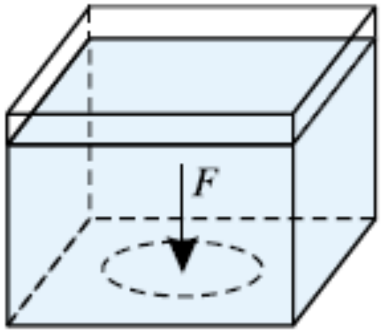
$$I_{xy} = \overline{xy}A + \bar{I}_{xy}$$

Σύνοψη των εξισώσεων του πλαισίου

Purpose of the Equation	Equation	Variables
Predict the magnitude of the hydrostatic force	$F_p = \bar{p}A$ (3.28)	F_p = pressure force (N) $\bar{p}$ = gage pressure evaluated at the depth of the centroid (Pa) A = surface area of the plate (m^2)
Calculate the location of the center of pressure (CP)	$y_{cp} - \bar{y} = \dfrac{\bar{I}}{\bar{y}A}$ (3.33)	$(y_{cp} - \bar{y})$ = slant distance from the centroid to the CP (m) $\bar{I}$ = area moment of inertia of the panel about its centroidal axis (m^4; for formulas, see Fig. A.1 in the appendix) $\bar{y}$ = slant distance from the centroid to the liquid surface (m)
This figure defines variables		

Παράδειγμα 2.6

Να βρεθεί η δύναμη και το κέντρο πίεσης που ασκείται σε κυκλική πόρτα, ακτίνας R, που βρίσκεται στον πυθμένα δεξαμενής, γεμάτης υγρού ειδικού βάρους γ και ύψους h.



Λύση

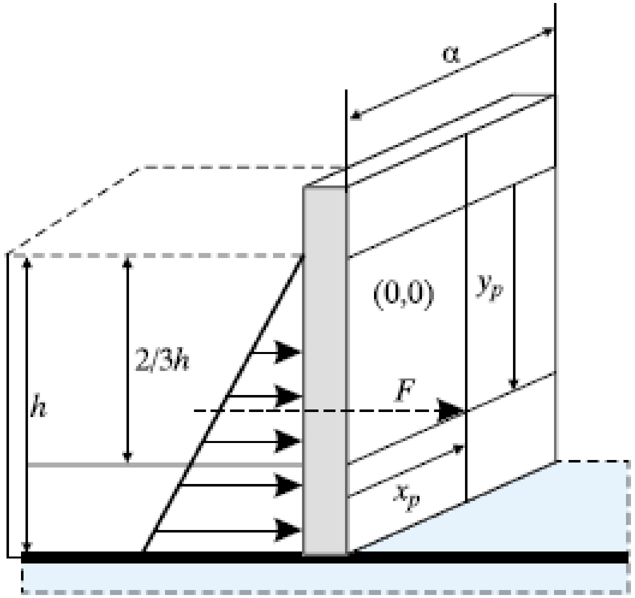
Επειδή η πίεση είναι σταθερή σε όλα τα σημεία του πυθμένα, θα έχουμε για το μέτρο της δύναμης

$$F = p\,A = \gamma\, h\, \pi\, R^2$$

Ακόμη, το σημείο εφαρμογής της δύναμης είναι το κέντρο βάρους του κύκλου για λόγους συμμετρίας, επειδή οι στοιχειώδεις δυνάμεις σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια είναι ίσες μεταξύ τους.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η δύναμη (δηλαδή το μέτρο και το σημείο εφαρμογής της) και το κέντρο πίεσης που ασκείται σε ορθογώνια επίπεδη επιφάνεια, τμήμα της οποίας βρίσκεται μέσα σε υγρό ειδικού βάρους γ.



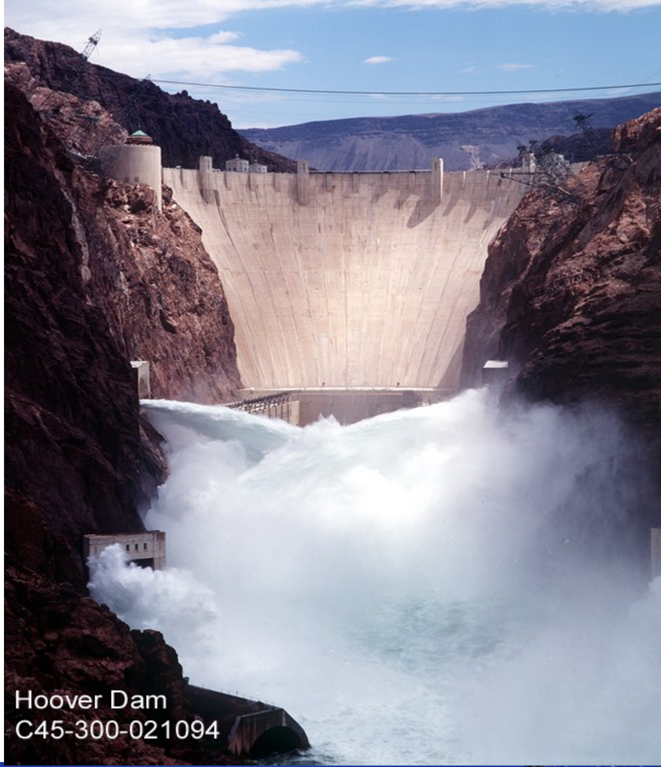
Διαστάσεις ορθογωνίου (h, α), κ.β. ορθογωνίου $\left(h/2, a/2\right)$

$$F = \gamma \cdot \bar{h} \cdot A = \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot h \cdot a = \gamma \cdot a \cdot \frac{h^2}{2} \quad \text{(μέτρο δύναμης)}$$

<u>Σημείο εφαρμογής</u> : $(x_p, y_p) = \left(x_p = a/2 \ , y_p = \frac{2}{3} h\right)$

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A \cdot \bar{y}} = \frac{h}{2} + \frac{\left(ah^3/12\right)}{ah\frac{h}{2}} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2}{3} h$$

Φράγμα Hoover



Παράδειγμα. Υδροστατική πίεση σε καλούπι

EXAMPLE 3.7

Hydrostatic Force Due to Concrete

Problem Statement

Determine the force acting on one side of a concrete form 2.44 m high and 1.22 m wide (8 ft by 4 ft) that is used for pouring a basement wall. The specific weight of concrete is 23.6 kN/m^3 (150 lbf/ft^3).

Define the Situation

Concrete in a liquid state acts on a vertical surface.

The vertical wall is 2.44 m high and 1.22 m wide

Assumptions: Freshly poured concrete can be represented as a liquid.

Properties: Concrete: $\gamma = 23.6\ \text{kN/m}^3$

State the Goal

Find the resultant force (kN) acting on the wall.

Plan

Apply the panel equation (3.28).

Solution

1. Panel equation:

$$F = \bar{p}A$$

2. Term-by-term analysis:

- $\bar{p}$ = pressure at depth of the centroid

$$\bar{p} = (\gamma_{\text{concrete}})(z_{\text{centroid}}) = (23.6\ \text{kN/m}^3)(2.44/2\ \text{m})$$
$$= 28.79\ \text{kPa}$$

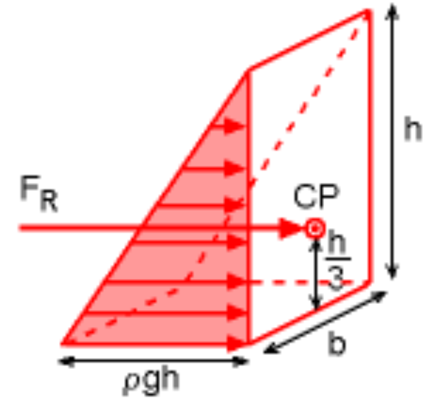
- A = area of panel

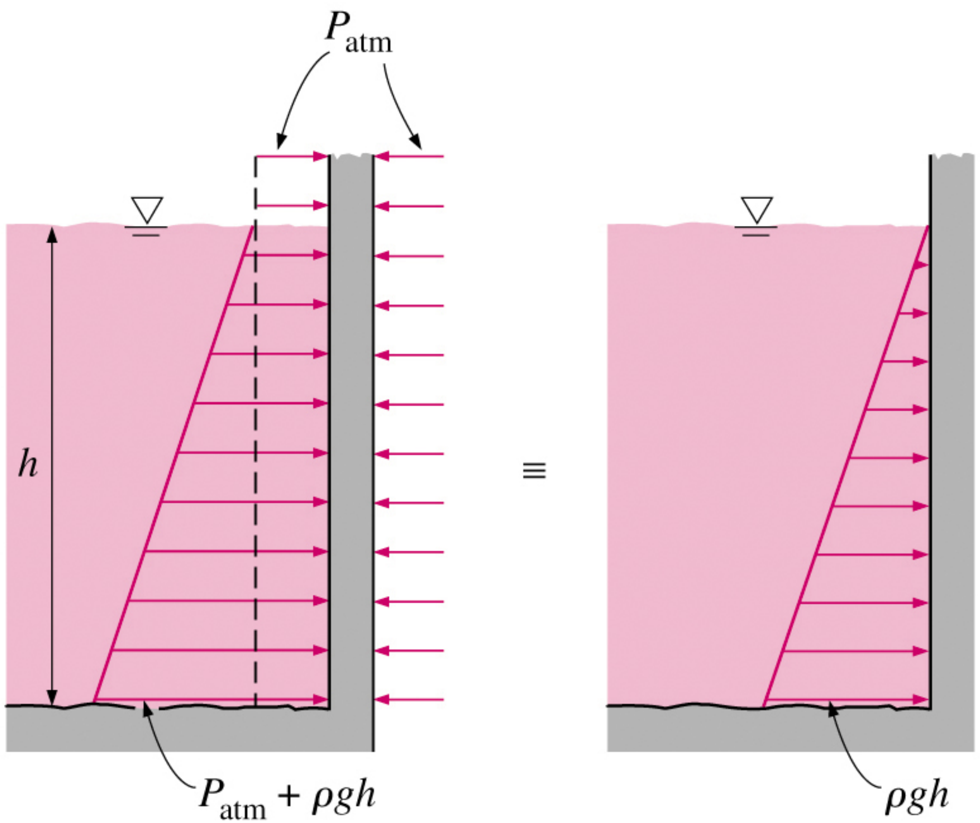
$$A = (2.44\ \text{m})(1.22\ \text{m}) = 2.977\ \text{m}^2$$

3. Resultant force:

$$F = \bar{p}A = (28.79\ \text{kPa})(2.977\ \text{m}^2) = \boxed{85.7\ \text{kN}}$$

Υδροστατικές δυνάμεις σε επίπεδες επιφάνειες

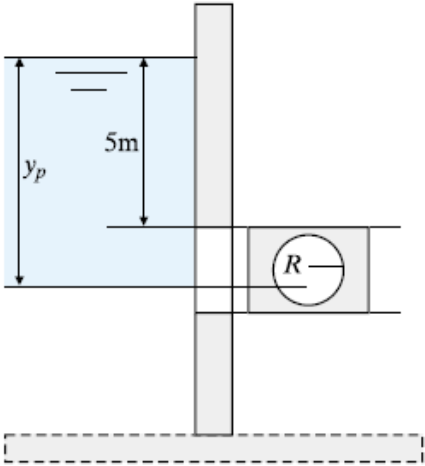




(a) P_{atm} considered (b) P_{atm} subtracted

- On a *plane* surface, the hydrostatic forces form a system of parallel forces
- For many applications, magnitude and location of application, which is called **center of pressure**, must be determined.
- Atmospheric pressure P_{atm} can be neglected when it acts on both sides of the surface.

Παράδειγμα 2.9



Η κορυφή κυκλικού παραθύρου ακτίνας $R=1$ m βρίσκεται σε βάθος 5 m από την επιφάνεια νερού που ηρεμεί. Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο παράθυρο, καθώς και το κέντρο πίεσης. Δίνεται $\gamma=9810$ N/m^3.

Λύση

Το κέντρο βάρους του κυκλικού παραθύρου βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου. Έτσι η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου βάρους του παραθύρου από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού είναι: $\bar{y}=\bar{h}=5+1=6$ m. Η δύναμη δίνεται από την εξίσωση

$$F = \gamma \bar{h} A = 9810 \times 6 \times \pi \times R^2 = 184{,}82\ \text{kN}$$

Η ροπή αδράνειας της κυκλικής επιφάνειας βρίσκεται από το παράρτημα 1 ως: $\bar{I}_x=\dfrac{\pi R^4}{2}$. Έτσι το κέντρο πίεσης βρίσκεται ως:

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A\bar{y}} = 6 + \frac{\frac{\pi R^4}{2}}{\pi R^2 \times 6} = 6{,}083\ \text{m}$$

Για λόγους συμμετρίας, το x_p βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του κύκλου.

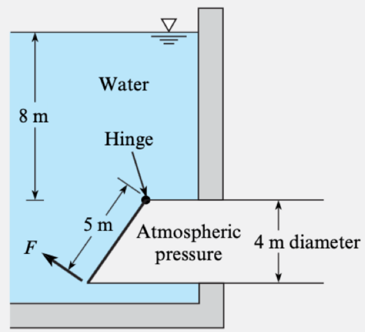
Παράδειγμα. Δύναμη για το άνοιγμα μιας ελλειπτικής πόρτας

EXAMPLE 3.8

Force to Open an Elliptical Gate

Problem Statement

An elliptical gate covers the end of a pipe 4 m in diameter. If the gate is hinged at the top, what normal force F is required to open the gate when water is 8 m deep above the top of the pipe and the pipe is open to the atmosphere on the other side? Neglect the weight of the gate.



Define the Situation

Water pressure is acting on an elliptical gate.

Properties: Water (10°C): Table A.5, $\gamma = 9810\ \mathrm{N/m^3}$

Assumptions:

1. Neglect the weight of the gate.
2. Neglect friction between the bottom on the gate and the pipe wall.

State the Goal

F(N) ⬅ force needed to open gate

Generate Ideas and Make a Plan

1. Calculate resultant hydrostatic force using $F = \bar{p}A$.
2. Find the location of the center of pressure using Eq. (3.33).
3. Draw an FBD of the gate.
4. Apply moment equilibrium about the hinge.

Take Action (Execute the Plan)

1. Hydrostatic (resultant) force:
   - $\bar{p}$ = pressure at depth of the centroid

   $$\bar{p} = (\gamma_{\text{water}})(z_{\text{centroid}}) = (9810\ \mathrm{N/m^3})(10\ \mathrm{m}) = 98.1\ \mathrm{kPa}$$

   - A = area of elliptical panel (using Fig. A.1 to find formula)

   $$A = \pi ab$$
   $$= \pi(2.5\ \mathrm{m})(2\ \mathrm{m}) = 15.71\ \mathrm{m^2}$$

   - Calculate resultant force:

   $$F_p = \bar{p}A = (98.1\ \mathrm{kPa})(15.71\ \mathrm{m^2}) = \boxed{1.54\ \mathrm{MN}}$$

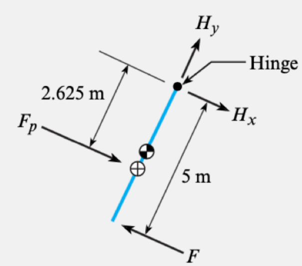
2. Center of pressure:
   - $\bar{y} = 12.5$ m, where $\bar{y}$ is the slant distance from the water surface to the centroid
   - Area moment of inertia $\bar{I}$ of an elliptical panel using a formula from Fig. A.1:

   $$\bar{I} = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{\pi(2.5\ \mathrm{m})^3(2\ \mathrm{m})}{4} = 24.54\ \mathrm{m^4}$$

   - Finding center of pressure:

   $$y_{cp} - \bar{y} = \frac{\bar{I}}{\bar{y}A} = \frac{25.54\ \mathrm{m^4}}{(12.5\ \mathrm{m})(15.71\ \mathrm{m^2})} = 0.125\ \mathrm{m}$$

3. FBD of the gate:



4. Moment equilibrium:

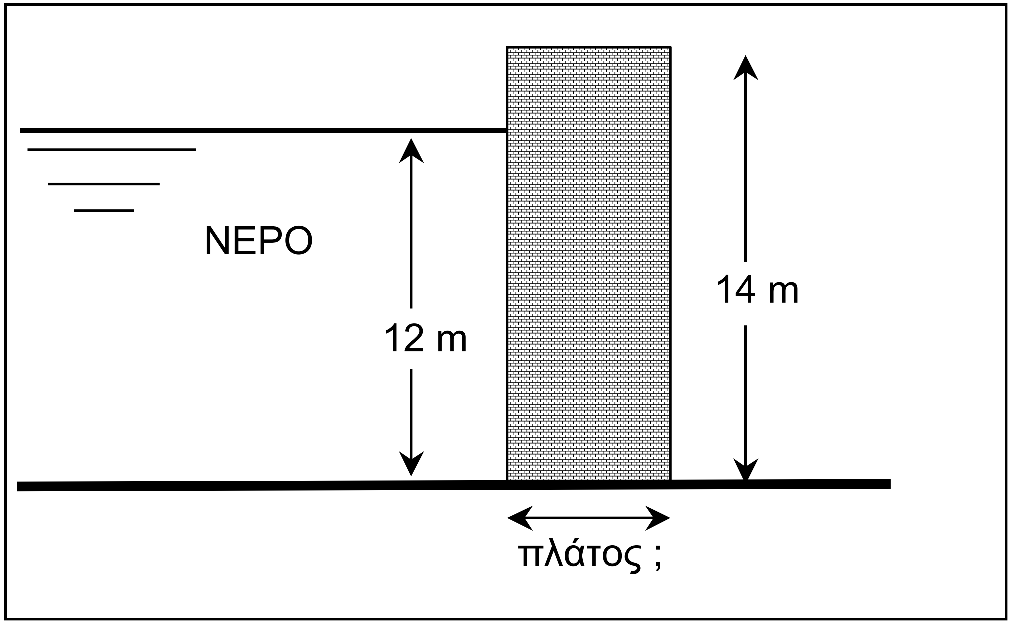
$$\sum M_{\text{hinge}} = 0$$

$$1.541 \times 10^6\ \mathrm{N} \times 2.625\ \mathrm{m} - F \times 5\ \mathrm{m} = 0$$

$$F = \boxed{809\ \mathrm{kN}}$$

Πρόβλημα (εξετάσεων)

Αναφερόμενοι στο σχήμα που ακολουθεί ποια τιμή πλάτους είναι αναγκαία για να προφυλάξει τον ορθογώνιο κτιστό τοίχο από ολίσθηση αν ο συντελεστής τριβής είναι 0,4; Αποδείξτε ότι ο τοίχος είναι ασφαλής έναντι ανατροπής. (φαινόμενο βάρος τοίχου=2,4 t/m^3, $\rho_{νερού}$=1000 kg/m^3, σημείωση: το νερό δεν εισχωρεί κάτω από τον τοίχο)



