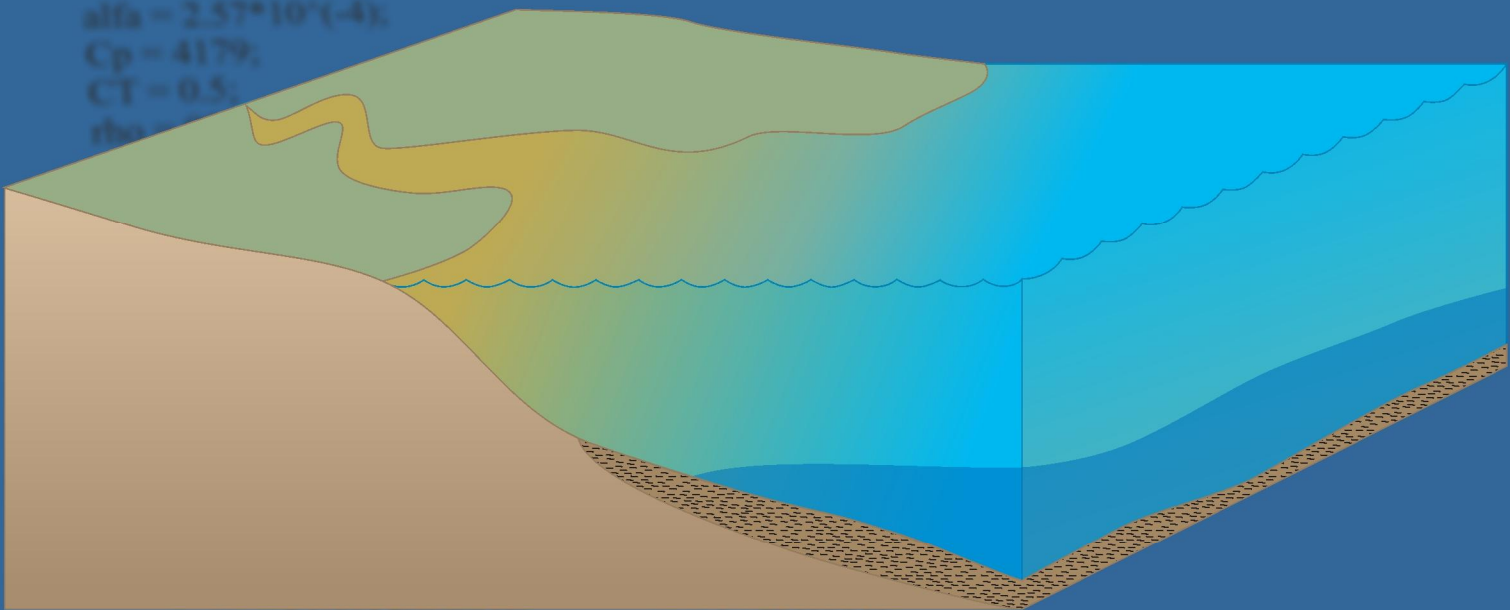


Περιβαλλοντική Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Γ. Συλαίος
Κ. Μουτσόπουλος

```
% Lake Hydrodynamics - Hydrodynamic Temperature Profile  
% developed by G. Sylios  
time = 1:4:11*4;  
Q = [-105, -113, -103, -111, -123, -106, -83, 145, 382, 602, 713]; % net radiation  
DeltaT = [3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00]; % temperature difference between surface and bottom  
h = [10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0]; % water column height
```

```
% Define model constants  
alfa = 2.57*10^(-4);  
Cp = 4179;  
CT = 0.5;  
rho = 1000;
```



```
h(i+1) = h(i) + DeltaT(i) * DeltaT(i) * DeltaT(i);  
TempChange1(i) = (-Q(i)) * dt / (Cp * rho * h(i) * h(i));  
TempChange2(i) = DeltaT(i) * DeltaT(i) * h(i) * h(i);  
TempChange(i) = DeltaT(i) + 0.1 * DeltaT(i) * TempChange1(i) - TempChange2(i);  
DeltaT(i+1) = TempChange(i);  
end  
figure; subplot(2,1,1); plot(time, DeltaT(1:11));  
subplot(2,1,2); plot(time, Conv(1:11));
```

Γεώργιος Συλαίος
Αναπλ. Καθηγητής

Κωνσταντίνος Μουτσόπουλος
Αναπλ. Καθηγητής

Περιβαλλοντική Υπολογιστική Ρευστομηχανική



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Περιβαλλοντική Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Συγγραφή

Συλαίος Γεώργιος

Μουτσόπουλος Κωνσταντίνος

Κριτικός αναγνώστης

Καραμπάς Θεοφάνης

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Βιολιτζή Γεωργία

Γραφιστική Επιμέλεια: Κόκκος Νικόλαος

Τεχνική Επεξεργασία: Κόκκος Νικόλαος

ISBN: 978-960-603-433-6

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 3.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/gr/>

