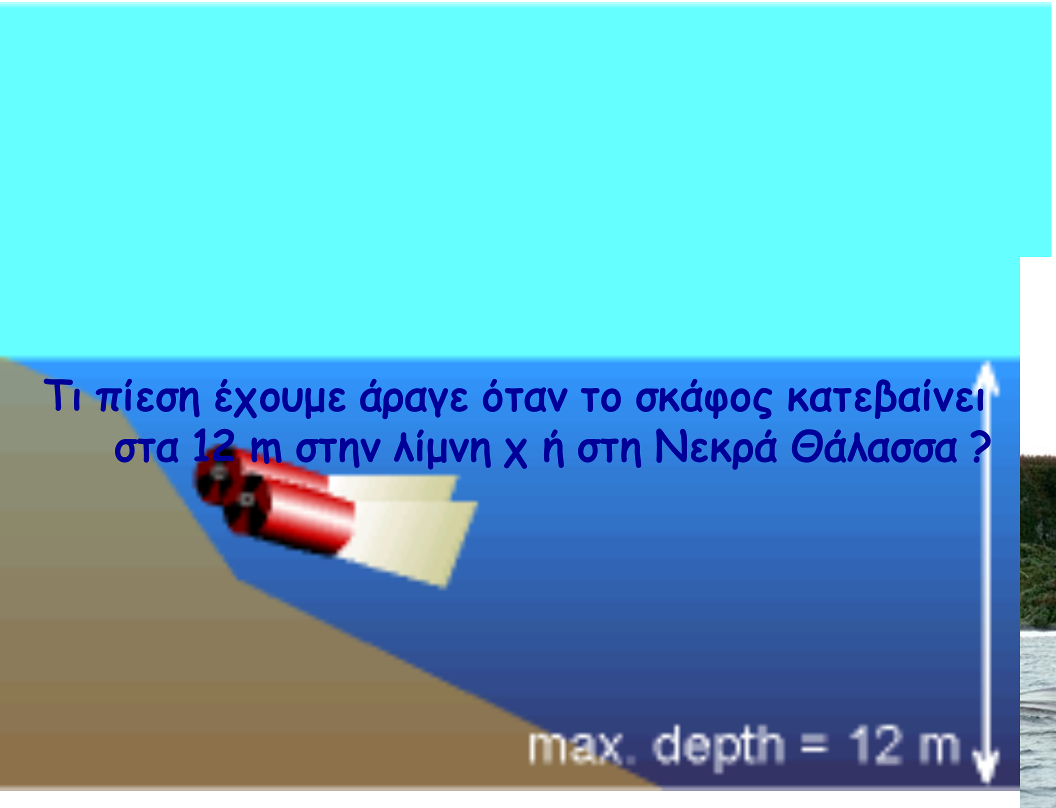
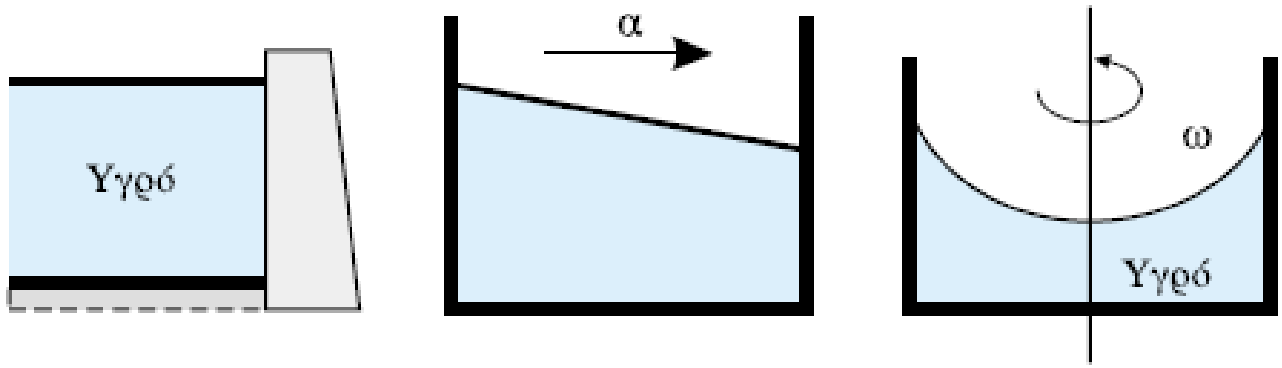
Στατική των Ρευστών



Τι πίεση έχουμε άραγε όταν το σκάφος κατεβαίνει στα 12 m στην λίμνη χ ή στη Νεκρά Θάλασσα ?

Στατική των Ρευστών



α. Υγρό σε ισορροπία

β. Υγρό που κινείται με επιτάχυνση

γ. Υγρό που περιστρέφεται

Ρευστά σε ισορροπία → Όχι σχετική κίνηση του ενός μορίου του ρευστού ως προς κάποιο άλλο

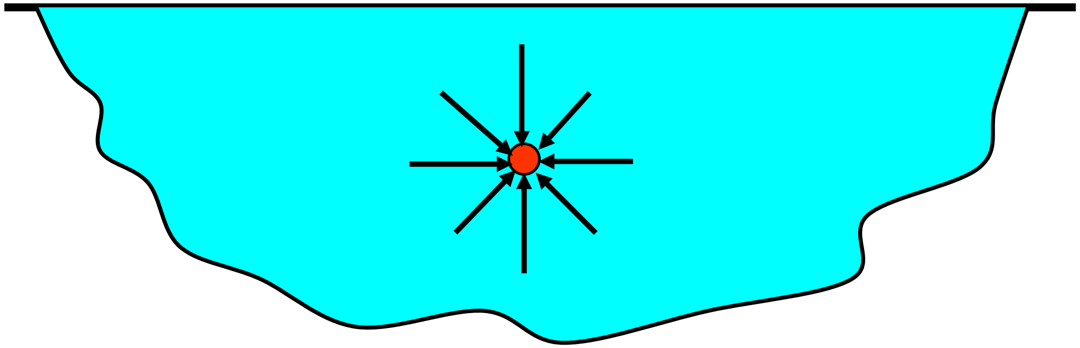
→ Διατμητική τάση (τ) = 0 → $\Delta F_s = 0$ → μόνο $\Delta F_n \neq 0$ (κάθετη δύναμη)

→ Ταχύτητα διάτμησης $du(\psi) / d\psi = 0$

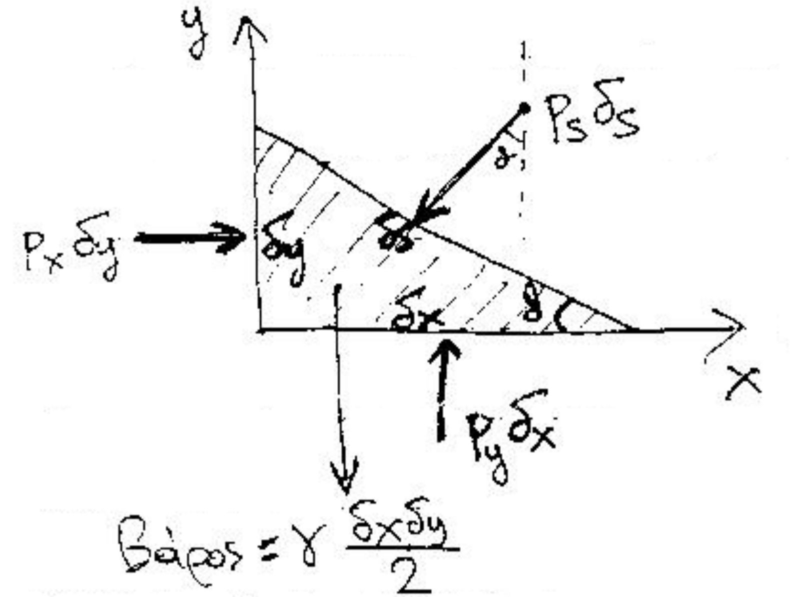
Ορισμός Πίεσης

Πίεση = Δύναμη που εφαρμόζεται στην μονάδα της επιφάνειας ενός σώματος

$$P = \frac{\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\eta}{\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha} = \frac{N}{m^2} = Pa$$



Πίεση σε σημείο ρευστού

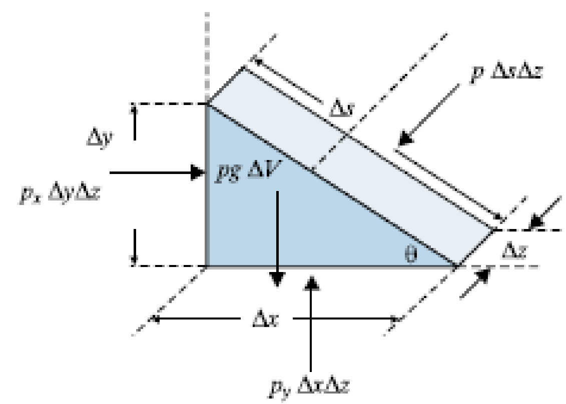


Ρευστό δύο (2) διαστάσεων που ηρεμεί $\Rightarrow \tau = 0$

$$\Sigma F_x = m\alpha_x = \rho\left(\frac{\delta\chi\delta y}{2}\right)\alpha_x = 0$$

$$\Sigma F_x = P_x\,\delta_y - P_s\,\delta_s \sin\theta = P_x\,\delta_y - P_s\,\delta_s \frac{\delta y}{\delta s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F_x = \delta_y(P_x - P_s) = 0 \Rightarrow \boxed{P_x = P_s} \quad \textbf{(1)}$$

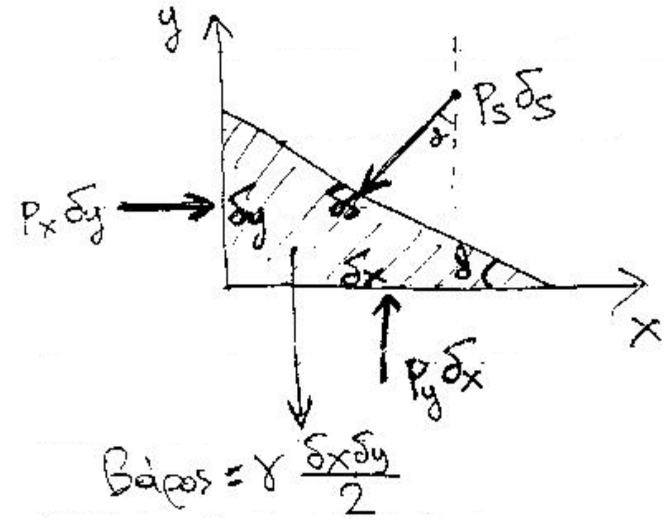


$$\Sigma F_y = m\alpha_y = \rho\left(\frac{\delta\chi\delta y}{2}\right)\alpha_y = 0$$

$$\Sigma F_y = P_y\,\delta_\chi - P_s\,\delta_s \cos\theta - \gamma\left(\frac{\delta\chi\delta y}{2}\right) = P_y\,\delta_\chi - P_s\,\delta_s \frac{\delta_\chi}{\delta_s} - \gamma\left(\cancelto{0}{\frac{\delta_\chi\delta_y}{2}}\right) =$$

$$\delta_\chi(P_y - P_s) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y = P_s} \quad (2)$$

Πίεση σε σημείο ρευστού



(1),(2) $\Rightarrow P_x = P_y = P_s$

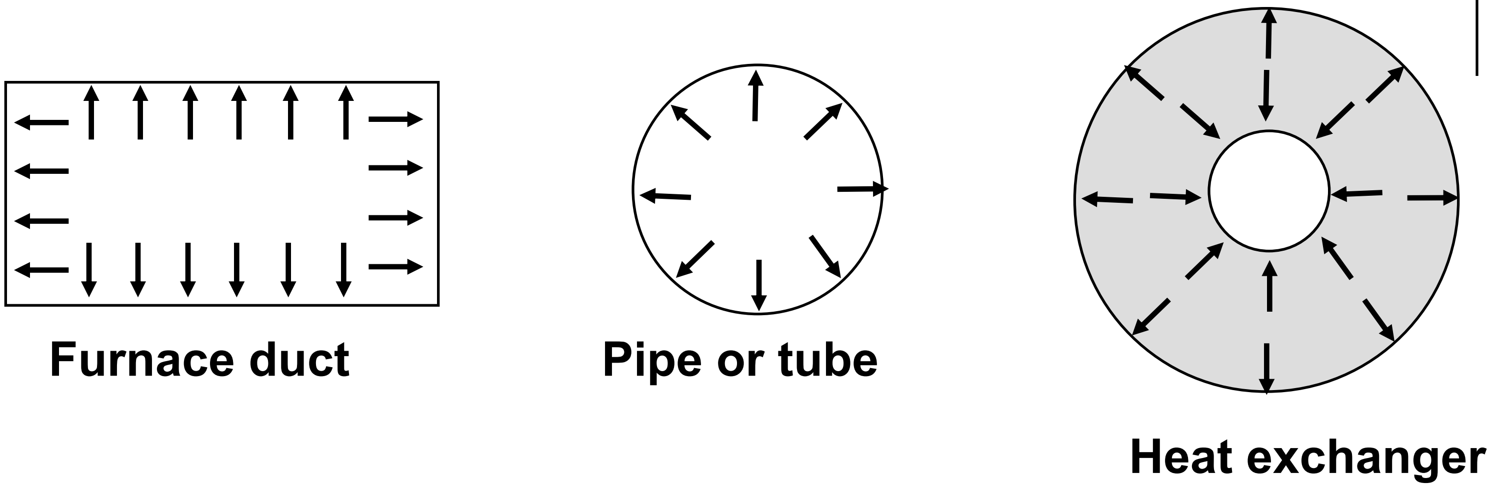
- γωνία θ είναι αυθαίρετη
- επέκταση σε 3 διαστάσεις $\Rightarrow$ **Η πίεση σε ένα σημείο ρευστού που ηρεμεί είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις (ανεξάρτητη της διεύθυνσης, Νόμος Pascal)**