Λύση

Για μοναδιαίο μήκος $\quad B = V \cdot \gamma = (14 \cdot b) \cdot 2{,}4$ (βάρος τοίχου)

$F = \gamma \bar{h} A = 1\, t/m^3 \cdot \left(\frac{12}{2}\right) \cdot (12 \cdot 1) = 72$ (δύναμη που ασκεί το νερό στον τοίχο)

Για να μην ολισθαίνει ο τοίχος θα πρέπει $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

$$0{,}4 \cdot B - F = 0 \Rightarrow$$

$$0{,}4 \cdot (14 \cdot b) \cdot 2{,}4 - 72 = 0 \Rightarrow$$

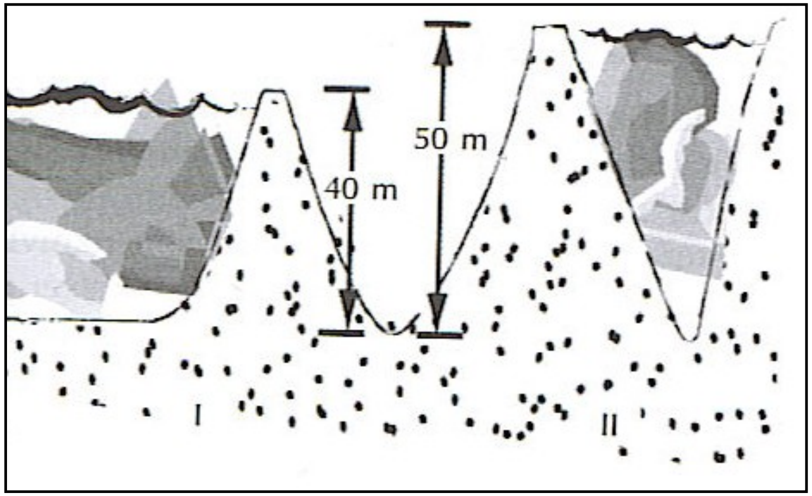
$$\Rightarrow \boxed{b = 5{,}35\, m}$$

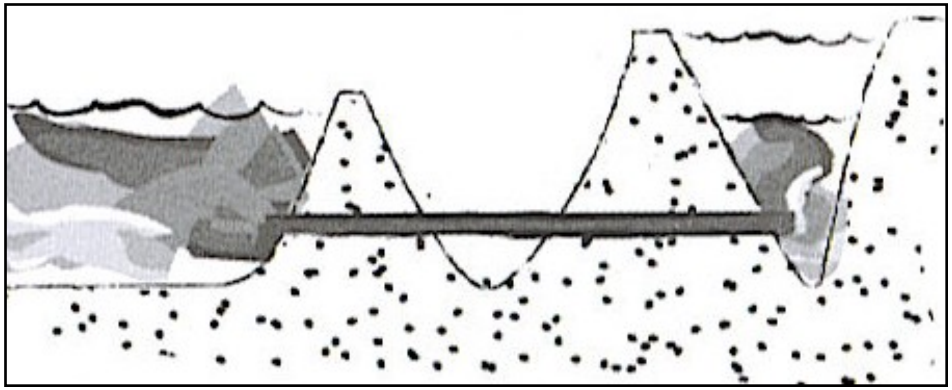
Για να είναι ασφαλής έναντι ανατροπής θα πρέπει:

$$M_{Βάρους} > M_{δύν.νερού} \Rightarrow \underbrace{\overbrace{(14 \cdot 5{,}35)}^{διαστάσεις} \cdot 2{,}4}_{Βάρος} \cdot \frac{5{,}35}{2} > 72 \cdot \frac{12}{3} \Rightarrow$$

$481 > 288$ που ισχύει

Στατική των Ρευστών





Ο υδατοφράχτης I έχει ύψος 40 m και συγκρατεί το νερό μιας πολύ μεγάλης λίμνης.

Ο υδατοφράχτης II έχει ύψος 50 m και συγκρατεί το νερό μιας πολύ μικρής λίμνης.

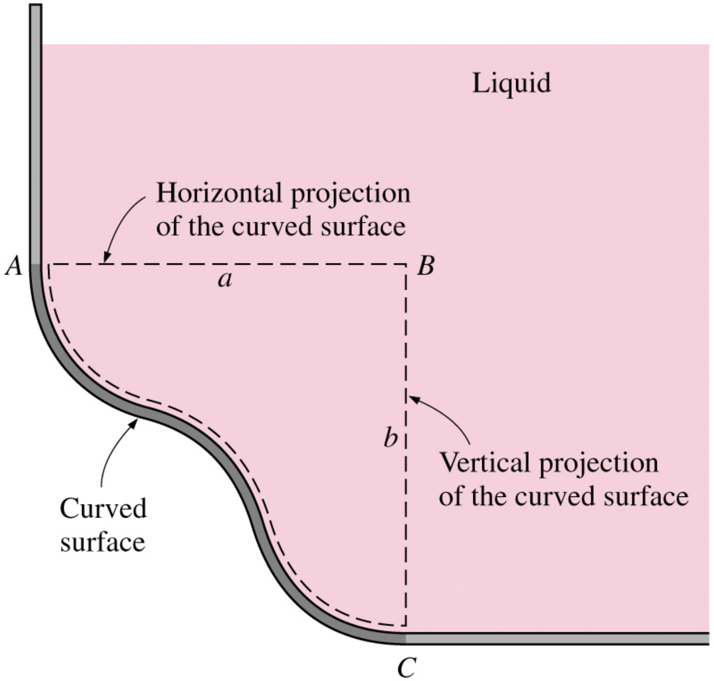
Ποιος από τους δύο πρέπει να έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε να παρουσιάζει μεγαλύτερη αντοχή:

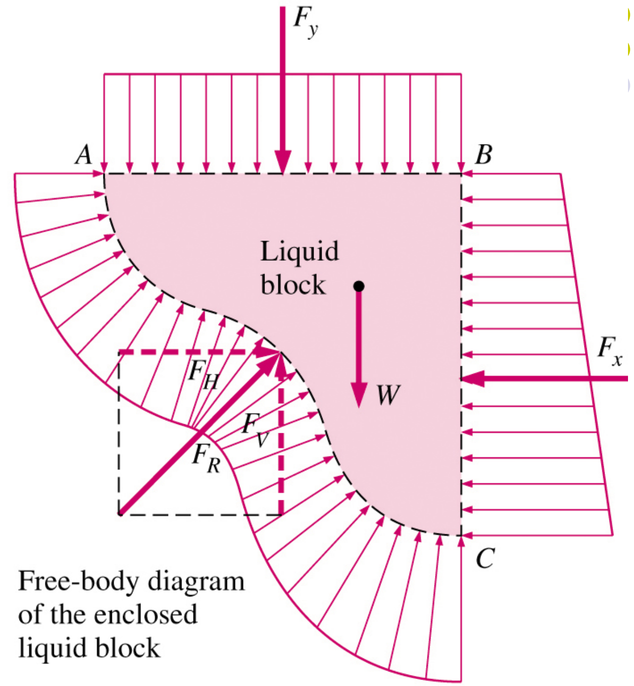
1) ο υδατοφράχτης I,

2) ο υδατοφράχτης II,

3) και οι δύο πρέπει να έχουν την ίδια αντοχή.

Υδροστατικές δυνάμεις σε καμπύλες επιφάνειες



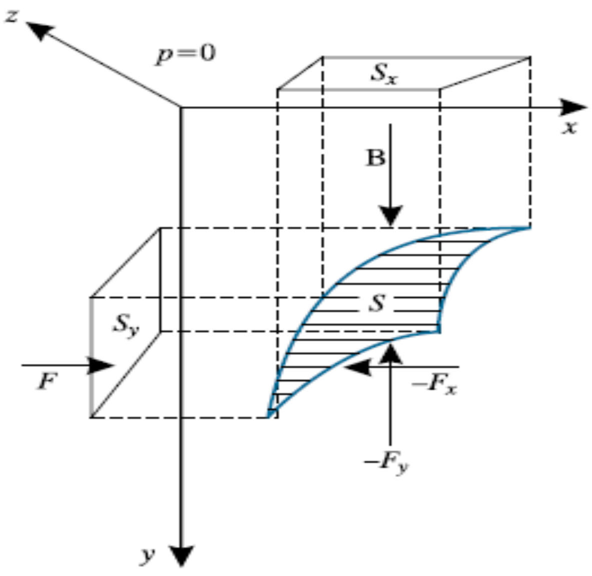


- Πολύπλοκος ο υπολογισμός της F_R διότι απαιτεί την ολοκλήρωση των δυνάμεων πίεσης που αλλάζουν διευθύνσεις κατά μήκος της καμπύλης επιφάνειας

- Η πιο εύκολη προσέγγιση: ανάλυση σε οριζόντια και κάθετη συνιστώσες F_H και F_V αντίστοιχα.

- **Μέτρο** της δύναμης $F_R=(F_H^2+F_V^2)^{1/2}$ **Γωνία εφαρμογής** της δύναμης $a = \tan^{-1}(F_V/F_H)$

Δυνάμεις σε καμπύλες επιφάνειες



1. Οριζόντια συνιστώσα δυνάμεως σε καμπύλη επιφάνεια

Όταν οι στοιχειώδεις δυνάμεις p dA μεταβάλλουν διεύθυνση, όπως στην περίπτωση καμπύλης επιφάνειας, τότε προστίθενται ανυσματικά.

Μέτρο Δύναμης :

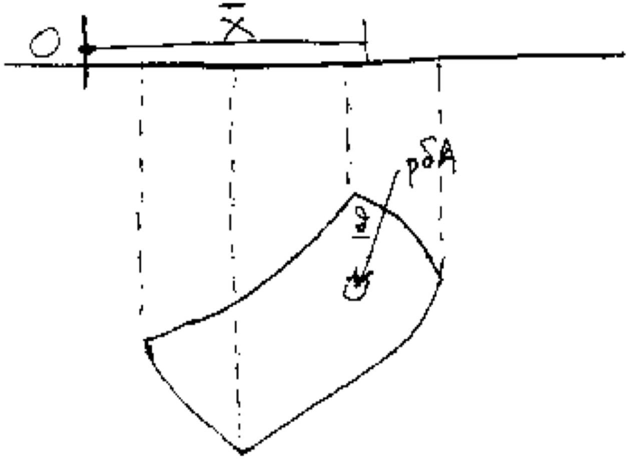
Η οριζόντια δύναμη που ασκείται σε οποιαδήποτε καμπύλη επιφάνεια είναι ίση με τη δύναμη που ασκείται στην κατακόρυφη προβολή της επιφάνειας

$$F_{\mathbf{x}} = \int_A p_x dA = \int_A p(\cos\theta \cdot dA) = p \cdot \delta A$$

όπου $\cos\theta \cdot dA$ είναι η κατακόρυφη προβολή της επιφάνειας

Σημείο εφαρμογής : Το κέντρο πίεσης (αποδεικνύεται όπως και για επίπεδη επιφάνεια : συνισταμένη ροπή = 0)

Δυνάμεις σε καμπύλες επιφάνειες



2. Κατακόρυφη συνιστώσα δυνάμεως σε καμπύλη επιφάνεια

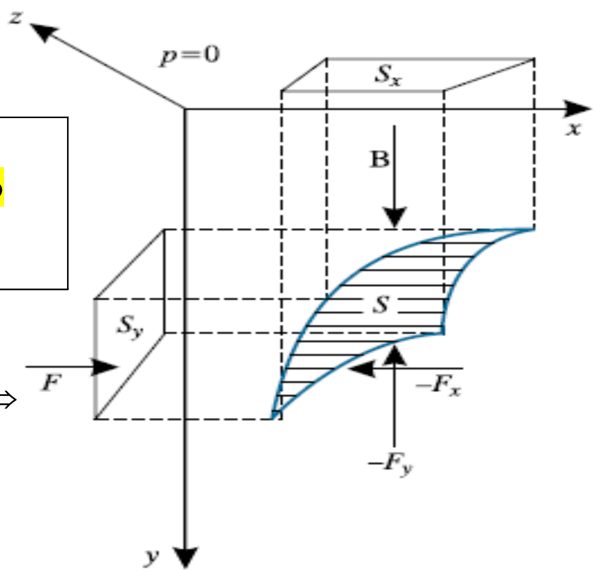
$$F_y = \int_A P_y \delta A \Rightarrow F_y = \int_A p\cos\theta \cdot \delta A \qquad (1)$$

$$p = \gamma \cdot h \qquad (2)$$

$\cos\theta \cdot \delta A$ = προβολή του δA στο οριζόντιο επίπεδο (3)

$$\{(1), (2), (3)\} \Rightarrow F_y = \gamma \cdot \int_A h \cdot \cos\theta \cdot dA \Rightarrow F_y = \gamma \cdot \int_V dV \Rightarrow \boxed{F_y = \gamma \cdot V}$$

Μέτρο Δύναμης :
Η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης πιέσεως σε μια καμπύλη επιφάνεια ισούται με το βάρος του υγρού που περιέχεται κατακόρυφα, μεταξύ της καμπύλης επιφάνειας και της ελεύθερης επιφάνειας.



Σημείο Εφαρμογής : Το κέντρο βάρους του όγκου
Ροπή συνισταμένης δύναμης = άθροισμα ροπών στοιχειωδών κατακόρυφων δυνάμεων ⇒

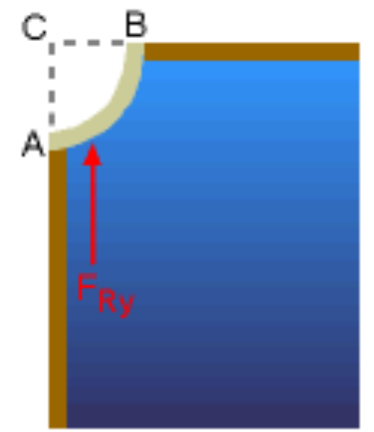
$$F \cdot \bar{x} = \gamma \cdot \int_V x dV \Rightarrow \gamma \cdot V \cdot \bar{x} = \gamma \cdot \int_V x dV \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{1}{V}\int_V x dV}$$

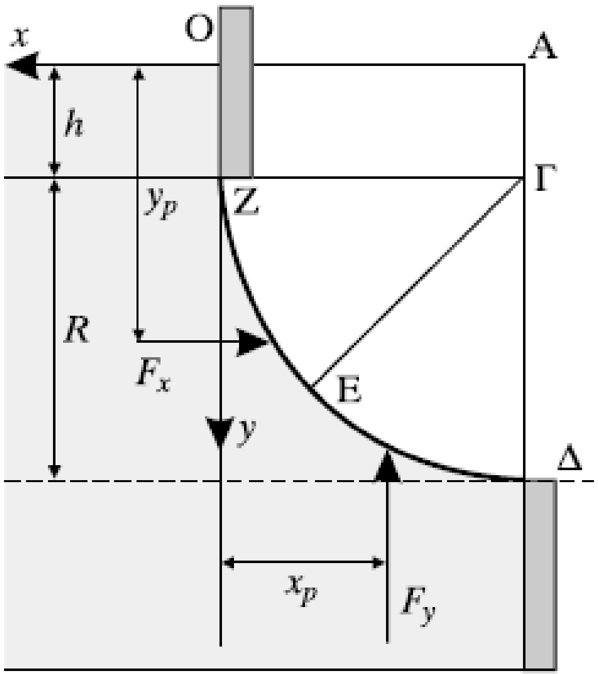
που είναι η απόσταση του γεωμετρικού κέντρου του όγκου από το O.

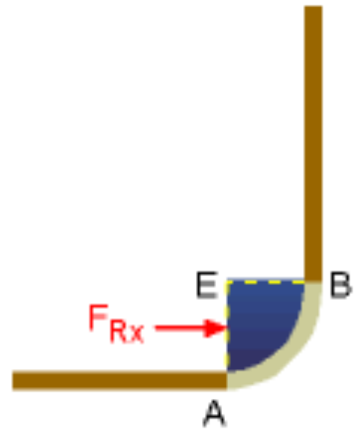
Άλλος Τρόπος :
Επειδή είναι ίση με το βάρος του υπερκείμενου ρευστού (αφού η επιφάνεια ισορροπεί) θα διέρχεται και από την ίδια κατακόρυφο που διέρχεται το βάρος δηλαδή από το κ.β. του όγκου.

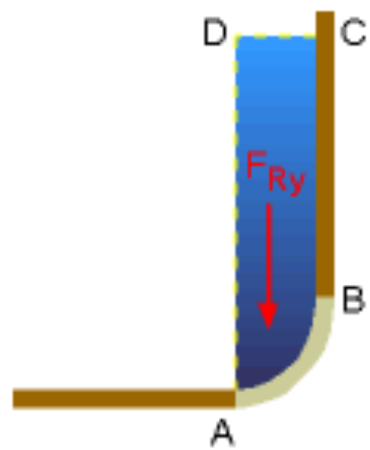
Παράδειγμα 2.13

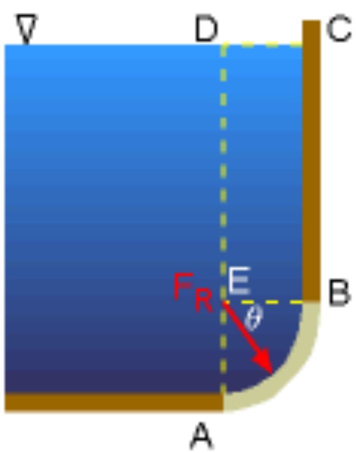
Υδατοφράκτης στο κάτω μέρος του έχει μορφή καμπύλη που είναι το 1/4 κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας $R=4$ m και μήκος $a=5$ m. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στον υδατοφράκτη. Δίνεται $\gamma=9810$ N/m^3, $h=1$ m. Το κέντρο βάρους του τετάρτου του κύκλου βρίσκεται στην ακτίνα που σχηματίζει γωνία 45° και απέχει από τον άξονα ΑΔ απόσταση $\dfrac{4R}{3\pi}$.









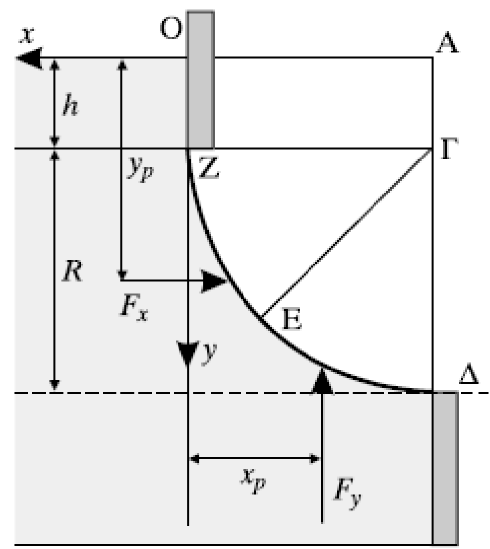


Παράδειγμα 2.13

Υδατοφράκτης στο κάτω μέρος του έχει μορφή καμπύλη που είναι το 1/4 κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας $R=4$ m και μήκος $\alpha=5$ m. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στον υδατοφράκτη. Δίνεται $\gamma=9810$ N/m^3, $h=1$ m. Το κέντρο βάρους του τετάρτου του κύκλου βρίσκεται στην ακτίνα που σχηματίζει γωνία 45° και απέχει από τον άξονα ΑΔ απόσταση $\frac{4R}{3\pi}$.