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Πίνακας περιεχομένων

Πρόλογος	8
Κεφάλαιο 1	9
Εισαγωγή στο Πλαίσιο της Περιβαλλοντικής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής	9
1.1. Τα ρευστά στο Περιβάλλον	9
1.2. Στρωματοποίηση και Τύρβη	10
1.3. Πλαίσιο Περιβαλλοντικής Διαχείρισης Ρευστών	12
1.4. Βασική Ορολογία Μαθήματος	14
1.5. Κλίμακες, Διεργασίες και Συστήματα	15
1.6. Στοιχειώδης Όγκος	16
1.7. Διατήρηση Μάζας	19
1.8. Ανασκόπηση Περιεχομένων Βιβλίου	19
Κεφάλαιο 2	21
Εξίσωση Διάχυσης Ρύπου	21
2.1. Νόμος Διάχυσης του Fick	21
2.2. Αναλυτική Λύση της Εξίσωσης Διάχυσης	24
2.3. Παράδειγμα Εφαρμογής	26
2.4. Αριθμητική Λύση της Εξίσωσης Διάχυσης	27
2.4.1. Το Αριθμητικό Σχήμα FTCS	28
2.4.2. Ανάλυση Σφάλματος Αποκοπής (Truncation Error) για το σχήμα FTCS	28
2.5. Δισδιάστατη της Εξίσωσης Διάχυσης	30
2.5.1. Λύση	30
2.4.3. Το Αριθμητικό Σχήμα Leap-Frog	31
2.4.4. Το Αριθμητικό Σχήμα DuFort-Frankel	32
2.4.5. Το Πεπλεγμένο Αριθμητικό Σχήμα (Implicit Scheme)	33
2.4.6. Κώδικας Προγραμματισμού Matlab για την εφαρμογή του σχήματος FTCS	34
2.5. Δισδιάστατη της Εξίσωσης Διάχυσης	36
Βιβλιογραφία	44
Κεφάλαιο 3	45
Εξίσωση Καθαρής Συναγωγής	45
3.1. Εξίσωση Καθαρής Συναγωγής Ρύπου	45
3.2. Αριθμητική Λύση της Εξίσωσης Συναγωγής	46
3.2.1. Το Αριθμητικό Σχήμα FTBS (Forward in Time – Backward in Space)	47
3.2.2. Ακρίβεια Αριθμητικού Σχήματος	48

Παράδειγμα εφαρμογής FTBS (A).....	48
Παράδειγμα εφαρμογής FTBS (B).....	49
Παράδειγμα εφαρμογής FTBS (Γ)	50
Βιβλιογραφία.....	56
Κεφάλαιο 4.....	57
Συνδυασμένη Εξίσωση Διάχυσης – Συναγωγής.....	57
4.1. Συνδυασμένη Εξίσωση Διάχυσης - Συναγωγής Ρύπου	57
4.2. Αριθμητικές Λύσεις – Παρουσίαση σχημάτων πεπερασμένων διαφορών.....	60
4.2.1. Αριθμητικό Σχήμα FTCS	61
4.2.2. Αριθμητικό Σχήμα Upwind (Ανάντη Διαφορών).....	62
Βιβλιογραφία.....	68
Κεφάλαιο 5.....	69
Ειδικές Εξισώσεις Περιγραφής Ροής	69
5.1. Βασικές αρχές για περιγραφή των περιβαλλοντικών ροών.....	69
5.2. Οι εξισώσεις Navier-Stokes	69
5.2.1. Εξίσωση της συνέχειας στην κλίμακα του συνεχούς	69
5.2.2. Οι εξισώσεις Navier-Stokes.....	72
5.2.3. Μοντέλα για τυρβώδεις ροές.....	75
5.3. Προσομοίωση υπόγειων ροών.....	83
Βιβλιογραφία.....	88
Κεφάλαιο 6.....	89
Υπολογιστικές Επιλύσεις Υπόγειας Υδραυλικής.....	89
6.1. Αναλυτικές λύσεις.....	89
6.1.1. Αναλυτικές λύσεις για την περίπτωση μόνιμης ροής.....	89
6.1.2. Αναλυτικές λύσεις για την περίπτωση μη μόνιμης ροής.....	99
6.2. Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων της μη μόνιμης ροής	105
6.2.1. Γενικές αρχές.....	105
6.2.2. Αριθμητική επίλυση της εξίσωση Boussinesq	106
6.2.3. Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων διπλού πορώδους.....	107
6.2.4. Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Forchheimer.....	108
Βιβλιογραφία.....	109
Κεφάλαιο 7.....	111
Ροή και Διασπορά Ρύπων σε Ποτάμια και Κανάλια	111
7.1. Εξισώσεις St. Venant.....	111
7.2. Επίλυση Εξισώσεων St. Venant	114
7.3. Μεταφορά και Διάχυση Ρύπου σε Ποταμό	119

7.4. Αναλυτική Επίλυση Εξίσωσης Μεταφοράς-Διάχυσης Ρύπου σε Ποταμό.....	121
Ασκηση 7.1.....	122
Λύση.....	123
Ασκηση 7.2.....	123
Λύση.....	123
Ασκηση 7.3.....	123
Λύση.....	124
Ασκηση 7.4.....	124
Λύση.....	124
7.5. Αριθμητική Επίλυση Εξίσωσης Μεταφοράς-Διάχυσης Ρύπου σε Ποταμό	124
Βιβλιογραφία.....	128
Κεφάλαιο 8.....	129
Μείξη σε Λίμνες και Ταμειυτήρες	129
8.1. Εισαγωγή.....	129
8.2. Στρωματοποίηση	133
8.3. Συναγωγή.....	135
8.4. Συναγωγή Διείσδυσης	137
8.5. Συναγωγή διείσδυσης σε ολόκληρη την υδάτινη στήλη	138
8.6. Ανεμογενής Μείξη	139
8.7. Θερμικό Ισοζύγιο Λιμνών	141
8.8. Θερμοκρασία Νερού Επιλιμνίου - Υπολιμνίου.....	144
Ασκηση 8.1.....	145
Λύση.....	145
8.9. Υδατικό Ισοζύγιο Λιμνών	146
Βιβλιογραφία.....	148
Κεφάλαιο 9.....	149
Μείξη Ρύπων σε Ποταμοεκβολές	149
9.1. Ορισμός Ποταμοεκβολής	149
9.2. Ταξινόμηση ποταμοεκβολών σύμφωνα με τις συνθήκες κυκλοφορίας και μείξης.....	150
9.3. Παράγοντες Μείξης στις Ποταμοεκβολές.....	151
9.4. Προσδιορισμός Συντελεστή Διαμήκους Διασποράς σε Ποταμοεκβολές	155
Ασκηση 9.1.....	156
9.5. Χρόνος Ανανέωσης Ποταμοεκβολής	156
Βιβλιογραφία.....	159
Κεφάλαιο 10.....	160
Υδροδυναμική και Διασπορά Ρύπων σε Παράκτιες Περιοχές.....	160