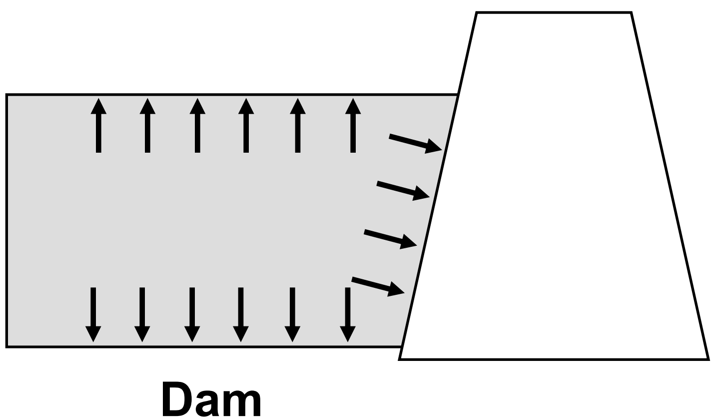
- Εάν το ρευστό κινείται και εμφανίζονται διατμητικές τάσεις, τότε η πίεση σε ένα σημείο είναι η μέση τάση τριών κάθετων μεταξύ τους εγκαρσίων θλιπτικών τάσεων

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{Px + Py + Pz}{3}}$$

Ιξώδες μ = 0 (ρευστό χωρίς τριβές, φανταστικό ρευστό) $\Rightarrow$ τ = 0
όποια και αν είναι η κίνηση του ρευστού $\Rightarrow$ πίεση ίδια σε όλες τις διευθύνσεις

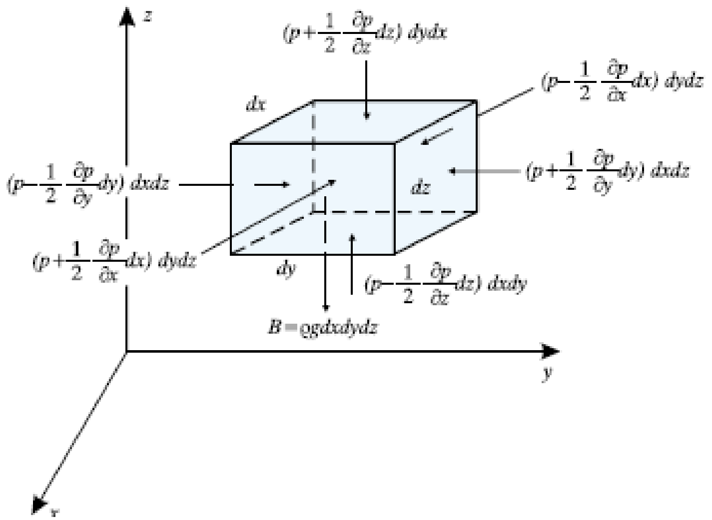
Διεύθυνση της δύναμης



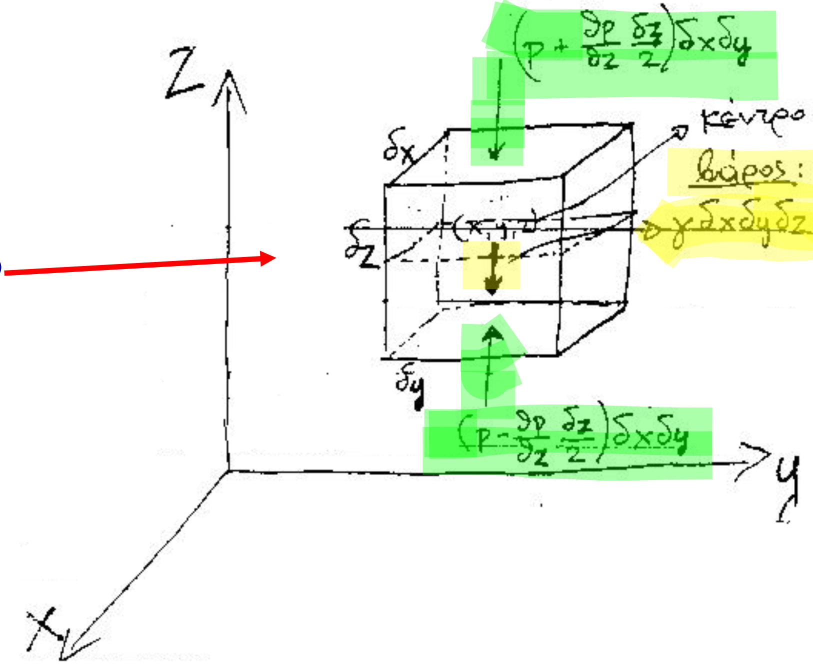


Η πίεση δρά κάθετα στις επιφάνειες

Μεταβολή της πίεσης στα ρευστά



Στοιχείο ρευστού
που ηρεμεί



Δυνάμεις που ενεργούν στο ρευστό: α) πιέσεις, β) βάρος

$$\delta F_z = -\left(P+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta\chi\,\delta y+\left(P-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta\chi\,\delta y-\gamma\delta\chi\delta y\delta z = -\frac{\partial P}{\partial z}\delta\chi\delta y\delta z-\gamma\delta\chi\delta y\delta z$$

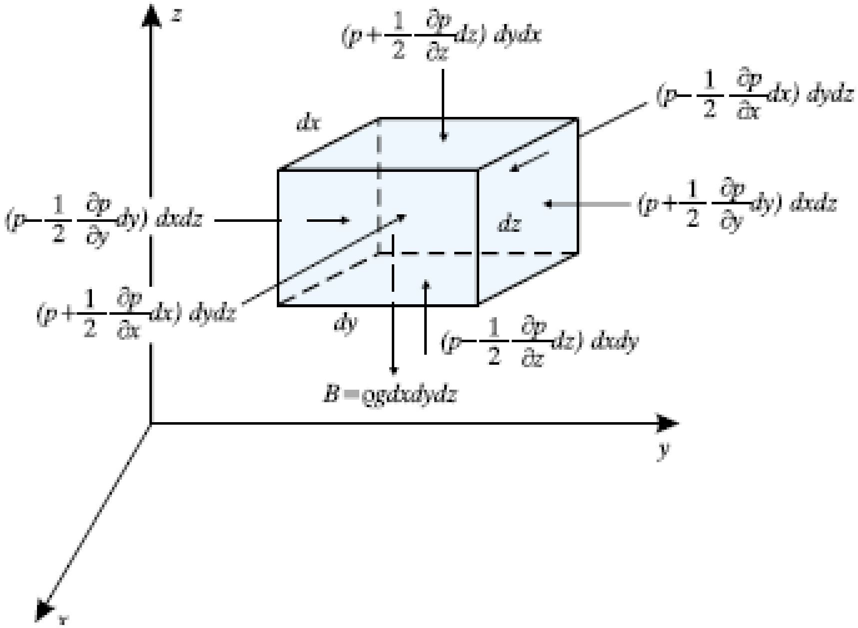
$$\delta F_x = -\frac{\partial P}{\partial \chi}\delta\chi\delta y\delta z \qquad \delta F_y = -\frac{\partial P}{\partial y}\delta\chi\delta y\delta z$$

Το άνυσμα της συνισταμένης δύναμης που ενεργεί στο σημείο είναι:

$$\delta F = i\delta F_x + j\delta F_y + k\delta F_z = -\left(i\frac{\partial P}{\partial \chi}+j\frac{\partial P}{\partial y}+k\frac{\partial P}{\partial z}\right)\delta\chi\delta y\delta z - k\gamma\,\delta\chi\delta y\delta z,$$

και επειδή το ρευστό ηρεμεί $\frac{\delta F}{\delta V} = 0$ (δύναμη / μονάδα όγκου = 0)

Μεταβολή της πίεσης στα ρευστά



Υπό μορφή συνιστωσών:

$$\frac{\theta P}{\theta \chi} = 0 \qquad \frac{\theta P}{\theta y} = 0 \qquad \boxed{\frac{\theta P}{\theta z} = -\gamma} \Rightarrow dP = -\gamma dz \Rightarrow \boxed{P = -\gamma z + c}$$

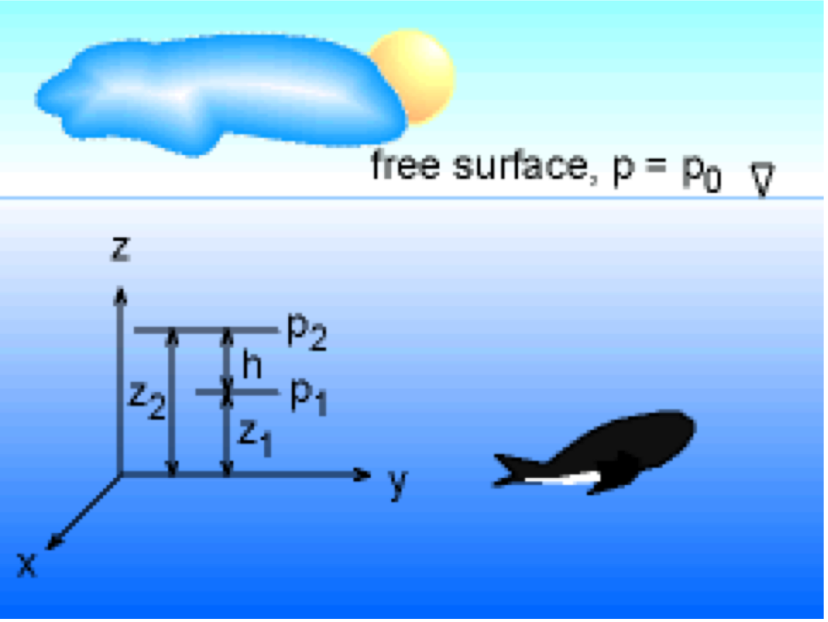
($\gamma = \rho g$ για ομογενή και ασυμπίεστα ρευστά)

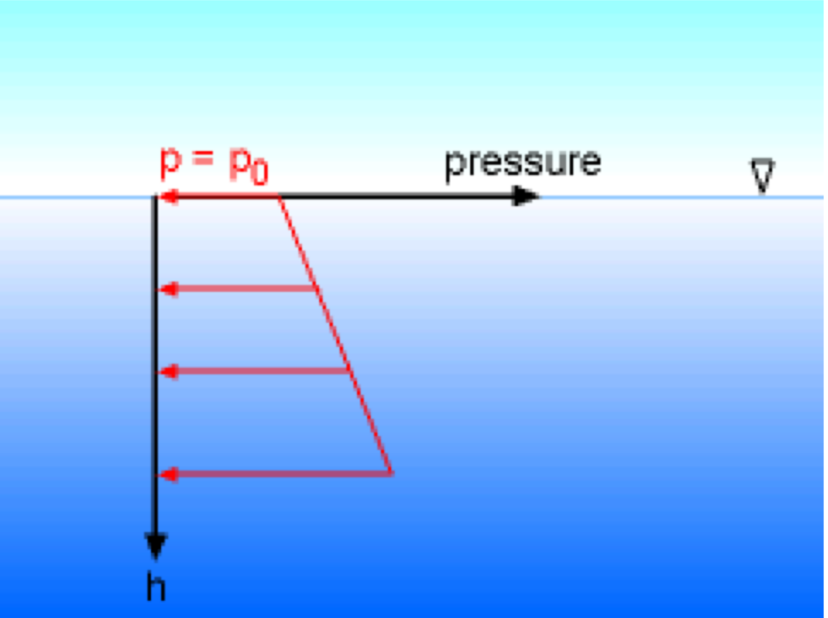
ή $\boxed{\mathbf{P = \gamma\, h \quad ή \quad P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1)}}$ όπου το h μετριέται προς τα κάτω $h = -z$

(υδροστατικός νόμος της μεταβολής πίεσης)

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

Μεταβολή της πίεσης στα ρευστά





Η πίεση αυξάνει γραμμικά με το βάθος

$$\boxed{\int_{P_1}^{P_2} dP = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz}$$

Αυτή η κατανομή της πίεσης λέγεται υδροστατική

Ασυμπίεστα ρευστά

Τα υγρά θεωρούνται πρακτικά ασυμπίεστα, δηλ. η πυκνότητά τους είναι σταθερή

$$P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

Η πίεση P σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια είναι:

$$P = \rho g h + P_o$$

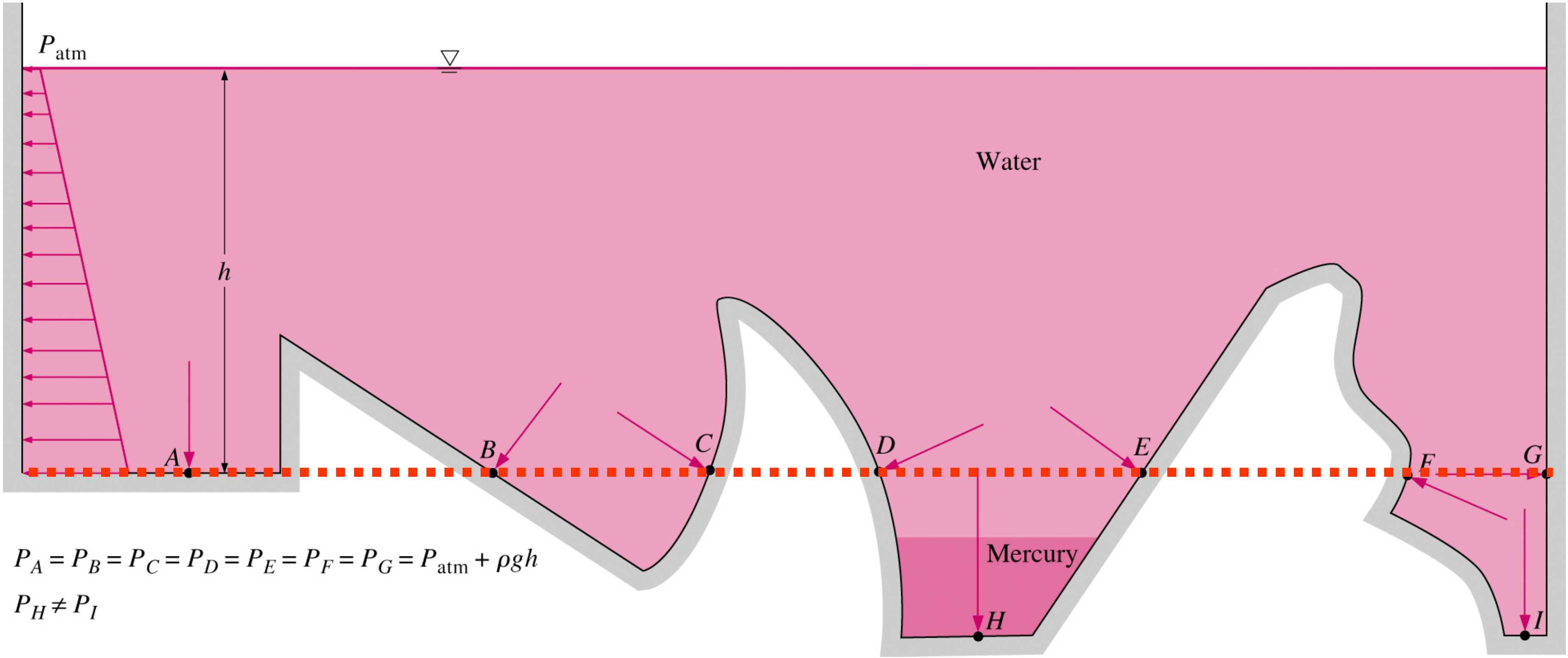
P_o η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια (P_o=P_{atm})