Λύση

Η οριζόντια δύναμη F_x θα είναι η δύναμη στην κατακόρυφη προβολή της επιφάνειας. Το κέντρο βάρους της κατακόρυφης προβολής της επιφάνειας βρίσκεται σε βάθος $\bar{h}=h+R/2=1\text{m}+2\text{m}=3$ m, από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού.



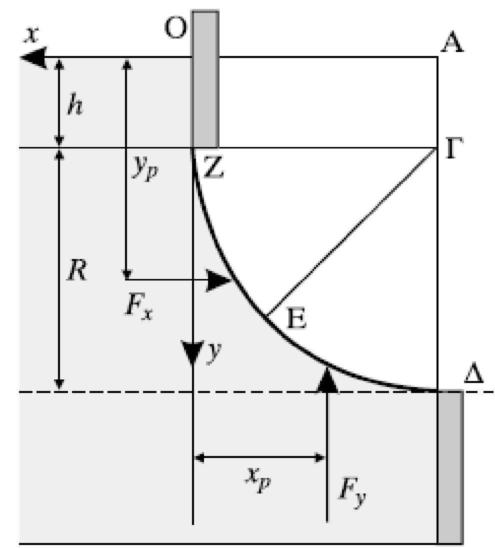
Έτσι έχουμε: $$F_x = 9810 \times 3 \times (5 \times 4) = 588{,}6 \text{ kN}.$$

Το σημείο εφαρμογής της δύναμης βρίσκεται στο κέντρο πίεσης της κατακόρυφης προβολής της επιφάνειας που έχει σχήμα ορθογώνιο. Η απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού βρίσκεται με εφαρμογή της εξίσωσης (2.35) και με δεδομένο ότι $\bar{y}=\bar{h}=3$m.

$$y_p = \bar{h} + \frac{\bar{I}}{A\bar{h}} = \bar{h} + \frac{\frac{\alpha(R+h)^3}{12}}{\alpha(R+h)\bar{h}} = 3 + \frac{\frac{5^2}{12}}{3} = 3{,}69 \text{ m}$$

Παράδειγμα 2.13

Υδατοφράκτης στο κάτω μέρος του έχει μορφή καμπύλη που είναι το 1/4 κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας R=4 m και μήκος α=5 m. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στον υδατοφράκτη. Δίνεται γ=9810 N/m^3, h=1 m. Το κέντρο βάρους του τετάρτου του κύκλου βρίσκεται στην ακτίνα που σχηματίζει γωνία 45° και απέχει από τον άξονα ΑΔ απόσταση $\frac{4R}{3\pi}$.



Η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης δίνεται από το βάρος του υποθετικού νερού που περιέχεται στον όγκο ΟΑΓΔΕΖΟ. Ο όγκος είναι το 1/4 του όγκου του κυλίνδρου με αντίστοιχο βάρος B_2, και ο όγκος του παραλληλεπιπέδου ΟΑΓΖ με βάρος B_1.

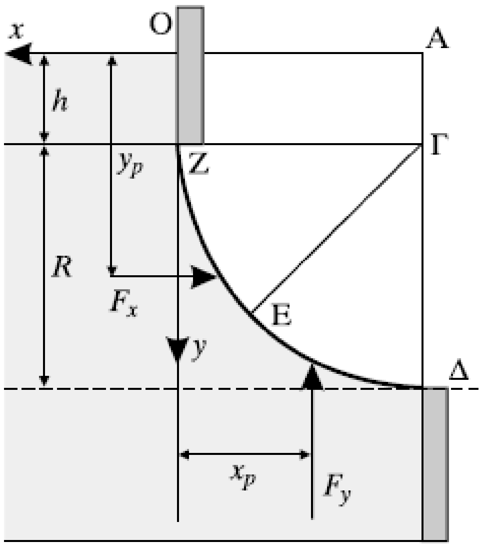
$$F_y = \gamma\,\frac{1}{4}\,\pi\,R^2\alpha + \gamma\times(Rh\alpha) = 9810\,(\frac{1}{4}\times 3{,}14\times 4^2\times 5)+(4\times 1\times 5) = 812{,}3\ \mathrm{kN}$$

Το κέντρο βάρους της υποθετικής ποσότητας νερού βρίσκεται από τη σύνθεση του βάρους του ορθογωνίου, που εφαρμόζεται στο κέντρο του ορθογωνίου, και το κέντρο βάρους του τετάρτου του κυλίνδρου. Αυτό βρίσκεται στην ακτίνα που σχηματίζει γωνία 45° και απέχει από τον άξονα ΑΔ απόσταση $\frac{4R}{3\pi}$. Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα των ροπών ως προς τον άξονα ΑΔ, θα έχουμε:

$$F_y\,(4-x_p) = B_1\times 2 + B_2\,\frac{4R}{3\pi} \Rightarrow x_p = \frac{812\times 3 - 196{,}2\times 2 - 62{,}8\times 1{,}69}{812{,}3} = 2{,}38\ \mathrm{m}$$

Παράδειγμα 2.13

Υδατοφράκτης στο κάτω μέρος του έχει μορφή καμπύλη που είναι το 1/4 κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας $R=4$ m και μήκος $a=5$ m. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στον υδατοφράκτη. Δίνεται $\gamma=9810$ N/m^3, $h=1$ m. Το κέντρο βάρους του τετάρτου του κύκλου βρίσκεται στην ακτίνα που σχηματίζει γωνία 45° και απέχει από τον άξονα ΑΔ απόσταση $\dfrac{4R}{3\pi}$.



Για λόγους συμμετρίας οι δύο δυνάμεις είναι συνεπίπεδες και έτσι

$$F_{ολ} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{659831{,}2 + 346449{,}9} = 1003{,}1 \text{ kN}$$

Η διεύθυνση της $F_{ολ}$ μπορεί να βρεθεί από την εφαπτομένη της γωνίας

$$\text{εφ}\varphi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{812{,}3}{588{,}0} = 1{,}38 \qquad \varphi = 54^\circ$$

Παρατήρηση: ο υπολογισμός των x_p και y_p μπορεί να παραληφθεί.

Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια AB.

Πρώτα υπολογίζουμε τις συνιστώσες F_{Rx} και F_{Ry}.

Η οριζόντια προβολή της καμπύλης επιφάνειας AB είναι η AC. Η x-συνιστώσα της δύναμης είναι η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια AC, δηλαδή,

$\mathbf{F_{Rx} = \rho g h_c A_{AC}} = (1000\ \text{kg/m}^3)\ (9.8\ \text{m/s}^2)\ (4.5\ \text{m})\ (3\ \text{m})\ (8\ \text{m}) = 1{,}058\ \text{kN}$

Σημείωση: h_c είναι η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου της επίπεδης επιφάνειας AC.

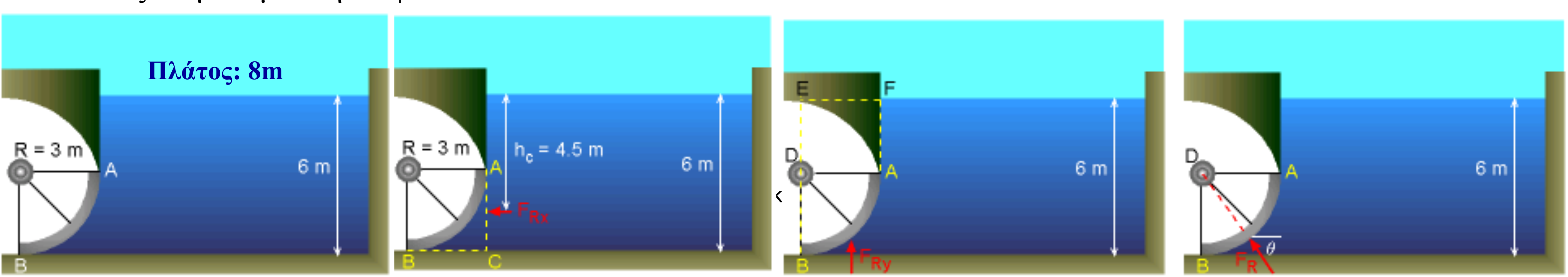
Η y-συνιστώσα της δύναμης είναι το βάρος του νερού υπεράνω της καμπύλης επιφάνειας (δηλ. ο φανταστικός όγκος ABEF).

$\mathbf{F_{Ry} = \rho g\ V_{ABEF} = \rho g\ (V_{ADEF} + V_{ABD})} =$
$= (1000\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)[(3\text{m})(3\text{m})(8\text{m})+(\pi 3^2/4)\text{m}^2\ (8\text{m})] = 1{,}260\ \text{kN}$

Η συνισταμένη δύναμη : $\mathbf{F_R = (F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2)^{0.5}} = [(1{,}058\ \text{kN})^2 + (1{,}260\ \text{kN})^2]^{0.5} = 1{,}645\ \text{kN}$

Και η γωνία θ : $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{tan^{-1}\ (F_{Ry} / F_{Rx})} = \tan^{-1}\ (1{,}260\ \text{kN} / 1{,}058\ \text{kN}) = 50^{\circ}$

Επίσης η συνισταμένη δύναμη F_R πρέπει να περνά από το σημείο D αφού όλες οι δυνάμεις πίεσης είναι κάθετες στην καμπύλη επιφάνεια.



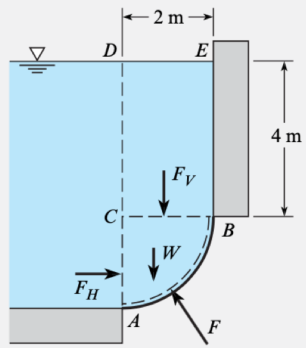
Παράδειγμα. Υδροστατική δύναμη σε καμπύλη επιφάνεια

EXAMPLE 3.9

Hydrostatic Force on a Curved Surface

Problem Statement

Surface AB is a circular arc with a radius of 2 m and a width of 1 m into the paper. The distance EB is 4 m. The fluid above surface AB is water, and atmospheric pressure prevails on the free surface of the water and on the bottom side of surface AB. Find the magnitude and line of action of the hydrostatic force acting on surface AB.



Define the Situation

Situation: A body of water is contained by a curved surface.

Properties: Water (10°C): Table A.5, $\gamma = 9810\ \text{N/m}^3$

State the Goal

Find:

1. Hydrostatic force (in newtons) on the curved surface AB
2. Line of action of the hydrostatic force

Generate Ideas and Make a Plan

Apply equilibrium concepts to the body of fluid ABC:

1. Find the horizontal component of F by applying Eq. (3.34).
2. Find the vertical component of F by applying Eq. (3.35).
3. Find the line of action of F by finding the lines of action of components and then using a graphical solution.

Take Action (Execute the Plan)

1. Force in the horizontal direction:

$$F_x = F_H = \bar{p}A = (5\ \text{m})(9810\ \text{N/m}^3)(2 \times 1\ \text{m}^2) = 98.1\ \text{kN}$$

2. Force in the vertical direction:

- Vertical force on side CB:

$$F_V = \bar{p}_0 A = 9.81\ \text{kN/m}^3 \times 4\ \text{m} \times 2\ \text{m} \times 1\ \text{m} = 78.5\ \text{kN}$$

- Weight of the water in volume ABC:

$$W = \gamma \mathcal{V}_{ABC} = (\gamma)(\tfrac{1}{4}\pi r^2)(w) = (9.81\ \text{kN/m}^3) \times (0.25 \times \pi \times 4\ \text{m}^2)(1\ \text{m}) = 30.8\ \text{kN}$$

- Summing forces:

$$F_y = W + F_V = 109.3\ \text{kN}$$

3. Line of action (horizontal force):

$$y_{cp} = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{\bar{y}A} = (5\ \text{m}) + \left(\frac{1 \times 2^3/12}{5 \times 2 \times 1}\text{m}\right)$$

$$y_{cp} = 5.067\ \text{m}$$

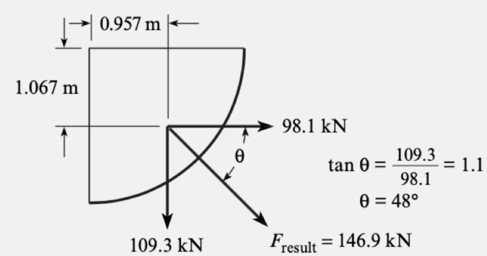
4. The line of action (x_{cp}) for the vertical force is found by summing moments about point C:

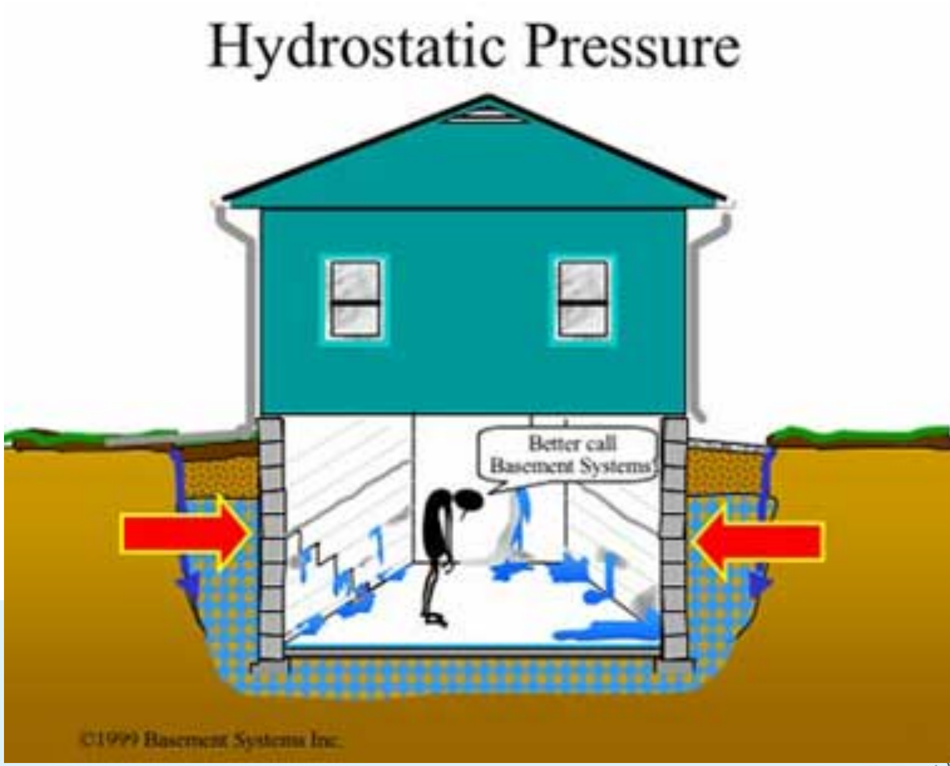
$$x_{cp}F_y = F_V \times 1\ \text{m} + W \times \bar{x}_w$$

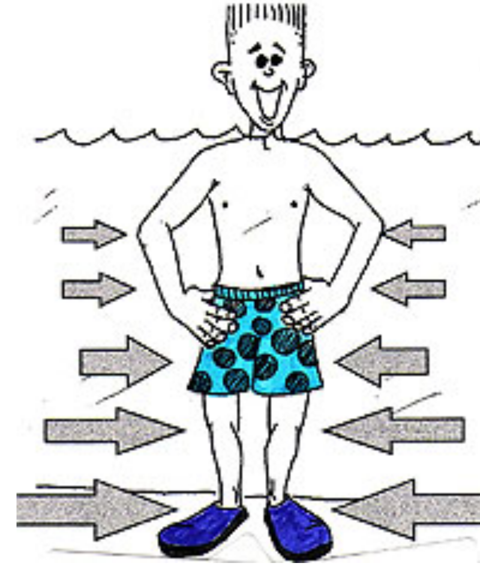
The horizontal distance from point C to the centroid of the area ABC is found using Fig. A.1: $\bar{x}_W = 4r/3\pi = 0.849$ m. Thus,

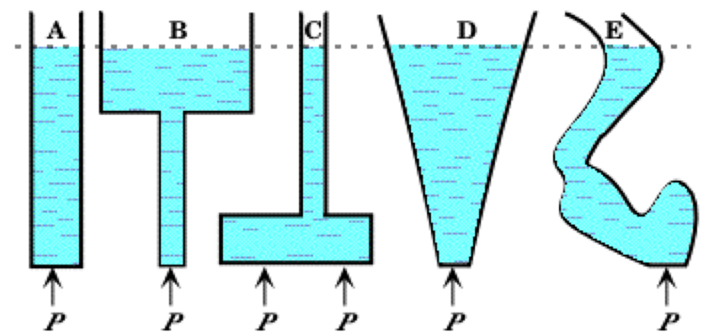
$$x_{cp} = \frac{78.5\ \text{kN} \times 1\ \text{m} + 30.8\ \text{kN} \times 0.849\ \text{m}}{109.3\ \text{kN}} = 0.957\ \text{m}$$

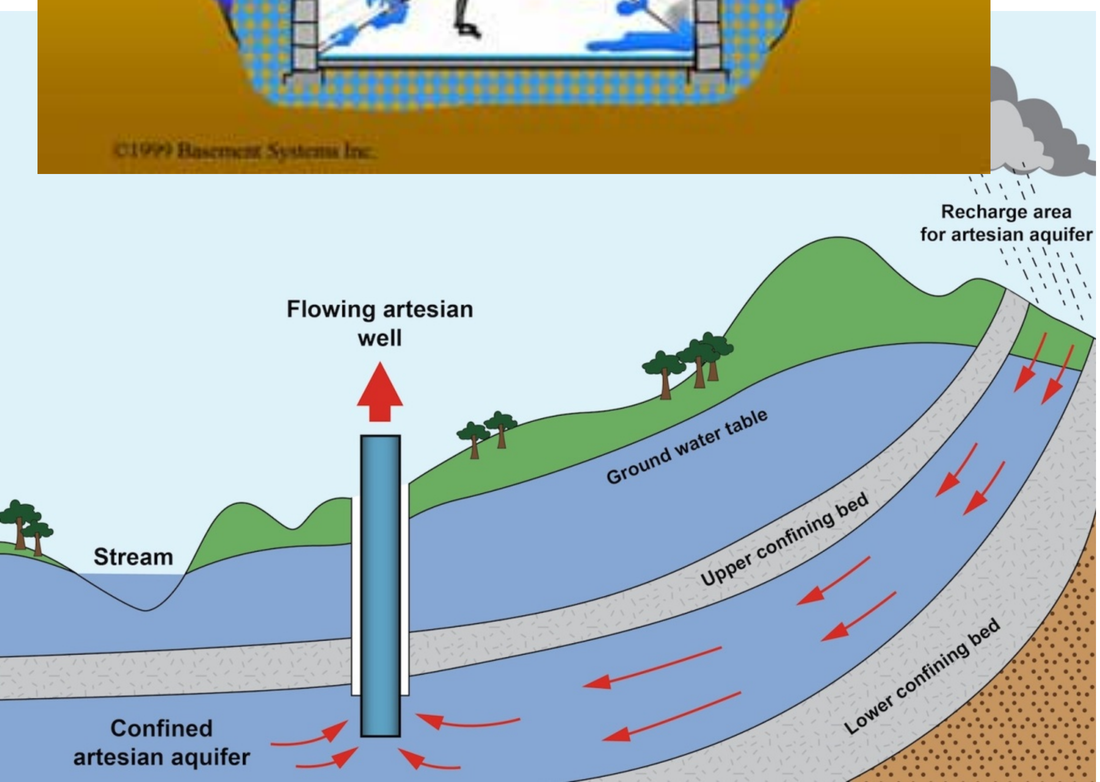
5. The resultant force that acts on the curved surface is shown in the following figure:

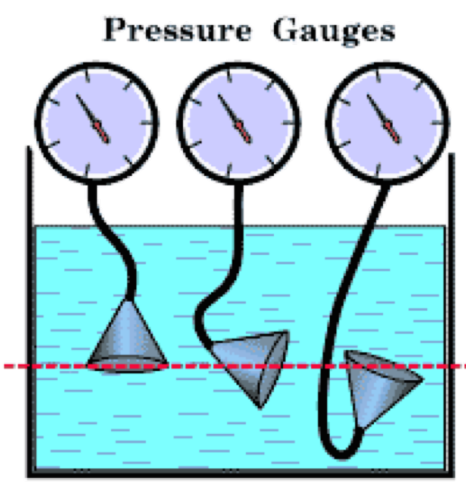



Hydrostatic Pressure
Better call Basement Systems!
©1999 Basement Systems Inc.