10.1. Παράκτια Κυκλοφορία και Εξισώσεις Ροής	160
10.2. Διακριτοποίηση Περιοχής Μελέτης	163
10.3. Οριακές Συνθήκες Παράκτιου Ομοιώματος.....	165
10.4. Κατάστροψη Παλιρροιακού Παράκτιου Ομοιώματος.....	167
Λύση.....	167
Άσκηση 10.1.....	168
10.5. Μεταφορά και Διάχυση Ρύπου.....	172
Βιβλιογραφία.....	174
Κεφάλαιο 11	175
Μηχανική Φλεβών και Πλουμιών.....	175
11.1. Ορισμός υποβρύχιας φλέβας και πλουμιού.....	175
11.2. Βασικοί Ορισμοί.....	177
11.3. Χαρακτηριστικά Εκροής	178
11.4. Φυσικά Μεγέθη Προσδιορισμού της Ροής.....	179
11.5. Πυκνομετρικοί Αριθμοί Froude και Richardson	180
11.6. Η Απλή Κυκλική Φλέβα.....	181
Άσκηση 11.1.....	183
Λύση.....	183
11.7. Το Απλό Πλούμιο.....	183
Άσκηση 11.2.....	185
Λύση.....	185
Βιβλιογραφία.....	186
Κεφάλαιο 12	187
Εφαρμογές Υπόγειας Υδραυλικής	187
12.1. Γενικότητες – η σημασία των μοντέλων υπόγειας υδραυλικής	187
12.2. Διαχείριση υπόγειων υδατικών πόρων – μεγιστοποίηση των παροχών άντλησης σε παραθαλάσσιους υδροφορείς ή υδροφορείς κοντά σε ευαίσθητα υδατικά σώματα.....	187
12.2.1. Διαχείριση υδατικών πόρων – μεγιστοποίηση των παροχών άντλησης σε παράκτιους υδροφορείς	187
12.2.2. Διαχείριση υδατικών πόρων μεγιστοποίηση των παροχών άντλησης σε υδροφορείς στην ενδοχώρα	189
12.3. Μοντέλα προσομοίωσης και διαχείρισης για εκμετάλλευση υπόγειων υδατικών πόρων με επιφανειακές αντλίες	190
12.4. Προσδιορισμός ζωνών προστασίας υδρογεωτρήσεων	192
12.4.1. Απευθείας προσδιορισμός των ζωνών προστασίας υδρογεωτρήσεων	192
12.4.2. Παραδείγματα προσδιορισμού των ορίων ζωνών προστασίας, παράδειγμα εφαρμογής το πεδίο γεωτρήσεων της πόλης της Κομοτηνής.....	196

Βιβλιογραφία.....	198
Συντομογραφίες - Αρκτικόλεξα - Ακρωνύμια.....	199
Απόδοση Ξενόγλωσσων Όρων.....	200

Πρόλογος

Το βιβλίο αποτελεί μία σημαντική συμβολή στο επιστημονικό πεδίο της «Περιβαλλοντικής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής», ιδιαίτερα καθώς παρουσιάζεται με τον πλέον σύγχρονο και διαδραστικό τρόπο. Ο αναγνώστης εισάγεται στις βασικές θεωρητικές έννοιες της Περιβαλλοντικής Ρευστομηχανικής, των εξισώσεων που περιγράφουν τις φυσικές διεργασίες (ροή, μεταφορά και διάχυση) στο πραγματικό περιβάλλον επιφανειακών και υπόγειων υδατικών συστημάτων (χείμαρροι, ποταμοί, λίμνες, παράκτια θάλασσα, υπόγειοι υδροφόροι). Παράλληλα, ο αναγνώστης εισάγεται στις διαδικασίες της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων αυτών με το πλέον απλό και κατανοητό τρόπο.

Το βιβλίο είναι δομημένο σε δύο μέρη: το πρώτο μέρος ασχολείται με την παρουσίαση των κύριων θεωρητικών εξισώσεων της Περιβαλλοντικής Ρευστομηχανικής και τη μεθοδολογία επίλυσης με τη τεχνική των πεπερασμένων διαφορών και όγκων ελέγχου, ενώ το δεύτερο μέρος παρουσιάζει εφαρμοσμένες περιβαλλοντικές ροές και τις διεργασίες μεταφοράς και διάχυσης ρύπων σε αυτές. Σε κάθε κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές που έχουν αναπτύξει οι συγγραφείς και έχουν εφαρμόσει σε υπαρκτά υδατικά συστήματα.

Κρίνω πολύ θετικό το γεγονός ότι τα παραπάνω συνοδεύονται με κώδικες προγραμματισμού Matlab ενώ δίνεται σειρά ασκήσεων και προβλημάτων εφαρμογής. Έτσι, ο αναγνώστης εάν δουλέψει συστηματικά θα κατανοήσει σε βάθος τα περιγραφέντα φαινόμενα, καθώς και τη μεθοδολογία προσέγγισης και επίλυσής τους.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στο Πλαίσιο της Περιβαλλοντικής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής

Σύνοψη

Το κεφάλαιο εξηγεί τη σημασία της κατανόησης και της περιγραφής της συμπεριφοράς των ρευστών του περιβάλλοντος και αναλύει το αντικείμενο της Περιβαλλοντικής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής και των συγγενών κλάδων της, όπως η Υδραυλική, η Ρευστομηχανική, η Δυναμική Γεωφυσικών Ροών και η Υδρολογία. Στη συνέχεια ο φοιτητής εισάγεται στο πλαίσιο της περιβαλλοντικής διαχείρισης των ρευστών με στόχο την κατανόηση της σχετικής κίνησης των ρύπων σε έναν αποδέκτη ως προς την πηγή εκπομπής του. Παρουσιάζεται η ορολογία του βιβλίου και η επεξήγηση της χρήσης όρων σχετικών με τις διεργασίες μεταφοράς και διασποράς του ρύπου εντός του υδάτινου αποδέκτη. Τέλος, παρουσιάζονται οι κλίμακες χώρου και χρόνου των υπό εξέταση ροών και οι περιβαλλοντικές διεργασίες και τα συστήματα που θα εξεταστούν στη συνέχεια του βιβλίου.