Με χρήση μετρητών πίεσης μπορούμε απλώς να γράψουμε:

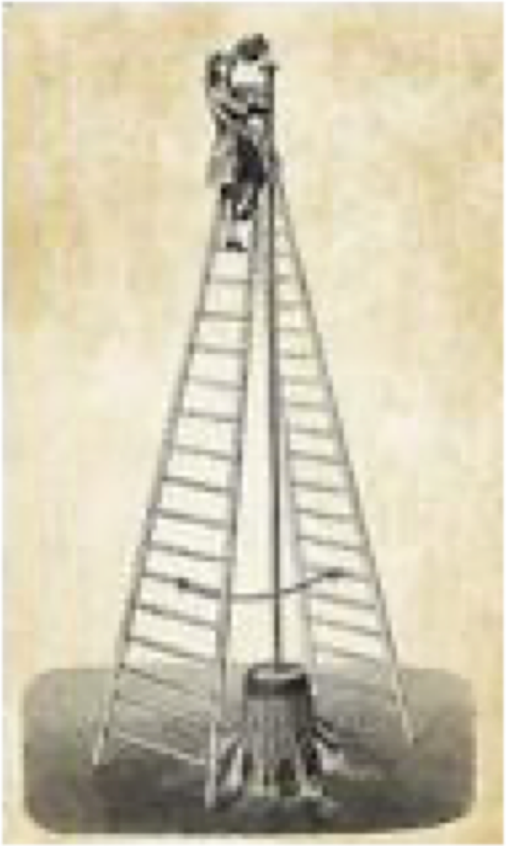
$$P = \rho g h$$

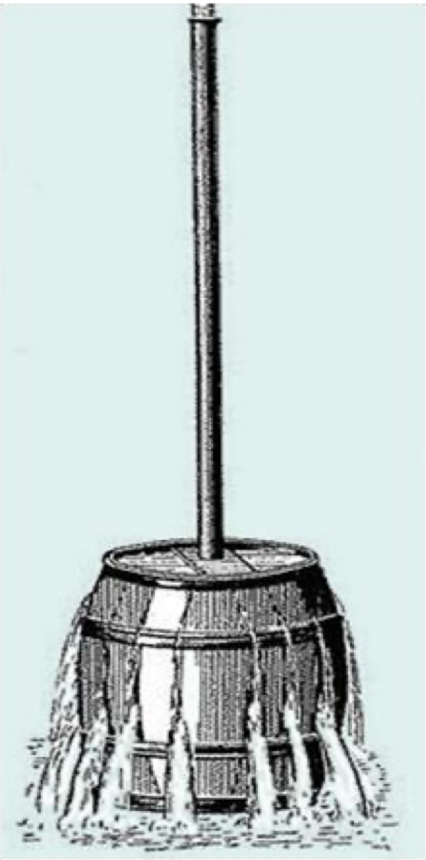
Μεταβολή της πίεσης με το βάθος

- Η πίεση σε ρευστό που ισορροπεί είναι ανεξάρτητη του σχήματος του δοχείου που το περιέχει
- Η πίεση είναι η ίδια σε όλα τα σημεία του ίδιου οριζόντιου επιπέδου δεδομένου ρευστού



Το υδροστατικό παράδοξο (Pascal 1646)

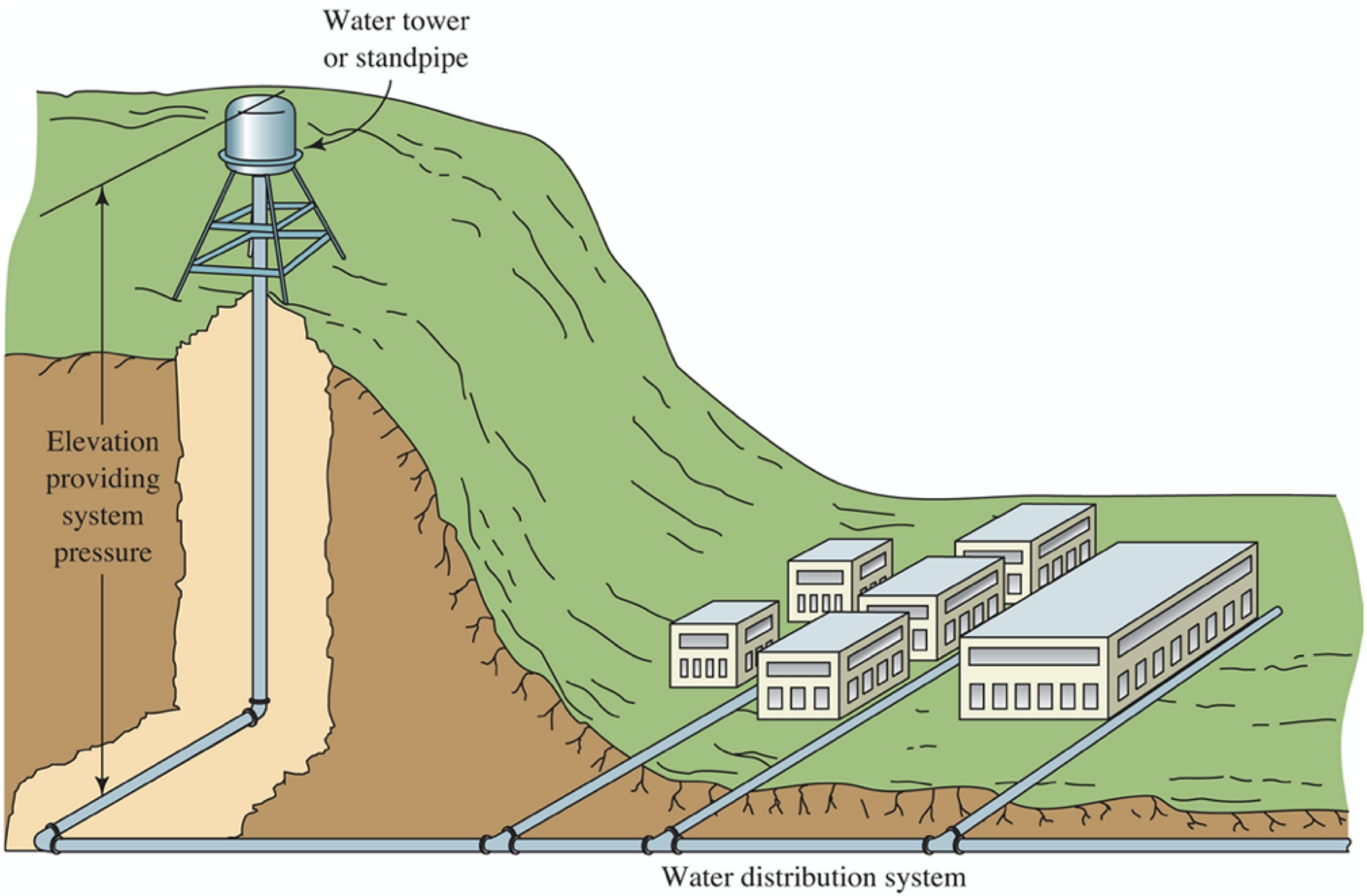




$$\frac{F_{\mu\varepsilon\tau\alpha}}{F_{\pi\rho\iota\nu}} = \frac{\rho g\left(h+H\right)}{\rho g h} = \frac{h+H}{h}$$

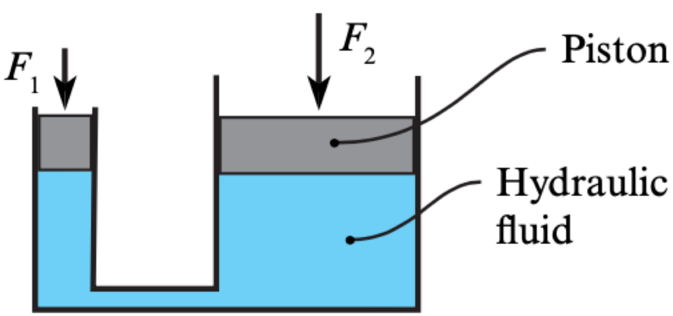
$$\frac{F_{\mu\varepsilon\tau\alpha}}{F_{\pi\rho\iota\nu}} = 25 \quad \acute{\eta} \quad F_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = 25F_{\pi\rho\iota\nu}$$

Ύδρευση

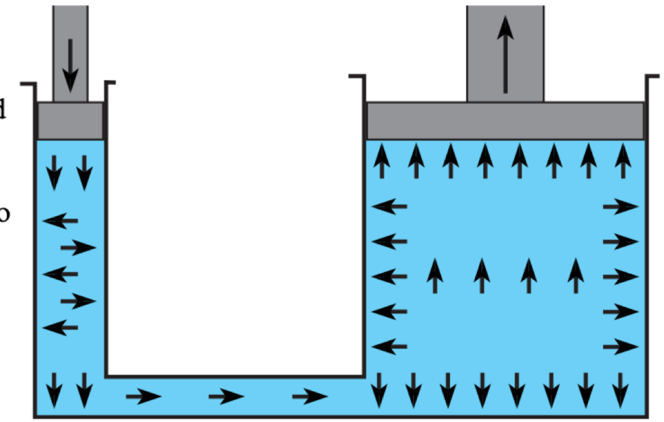

Water tower
or standpipe
Elevation
providing
system
pressure
Water distribution system

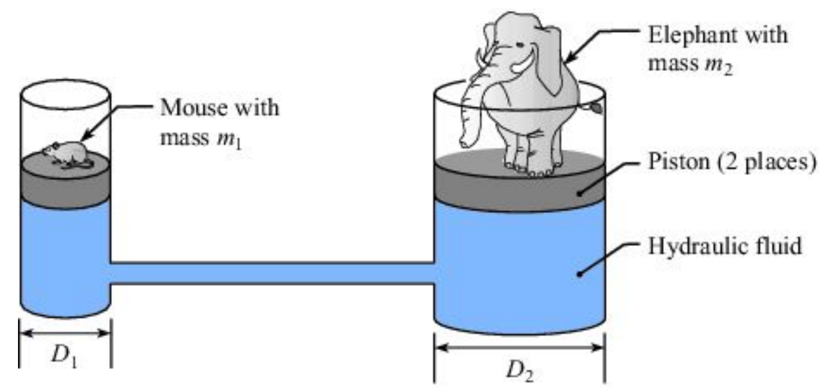
Αρχή του Pascal

Both the lever and hydraulic machine provide a mechanical advantage.



Pascal's principle. An applied force creates a pressure change that is transmitted to every point in the fluid and to the walls of the container



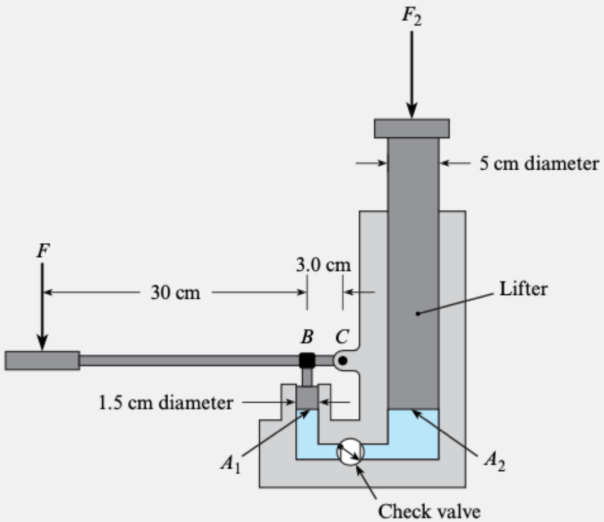


EXAMPLE 3.1

Applying Force Equilibrium to a Hydraulic Jack

Problem Statement

A hydraulic jack has the dimensions shown. If one exerts a force F of 100 N on the handle of the jack, what load, F_2, can the jack support? Neglect lifter weight.



Define the Situation

A force of $F = 100$ N is applied to the handle of a jack.

Assumption: The weight of the lifter (see sketch) is negligible.

State the Goal

F_2(N) ⬅ load that the jack can lift

Generate Ideas and Make a Plan

Because the goal is F_2, apply force equilibrium to the lifter. Then, analyze the small piston and the handle. The plan is as follows:

1. Calculate force acting on the small piston by applying moment equilibrium.
2. Calculate pressure p_1 in the hydraulic fluid by applying force equilibrium.
3. Calculate the load F_2 by applying force equilibrium.

Take Action (Execute the Plan)

1. Moment equilibrium (handle):

$$\sum M_c = 0$$

$$(0.33 \text{ m}) \times (100 \text{ N}) - (0.03 \text{ m})F_1 = 0$$

$$F_1 = \frac{0.33 \text{ m} \times 100 \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = 1100 \text{ N}$$

2. Force equilibrium (small piston):

$$\sum F_{\text{small piston}} = p_1 A_1 - F_1 = 0$$

$$p_1 A_1 = F_1 = 1100 \text{ N}$$

Thus,

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1100 \text{ N}}{\pi d^2/4} = 6.22 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

3. Force equilibrium (lifter):

$$\sum F_{\text{lifter}} = F_2 - p_1 A_2 = 0$$

$$F_2 = p_1 A_2 = \left(6.22 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)\left(\frac{\pi}{4} \times (0.05 \text{ m})^2\right) = \boxed{12.2 \text{ kN}}$$

Note that $p_1 = p_2$ because they are at the same elevation (this fact will be established in the next section).