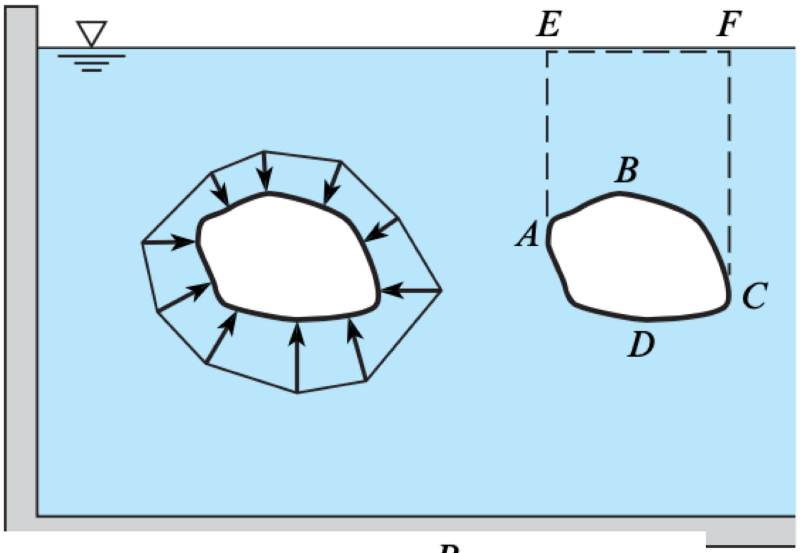


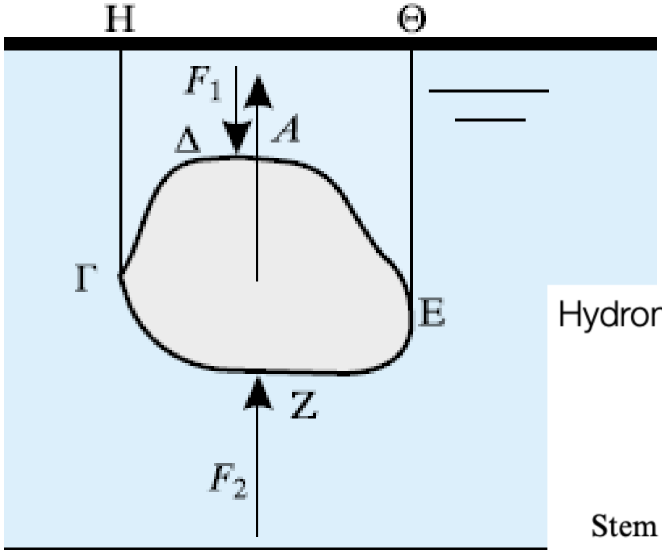

A
B
C
D
E
P
P
P
P
P
P

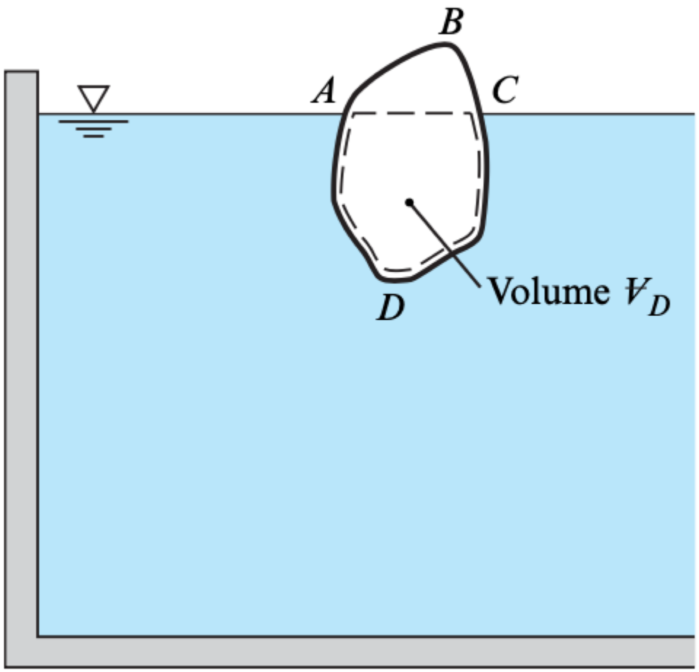

Recharge area
for artesian aquifer
Flowing artesian
well
Ground water table
Upper confining bed
Lower confining bed
Stream
Confined
artesian aquifer

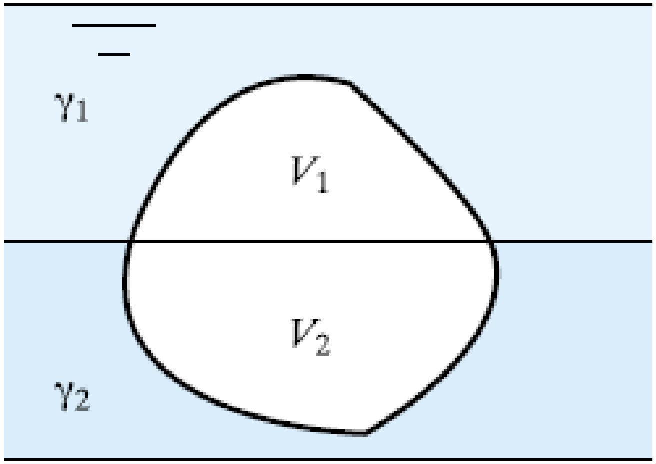

Pressure Gauges

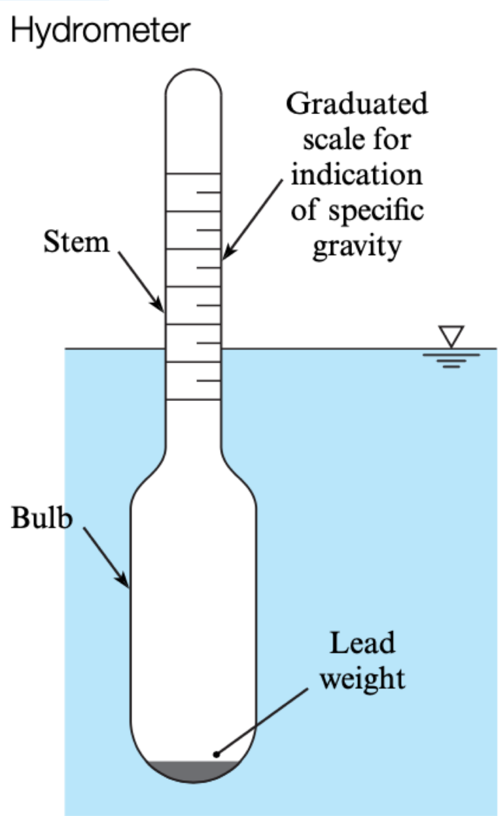
Άνωση


E
F
B
A
C
D

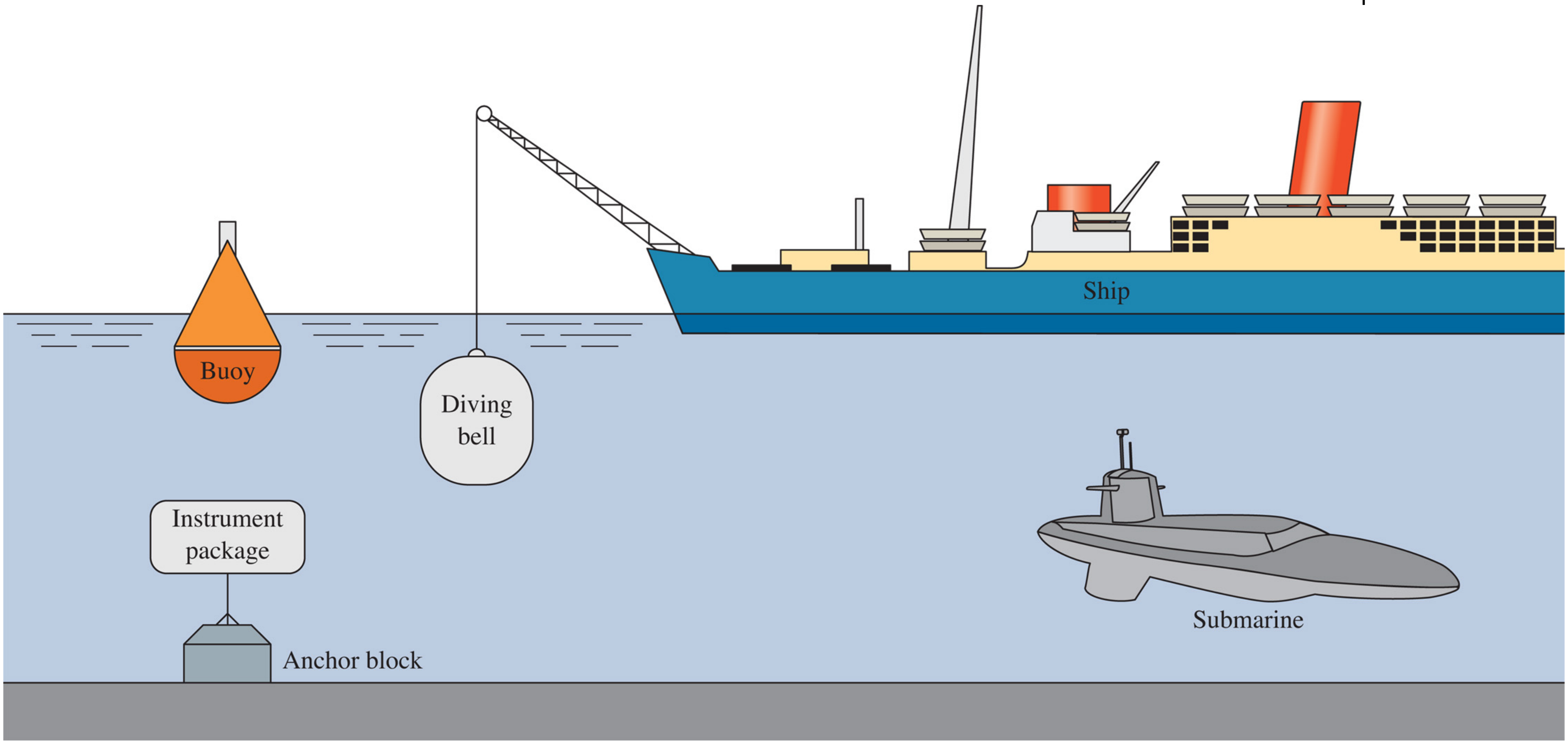

H
Θ
F_1
Δ
A
Γ
E
Z
F_2


B
A
C
D
Volume V_D

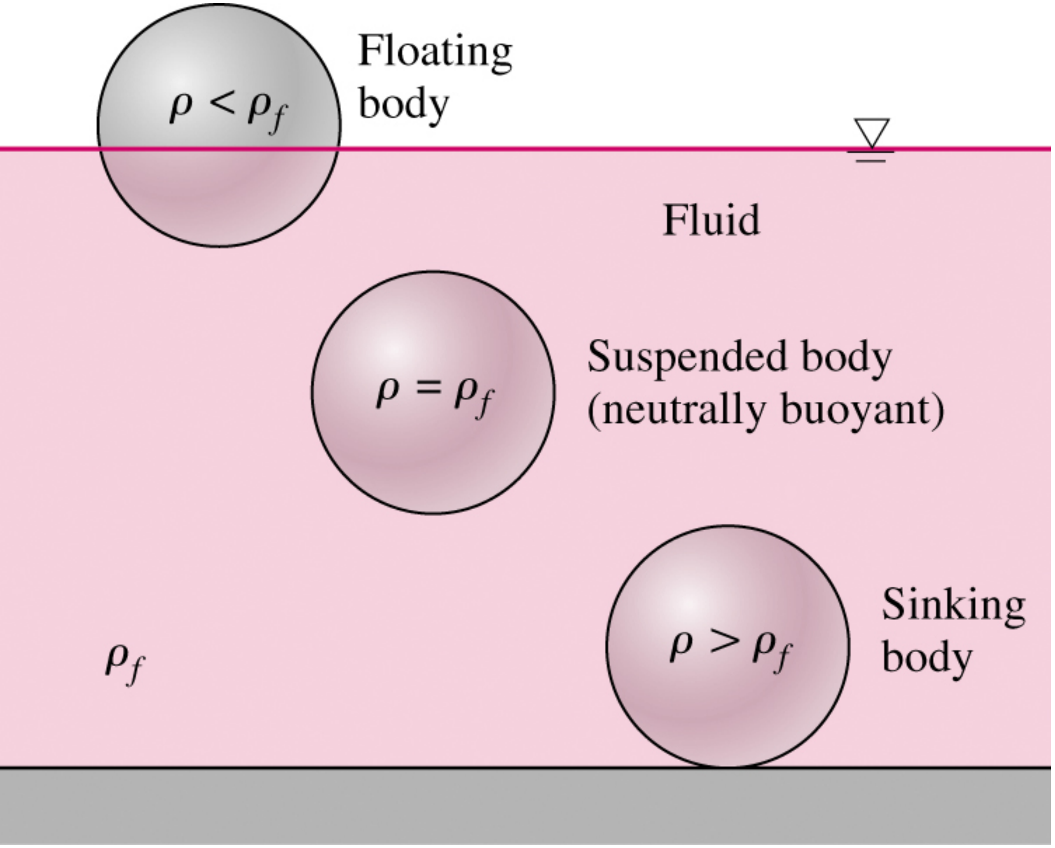

γ_1
V_1
V_2
γ_2


Hydrometer
Graduated scale for indication of specific gravity
Stem
Bulb
Lead weight

Παραδείγματα Άνωσης



Άνωση και σταθερότητα



- Η δύναμη άνωσης F_B ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου όγκου $= \gamma_f V_{displaced}$.

- 3 πιθανά σενάρια :
  1. $P_{body} < \rho_{fluid}$: Επίπλευση
  2. $P_{body} = \rho_{fluid}$: Αιώρηση
  3. $P_{body} > \rho_{fluid}$: Βύθιση

Θερμόμετρο Γαλιλαίου

- Μεταβολή της πυκνότητας του εμπεριοχόμενου στον κύλινδρο ρευστού
- Εξίσωση της δύναμης άνωσης με τα βαρίδια διαφόρων χρωμάτων
- Ανάγνωση της θερμοκρασίας

Παράδειγμα: Ναυπηγείο που επιπλέει

Μερικώς βυθισμένο

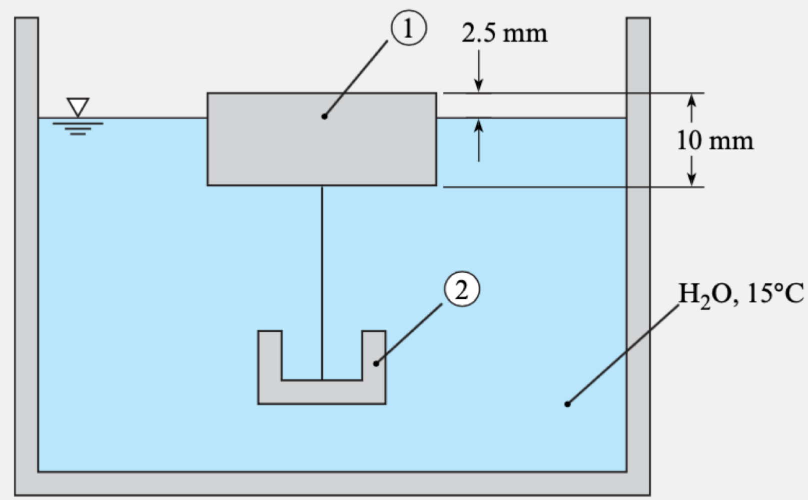
Επιπλέει μαζί με ένα υποβρύχιο

EXAMPLE 3.10

Buoyant Force on a Metal Part

Problem Statement

A metal part (object 2) is hanging by a thin cord from a floating wood block (object 1). The wood block has a specific gravity $S_1 = 0.3$ and dimensions of $50 \times 50 \times 10$ mm. The metal part has a volume of 6600 mm^3. Find the mass m_2 of the metal part and the tension T in the cord.



Define the Situation

A metal part is suspended from a floating block of wood.

Properties:

- Water (15°C): Table A.5, $\gamma = 9800$ N/m^3
- Wood: $S_1 = 0.3$

State the Goal

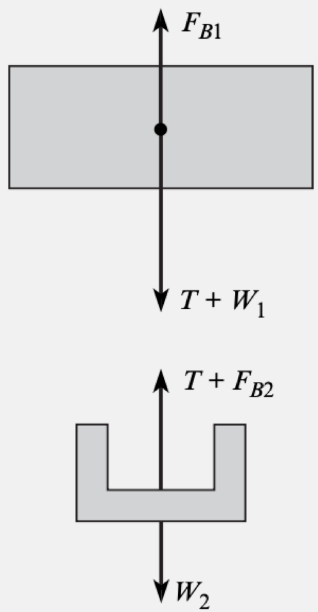
- Find the mass (in grams) of the metal part.
- Calculate the tension (in newtons) in the cord.