1.1. Τα ρευστά στο Περιβάλλον

Όλοι οι ζωντανοί οργανισμοί διαβιούν μέσα σε ένα ρευστό, είτε πρόκειται για τον αέρα της ατμόσφαιρας, είτε πρόκειται για το νερό μιας λίμνης, ενός ποταμού ή του ωκεανού. Ακόμη και τα εδάφη είναι κορεσμένα σε υγρασία, χωρίς την οποία η ζωή θα ήταν αδύνατη. Συνεπώς, δεν αποτελεί υπερβολή να θεωρήσουμε ότι η ζωή στη Γη βρίσκεται «βυθισμένη» σε ρευστά.

Η μελέτη των ροών στο περιβάλλον είναι ιδιαίτερα σημαντική για την επιστημονική γνώση, οπότε και αναπτύχθηκαν νέα επιστημονικά αντικείμενα, όπως η μετεωρολογία, η κλιματολογία, η υδρολογία, η υδραυλική (επιφανειακή και υπόγεια), η λιμνολογία και η ωκεανογραφία. Στα παραπάνω αντικείμενα υπάρχει σημαντικός βαθμός αλληλοεπικάλυψης σε διάφορα πεδία, η οποία οδήγησε στην ανάγκη ανάπτυξης ενός ειδικού αντικειμένου που ασχολείται με τη περιβαλλοντική διαχείριση φυσικών ροών, η οποία ονομάστηκε Περιβαλλοντική Ρευστομηχανική (Environmental Fluid Mechanics). Στη συνέχεια, η εκτεταμένη χρήση των Η/Υ και η ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων και αλγορίθμων με στόχο την επίλυση εξισώσεων της Περιβαλλοντικής Ρευστομηχανικής, οδήγησαν στην «άνθηση» του πεδίου της Περιβαλλοντικής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής.

Συνεπώς, ως Περιβαλλοντική Υπολογιστική Ρευστομηχανική ορίζουμε την εξειδικευμένη μελέτη των διεργασιών των φυσικών ροών αέρα και νερού του πλανήτη μας, και ειδικότερα αυτών που επηρεάζουν την περιβαλλοντική ποιότητα των ρευστών αυτών με τη χρήση απλών ή σύνθετων μαθηματικών προσομοιώσεων.

Η κλίμακα χώρου του αντικειμένου αυτού κυμαίνεται από μερικά χιλιοστά έως μερικά χιλιόμετρα, ενώ η κλίμακα χρόνου από δευτερόλεπτα έως αρκετά έτη. Για να κατανοήσουμε τη διαφορετική προσέγγιση στα ίδια φαινόμενα της Περιβαλλοντικής Ρευστομηχανικής σε σχέση με άλλα συγγενή αντικείμενα, παραθέτουμε τον Πίνακα 1.1.

	Περιβαλλοντική Ρευστομηχανική	Ρευστομηχανική	Δυναμική Γεωφυσικών Ροών	Υδραυλική	Υδρολογία
Ροή Αέρα	Θαλάσσια αύρα	Αεροτομή	Τυφώνας		
Ροή Νερού	Ροή και Διάχυση ρύπων σε ποταμό	Αντλία	Ρεύμα Κόλπου Μεξικού	Φράγμα	Υδρολεκάνη
Τύρβη	Επωφελής (Διάλυση ρύπων)	Επιβλαβής (αύξηση πολυπλοκότητας συστήματος)	Δευτερεύουσας σημασίας	Δευτερεύουσας σημασίας	Αμελητέα
Ανθρώπινη επίδραση	Σημαντική	Κυρίαρχη	Μηδενική	Κυρίαρχη	Περιορισμένη
Σκοπιμότητα	Πρόβλεψη και Λήψη Απόφασης	Σχεδιασμός & Λειτουργία	Πρόβλεψη & Προειδοποίηση	Σχεδιασμός & Λειτουργία	Πρόβλεψη και Λήψη Απόφασης

Πίνακας 1.1 Συγκριτική παρουσίαση προσέγγισης Περιβαλλοντικής Ρευστομηχανικής και λοιπών συγγενών αντικειμένων.

1.2. Στρωματοποίηση και Τύρβη

Η στρωματοποίηση και η τύρβη είναι δύο βασικά στοιχεία της Περιβαλλοντικής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής. Η στρωματοποίηση λαμβάνει χώρα όταν η πυκνότητα ενός ρευστού μεταβάλλεται χωρικά, όπως στη περίπτωση της θαλάσσιας αύρας (sea breeze) όπου μία μάζα θερμότερου αέρα κινείται πάνω από μάζα ψυχρότερου αέρα, ή στη περίπτωση των ποταμοεκβολών (estuary), όπου νερό χαμηλής αλατότητας προερχόμενο από το ποτάμι κινείται πάνω από νερό υψηλής αλατότητας προερχόμενο από τη θάλασσα.