Review the Results and the Process

1. *Discussion*. The jack in this example, which combines a lever and a hydraulic machine, provides an output force of 12,200 N from an input force of 100 N. Thus, this jack provides a mechanical advantage of 122 to 1.
2. *Knowledge*. Hydraulic machines are analyzed by applying force and moment equilibrium. The force of pressure is typically given by $F = pA$.

Απόλυτη και Σχετική Πίεση

- **Απόλυτη πίεση** : Η πίεση ρευστού σε σχέση με την πίεση του κενού (=0)

- **Σχετική πίεση** : Διαφορά μεταξύ της πίεσης του ρευστού και του περιβάλλοντος (που το περιβάλλει)

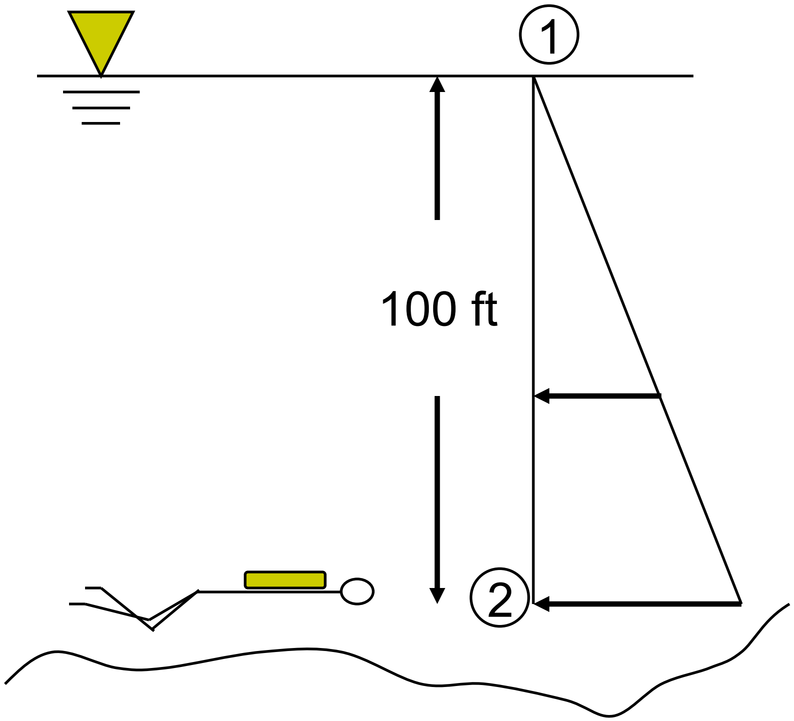
➢ Τα συνηθισμένα όργανα μετρούν σχετική πίεση

➢ Υπολογισμός απόλυτης πίεσης:

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{gauge}$$

Υδροστατική πίεση και καταδύσεις

Υδροστατική πίεση και καταδύσεις



- Πίεση στο δύτη στα 100 ft

$$P_{gage,2} = \rho g z = \left(998\frac{kg}{m^3}\right)\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(100\,ft)\left(\frac{1m}{3.28\,ft}\right)$$
$$= 298.5kPa\left(\frac{1atm}{101.325kPa}\right) = 2.95atm$$
$$P_{abs,2} = P_{gage,2} + P_{atm} = 2.95atm + 1atm = 3.95atm$$

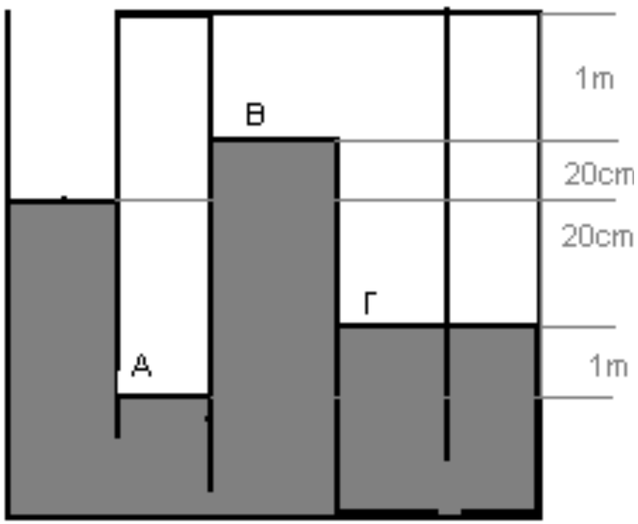
- Κίνδυνος άμεσης ανόδου (νόμος Boyle)

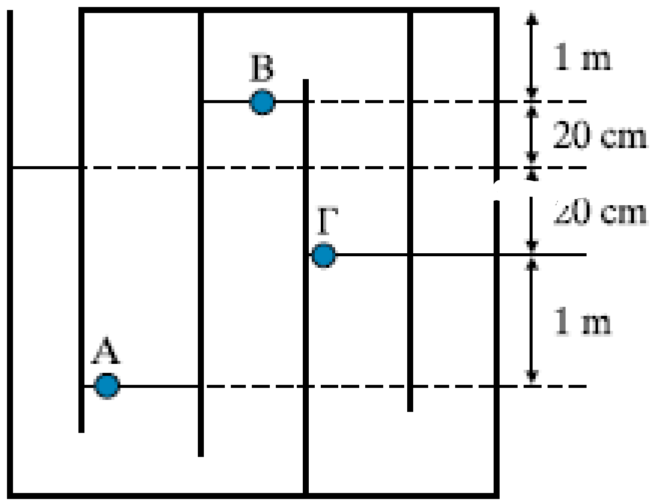
$$P_1V_1 = P_2V_2$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{3.95atm}{1atm} \approx 4$$

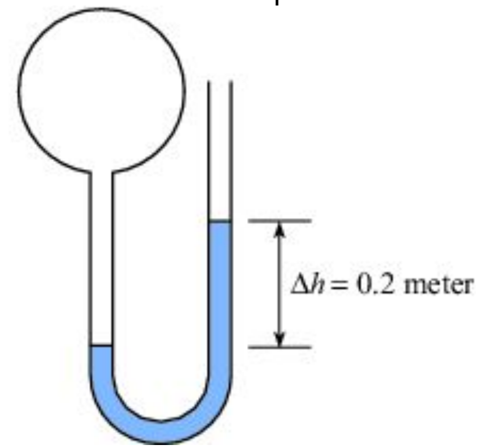
Αν κρατήσετε την αναπνοή σας στην άνοδο τα πνευμόνια σας θα αυξηθούν σε όγκο 4 φορές προκαλώντας εμβολή και/η θάνατο

Παράδειγμα 2.1

Να υπολογισθεί η πίεση στα σημεία Α,Β,Γ. Το δοχείο περιέχει νερό και αέρα και είναι ανοικτό μόνο στο αριστερό άκρο του. $p_{atm}=1{,}013\times10^5$ Pa.







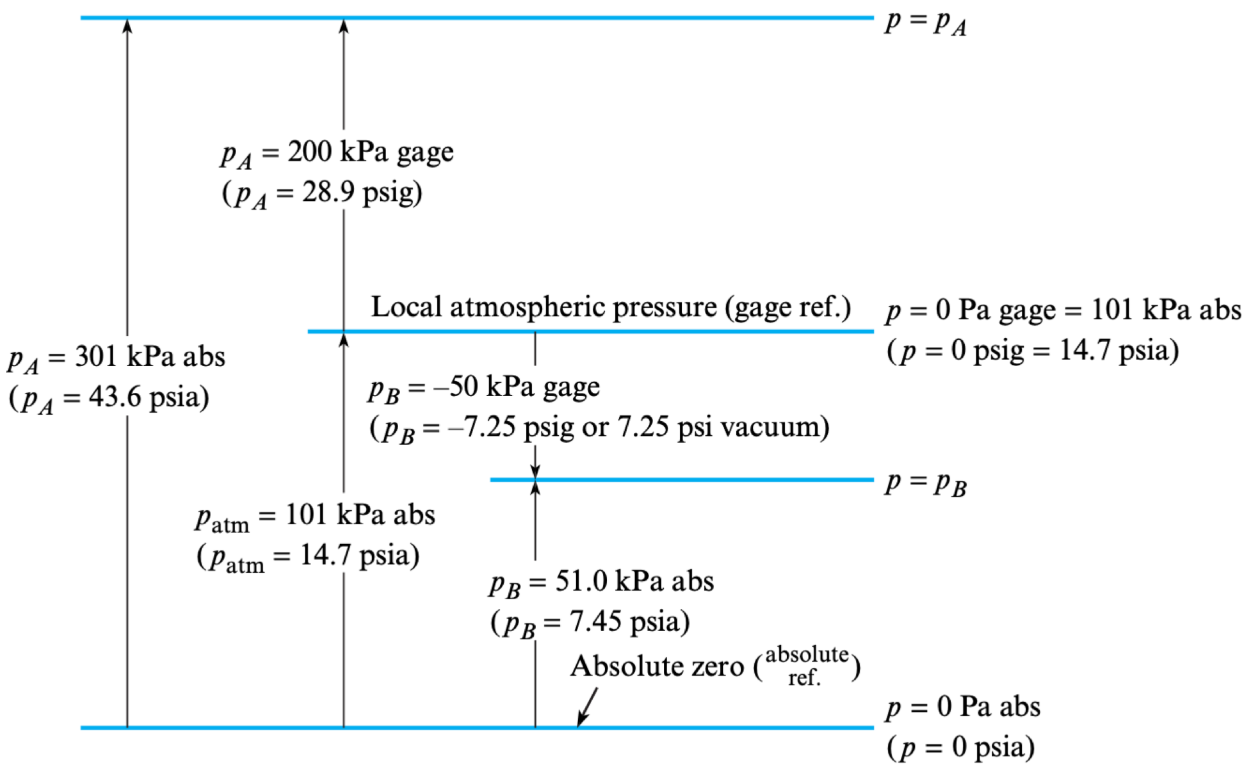
Η πίεση σε όλα τα σημεία στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ενός ρευστού σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι σταθερή. Έτσι έχουμε:

$$p_A = p_{atm} + \gamma\times1{,}2\text{ m}=1{,}013\times10^5+9800\times1{,}2 = 113060\text{ Pa.}$$

Οι πιέσεις στα σημεία Β και Γ είναι ίσες, επειδή είναι ίσες με την πίεση του αέρα στο χώρο του σχήματος. Συνεπώς θα ισχύει: $P_B=P_A-\gamma\cdot1{,}4$

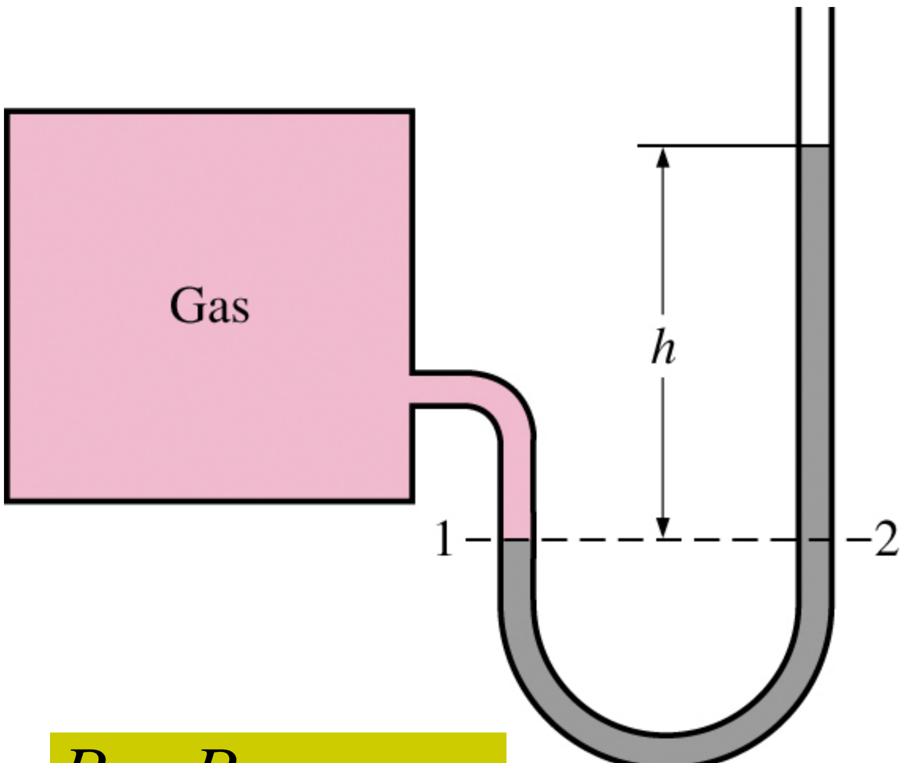
$$p_A = p_B + 1{,}4\text{m}\times\gamma\times p_B = 113060 - 9800\times1{,}4 = 99340\text{ Pa.}$$

Παράδειγμα πιέσεων - Μέτρηση πίεσης



- **Μανόμετρα** : όργανα μέτρησης της πίεσης των ρευστών
- **Βαρόμετρα** : όργανα μέτρησης της ατμοσφαιρικής πίεσης
- **Απόλυτη πίεση** = (μανομετρική πίεση) + (ατμοσφαιρική πίεση)

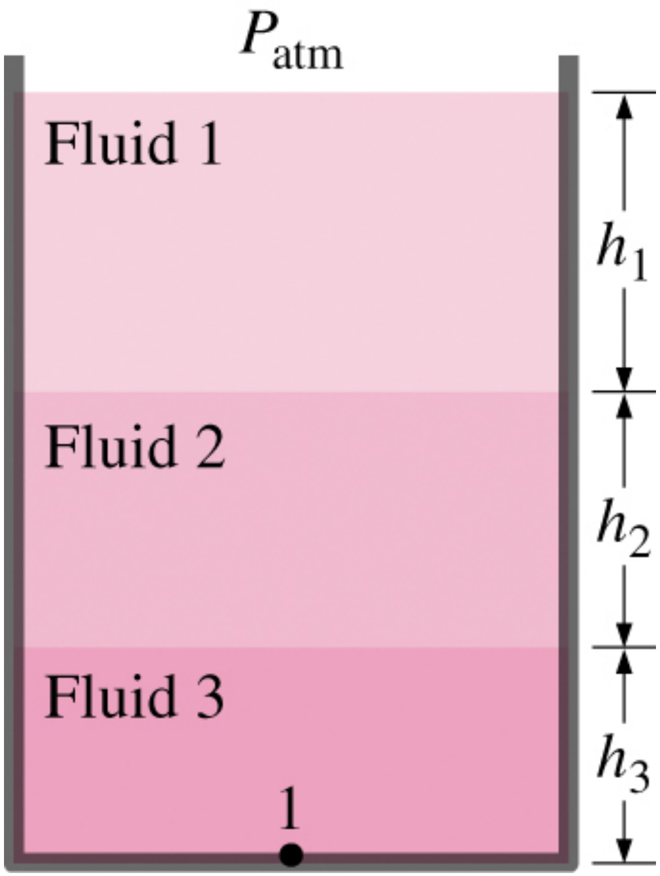
Το μανόμετρο



$$P_1 = P_2$$
$$P_2 = P_{atm} + \rho g h$$

- Η διαφορά ύψους κατά Δz σε ρευστό που ισορροπεί αντιστοιχεί σε ΔP/ρg
- Η συσκευή που βασίζεται στην παραπάνω αρχή λέγεται μανόμετρο
- Αποτελείται από ένα U-tube με ένα η περισσότερα ρευστά όπως υδράργυρος, νερό, αλκοόλη, λάδι, κτλ.
- Χρησιμοποιούνται ρευστά με μεγάλη πυκνότητα αν εκτιμώνται μεγάλες διαφορές πίεσης