Generate Ideas and Make a Plan

1. Draw FBDs of the block and the part.
2. Apply equilibrium to the block to find the tension.
3. Apply equilibrium to the part to find the weight of the part.
4. Calculate the mass of the metal part using $W = mg$.

Take Action (Execute the Plan)

1. FBDs:



2. Force equilibrium (vertical direction) applied to block:

$$T = F_{B1} - W_1$$

- Buoyant force $F_{B1} = \gamma \forall_{D1}$, where $\forall_{D1}$ is the submerged volume:

$$\begin{aligned} F_{B1} &= \gamma \forall_{D1} \\ &= (9800\ \text{N/m}^3)(50 \times 50 \times 7.5\ \text{mm}^3)(10^{-9}\ \text{m}^3/\text{mm}^3) \\ &= 0.184\ \text{N} \end{aligned}$$

- Weight of the block:

$$\begin{aligned} W_1 &= \gamma S_1 \forall_1 \\ &= (9800\ \text{N/m}^3)(0.3)(50 \times 50 \times 10\ \text{mm}^3)(10^{-9}\ \text{m}^3/\text{mm}^3) \\ &= 0.0735\ \text{N} \end{aligned}$$

- Tension in the cord:

$$T = (0.184 - 0.0735) = \boxed{0.110\ \text{N}}$$

3. Force equilibrium (vertical direction) applied to metal part:

- Buoyant force:

$$F_{B2} = \gamma \forall_2 = (9800\ \text{N/m}^3)(6600\ \text{mm}^3)(10^{-9}) = 0.0647\ \text{N}$$

- Equilibrium equation:

$$W_2 = T + F_{B2} = (0.110\ \text{N}) + (0.0647\ \text{N})$$

4. Mass of metal part:

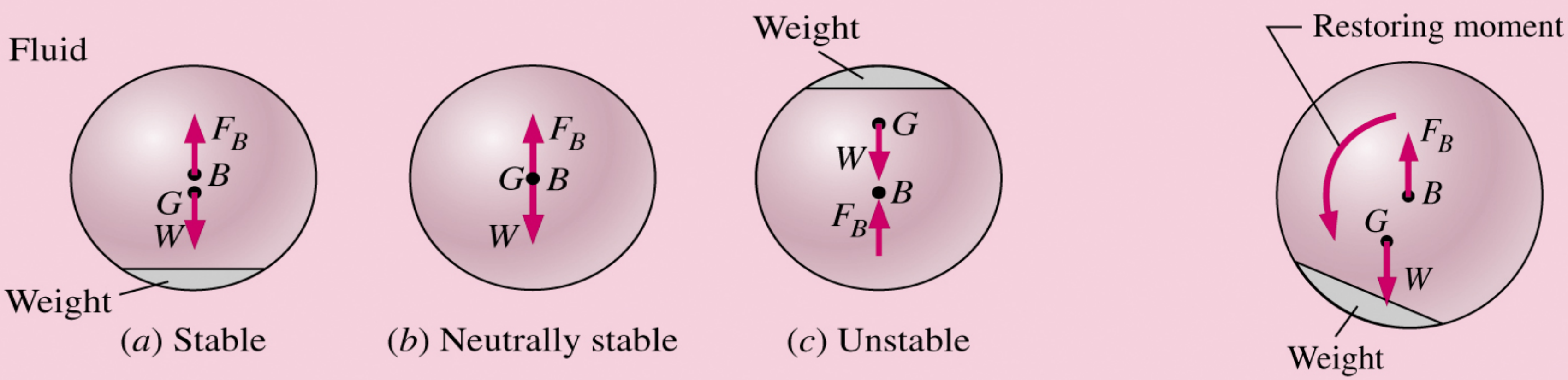
$$m_2 = W_2/g = \boxed{17.8\ \text{g}}$$

Review the Solution and the Process

Discussion. Notice that tension in the cord (0.11 N) is less than the weight of the metal part (0.18 N). This result is consistent with the common observation that an object will weigh less in water than in air.

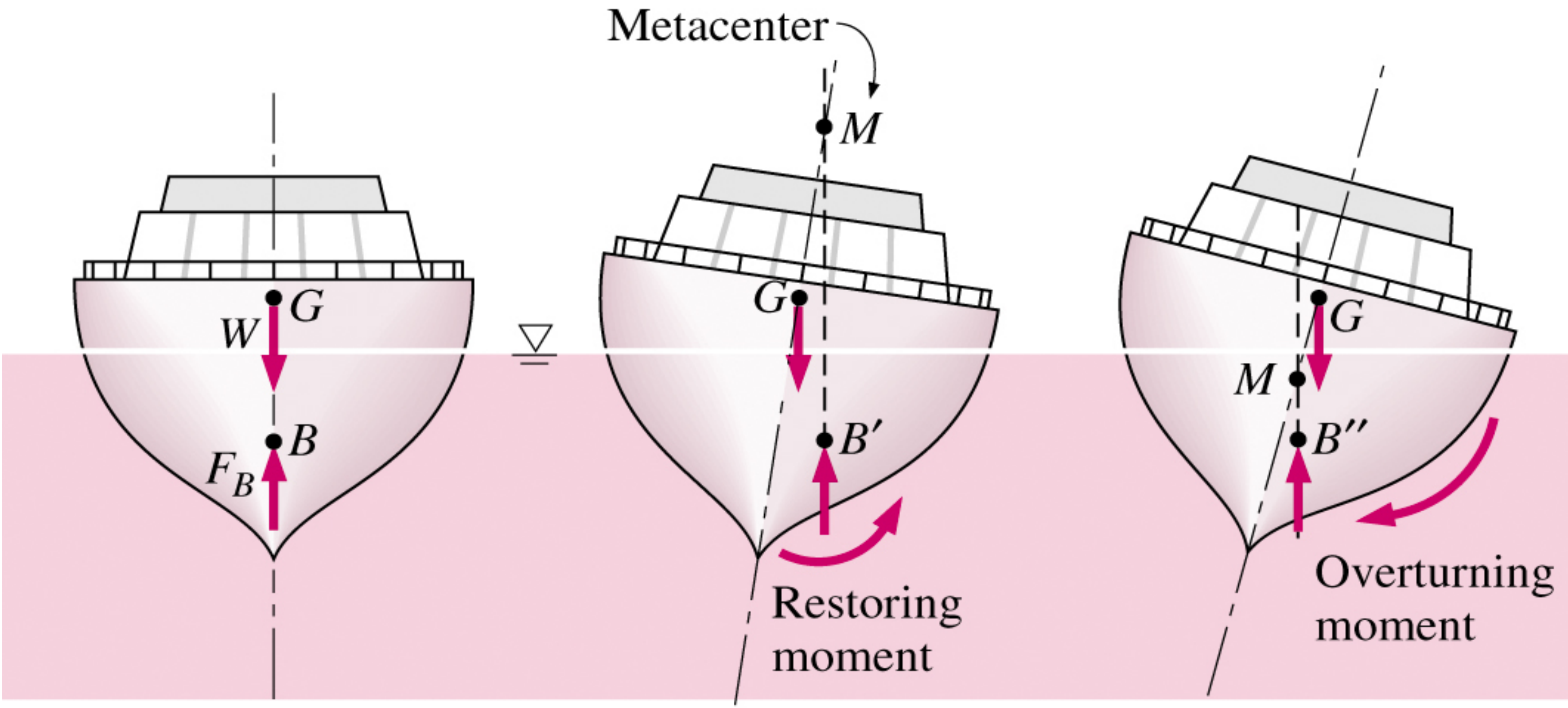
Tip. When solving problems that involve buoyancy, draw an FBD.

Σταθερότητα εμβαπτισμένων σωμάτων



- Η σταθερότητα σωμάτων εμβαπτισμένων σε ρευστό εξαρτάται από τη σχετική θέση του ***κέντρου βάρους G*** και του ***κέντρου άνωσης B***.
  - *G* κάτω από *B*: σταθερότητα
  - *G* πάνω από *B*: αστάθεια
  - *G* σύμπτωση με *B*: ουδετερο-σταθερότητα

Σταθερότητα επιπλεόντων σωμάτων

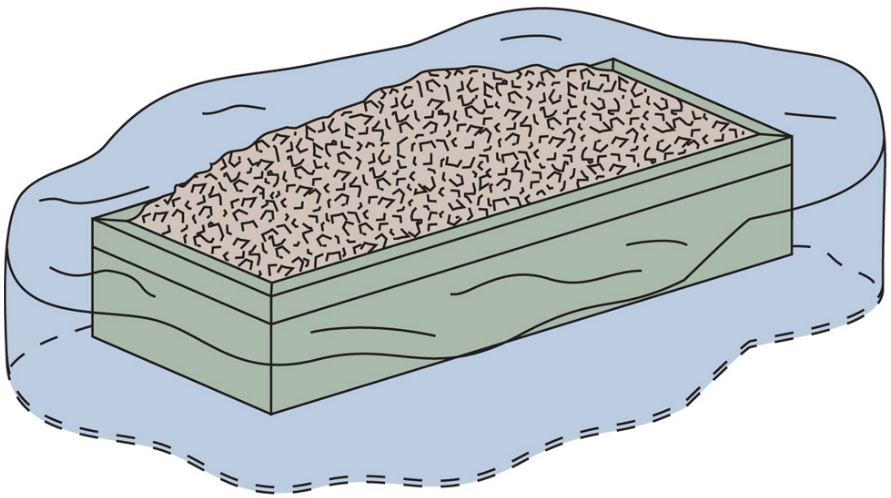


(*a*) Stable (*b*) Stable (*c*) Unstable

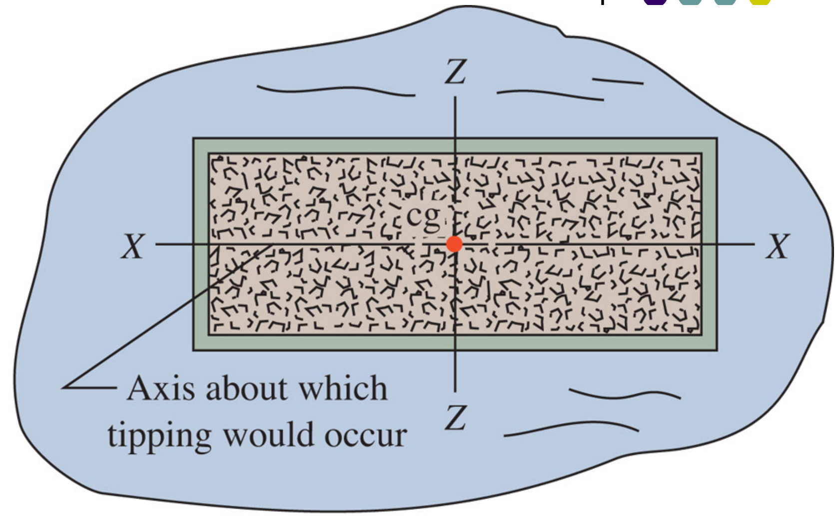
Επιπλέοντα σώματα μπορεί να είναι σταθερά όταν το **Κέντρο Βάρους *G*** είναι υψηλότερα από το **Κέντρο Άνωσης B** εξαιτίας της μετατόπισης του κέντρου άνωσης και της δημιουργίας επανορθωτικής δύναμης.

Σταθερά όταν το Μ είναι πάνω από το G, Ασταθή όταν το Μ είναι κάτω από το G.

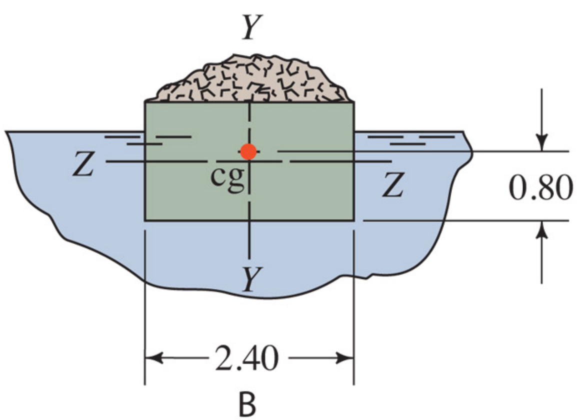
Σταθερότητα επιπλεόντων σωμάτων



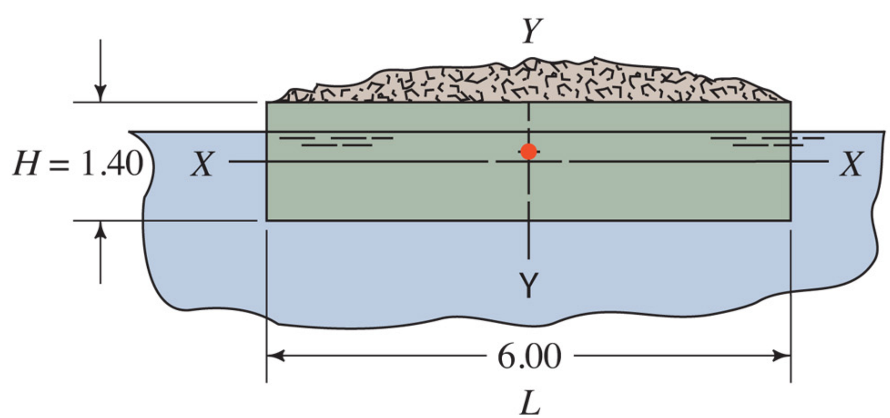
(a) Loaded flatboat



(b) Top view and horizontal cross section



(c) Front view and vertical cross section



(d) Side view

Παράδειγμα 2.15

Κομμάτι μετάλλου ζυγίζει στον αέρα 2 N και στο νερό 1,4 N. Να υπολογισθεί ο όγκος του μετάλλου. Δίνεται $\gamma_{νερού} = 9800 \text{ N/m}^3$.

Λύση

Αν αγνοήσουμε την άνωση στον αέρα, τότε μπορούμε να πούμε ότι η μέτρηση στην ατμόσφαιρα μας δίνει το πραγματικό βάρος του σώματος. Έτσι στο νερό θα ισχύει:

$$B_{φαιν.} = B - A \Rightarrow 1{,}4 = 2 - V \times 9800 \Rightarrow \quad V = \frac{2 - 1{,}4}{9800} = 61{,}2 \text{ cm}^3$$

Παράδειγμα 2.16

Κύβος ακμής a επιπλέει σε υδράργυρο ειδικού βάρους γ_1 έτσι ώστε το 1/4 της ακμής του να είναι βυθισμένο στον υδράργυρο. Προσθέτουμε νερό, ειδικού βάρους γ_2, έτσι ώστε το νερό μόλις να καλύψει το κύβο. Να βρεθεί το ποσοστό της ακμής του κύβου που είναι βυθισμένο στον υδράργυρο.

Λύση

Στην πρώτη περίπτωση θα ισχύει: $A_1 = B \Rightarrow \dfrac{a}{4} a^2 \gamma_1 = a^3 \gamma \Rightarrow \gamma = \dfrac{\gamma_1}{4}$,

όπου γ είναι το ειδικό βάρος του σώματος.

Στη δεύτερη περίπτωση αν υποθέσουμε ότι το βυθισμένο τμήμα της ακμής στον υδράργυρο είναι x, θα έχουμε εφόσον το τμήμα της ακμής στο νερό είναι $(a - x)$,

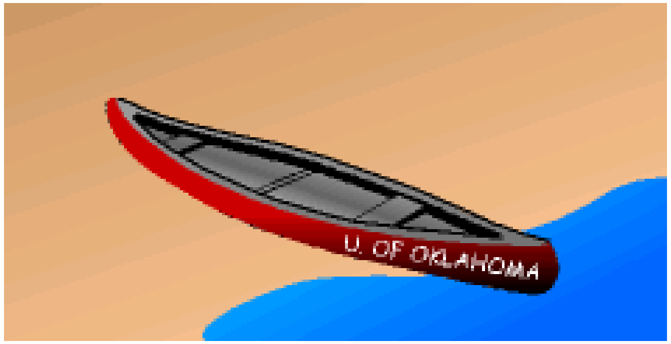
$$A_1 + A_2 = B \quad \Rightarrow$$

$$\gamma_1 x \; a^2 + \gamma_2 (a - x) \; a^2 = a^3 \gamma \;\Rightarrow\; x\gamma_1 + a \;\; \gamma_2 - x\gamma_2 = \frac{\gamma_1 a}{4} \;\Rightarrow$$

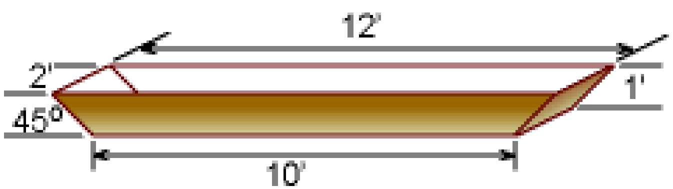
$$4x\gamma_1 + 4a\gamma_2 - 4x\gamma_2 = \gamma_1 a \quad \Rightarrow \quad 4x\,(\gamma_1 - \gamma_2) = a\,(\gamma_1 - 4\gamma_2) \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{a \;\; (\gamma_1 - 4\gamma_2)}{4(\gamma_1 - \gamma_2)}, \qquad \%\,\text{ποσοστό της ακμής} = \frac{\gamma_1 - 4\gamma_2}{4(\gamma_1 - \gamma_2)} \times 100$$

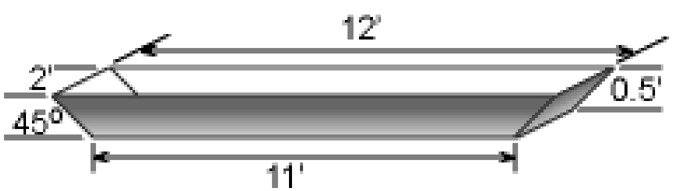
Άνωση (Πρόβλημα)



Canoe



Design Diagram A



Design Diagram B

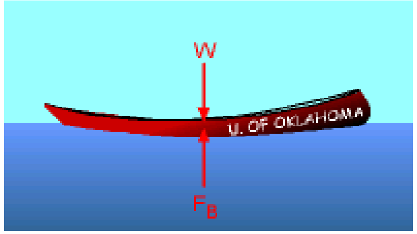
In preparation for the upcoming Concrete Canoe Competition, the University of Oklahoma chapter of the American Society of Civil Engineers (ASCE) is currently soliciting design ideas from its student members. Two canoe design layouts (as shown in the figures) have been received so far. These designs are similar in shape but with different dimensions. Assume either canoe weighs 120 pounds and the total weight of the paddlers and gear is 630 pounds.