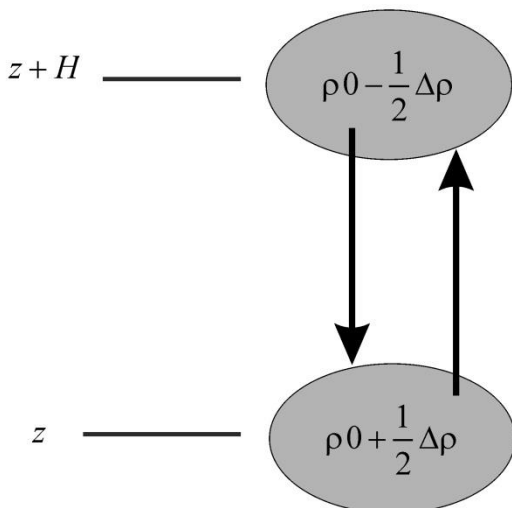
Όταν ρευστό χαμηλής πυκνότητας και ρευστό υψηλής πυκνότητας έρχονται σε επαφή, τότε αναπτύσσονται *ανωστικές δυνάμεις και ροές* (buoyancy forces and flows), οι οποίες ελέγχουν, προκαλώντας ή περιορίζοντας, τις κατακόρυφες κινήσεις και ανταλλαγές μάζας. Η άνωση είναι υπεύθυνη για την «εσωτερική αναδιανομή» της μάζας ενός ρευστού, καθώς το ρευστό τοποθετεί το χαμηλής πυκνότητας τμήμα του υψηλότερα και το υψηλής πυκνότητας τμήμα του χαμηλότερα. Μία τέτοια αναδιανομή προκαλεί τη διαστρωμάτωση του ρευστού από το βαρύτερο στον πυθμένα ως το ελαφρύτερο στην επιφάνεια, προκαλώντας τη *στρωματοποίηση* (stratification). Ο όρος αυτός περιέχει κάθε κατάσταση ρευστού, όπου η διαφορά πυκνότητας θεωρείται σημαντική, ανεξάρτητα αν αυτή είναι κατακόρυφη ή οριζόντια ή οφείλεται στη θερμότητα ή σε κάποιο άλλο παράγοντα, όπως η αλατότητα (στη θάλασσα) ή η υγρασία (στην ατμόσφαιρα).

Στις περισσότερες περιβαλλοντικές ροές οι μάζες νερού ή αέρα επιδέχονται εξαιρετικά μικρές μεταβολές της πυκνότητάς τους. Για παράδειγμα, αν μία μάζα νερού στην επιφάνεια μίας λίμνης αυξήσει τη θερμοκρασία της κατά 10°C λόγω ηλιακής ακτινοβολίας, τότε μειώνει την πυκνότητά της μόνο κατά 0,3%. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη γράφουμε την πυκνότητα ρ ενός ρευστού ως:

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (1.1)$$

όπου ρ_0 είναι η σταθερή μέση πυκνότητα του ρευστού (χωρικά και χρονικά) και ρ' η μικρή διαφοροποίηση της πυκνότητας. Θεωρούμε:

- για τον αέρα $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$ υπό συνθήκες $T=15^{\circ}\text{C}$ και $p=101,33 \text{ kPa}$
- για το γλυκό νερό $\rho_0 = 999 \text{ kg/m}^3$ υπό συνθήκες $T=15^{\circ}\text{C}$ και ατμοσφαιρικής πίεσης,
- για το θαλασσίνο νερό $\rho_0 = 1027 \text{ kg/m}^3$ υπό συνθήκες $T=15^{\circ}\text{C}$ και ατμοσφαιρικής πίεσης.



Εικόνα 1.1 Ανταλλαγή μαζών ρευστού διαφορετικών πυκνοτήτων, ευρισκόμενων σε διαφορετικά ύψη. Καθώς κάθε κίνηση πραγματοποιείται αντίθετα ή κατά τη φορά της βαρύτητας, η ανταλλαγή προκαλεί μεταβολή στη δυναμική ενέργεια κάθε μάζας ρευστού.

Αν η διαφοροποίηση πυκνότητας ρ' αντιστοιχεί σε μεταβολή $\Delta\rho$ ανά μεταβολή ύψους H εντός του ρευστού (ύψος στο οποίο συμβαίνουν οι ανταλλαγές), ώστε μία μάζα ρευστού σε ύψος z να έχει πυκνότητα $(\rho_0 + \Delta\rho/2)$ και σε ύψος $(z + H)$ να έχει πυκνότητα $(\rho_0 - \Delta\rho/2)$, τότε ο όγκος ανταλλαγής μεταξύ των δύο μαζών V προκαλεί αύξηση της δυναμικής ενέργειας της βαρύτερης μάζας κατά:

$$mgH = (\rho_0 + \Delta\rho/2)VgH$$

και αντίστοιχα μείωση της δυναμικής ενέργειας της ελαφρύτερης μάζας κατά

$$mgH = (\rho_0 - \Delta\rho/2)VgH$$

Η καθαρή μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος είναι $(\Delta\rho VgH)$.

Αντίστοιχα, η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι της τάξης του $mU^2/2$ ανά μάζα ρευστού, οπότε για κάθε μάζα αυτό αθροίζεται σε:

$$\left(\frac{\rho_0 + \Delta\rho}{2}\right)\frac{VU^2}{2} + \left(\frac{\rho_0 - \Delta\rho}{2}\right)\frac{VU^2}{2} = \rho_0 VU^2 \quad (1.2)$$

Μία σύγκριση της μεταβολής της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας μας δίνει:

$$Ri = \frac{gH\Delta\rho}{\rho_0 U^2} \quad (1.3)$$

Ο αριθμός αυτός καλείται *Richardson Number*, είναι αδιάστατος και εκφράζει πόσο σημαντική είναι η επίδραση της στρωματοποίησης στη ροή ενός συστήματος.

- Αν Ri είναι της τάξης της μονάδας ($0,1 < Ri < 10$), τότε κάθε σημαντική μεταβολή της στρωματοποίησης καταναλώνει σημαντικό μέρος της διαθέσιμης κινητικής ενέργειας, ή αντίθετα η διαθέσιμη κινητική ενέργεια είναι σε θέση να μεταβάλλει τη στρωματοποίηση του συστήματος, μεταβάλλοντας τη ροή σε σημαντικό βαθμό. Υπό αυτές τις συνθήκες η στρωματοποίηση θεωρείται σημαντική.
- Αν ο $Ri \gg 1$ ($Ri > 10$), τότε η διαθέσιμη κινητική ενέργεια είναι ανεπαρκής για να μεταβάλλει τη στρωματοποίηση σημαντικά, οπότε η στρωματοποίηση επικρατεί στη ροή.
- Τέλος, όταν $Ri \ll 1$, τότε η διαθέσιμη κινητική ενέργεια είναι επαρκής για να μεταβάλλει τη στρωματοποίηση και να ομογενοποιήσει τη στήλη του ρευστού μέσω της ανάμειξης (mixing).