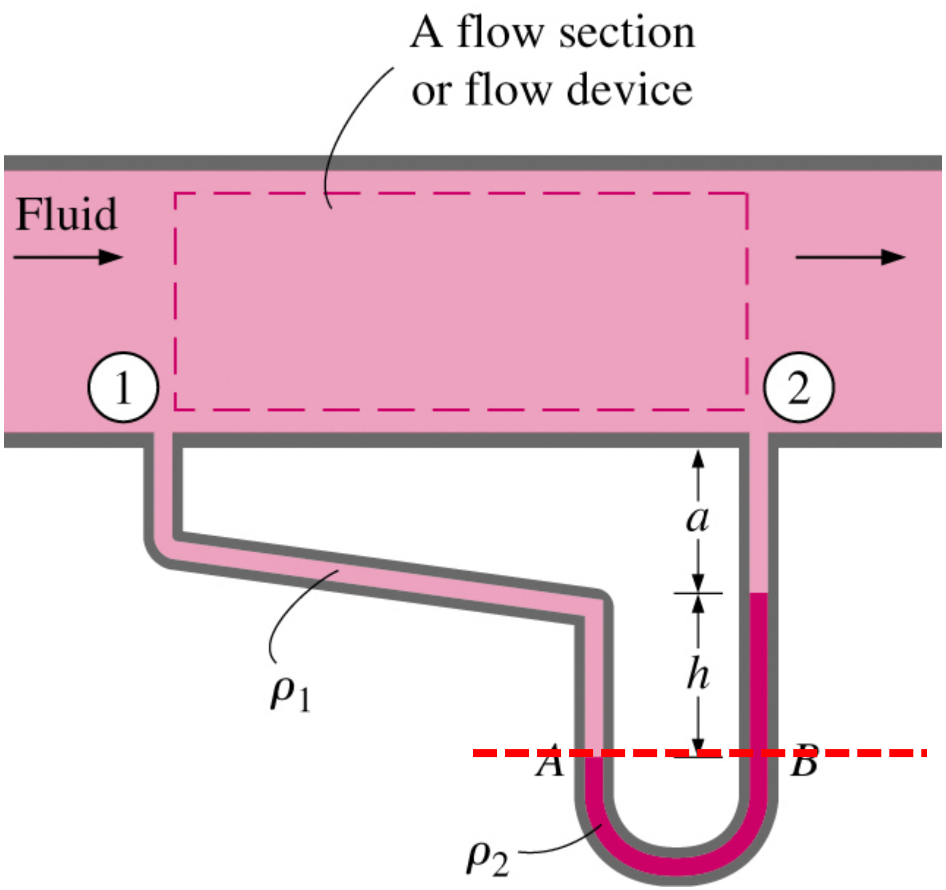
Μανόμετρο πολλαπλών ρευστών



- Για συστήματα πολλαπλών ρευστών
  - Η διαφορά πίεσης κατά μήκος μιας στήλης ρευστού ύψους h είναι $\Delta P = \rho g h$
  - Η πίεση αυξάνει προς τα κάτω και μειώνεται προς τα πάνω
  - Σε 2 σημεία ίδιου ύψος σε συνεχόμενο ρευστό η πίεση είναι ίδια
  - Η πίεση υπολογίζεται προσθέτοντας και αφαιρώντας $\rho g h$

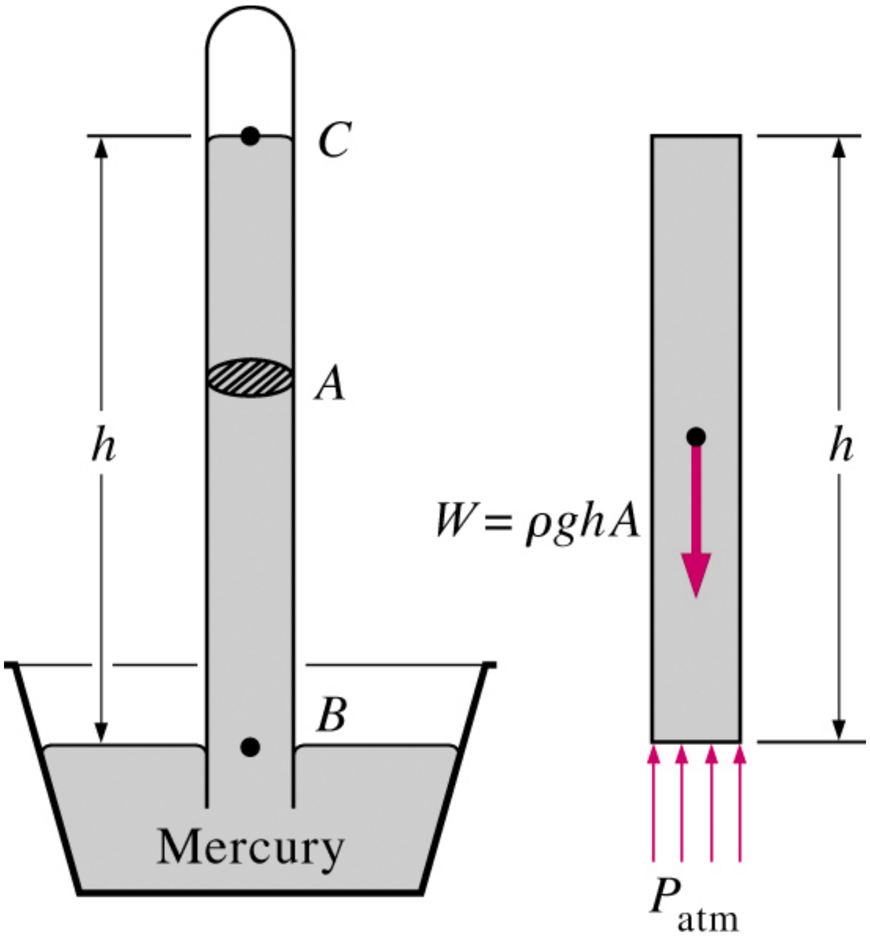
$$P_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 = P_1$$

Μετρώντας πτώση πίεσης



- Σε βαλβίδες, αγωγούς κτλ.
- Η σχέση για την πτώση πίεσης P_1-P_2 υπολογίζεται αρχίζοντας στο σημείο 1 και προσθέτοντας ή αφαιρώντας όρους ρgh *μέχρι να φτάσουμε στο σημείο 2*
- Αν το ρευστό στον αγωγό είναι αέριο τότε $\rho_2 >> \rho_1$ και άρα $P_1 - P_2 = \rho gh$

Το βαρόμετρο



$$P_C + \rho g h = P_{atm}$$

$$P_{atm} = \rho g h$$

- Μέτρηση ατμοσφαιρικής πίεσης (βαρομετρική πίεση)
- *Η πίεση* $P_C \sim 0$ (μόνο ατμοί Hg πάνω από το C με πίεση $<< P_{atm}$
- Η μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης λόγω υψομέτρου έχει διάφορα αποτελέσματα σε δραστηριότητες όπως μαγείρεμα, αιμορραγία (μύτης), απόδοση μηχανών εσωτερικής καύσης, κτλ.

Μονάδες Πίεσης

Unit	Definition or Relationship
1 pascal (Pa)	1 kg m^{-1} s^{-2}
1 bar	1 x 10^5 Pa
1 atmosphere (atm)	101,325 Pa
1 torr	1 / 760 atm
760 mm Hg	1 atm
14.696 pounds per sq. in. (psi)	1 atm