Question

Based on a simple buoyancy analysis, determine if the designs will float or sink by calculating the submerged waterline.

Approach

- For a simple analysis, use a single concentrated load instead of distributed load.
- Assume a fluid density of 1.94 slugs/ft^3.



Force Equilibrium

The total weight of the canoe and the paddlers is

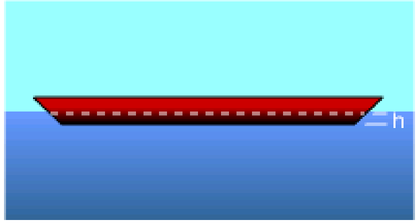
$$W = 120 \text{ lb} + 630 \text{ lb} = 750 \text{ lb}$$

For equilibrium, the total weight must be balanced by the buoyant force. That is,

$$W = F_B$$

where the buoyant force is the weight of the liquid displaced by the volume and is given by

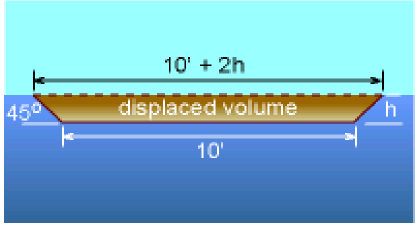
$$F_B = \rho g V_{displaced}$$



Submerged Water Line

The submerged waterline is denoted as h and the displaced volume for each design will be expressed in terms of h as follows:

For Design Layout A:



Displaced Volume of Design Layout A

The displaced volume of layout A is given by

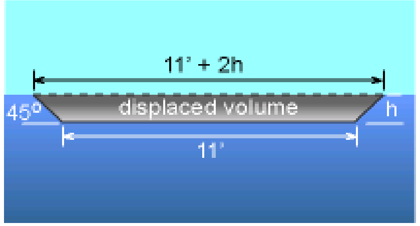
$$V_{displaced} = 2(10 + h)h$$

Applying force equilibrium yields

$$750 = (1.94)\,(32.2)\,(2)\,(10 + h)h$$
$$h^2 + 10h - 6 = 0$$
$$h = 0.57 \text{ ft}$$

The submerged height h (0.57 ft) is less than the height of the canoe (1 ft), hence this canoe will float.

For Design Layout B:



Displaced Volume of Design Layout B

The displaced volume of layout B is given by

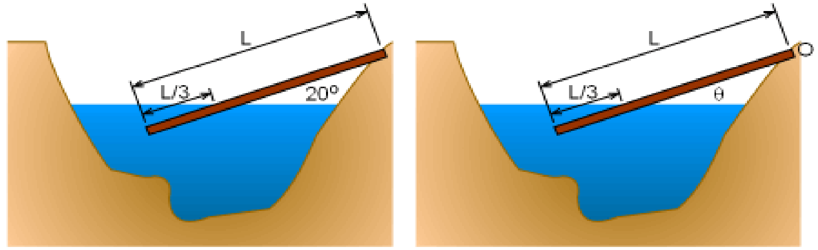
$$V_{displaced} = 2(11 + h)h$$

Applying force equilibrium yields

$$750 = (1.94)\,(32.2)\,(2)\,(11 + h)h$$
$$h^2 + 11h - 6 = 0$$
$$h = 0.52 \text{ ft}$$

The submerged height h (0.52 ft) is greater than the height of the canoe (0.5 ft), hence this canoe will sink.

A wooden telephone pole falls into a lake as shown. What is the density of the pole?



The pole will come to a static position where the sum of the moments about the point O is equal to zero.

$\Sigma M_o = 0$

Therefore, the buoyancy force multiplied by its lever arm must be equal and opposite the gravitational force times its lever arm.

$\Sigma M_o = 0 = (W_{pole}L_{pole} - F_B L_B)\cos\theta$ where

$L_{pole} = L/2$ (gravity acts uniformly along the entire length), and

$L_B = L - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{5L}{6}$ (buoyancy force acts at the centroid of the submerged part of the pole)

Note: θ is not needed since it factors out of the equation.

From the sum of the moments equal zero,

$W_{pole}L_{pole} = F_B L_B$

where

$$W_{pole} = (\text{density})(\text{volume})(\text{gravity})$$

$$= \rho_{pole}\left(\frac{\pi}{4}d^2 L\right)g$$

$$F_B = (\text{density})(\text{gravity})(\text{submerged volume})$$

$$= \gamma_{water}\left(\frac{\pi}{4}d^2\frac{L}{3}\right)$$

$$W_{pole}L_{pole} = F_B L_B$$

$$\left(\rho_{pole}\frac{\pi}{4}d^2 L g\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \gamma_{water}\left(\frac{\pi}{12}d^2 L\right)\left(\frac{5L}{6}\right)$$

Cancelling $\pi d^2 L^2$

$$\frac{\rho_{pole}g}{8} = \frac{5\gamma_{water}}{72}$$

Multiplying both sides by 8/g

$$\rho_{pole} = \frac{5\gamma_{water}}{9g} = \frac{5(62.4)}{9(32.2)}$$

$$= 1.08\ lb_f\text{-}s^2/ft^4$$

$$= 1.08\ slugs/ft^3$$

(Note: 1 slug = 1 $lb_f\text{-}s^2/ft$)

Άνωση (Πρόβλημα)

Ένα αερόστατο έχει όγκο 3.000 m^3 και είναι γεμάτο με θερμό αέρα πυκνότητας 0,97 kg/m^3. Το αερόστατο έχει μάζα 500 kg και περιβάλλεται από ψυχρό αέρα πυκνότητας 1,26 kg/m^3. Πόσους ανθρώπους 75 kg μπορεί να σηκώσει;

Άνωση (Απάντηση προβλήματος)

Η μάζα του αέρα που εκτοπίζει το αερόστατο είναι:

$$1.26\ \mathrm{kg/m^3} \times 3000\ \mathrm{m^3} = 3780\ \mathrm{kg}$$

Αυτή η μάζα ζυγίζει $3780 \times g = $ άνωση

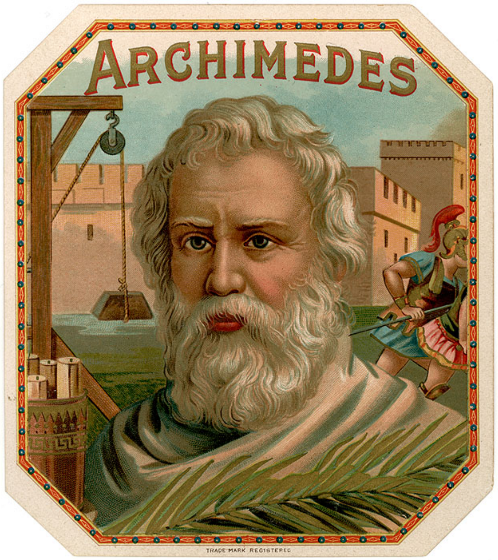
$$\text{Άνωση} = B_{\text{αεροστάτου}} + B_{\text{θερμού αέρα μπαλονιού}} + B_{\text{ανθρώπων}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3780 \times g) = (500 \times g) + (0{,}97 \times 3000 \times g) + (m_{\text{ανθρώπων}} \times g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\text{ανθρώπων}} = 370\ \mathrm{kg} = 4{,}93\ \text{άτομα} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Λύση : 4 άτομα

Το χρυσό στέμμα του βασιλιά των Συρακουσών



- Αρχιμήδης, 287-212 π.Χ.
- Ο βασιλιάς υποψιάστηκε ότι ο σιδηρουργός αντικατέστησε χρυσό από το στέμμα με ασήμι και ζήτησε τη βοήθεια του Αρχιμήδη για να το επαληθεύσει
- Ο Αρχιμήδης έπρεπε να βρεί μια μη καταστροφική μέθοδο δοκιμής

Το χρυσό στέμμα του βασιλιά των Συρακουσών

- Το βάρος του στέμματος και το βάρος του καθαρού χρυσού τον αέρα είναι ίδια:
  $$W_c=\rho_c V_c = W_{Au}=\rho_{Au} V_{Au}$$
- Αν το στέμμα είναι από καθαρό χρυσό τότε $\rho_c=\rho_{Au}$ και επειδή $W_c = W_{Au}$ τότε και οι όγκοι τους είναι ίδιοι, $V_c=V_{Au}$
- Στο νερό η άνωση είναι
  $A_c=\rho_{H2O} V_c$ για το στέμμα και
  $A_{Au}=\rho_{H2O} V_{Au}$ για τον καθαρό χρυσό
  και επειδή οι όγκοι είναι ίδιοι και η πυκνότητα του νερού ίδια θα πρέπει να ισορροπεί
- Αν δεν ισορροπεί τότε $V_c \neq V_{Au}$, πράγμα που σημαίνει ότι και $\rho_c \neq \rho_{Au}$
- Ο σιδηρουργός ήταν απατεώνας τελικά …!

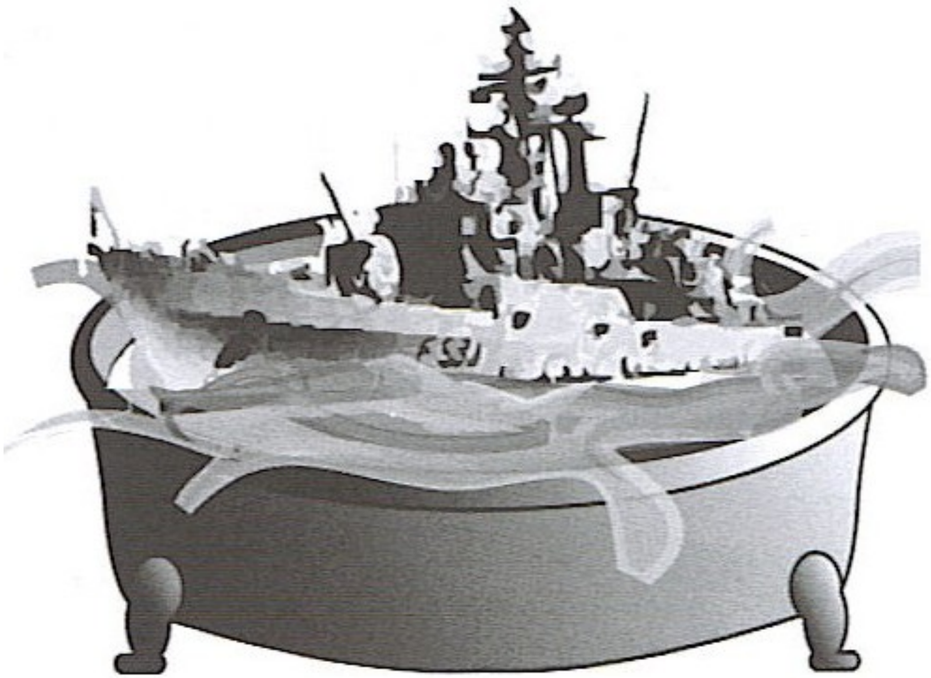
Υδροστατική λιπομέτρηση

- Μέτρηση βάρους σώματος $W=\rho_{body}V$
- Είσοδος σε δοχείο με νερό και μέτρηση φαινόμενου βάρους στο νερό W_a
- Άνωση $A = W-W_a = \rho_{H2O}V$ και άρα υπολογίζεται ό όγκος του σώματος ρ_{body}=W/V
- Το % λίπους ως συνεισφορά στην πυκνότητα του ανθρώπινου σώματος υπολογίζεται από τύπους

Υδροστατική λιπομέτρηση στον αέρα

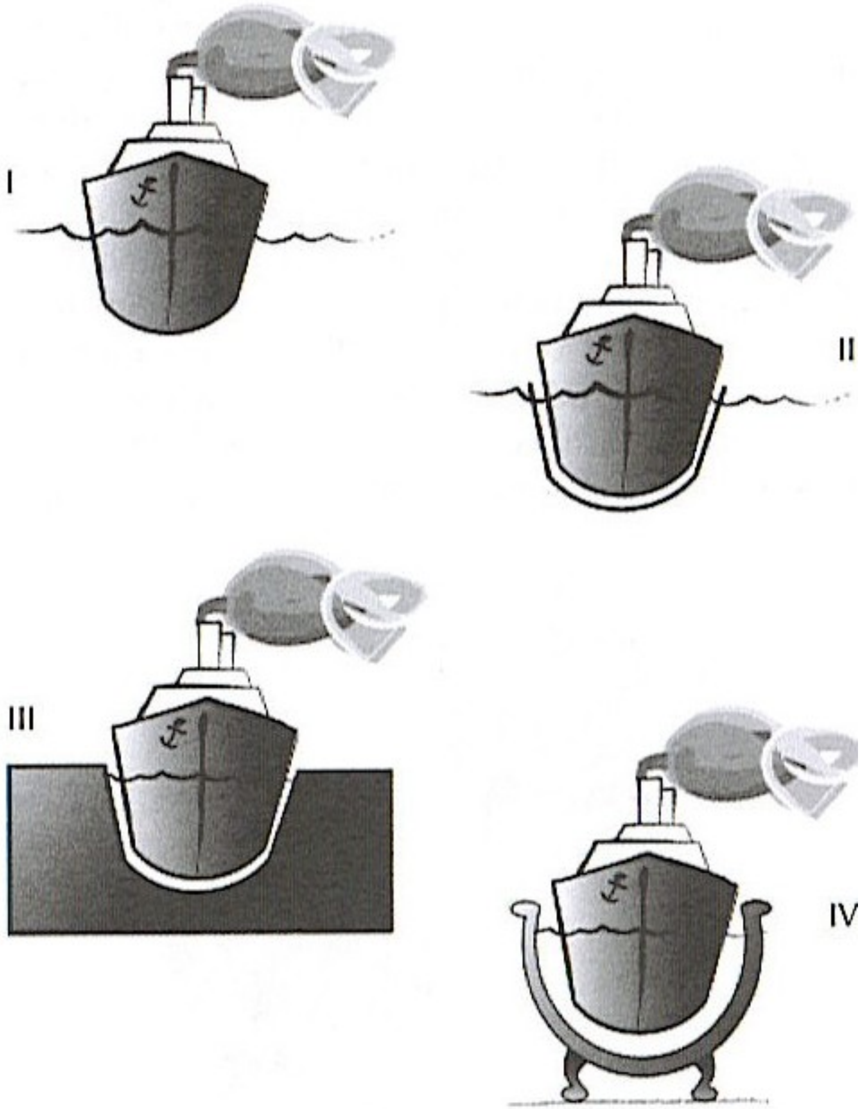
- Ίδια μέθοδος με την προηγούμενη
- Τι διαφέρει η χρήση αέρα ?
  - Η πυκνότητα του αέρα είναι 0,1% της πυκνότητας του νερού
  - Εξάρτηση της πυκνότητας με τη θερμοκρασία
  - Μετρήσεις μικρών όγκων

Στατική των Ρευστών



Μπορεί ένα θωρηκτό να επιπλέει σε μια μπανιέρα;

Στατική των Ρευστών



Και όμως μπορεί !!!

Ρευστά σε επιτάχυνση

Μεταβολή της πίεσης για ρευστό που ηρεμεί (υπό μορφή συνιστωσών):

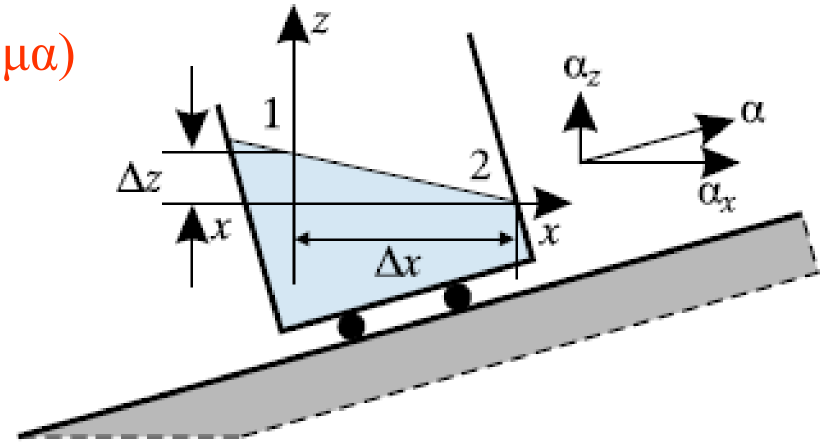
$$\frac{\theta P}{\theta \chi} = 0 \qquad \frac{\theta P}{\theta y} = 0 \qquad \boxed{\frac{\theta P}{\theta z} = -\gamma = -\rho g} \Rightarrow dP = -\rho g dz$$

($\gamma = \rho g$ για ομογενή και ασυμπίεστα ρευστά)

ή $\boxed{\mathbf{P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1)}}$ όπου το h μετριέται προς τα κάτω $h = -z$

(υδροστατικός νόμος της μεταβολής πίεσης)

Για επιταχυνόμενο ρευστό (βλ. διπλανό σχήμα)



$$dp = -\varrho \alpha_x dx - \varrho (g + \alpha_z) dz$$

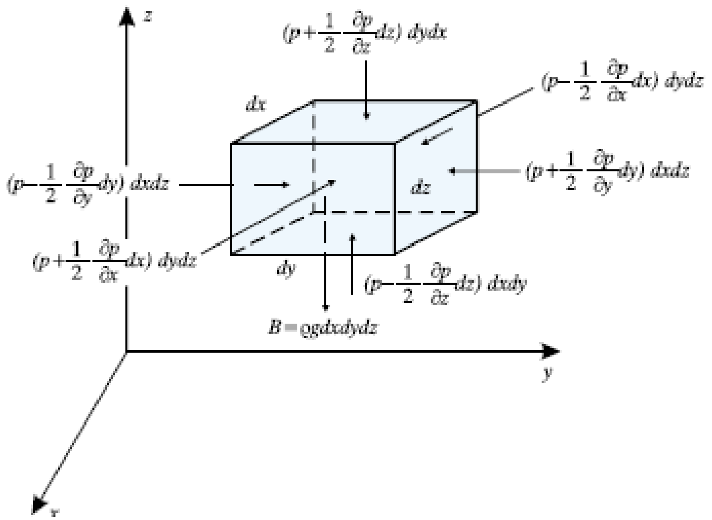
$$p_2 - p_1 = -\varrho \alpha_x (x_2 - x_1) - \varrho (g + \alpha_z)(z_2 - z_1)$$

Για $p_1 = p_2$ (ελεύθερη επιφάνεια)

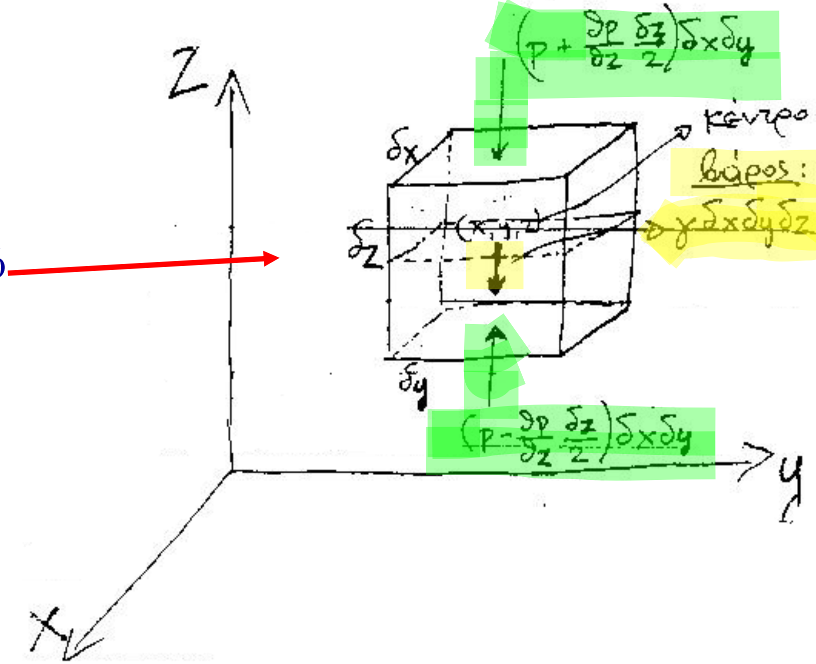
$$\tan\theta = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha_x}{g + \alpha_z}$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού με την οριζόντια επιφάνεια.