Ο μηχανισμός ανάμειξης είναι η τύρβη (turbulence). Η τύρβη βρίσκεται παντού στις περιβαλλοντικές ροές εκφράζοντας τις σύνθετες και τυχαίες κινήσεις των σωματιδίων του ρευστού. Μέσω της τύρβης διαλυτοποιούνται και ομογενοποιούνται οι ρύποι που εισέρχονται σε ένα ρευστό περιβαλλοντικό σύστημα. Από την άλλη, οι σύνθετες και τυχαίες κινήσεις των σωματιδίων του ρευστού είναι δύσκολο να μετρηθούν και να περιγραφούν με μαθηματικές εκφράσεις. Τύποι τυρβώδους ροής είναι η ομοιογενής τύρβη και η διατμητική τύρβη, οι οποίες περιγράφονται μαθηματικά με εμπειρικούς τύπους, χωρίς ωστόσο να έχει ολοκληρωθεί η συνολική θεώρηση της τύρβης.

Το επίπεδο τύρβης ενός συστήματος διερευνάται μέσω της σύγκρισης της ποσότητας της κινητικής ενέργειας με το έργο των δυνάμεων ιξώδους. Αν ρ_0 είναι η μέση πυκνότητα, U είναι μία τυπική ταχύτητα, L ένα χαρακτηριστικό μήκος του πεδίου της ροής (όπως το ύψος ή το πλάτος της ροής) και μ είναι το ιξώδες του ρευστού, τότε το μέτρο της κινητικής ενέργειας είναι $(\rho_0 U^2 / 2)$, ενώ το έργο των δυνάμεων του ιξώδους ανά μονάδα όγκου είναι $(\mu U/L)$. Ο λόγος των δύο αυτών ποσοτήτων (χωρίς να λαβαίνουμε υπόψη τον παράγοντα 2 στον παρονομαστή του κλάσματος) είναι:

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 UL}{\mu} \quad (1.4)$$

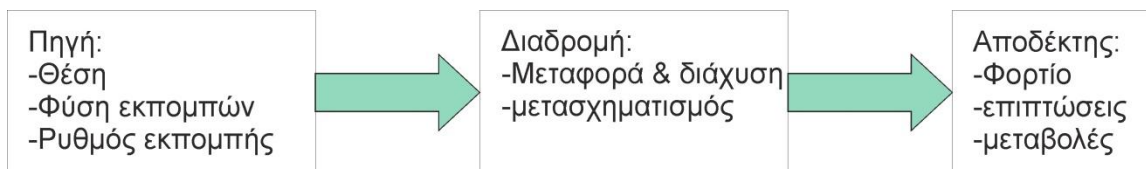
Ο αριθμός αυτός ονομάζεται *Reynolds number* και εκφράζει την ποσότητα της τύρβης του συστήματος. Αν ο Re είναι μεγάλος, τότε υπάρχει επαρκής κινητική ενέργεια σε σχέση με την αντίσταση που παρέχει στην τύρβη το ιξώδες, οπότε το ρευστό κινείται ελεύθερο, εμφανίζοντας σύνθετες και χωροχρονικά μεταβαλλόμενες δομές. Στην περίπτωση αυτή η ποσότητα τύρβης του συστήματος είναι μεγάλη.

Υπάρχει μία τιμή στον Re κάτω από την οποία η ροή έχει σχετικά απλή δομή, όπως η γραμμική ροή. Το όριο αυτό συμβαίνει σε τιμές Re μερικών χιλιάδων. Στις περιβαλλοντικές ροές, όπου οι τάξεις μεγέθους της ροής L είναι πολύ μεγάλες και οι τιμές του ιξώδους μ είναι πολύ μικρές ($\mu = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ για τον αέρα και $\mu = 1,0 \times 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ για το νερό), η τιμή του Re εύκολα υπερβαίνει το 10^6 , οπότε η ροή είναι πάντα τυρβώδης.

Προκύπτει, λοιπόν, ότι οι δύο βασικές διεργασίες της Περιβαλλοντικής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, η στρωματοποίηση και η τύρβη, ενεργούν αντίθετα η μία προς την άλλη. Συνήθως οι ανωστικές δυνάμεις τείνουν να περιορίσουν την τύρβη, καθώς οι κατακόρυφες κινήσεις σωματιδίων ενάντια στην άνωση ή τη βαρύτητα καταναλώνουν κινητική ενέργεια αυξάνοντας έτσι τη δυναμική ενέργεια. Από την άλλη, η τύρβη τείνει να αναμείξει το ρευστό μειώνοντας τις διαφορές πυκνότητας που προκαλεί η στρωματοποίηση.

1.3. Πλαίσιο Περιβαλλοντικής Διαχείρισης Ρευστών

Ένας εύκολος τρόπος για να κατανοήσουμε κάθε περιβαλλοντικό πρόβλημα είναι το πλαίσιο: πηγή – διαδρομή – αποδέκτης. Η ρύπανση –ειδικά η λεγόμενη *σημειακή ρύπανση*– έχει μία πηγή (source) από όπου οι ρύποι εκπέμπονται με προβλέψιμο ή τυχαίο τρόπο. Οι ρύποι κινούνται σε ένα ρευστό μέσο όπως η ατμόσφαιρα, ένας ποταμός, ένας υδροφορέας, που αποτελεί τη *διαδρομή* (pathway) κατά μήκος της οποίας διαλύονται ή μετατρέπονται. Τελικά οι ρύποι καταλήγουν στον τελικό τους *αποδέκτη* (receptor).