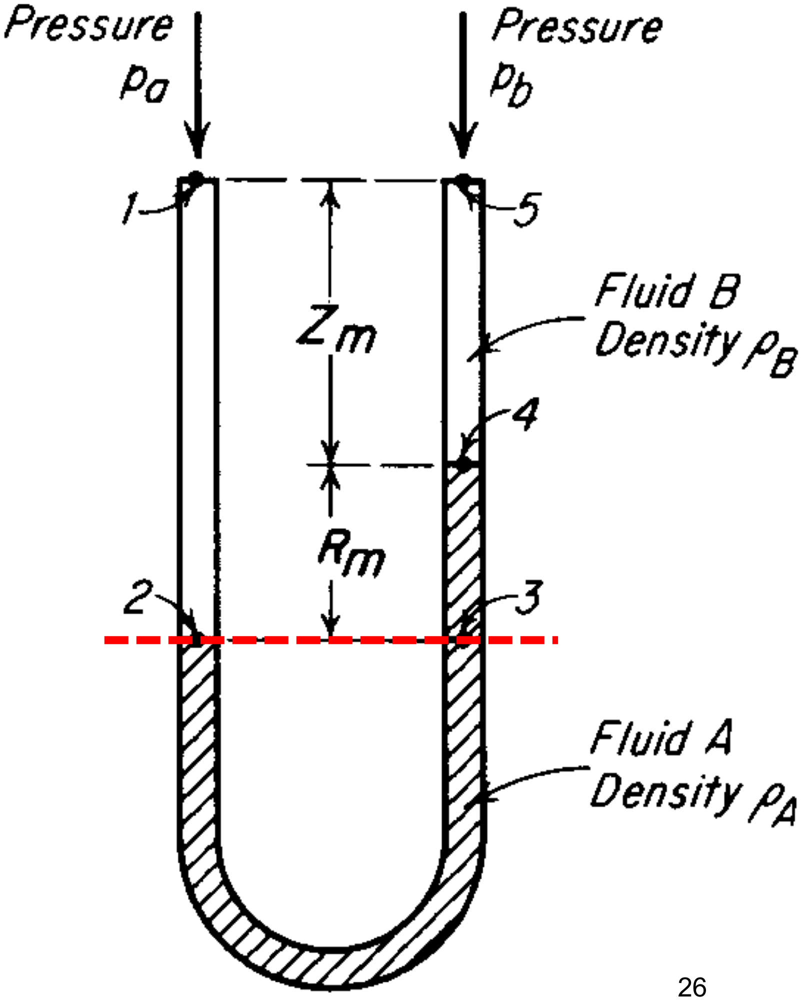
Μέτρηση διαφοράς πίεσης

Εξισώνοντας τις πιέσεις $P_2 = P_3$

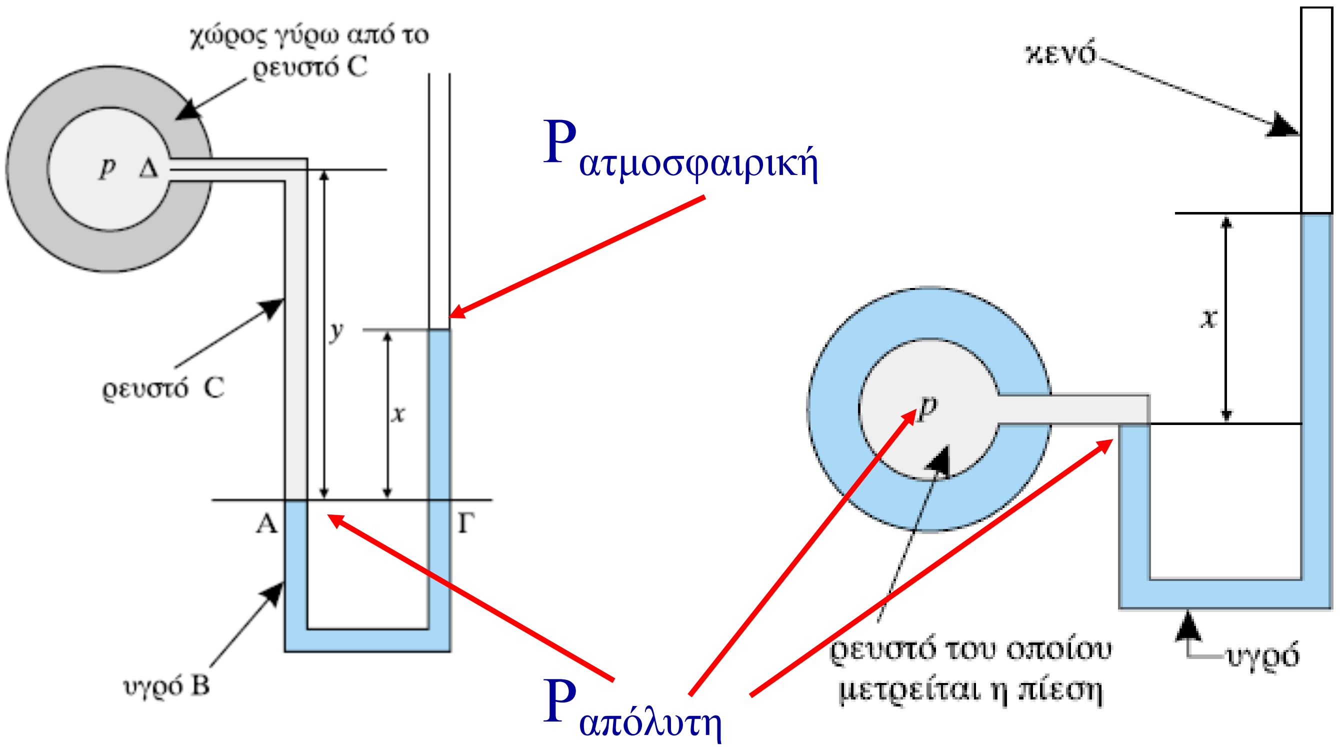
$$P_2 = P_a + \rho_b g (Z_m + R_m)$$

$$P_3 = P_b + \rho_b g (Z_m) + \rho_a g R_m$$

$$P_a - P_b = g R_m (\rho_a - \rho_b)$$

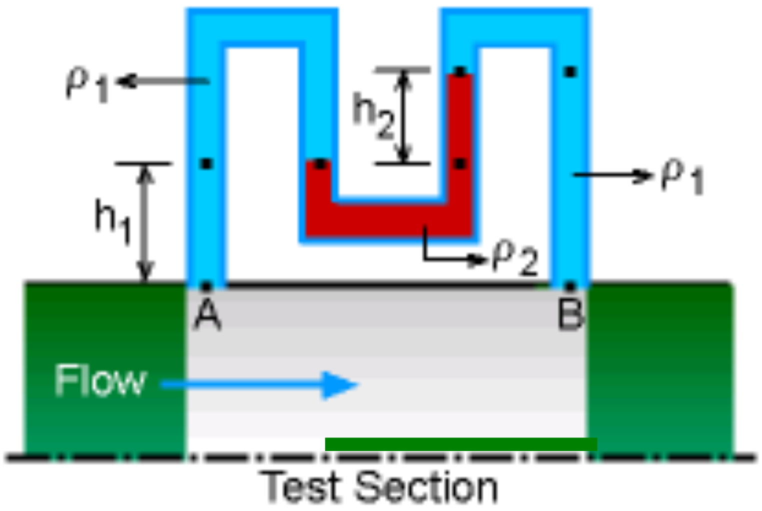


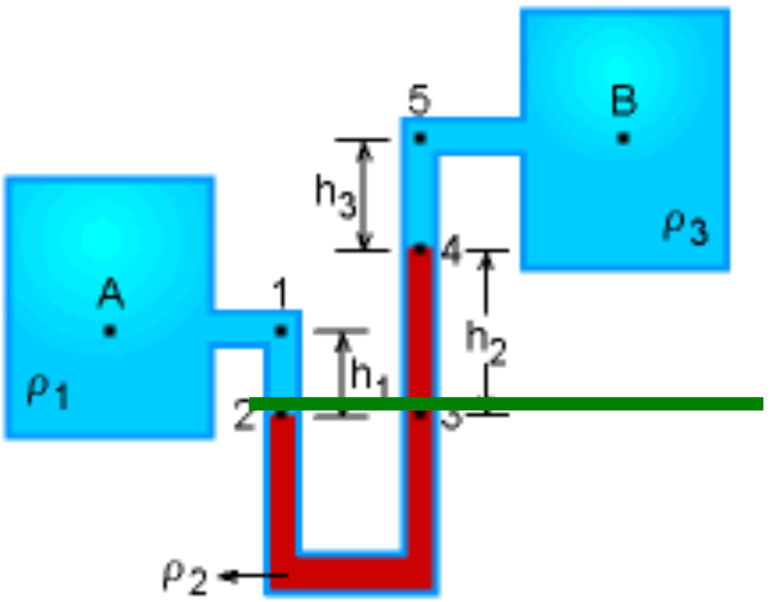
Μέτρηση στατικής πίεσης - Μανόμετρα



Ανοικτό (αριστερά) και κλειστό (δεξιά) μανόμετρο.

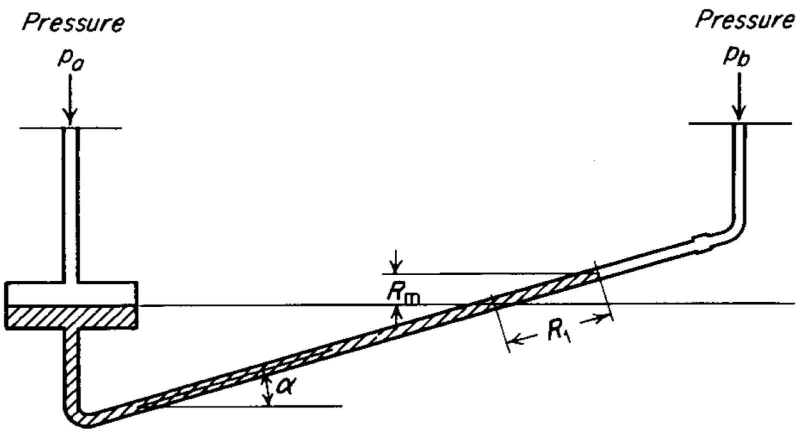
Μέτρηση στατικής πίεσης - Μανόμετρα

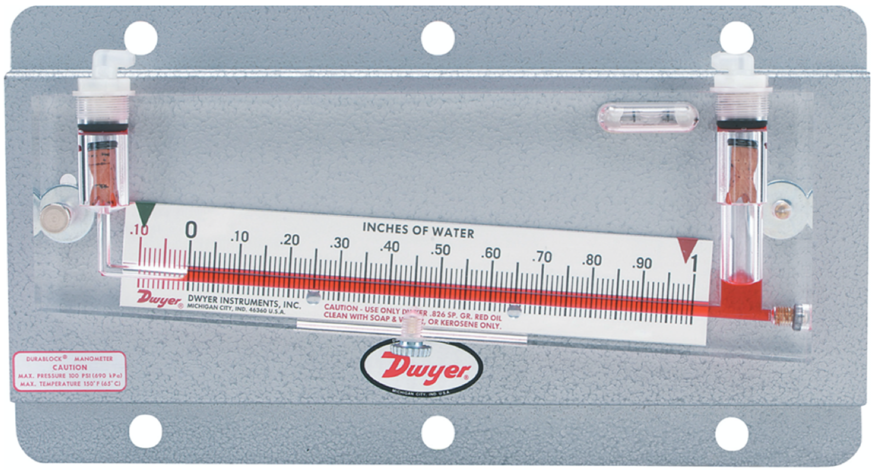




Κεκλιμένο μανόμετρο

- Για τη μέτρηση μικρών διαφορών πιέσεων πρέπει να μεγεθυνθεί κάπως το R_m



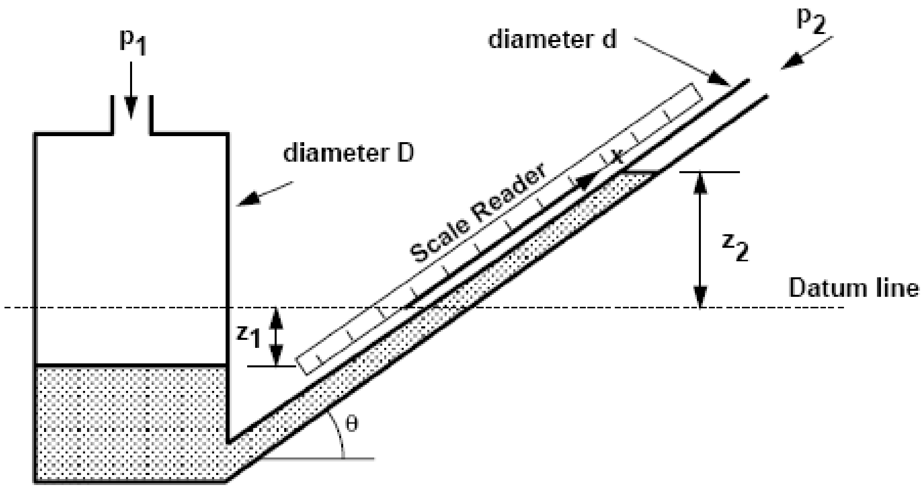


$$P_a - P_b = gR_1(\rho_a - \rho_b)\sin\alpha$$

An inclined manometer is required to measure an air pressure of 3mm of water to an accuracy of +/- 3%. The inclined arm is 8mm in diameter and the larger arm has a diameter of 24mm. The manometric fluid has density 740 kg/m^3 and the scale may be read to +/- 0.5mm.

What is the angle required to ensure the desired accuracy may be achieved?

[12° 39']



$$p_1 - p_2 = \rho_{man} g h = \rho_{man} g (z_1 + z_2)$$

Volume moved from left to right $= z_1 A_1 = \dfrac{z_2}{\sin\theta} A_2 = x A_2$

$$= z_1 \frac{\pi D^2}{4} = \frac{z_2}{\sin\theta}\frac{\pi d^2}{4} = x\frac{\pi d^2}{4}$$

$$z_1 = \frac{z_2}{\sin\theta}\frac{d^2}{D^2} = x\frac{d^2}{D^2}$$

$$p_1 - p_2 = \rho_{man} g x\left(\sin\theta + \frac{d^2}{D^2}\right)$$

$$\rho_{water} g h = \rho_{man} g x\left(\sin\theta + \frac{d^2}{D^2}\right)$$

$$\rho_{water} g h = (0.74 \times \rho_{water}) g x\left(\sin\theta + \frac{0.008^2}{0.024^2}\right)$$

$$h = 0.74\ x\ (\sin\theta + 0.1111)$$

The head being measured is 3% of 3mm = 0.003x0.03 = 0.00009m

This 3% represents the smallest measurement possible on the manometer, 0.5mm = 0.0005m, giving

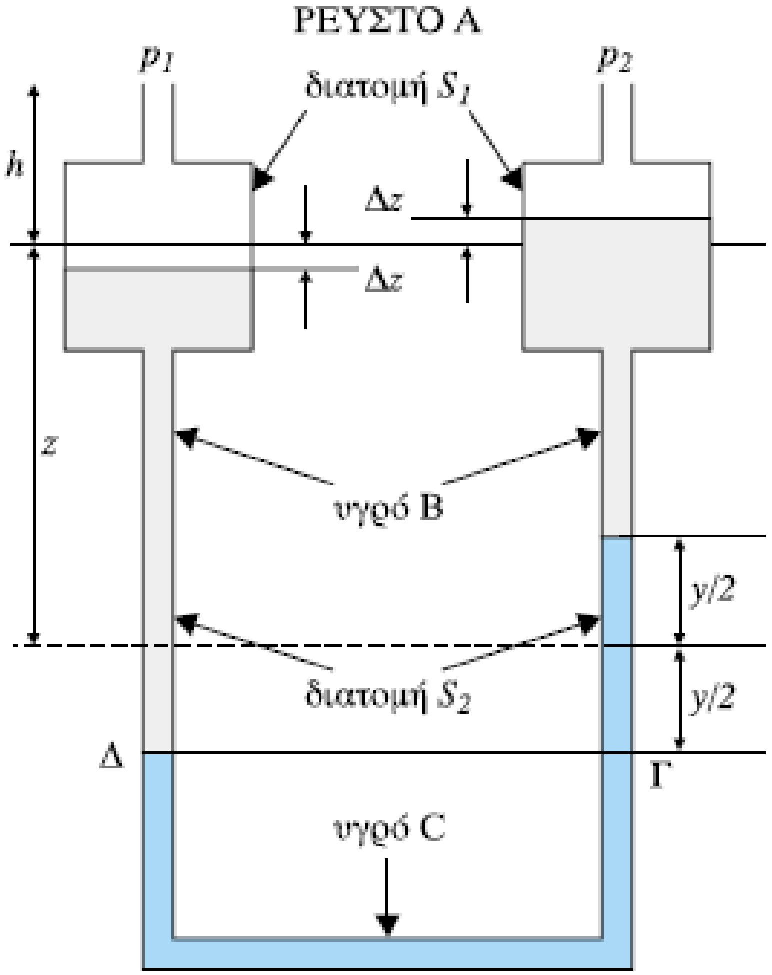
$$0.00009 = 0.74 \times 0.0005\ (\sin\theta + 0.1111)$$

$$\sin\theta = 0.132$$

$$\theta = 7.6^{\circ}$$

Μέτρηση στατικής πίεσης - Μανόμετρα

Μικρομανόμετρο



$$p_\Delta = p_\Gamma \Rightarrow p_1 + \gamma_A (h + \Delta z) + \gamma_B (z - \Delta z + y/2) =$$

$$p_2 + \gamma_A (h - \Delta z) + \gamma_B (z + \Delta z - y/2) + \gamma_c y.$$

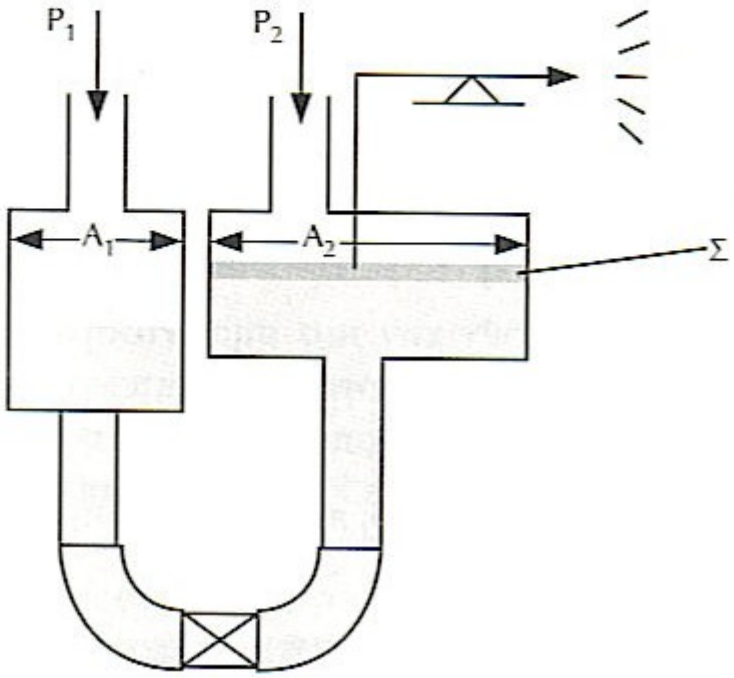
$$S_1 \Delta z = S_2 \frac{y}{2}$$

$$p_1 - p_2 = y \{\gamma_c - \gamma_B (1 - S_2/S_1) - \gamma_A S_2/S_1\}$$

Επειδή συνήθως $S_2 << S_1$ τότε έχουμε:

$$p_1 - p_2 = y (\gamma_c - \gamma_B).$$

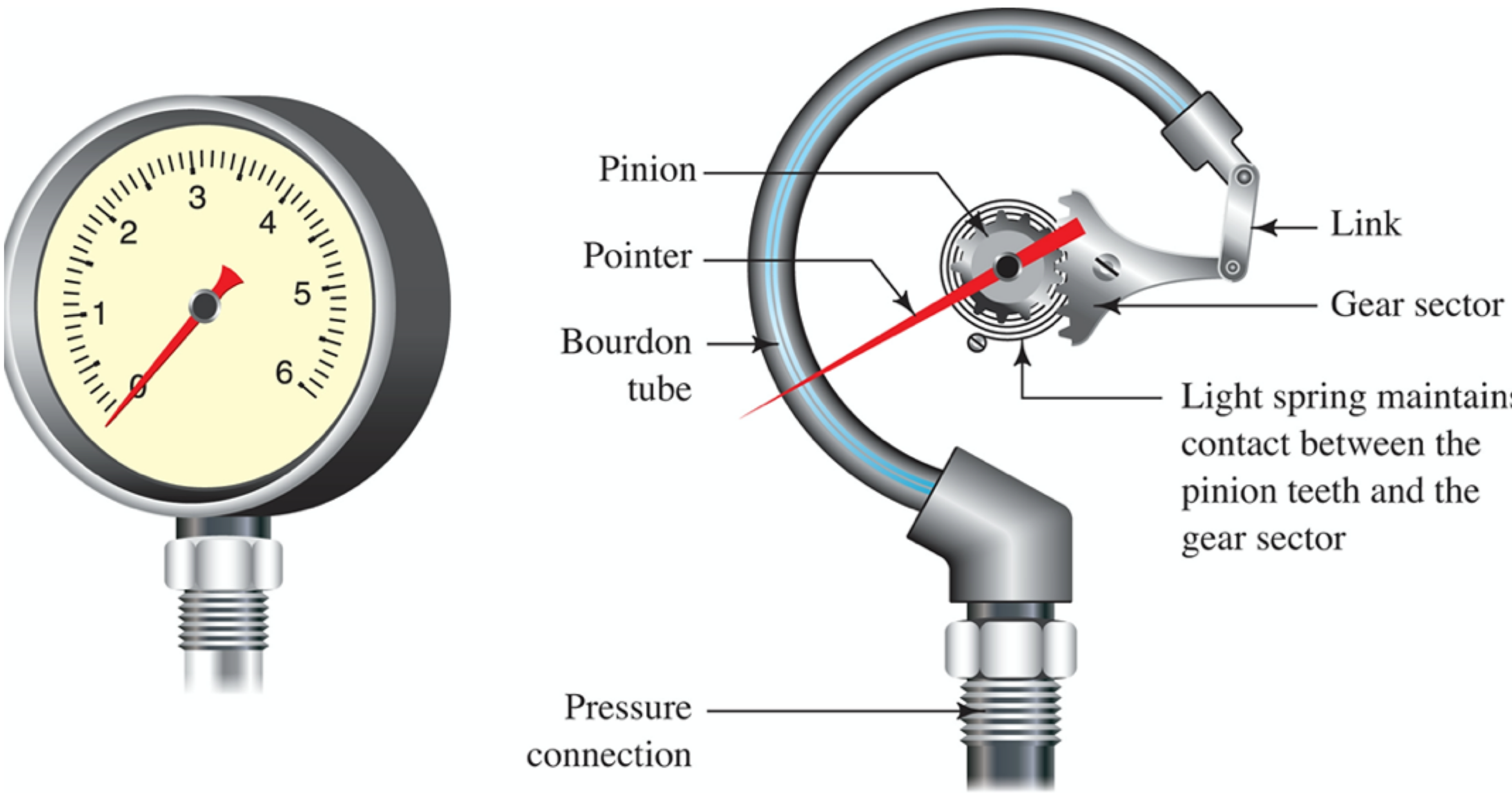
Μέτρηση στατικής πίεσης - Μανόμετρα



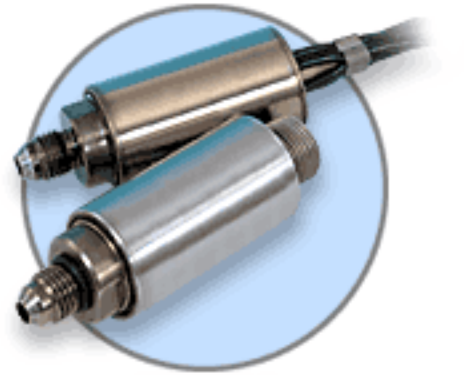
Επιπλέον σώμα

Μανόμετρο επίπλευσης.

Μανόμετρο Bourdon (μέτρηση μανομετρικής πίεσης)



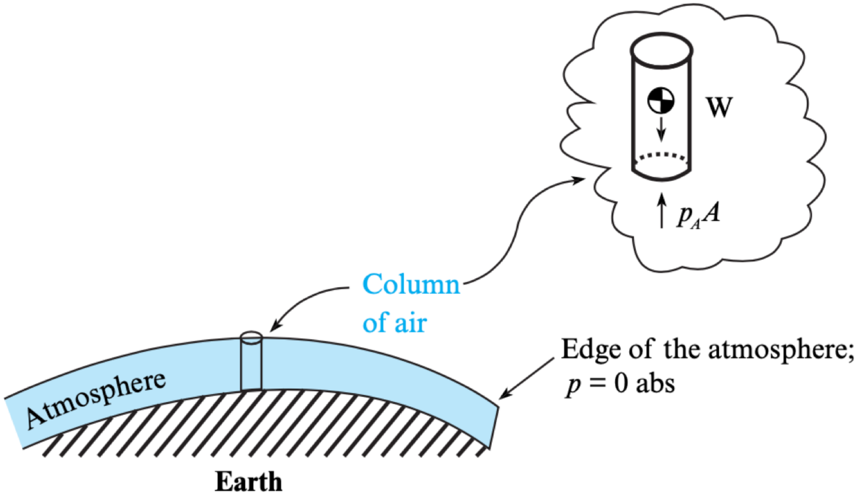
Ηλεκτρονικοί μετρητές πίεσης

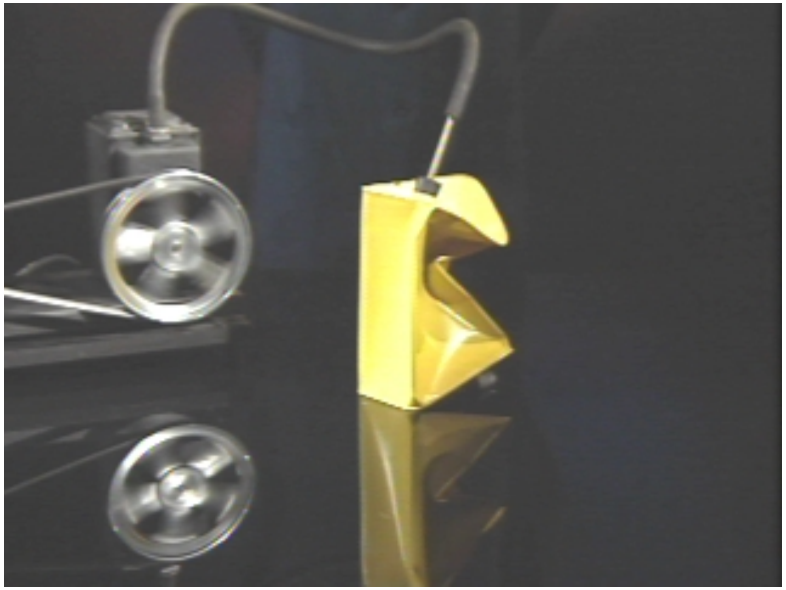


PX1004
Special Purpose Transducers

PX725A Heavy Duty/Industrial
Pressure Transducers

Ατμοσφαιρική Πίεση

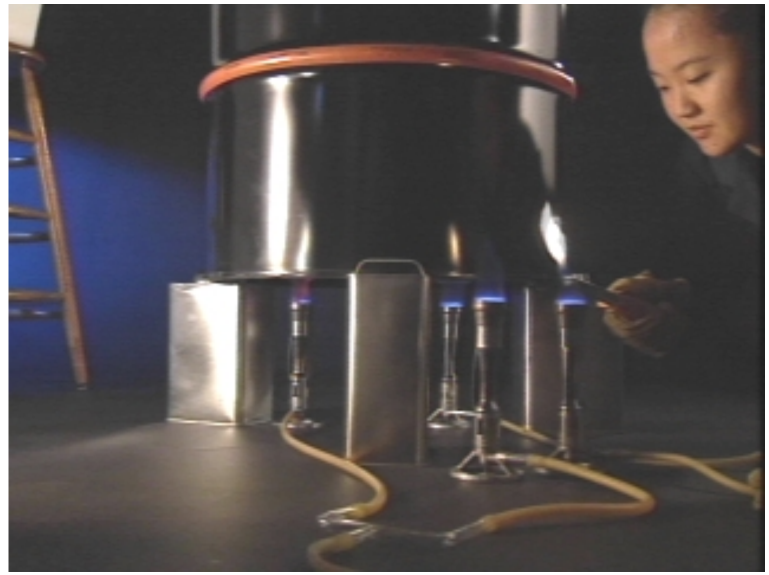




- At London (EL = 35 m): p_{atm} = 101 kPa
- At Denver, Colorado, USA (EL = 1650 m), p_{atm} = 83.4 kPa
- Near the summit of Mount Everest, Nepal (EL = 8000 m): p_{atm} = 35.6 kPa
- At a typical cruise altitude of a jetliner (EL = 12,190 m): p_{atm} = 18.8 kPa

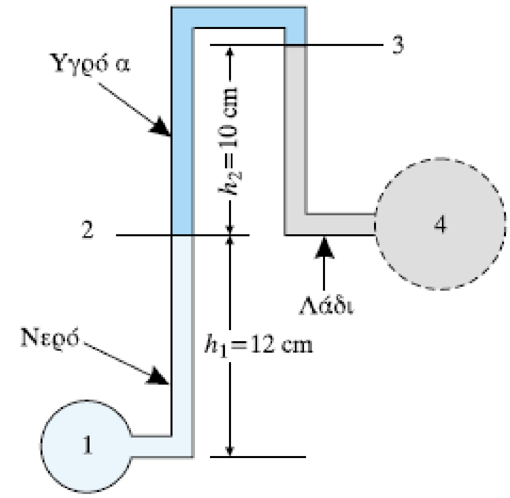
Ατμοσφαιρική Πίεση

Μια μικρή ποσότητα νερού βράζει σε βαρέλι 200 λίτρων.
Όταν το βαρέλι σφραγίζεται και ψύχεται με πάγο η ατμοσφαιρική πίεση το συμπιέζει απότομα.



Παράδειγμα 2.4

Πόση είναι η πίεση στον σωλήνα λαδιού (θέση 4), εάν η πίεση στο σωλήνα νερού είναι 10 kPa (1 Pa=1 N/m^2). Δίνονται $\gamma_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}}$=9810 N/m^3, $\gamma_{\lambda\alpha\delta\iota o\acute{\upsilon}}$=8436 N/m^3, γ_{α}=6670 N/m^3.



Πρώτος τρόπος

Ορίζουμε σημεία όπου έχουμε διαχωριστική επιφάνεια δύο ρευστών ή σημεία που ζητείται η πίεση. Υπολογίζουμε τη διαφορά πίεσης μεταξύ των ακραίων σημείων που μπορεί να αντικατασταθεί με τις επιμέρους διαφορές, οι οποίες υπολογίζονται από το ειδικό βάρος και το ύψος της αντίστοιχης στήλης. Προσέχουμε ποια πίεση είναι μεγαλύτερη, ώστε να βάλουμε το σωστό πρόσημο. Τα προηγούμενα εφαρμόζονται για τη λύση της άσκησης.

$$p_1 - p_4 = (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) + (p_3 - p_4) = \gamma_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}}\, h_1 + \gamma_\alpha\, h_2 + \gamma_{\lambda\alpha\delta\iota o\acute{\upsilon}}\, (-h_2) =$$

$$9810 \times 0{,}12 + 6670 \times 0{,}1 - 8436 \times 0{,}1 = 1177 + 667 - 843{,}6 =$$

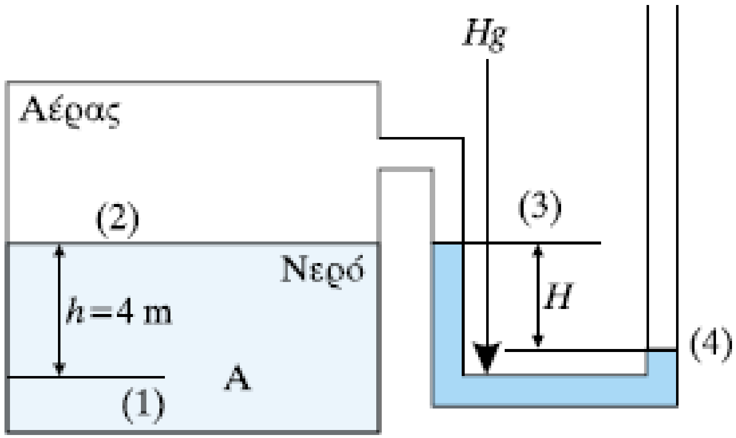
$$1.000 \text{ N/m}^2 \;\Rightarrow\; p_4 = p_1 - 1000 \text{ N/m}^2 = 9 \text{ kPa} .$$

Δεύτερος τρόπος

Αρχίζουμε από το αριστερό τελικό σημείο και προσθέτουμε πίεση, όταν η στήλη είναι προς τα κάτω, ενώ αφαιρούμε όταν είναι προς τα πάνω, μέχρι να φτάσουμε στην τελική πίεση στα δεξιά, με την οποία είναι ίσες. ΄Ετσι έχουμε:

$$p_1 - \gamma_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}}\, h_1 - \gamma_\alpha\, h_2 + \gamma_{\lambda\alpha\delta.}\, h_2 = p_4 \Rightarrow p_4 = 9 \text{ kPa}.$$

Αν το ύψος $H = 16$ cm να βρεθεί η πίεση στο σημείο Α. Δίδονται $\gamma_{νερού}=9810$ N/m^3, $\gamma_{Hg}=133{,}4$ kPa, $\gamma_{αέρα}=0$, $p_{atm}=101$ kPa.