Μεταβολή της πίεσης στα ρευστά



Στοιχείο ρευστού
που ηρεμεί



Δυνάμεις που ενεργούν στο ρευστό: α) πιέσεις, β) βάρος

$$\delta F_z = -\left(P+\frac{\theta P}{\theta z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta\chi\ \delta y + \left(P-\frac{\theta P}{\theta z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta\chi\ \delta y - \gamma\delta\chi\delta y\delta z = -\frac{\theta P}{\theta z}\delta\chi\delta y\delta z - \gamma\delta\chi\delta y\delta z$$

$$\delta F_x = -\frac{\theta P}{\theta \chi}\delta\chi\delta y\delta z \qquad\qquad \delta F_y = -\frac{\theta P}{\theta y}\delta\chi\delta y\delta z$$

Το άνυσμα της συνισταμένης δύναμης που ενεργεί στο σημείο είναι:

$$\delta F = i\delta F_x + j\delta F_y + k\delta F_z = -\left(i\frac{\theta P}{\theta \chi}+j\frac{\theta P}{\theta y}+k\frac{\theta P}{\theta z}\right)\delta\chi\delta y\delta z - k\gamma\ \delta\chi\delta y\delta z,$$

και επειδή ηρεμεί το ρευστό ηρεμεί $\frac{\delta F}{\delta V} = 0$ (δύναμη / μονάδα όγκου = 0)

Ρευστά σε επιτάχυνση

Μεταβολή της πίεσης για ρευστό που ηρεμεί (υπό μορφή συνιστωσών):

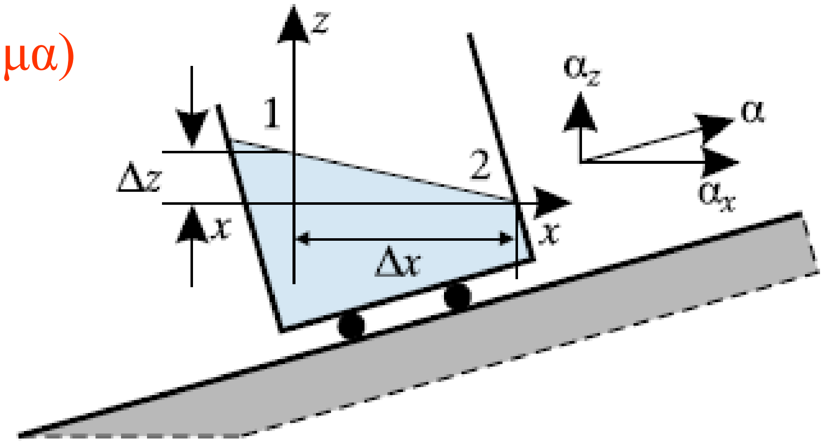
$$\frac{\partial P}{\partial \chi} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma = -\rho g} \Rightarrow dP = -\rho g dz$$

($\gamma = \rho g$ για ομογενή και ασυμπίεστα ρευστά)

ή $\boxed{\mathbf{P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1)}}$ όπου το h μετριέται προς τα κάτω $h = -z$

(υδροστατικός νόμος της μεταβολής πίεσης)

Για επιταχυνόμενο ρευστό (βλ. διπλανό σχήμα)



$$dp = -\varrho \alpha_x dx - \varrho (g + \alpha_z) dz$$

$$p_2 - p_1 = -\varrho \alpha_x (x_2 - x_1) - \varrho (g + \alpha_z)(z_2 - z_1)$$

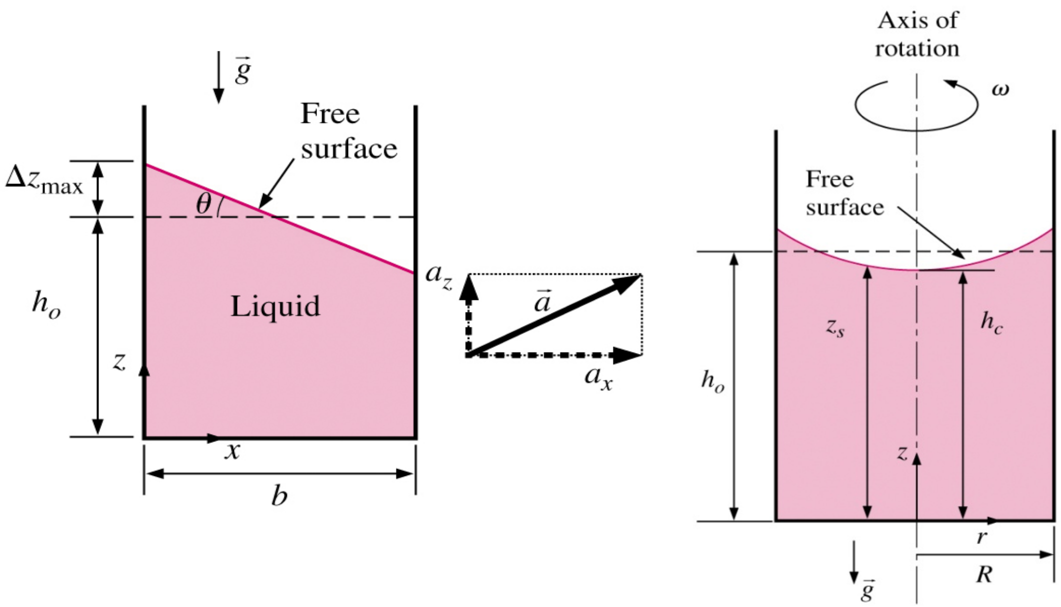
Για $p_1 = p_2$ (ελεύθερη επιφάνεια)

$$\boxed{tan\theta = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha_x}{g + \alpha_z}}$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού με την οριζόντια επιφάνεια.

Rigid-Body Motion

- There are special cases where a body of fluid can undergo rigid-body motion: **linear acceleration**, and **rotation of a cylindrical container**.



- Newton's 2nd law of motion can be used to derive an **equation of motion** for a **fluid that acts as a rigid body** (Cartesian coordinates):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y, \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho\left(g + a_x\right)$$

Linear Acceleration

Container is moving on a straight path

$$a_x \neq 0, a_y = a_z = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho a_x, \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Total differential of P

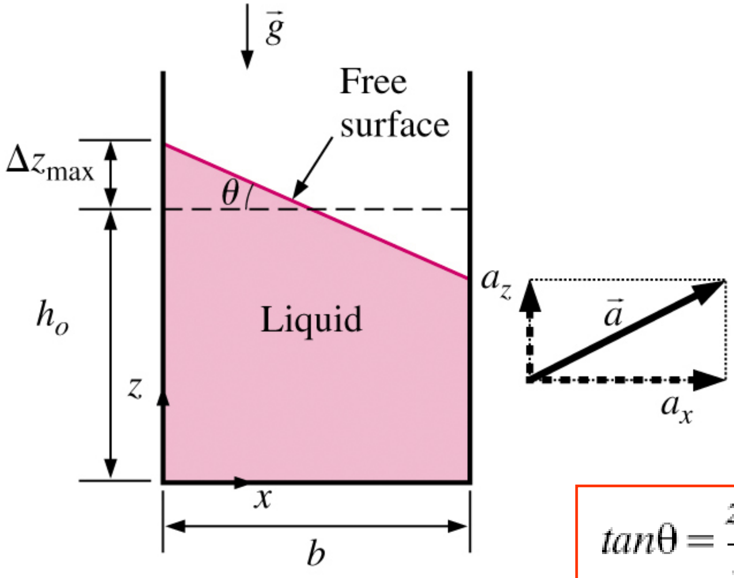
$$dP = -\rho a_x dx - \rho g dz$$

Pressure difference between 2 points

$$P_2 - P_1 = -\rho a_x \left(x_2 - x_1\right) - \rho g \left(z_2 - z_1\right)$$

Find the rise by selecting 2 points on free surface $P_2 = P_1$

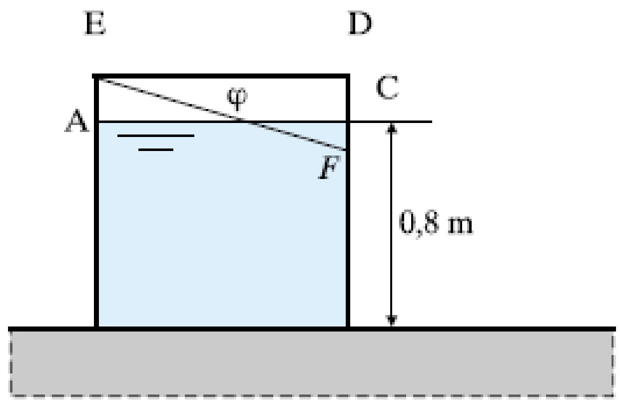
$$\Delta z_s = z_{s2} - z_{s1} = -\frac{a_x}{g}\left(x_2 - x_1\right)$$



$$\boxed{tan\theta = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} = \frac{a_x}{g + a_z}}$$

Παράδειγμα 2.17

Κύβος ακμής $\alpha = 1$ m περιέχει νερό μέχρι ύψους 0,8 m και βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί η μεγίστη οριζόντια επιτάχυνση που μπορεί να δεχθεί το δοχείο, έτσι ώστε να μην χυθεί το νερό εκτός δοχείου.



Λύση

Με την βοήθεια του Σχήματος και από το γεγονός ότι ο κενός όγκος ACDE πριν την επιτάχυνση πρέπει να είναι ίσος με τον όγκο EDF, μετά την επιτάχυνση έχουμε

$$0{,}2 \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \times 1 \times z \times 1 \;\Rightarrow\; z = 0{,}4\text{ m} \;\Rightarrow\; \varepsilon\varphi\varphi = \frac{z}{\overline{ED}} = \frac{0{,}4}{1} = 0{,}4$$

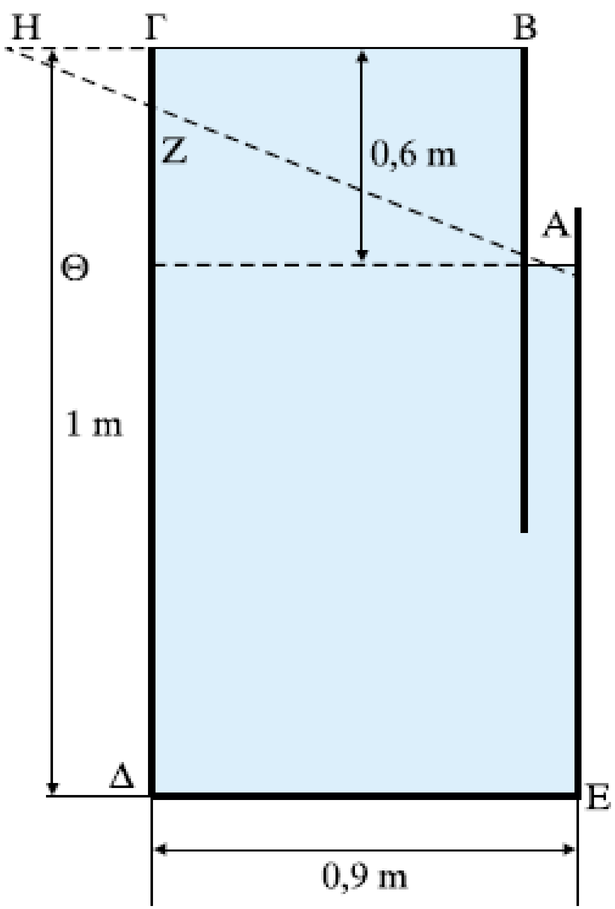
$$\boxed{tan\theta = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha_x}{g + \alpha_z}}$$

Από την εξίσωση (2.62) θα έχουμε: $0{,}4 = \dfrac{\alpha_x}{g} \Rightarrow \alpha_x = 3{,}92\text{ m/sec}^2$

Παράδειγμα 2.18

Το δοχείο του Σχήματος περιέχει λάδι και επιταχύνεται οριζόντια με 2,4 m/s^2. Να βρεθούν οι πιέσεις στα σημεία Β,Γ,Δ,Ε. ϱ=800 kg/m^3.

$$\boxed{tan\theta = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha_x}{g + \alpha_z}}$$



Λύση

Το επίπεδο μηδενικής πίεσης που περνά από το Α έχει κλίση:

$$\tan\theta = \frac{\alpha_x}{g} = \frac{2,4}{9,81} = 0,24 \Rightarrow \theta = 13,7°$$

Αν το πάχος του ανοίγματος θεωρηθεί αμελητέο, η υποθετική ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού πίεσης $p=0$ είναι η ΑΖΗ. Από το τρίγωνο ΑΘΖ έχουμε: $\overline{ΘΖ}=\overline{ΘΑ}\tan\theta=0,9\times 0,24=0,216$ m. Άρα $\overline{ΖΓ}=0,6-0,216=0,384$ m.

Τα σημεία Α, Ζ έχουν πίεση μηδέν. Έτσι οι πιέσεις στα ζητούμενα σημεία είναι:

$$p_B = -\varrho g\,\overline{AB} = -800 \times 9,8 \times 0,6 = -4704 \text{ Pa},$$

$$p_\Gamma = -\varrho g\,\overline{Z\Gamma} = -800 \times 9,8 \times 0,384 = -3010 \text{ Pa},$$

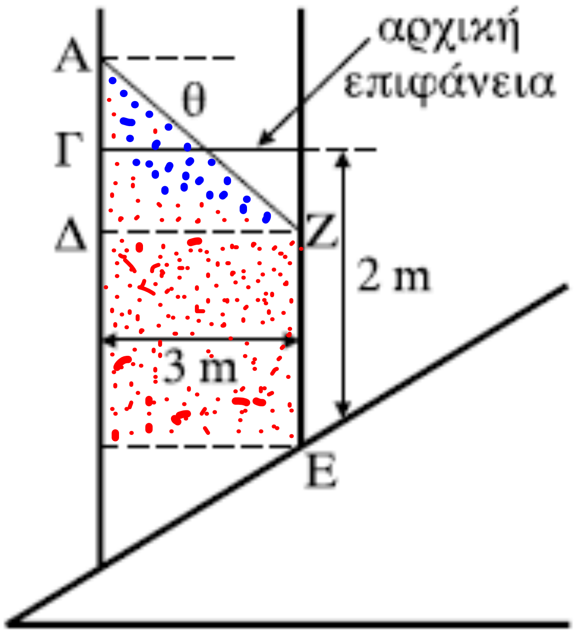
$$p_\Delta = \varrho g\,\overline{Z\Delta} = 800 \times 9,81 \times 0,616 = 4829 \text{ Pa},$$

$$p_E = \varrho g\,\overline{AE} = 800 \times 9,81 \times 0,4 = 3136 \text{ Pa},$$

Παράδειγμα 2.19

Δοχείο που περιέχει λάδι σχετικής πυκνότητας 0,8 ανέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος $\varphi = 30^\circ$ με επιτάχυνση $\alpha = 8\ m/s^2$. Να βρεθεί η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας και η πίεση στο Ε.

$$\boxed{tan\theta = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha_x}{g + \alpha_z}}$$



Λύση

Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης είναι:

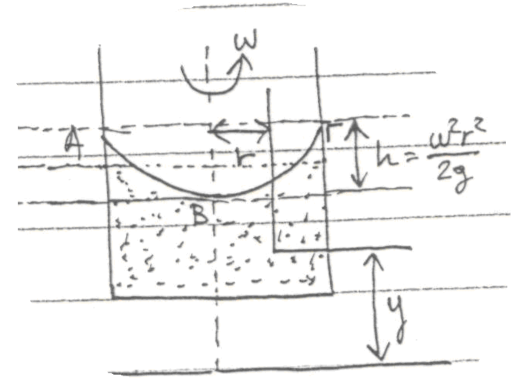
$$\alpha_x = \alpha\cos30^\circ = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ m/s^2, \qquad \alpha_z = \alpha\sin30^\circ = 4\ m/s^2$$

Έτσι έχουμε: $\tan\theta = \dfrac{\alpha_x}{\alpha_z + g} = 0{,}5 \ \Rightarrow\ \theta = 26{,}6^\circ$

ΑΔ=3tanθ=1,5 m, ΓΔ=1/2 ΑΔ=0,75 m, ΖΕ=2m–0,75m=1,25 m.

$$p_E = 1{,}25 \times 9800 \times 0{,}8 = 9800\ N/m^2$$

Σε στοιχείο ρευστού που εκτελεί περιστροφική κίνηση με σταθ. γωνιακή ταχύτητα ω, και $\underline{P = P(r,y)}$ η πίεση σε κάθε σημείο στο περιστρεφόμενο υγρό δίνει:



$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial r} = -\rho\left(\underbrace{-\omega^2 r}_{\text{κεντρομόλος}}\right) = \rho \omega^2 r \end{cases}$$

Επειδή $P = P(r,y) \Longrightarrow$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

κατά μήκος της ΑΒΓ $p = \text{σταθ} = P_{at}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial y} dy = 0 \Longrightarrow \rho \omega^2 r\, dr + (-\rho g) dy = 0 \Longrightarrow$$

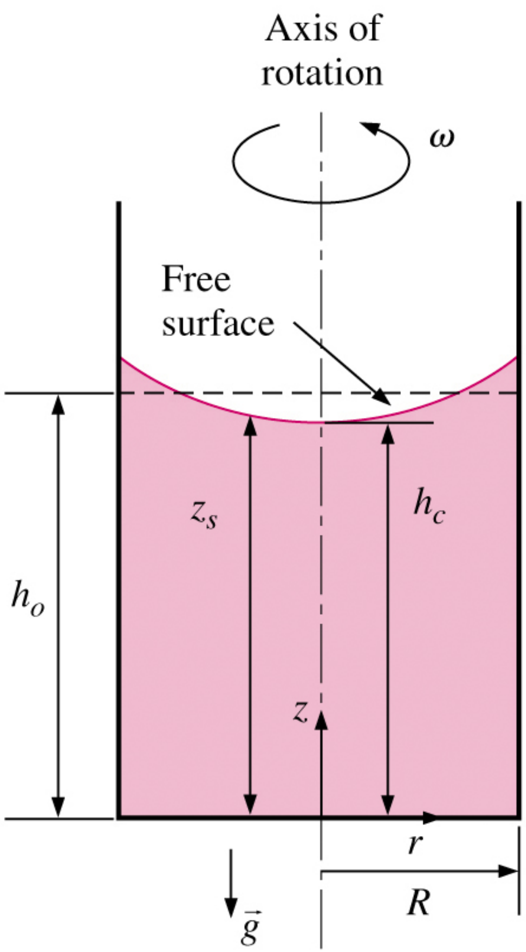
$$\Longrightarrow \rho \omega^2 r\, dr = \rho g\, dy \Longrightarrow \frac{dy}{dr} = \frac{\cancel{\rho} \omega^2 r}{\cancel{\rho} g} \Longrightarrow \frac{dy}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g} \Longrightarrow \int dy = \frac{\omega^2}{g} \int r\, dr \Longrightarrow$$

$$\boxed{y(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + c}$$

εξίσωση παραβολής (είναι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού) $\Longrightarrow$

- το υδροστατικό ύψος h είναι ανάλογο του r^2
- Όταν το υγρό ηρεμεί η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού βρίσκεται σε ύψος $\frac{1}{2} h = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2}{2g}$ από την κορυφή B του παραβολοειδούς.

Περιστροφή ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο



Container is rotating about the z-axis

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y, \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho (g + a_x)$$

$$a_r = -r\omega^2, a_\theta = a_z = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r\omega^2, \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Total differential of P

$$dP = \rho r\omega^2 dr - \rho g dz$$

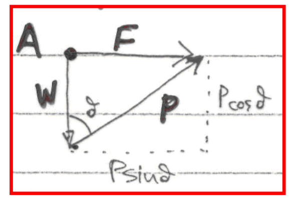
On an isobar, dP = 0

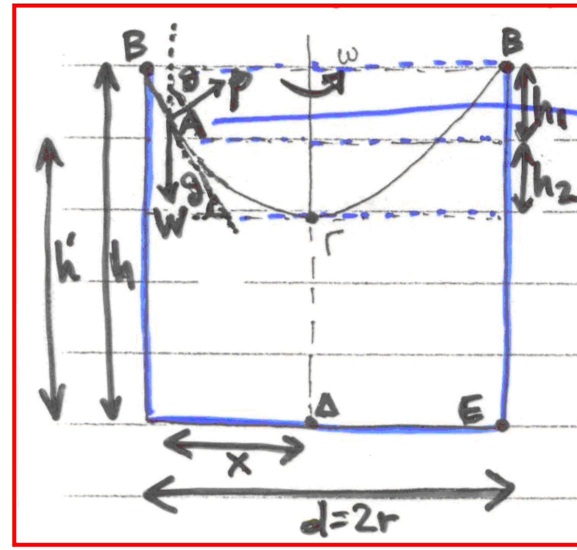
$$\frac{dz_{isobar}}{dr} = \frac{r\omega^2}{g} \rightarrow z_{isobar} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C_1$$

Παράδειγμα : Ανοιχτή κυλινδρική δεξαμενή ύψους h και διαμέτρου d = 2r περιέχει νερό μέχρι ύψος h΄. Αν ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από τον γεωμετρικό του άξονα:

- Βρείτε την εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού.
- Ποια σταθερή γωνιακή ταχύτητα μπορεί να επιτευχθεί χωρίς να χαθεί καθόλου νερό (h = 2, d = 1, h΄ = 1,5 m).
- Ποια είναι η πίεση στον πυθμένα της δεξαμενής (σημεία Δ, Ε)
- Όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω = 20 rad/sec, τι μέρος του πυθμένα είναι ακάλυπτο;

Λύση





a) $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow P\sin\theta = \dfrac{w}{g}\,\alpha_X \Rightarrow P\sin\theta = \dfrac{w}{g}\,x\,\omega^2$ (1)

$\Sigma F_y = W \Rightarrow P\cos\theta = W$ (2)

$$(1),(2) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{x\omega^2}{g} \\ \tan\theta &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\omega^2}{g} \Rightarrow dy = \frac{\omega^2}{g}\chi\,dx \Rightarrow y = \frac{\omega^2}{g}\frac{\chi^2}{2} + c$$

Για $y = 0,\ x = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{\omega^2}{2g}x^2}$ Εξίσωση παραβολής

b) Όγκος παραβολοειδούς από περιστροφή = $\dfrac{1}{2}$ (όγκου περιγεγραμμένου κυλίνδρου)

Για να μην χυθεί το υγρό πρέπει $\pi r^2 h_1 = \dfrac{1}{2}\left(\pi r^2\left(h_1 + h_2\right)\right) \Rightarrow h_2 = \dfrac{h_1 + h_2}{2} \Rightarrow h_1 = h_2$

Επειδή $h_1 = h - h΄ = 0{,}5$ m $\Rightarrow h_1 = h_2 = 0{,}5$ m $\Rightarrow (\chi_B, y_B) = (0.5, 1) \Rightarrow$

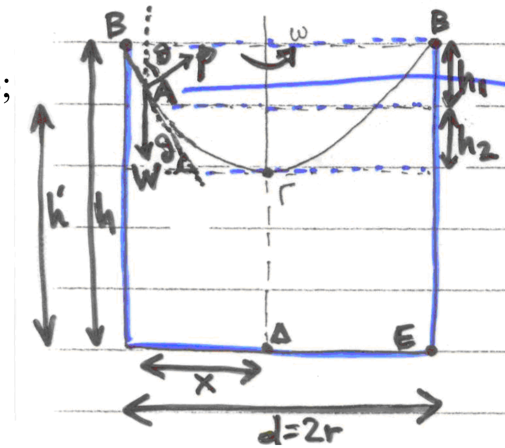
$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 \Rightarrow 1 = \frac{\omega^2}{2x9{,}81}(0.5)^2 \Rightarrow \omega = 8.86\,rad/\sec$$

όγκος αέρα πριν την περιστροφή

Το μισό του περιγεγραμμένου κυλίνδρου από την περιστροφή του παραβολοειδούς

Παράδειγμα : Ανοιχτή κυλινδρική δεξαμενή ύψους h και διαμέτρου d = 2r περιέχει νερό μέχρι ύψος h΄. Αν ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από τον γεωμετρικό του άξονα:

- Βρείτε την εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού.
- Ποια σταθερή γωνιακή ταχύτητα μπορεί να επιτευχθεί χωρίς να χαθεί καθόλου νερό (h = 2, d = 1, h΄ = 1,5 m).
- Ποια είναι η πίεση στον πυθμένα της δεξαμενής (σημεία Δ, Ε)
- Όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω = 20 rad/sec, τι μέρος του πυθμένα είναι ακάλυπτο;



Λύση

c) Βάθος υγρού : $\rightarrow$ στα τοιχώματα της δεξαμενής : 2m

$$\Rightarrow P_E = \rho g h = 9810x2 = 19.620Pa$$

$\rightarrow$ στο κέντρο της δεξαμενής : 1m

$$\Rightarrow P_\Delta = \rho g h = 9810x1 = 9.810Pa$$

d)

$$y_3 = \frac{20^2}{2g}(0.5)^2 \Rightarrow y_3 = 5.1m \qquad (x_3, y_3) = (0.5, 5.1)$$

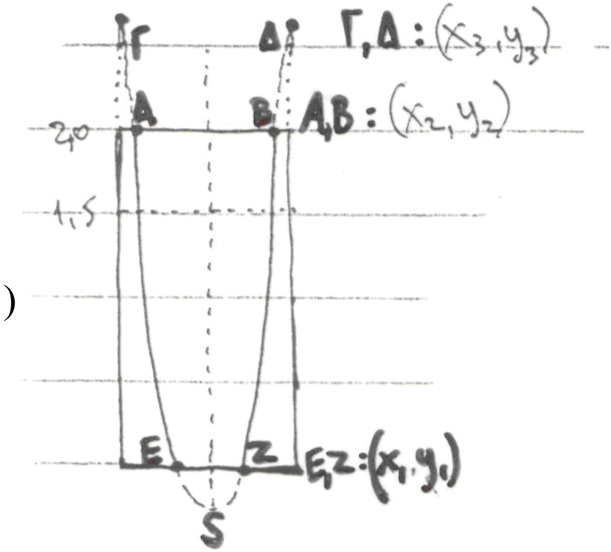
$$y_2 = 2 + y_1 = \frac{20^2}{2g}x_2^{\,2}\,(1)\,(1\alpha) \qquad y_1 = \frac{20^2}{2g}x_1^{\,2}\,(2)$$

(Όγκος SAB) – (Όγκος SEZ) = όγκος αέρα πριν την περιστροφή $\Rightarrow$

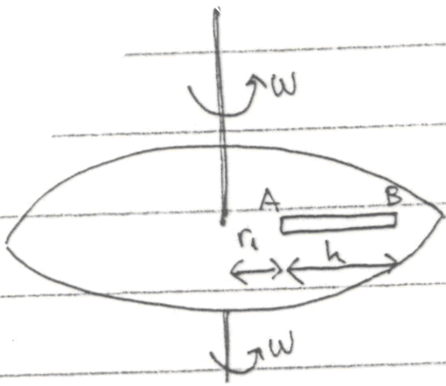
$$\left(\frac{1}{2}\pi x_2^{\,2} y_2\right) - \left(\frac{1}{2}\pi x_1^{\,2} y_1\right) = \left(\pi r^2 0.5\right) \Rightarrow \frac{1}{2}x_2^{\,2}2 - \frac{1}{2}x_1^{\,2}\frac{20^2}{2g}x_1 = r^2 0.5 \;\; (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow x_1 = 0.116$$

Ακάλυπτη επιφάνεια = $\pi x_1^{\,2} = 0.042m^2$



Παράδειγμα



ανοικτός από το ένα άκρο

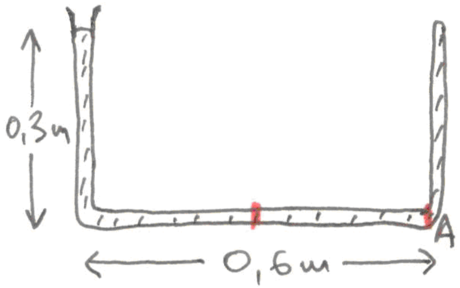
Κυλινδρικός σωλήνας μήκους $h = 1m$ γεμίζεται με υγρό πυκνότητας ρ. Κατόπιν τοποθετείται σε οριζόντιο περιστρεφόμενο τραπέζι και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 20\ rad/sec$. Αν βρίσκεται σε απόσταση $r_1 = 0,3m$ από τον άξονα περιστροφής να υπολογιστεί η πίεση στο κλειστό άκρο του σωλήνα.

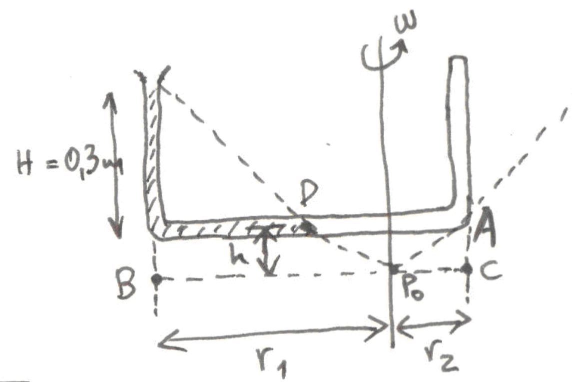
$$P = P(r) \text{ μόνο} \Rightarrow dP = \rho\omega^2 r\,dr \Rightarrow \int_{P_A = P_{at}}^{P_B} dP = \rho\omega^2 \int_{r_1}^{r_1+h} r\,dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_B - P_{at} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left((r_1+h)^2 - r_1^2\right) \Rightarrow P_B = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho(20^2)\left(1,3^2 - 1^2\right) \Rightarrow \boxed{P_B = P_{atm} + 138\rho}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί τη θέση του κατακόρυφου άξονα περιστροφής και την ταχύτητα περιστροφής του σωλήνα του σχήματος ώστε η πίεση στο μέσο του σωλήνα και στο σημείο A να είναι μηδέν.





Λόγω συμμετρίας ο άξονας περιστροφής θα είναι στο μέσο της ~~BC~~ DA $\Rightarrow$ $r_1 = 0{,}45\ m$

$r_2 = 0{,}15\ m$

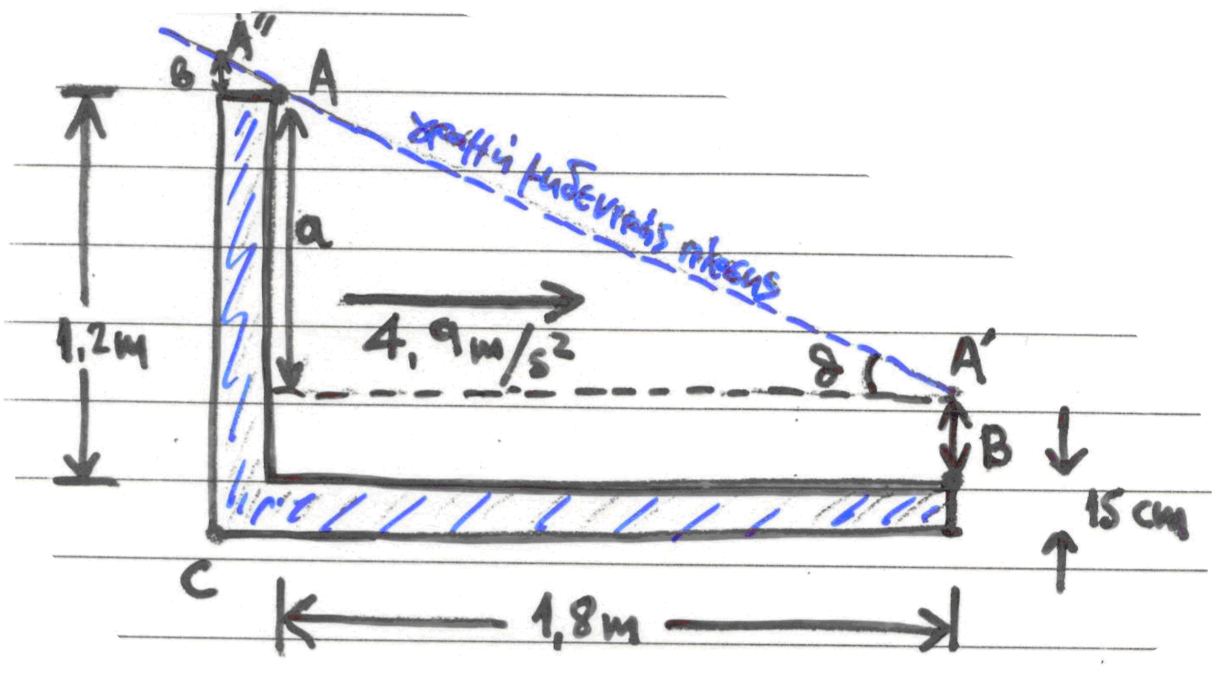
$$\left.\begin{aligned} H + h &= \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} \\ h &= \frac{\omega^2 r_2^2}{2g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow H = \frac{\omega^2 (r_1^2 - r_2^2)}{2g} \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{r_1^2 - r_2^2}} = 5{,}7\ \frac{rad}{sec}$$

6,28 rad/sec = 1 rpsecond

5,7 " = 0,91 rpsec × 60 sec = 54,5 rpm

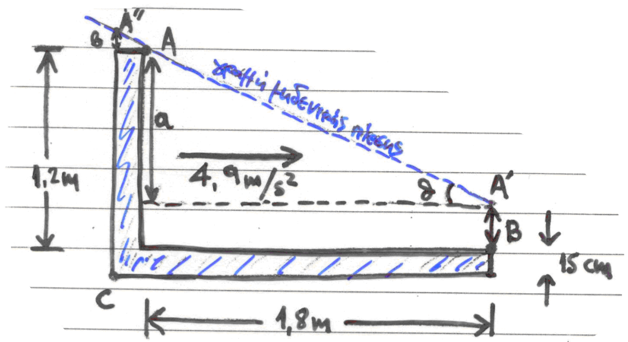
Παράδειγμα

Η δεξαμενή του σχήματος περιέχει λάδι σχετικού ειδικού βάρους 0,8 και επιταχύνεται όπως δείχνει το σχήμα. Η δεξαμενή έχει ένα μικρό άνοιγμα στο A. Καθορίστε την πίεση στα B και C και την επιτάχυνση που απαιτείται ώστε η πίεση στο B να είναι μηδέν.



Παράδειγμα

Η δεξαμενή του σχήματος περιέχει λάδι σχετικού ειδικού βάρους 0,8 και επιταχύνεται όπως δείχνει το σχήμα. Η δεξαμενή έχει ένα μικρό άνοιγμα στο Α. Καθορίστε την πίεση στα Β και C και την επιτάχυνση που απαιτείται ώστε η πίεση στο Β να είναι μηδέν.



Τα επίπεδα σταθερής πίεσης έχουν κλίση $\tan\delta = \frac{a_x}{g} = \frac{4,9}{9,8} = 0,5 \Rightarrow \underline{\delta = 26,6^\circ}$

→ Η πίεση στο Α είναι μηδέν (ανοικτό άκρο) ⇒ και στο Α'

→ Η απόσταση $A'B = 1,2 - a = 1,2 - (1.8 \times \tan\delta) = 1,2 - 0,9 \Rightarrow A'B = 0,3\ m$

$$P_B = (0,3\ m)(9800\ N/m^3)\cdot 0,8 = 2352\ kN/m^2$$

→ Ομοίως στο C η πίεση θα βρεθεί αν υπολογιστεί η απόσταση $CA'' = \beta + 1,2 + 0,15$

$\beta = 0,15 \cdot \tan\delta = 7,5\ cm$

$\rightarrow CA'' = 1,425\ m$

$$P_C = (1.425\ m)(9800\ N/m^3)\cdot 0,8 = 11.174\ kN/m^2$$

→ Για πίεση μηδέν στο Β έχουμε: $\tan\delta = \frac{1,2}{1,8} = \frac{a_x}{9,8} \Rightarrow \underline{a_x = 6,5\ m/s^2}$