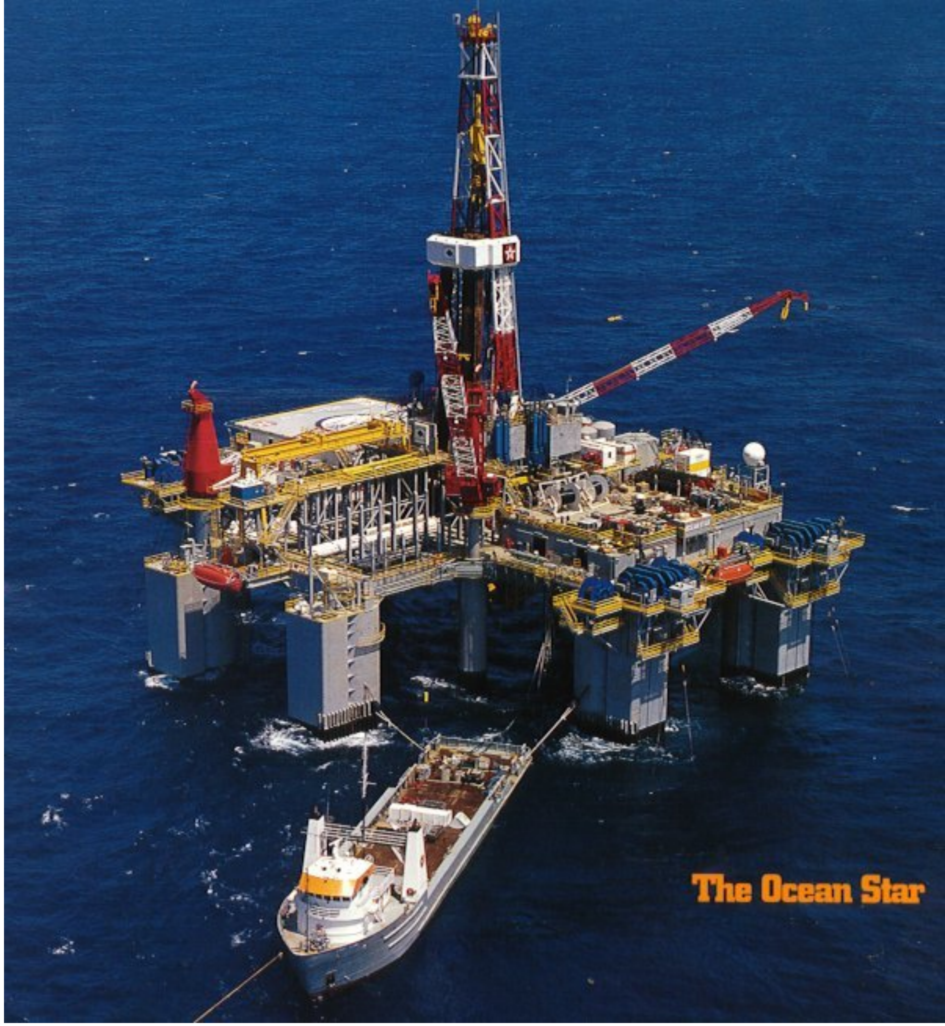
$$p_1 - p_4 = (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) + (p_3 - p_4) = \gamma_{νερού}\, h + 0 + \gamma_{Hg}\,(-H) =$$

$$9810 \times 4 - 133400 \times 0{,}16 = 39240 - 21344 = 17{,}9 \text{ kPa}, \Rightarrow$$

$$p_1 = p_4 + 17{,}9 \text{ kPa} = 118{,}9 \text{ kPa}.$$

Συμπιεστή ροή

Ψηλά βουνά



Γεωτρήσεις φυσικού αερίου

Συμπιεστή ροή

- Τα αέρια είναι συμπιέσιμα, δηλ. η πυκνότητά τους μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία και την πίεση
  - Για μικρές αλλαγές υψομέτρου (όπως σε εφαρμογές μηχανικής, κτλ.) οι διαφορές πίεσης θεωρούνται αμελητέες
  - Γενικά :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$$\gamma\iota\alpha\ \mathrm{T} = T_o = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$P_2 = P_1 \exp\left[-\frac{g \quad (z_2 - z_1)}{RT_o} \right]$$

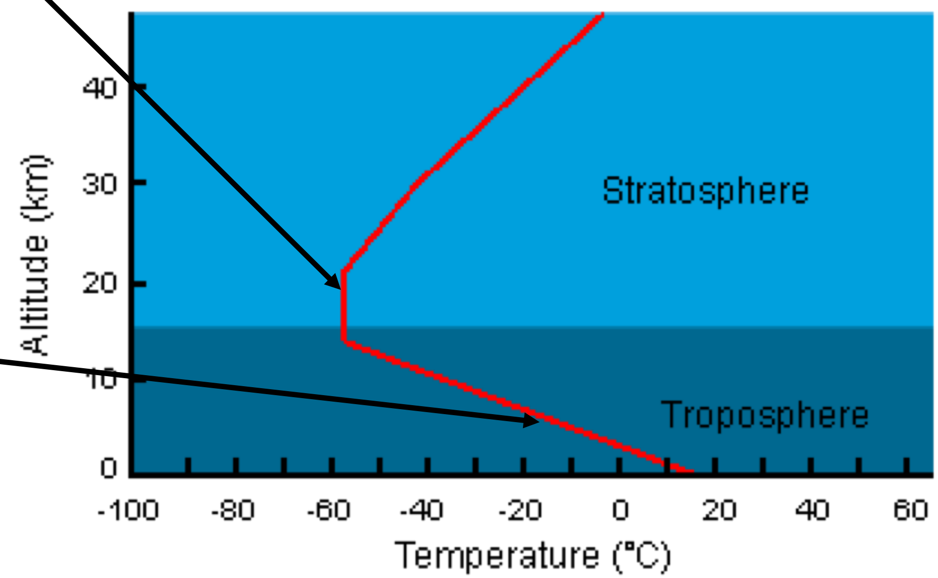
Ατμοσφαιρικές σχέσεις

- Σταθερή μεταβολή θερμοκρασίας με το ύψος

$$p(z) = p_0 e^{-g(z-z_0)/RT_0}$$

- Γραμμική μεταβολή θερμοκρασίας με το ύψος

$$p(z) = p_0 \left[\frac{T_0 - \alpha(z - z_0)}{T_0} \right]^{g/\alpha R}$$



Μεταβολή θερμοκρασίας με το ύψος για τυπική ατμόσφαιρα

EXAMPLE 3.3

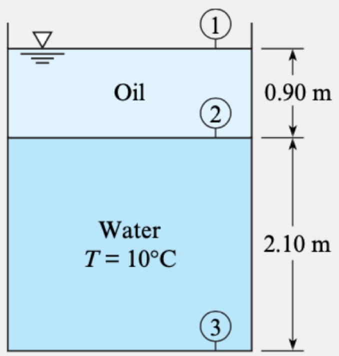
Applying the Hydrostatic Equation to Oil and Water in a Tank

Problem Statement

Oil with a specific gravity of 0.80 forms a layer 0.90 m deep in an open tank that is otherwise filled with water (10°C). The total depth of water and oil is 3 m. What is the gage pressure at the bottom of the tank?

Problem Definition

Oil and water are contained in a tank.



Properties:

- Water: (10°C, 1 atm, Table A.5): $\gamma_{water} = 9810 \text{ N/m}^3$
- Oil: $\gamma_{oil} = S\gamma_{water,\,4°C} = 0.8(9810 \text{ N/m}^3) = 7850 \text{ N/m}^3$

State the Goal

p_3 (kPa gage) ⬅ pressure at bottom of the tank

Generate Ideas and Make a Plan

Because the goal is p_3, apply the hydrostatic equation to the water. Then, analyze the oil. The plan steps are as follows:

1. Find p_2 by applying the hydrostatic equation (3.10a).
2. Equate pressures across the oil–water interface.
3. Find p_3 by applying the hydrostatic equation given in Eq. (3.10a).

Solution

1. Hydrostatic equation (oil):

$$\frac{p_1}{\gamma_{oil}} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma_{oil}} + z_2$$

$$\frac{0 \text{ Pa}}{\gamma_{oil}} + 3 \text{ m} = \frac{p_2}{0.8 \times 9810 \text{ N/m}^3} + 2.1 \text{ m}$$

$$p_2 = 7.063 \text{ kPa}$$

2. Oil–water interface:

$$p_2\big|_{oil} = p_2\big|_{water} = 7.063 \text{ kPa}$$

3. Hydrostatic equation (water):

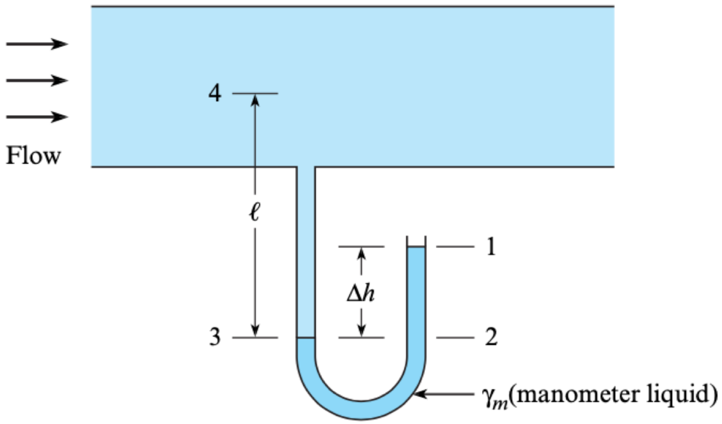
$$\frac{p_2}{\gamma_{water}} + z_2 = \frac{p_3}{\gamma_{water}} + z_3$$

$$\frac{7.063 \times 10^3 \text{ Pa}}{9810 \text{ N/m}^3} + 2.1 \text{ m} = \frac{p_3}{9810 \text{ N/m}^3} + 0 \text{ m}$$

$$\boxed{p_3 = 27.7 \text{ kPa gage}}$$

Review

Validation: Because oil is less dense than water, the answer should be slightly smaller than the pressure corresponding to a water column of 3 m. From Table F.1, a water column of 10 m ≈ 1 atm. Thus, a 3 m water column should produce a pressure of about 0.3 atm = 30 kPa. The calculated value appears correct.



EXAMPLE 3.4

Pressure Measurement (U-Tube Manometer)

Problem Statement

Water at 10°C is the fluid in the pipe of Fig. 3.16, and mercury is the manometer fluid. If the deflection Δh is 60 cm and ℓ is 180 cm, what is the gage pressure at the center of the pipe?

Define the Situation

Pressure in a pipe is being measured using a U-tube manometer.

Properties:

- Water (10°C), Table A.5: $\gamma = 9810\ \text{N/m}^3$
- Mercury, Table A.4: $\gamma = 133{,}000\ \text{N/m}^3$

State the Goal

Calculate gage pressure (kPa) in the center of the pipe.

Generate Ideas and Make a Plan

Start at point 1 and work to point 4 using ideas from Eq. (3.10c). When fluid depth increases, add a pressure change. When fluid depth decreases, subtract a pressure change.

Take Action (Execute the Plan)

1. Calculate the pressure at point 2 using the hydrostatic equation (3.10c):

$$p_2 = p_1 + \text{pressure increase between 1 and 2} = 0 + \gamma_m \Delta h_{12}$$
$$= \gamma_m(0.6\ \text{m}) = (133{,}000\ \text{N/m}^3)(0.6\ \text{m})$$
$$= 79.8\ \text{kPa}$$

2. Find the pressure at point 3:

- The hydrostatic equation with $z_3 = z_2$ gives

$$p_3|_{\text{water}} = p_2|_{\text{water}} = 79.8\ \text{kPa}$$

- When a fluid-fluid interface is flat, pressure is constant across the interface. Thus, at the oil–water interface

$$p_3|_{\text{mercury}} = p_3|_{\text{water}} = 79.8\ \text{kPa}$$

3. Find the pressure at point 4 using the hydrostatic equation given in Eq. (3.10c):

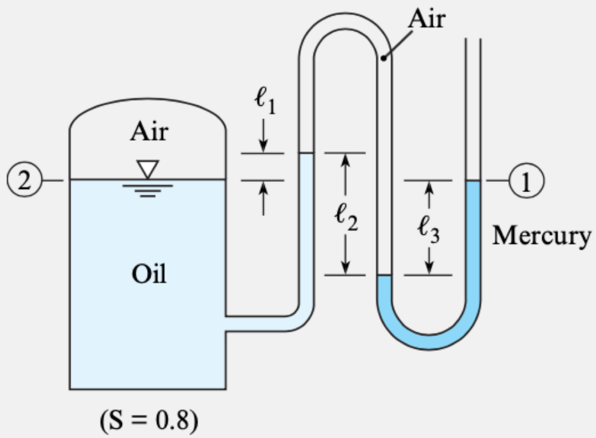
$$p_4 = p_3 - \text{pressure decrease between 3 and 4} = p_3 - \gamma_w \ell$$
$$= 79{,}800\ \text{Pa} - (9810\ \text{N/m}^3)(1.8\ \text{m})$$
$$= 62.1\ \text{kPa gage}$$

EXAMPLE 3.5

Manometer Analysis

Problem Statement

What is the pressure of the air in the tank if $\ell_1 = 40$ cm, $\ell_2 = 100$ cm, and $\ell_3 = 80$ cm?



Define the Situation

A tank is pressurized with air.

Assumptions: Neglect the pressure change in the air column.

Properties:

- Oil: $\gamma_{oil} = S\gamma_{water} = 0.8 \times 9810 \text{ N/m}^3 = 7850 \text{ N/m}^3$
- Mercury, Table A.4: $\gamma = 133{,}000 \text{ N/m}^3$

State the Goal

Find the pressure (kPa gage) in the air.

Generate Ideas and Make a Plan

Apply the manometer equation (3.21) from location 1 to location 2.

Take Action (Execute the Plan)

Manometer equation:

$$p_1 + \sum_{\text{down}} \gamma_i h_i - \sum_{\text{up}} \gamma_i h_i = p_2$$

$$p_1 + \gamma_{\text{mercury}}\ell_3 - \gamma_{\text{air}}\ell_2 + \gamma_{\text{oil}}\ell_1 = p_2$$

$$0 + (133{,}000 \text{ N/m}^3)(0.8 \text{ m}) - 0 + (7850 \text{ N/m}^3)(0.4 \text{ m}) = p_2$$

$$\boxed{p_2 = p_{\text{air}} = 110 \text{ kPa gage}}$$