Εικόνα 1.2 Το πλαίσιο διαχείρισης Πηγή – Διαδρομή – Αποδέκτης.

Οι φυσικές ροές νερού και αέρα δε μεταφέρουν απλώς τους ρύπους από την πηγή προς τον αποδέκτη. Κατά τη διαδρομή τους οι ρύποι κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες, λαμβάνει χώρα διασπορά και διάχυση ρύπων καθώς και ο σταδιακός μετασχηματισμός του ρύπου σε άλλον. Συνεπώς, οι κύριες περιβαλλοντικές διεργασίες της Περιβαλλοντικής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής είναι: μεταφορά, διάχυση, μετασχηματισμός ρύπου.



Εικόνα 1.3 Πλούμιο καπνού από καμινάδα.

Τρεις διεργασίες συμβαίνουν ταυτόχρονα στον καπνό της Εικόνα 1.3. Η κατακόρυφη ανωστική ροή του θερμού καπνού, η οριζόντια μεταφορά λόγω της κίνησης του περιβάλλοντος αέρα και η τυρβώδης διάχυση. Καθώς το πλούμιο σταδιακά διαχέεται αναμιγνυόμενο με τον περιβάλλοντα αέρα, το πλάτος του αυξάνει, ενώ η συγκέντρωση των αερίων του σταδιακά μειώνεται ως συνέπεια της διάλυσης.

Ένα σωστό περιβαλλοντικό σύστημα διαχείρισης:

- ελέγχει τους ρύπους στην πηγή τους,
- επεξεργάζεται και ελαχιστοποιεί τους ρύπους πριν εκλυθούν στο περιβάλλον,
- ελέγχει τη διάχυση & μεταφορά τους στο περιβάλλον.

Παρακάτω παραθέτουμε μία λίστα των βασικών ρυπαντών που μεταφέρονται και διαχέονται στο νερό των ωκεανών με σειρά τοξικότητας από τους πιο ανώδυνους προς τους πιο επικίνδυνους ρύπους.

1. **Φυσικά Ανόργανα Άλατα & Ιζήματα** (*Natural inorganic salts and sediments*)
Τα υλικά αυτά είναι μη τοξικά και μετατρέπονται σε ρύπους όταν βρεθούν σε υπερβολικές συγκεντρώσεις (π.χ. με αύξηση της τυρβώδους ροής).
2. **Έκλυση Θερμότητας** (*Waste heat*)
Η εκροή θερμού ή κρύου νερού από βιομηχανίες σε μεγάλες ποσότητες επηρεάζει το θερμοδυναμικό κύκλο των οργανισμών του συστήματος.
3. **Οργανικά Απόβλητα** (*Organic wastes*)
Τα οικιακά απόβλητα περιέχουν συνήθως οργανική ύλη (άνθρακας, φώσφορο, άζωτο) τα οποία αν διαχυθούν σωστά, δεν προκαλούν προβλήματα στο ευρύτερο οικοσύστημα. Σε αντίθετη περίπτωση οι ουσίες αυτές καταναλώνουν το διαλυμένο οξυγόνο των υδατικών συστημάτων.
4. **Ιχνοστοιχεία** (*Trace Metals*)
Τα πιο συνήθη ιχνοστοιχεία είναι ο Μόλυβδος (Pb), ο υδράργυρος (Hg) και το κάδμιο (Cd). Τα στοιχεία αυτά υπάρχουν στη φύση σε μικρές ποσότητες. Όμως, σε υψηλές συγκεντρώσεις στα βιομηχανικά και στα γεωργικά απόβλητα είναι, τοξικά.

5. **Σύνθετες Οργανικές Ενώσεις (Synthetic Organic Chemicals)**
Οι ενώσεις αυτές παραμένουν στο περιβάλλον για πολλά χρόνια, διότι είναι μη βιοαποδομήσιμες ή ευδιάλυτες. Έτσι, σωρεύονται στην τροφική αλυσίδα και μέσα από βιολογικές διεργασίες αυξάνουν τις συγκεντρώσεις τους. Οι βασικοί εκπρόσωποι αυτής της κατηγορίας είναι τα PCB's (Πολυχλωριωμένα διφαινόλια) και τα HCB's (εξαχλωροβενζόλιο).
6. **Ραδιενεργά απόβλητα (Radioactive materials)**
Είναι ουσίες με υψηλή τοξικότητα ακόμη και σε ελάχιστες ποσότητες, (π.χ. πλουτόνιο, ραδόνιο, στρόντιο).
7. **Ένζυμα Χημικού και Βιολογικού Πολέμου (Chemical and Biological Warfare Agents)**
Έχουν άμεσες επιπτώσεις στον άνθρωπο λόγω της εξαιρετικά υψηλής τοξικότητάς τους.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στη φύση υπάρχει ένα ευρύ φάσμα τοξικότητας των ρύπων. Οι βασικές διεργασίες μεταφοράς των ρύπων αυτών στο περιβάλλον, και ιδιαίτερα το θαλάσσιο, δε μεταβάλλονται ανάλογα με το επίπεδο τοξικότητας των ρύπων και παίρνει τις έξης μορφές:

1. Οριζόντια μεταφορά ρύπου, από την υπάρχουσα κυκλοφορία (advection) π.χ. σε ποταμό, σε παράκτιο ρεύμα.
2. Συναγωγή (convection) π.χ. σε λίμνη με παγωμένη επιφάνεια.
3. Μοριακή διάχυση (molecular diffusion), διασπορά σωματιδίων με τυχαίες μοριακές κινήσεις χωρίς να υπάρχει κίνηση ρευστού.
4. Τυρβώδης διάχυση (turbulent diffusion): τυχαία κίνηση σωματιδίων λόγω τυρβώδους κίνησης.
5. Διατμητική τάση (shear stress): μεταφορά ρύπου λόγω διαφοράς ταχύτητας στο εσωτερικό ενός ρευστού.
6. Μείξη (mixing): μία διεργασία που περιλαμβάνει όλες τις παραπάνω περιγραφείσες διεργασίες: τη διάχυση, τη διάλυση και τη διασπορά των ρύπων.
7. Διασπορά (dispersion): όρος που χρησιμοποιείται σε αναφορές νέφους ρυπαντών. Συνήθως η διασπορά προκαλείται λόγω της συνδυασμένης δράσης της διατμητικής τάσης και της διάχυσης.
8. Εξάτμιση (evaporation): η διεργασία μεταφοράς ρύπων μέσω των υδρατμών.
9. Απόθεση σωματιδίων (particle settling): η βύθιση σωματιδίων λόγω διαφοράς πυκνότητας με το περιβάλλον ρευστό (κόκκοι άμμου, πλαγκτόν).
10. Εισδοχή σωματιδίων (particle entrainment): η ανύψωση σωματιδίων από τον πυθμένα προς το νερό μέσω τυρβώδους ροής (π.χ. άμμος, οργανικά κατάλοιπα).

1.4. Βασική Ορολογία Μαθήματος

1. Συγκέντρωση Ρύπου

$$C = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta M / \Delta V$$

όπου ΔM η στοιχειώδης μάζα ενός στοιχειώδους όγκου ΔV και $C = C(x, y, z, t)$.

2. Μέση τιμή C ως προς τον χρόνο (Time average)

$$\bar{C}_t(x, y, z, t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} C(x, y, z, t) dt$$

3. Μέση τιμή C ως προς τον χώρο (Spatial average)

$$\bar{C}_V(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{V} \iiint_{\Delta V} C(x, y, z, t) dV$$

4. Μέση ροή C (Flux average) από τη διατομή AA σε χρόνο t

$$\int_A C u dA = \bar{C}_f \int_A u dA = \bar{C}_f Q$$

$$\bar{C}_f(t) = \int_A C u \frac{dA}{Q}$$

όπου A το εμβαδόν διατομής του πλουμίου.

5. Μέση τιμή πολλών δειγμάτων
Από N δείγματα όγκων V_i μετρήθηκαν συγκεντρώσεις C_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

$$\bar{C} = \frac{\sum_1^N V_i C_i}{\sum_1^N V_i}$$

δηλαδή Συνολική Μάζα / Συνολικός Όγκος.

6. Διάλυση (Dilution)
Ορίζεται ως $S = (\text{Συνολικός όγκος δείγματος}) / (\text{Όγκος ρύπου που περιέχεται στο δείγμα})$
 $p = 1/S = \text{σχετική συκέντρωση}$
 $p = 1 \rightarrow \text{αδιάλυτοι ρύποι (S = 1)}$
 $p = 0 \rightarrow \text{καθαρό νερό (S} \rightarrow \text{άπειρο)}$

7. Μέση διάλυση

$$\sum V_i p_i = \sum V_i (1/S_i)$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_1^N V_i}{\sum_1^N V_i (1/S_i)}$$

8. Πυκνότητα
Προφίλ πυκνότητας $\rho_a(z)$, όπου z η κατακόρυφη διεύθυνση

Ευσταθής στήλη νερού ή ατμόσφαιρας όταν $\frac{d\rho_a}{dz} < 0$ με z θετικό προς τα πάνω.

Αναφορά σε ειδικό βάρος: $-g \frac{d\rho_a}{dz}$ με το (-) να κάνει τον όρο θετικό.

Γραμμική κατανομή πυκνότητας: $-g \frac{d\rho_a}{dz} = \text{σταθερό (προφίλ ευθείας γραμμής)}$.

1.5. Κλίμακες, Διεργασίες και Συστήματα

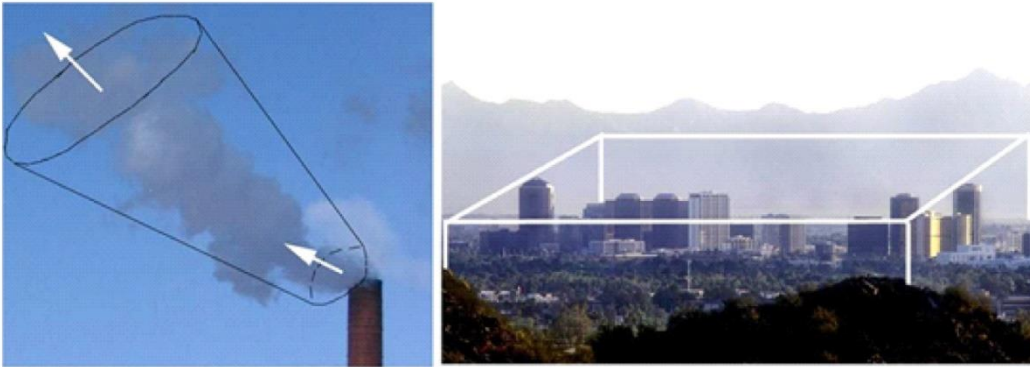
Τα περιβαλλοντικά προβλήματα έχουν διαφορετικές κλίμακες χώρου και χρόνου, οπότε και η Περιβαλλοντική Ρευστομηχανική προσαρμόζεται ανάλογα για τη μελέτη τους. Ο Πίνακας 1.2 παρουσιάζει τις διάφορες κλίμακες μήκους, ταχύτητας και χρόνου των συνήθων περιβαλλοντικών διεργασιών και συστημάτων. Στις μεγάλες κλίμακες θεωρούμε ολόκληρα συστήματα όπως ποταμοί, λίμνες, υδροφόροι. Σε αυτούς λαμβάνουν χώρα πολλές ταυτόχρονες διεργασίες όπως σε μία λίμνη, όπου έχουμε την ανεμογενή ανάμειξη, την ανάπτυξη κυμάτων βαρύτητας, τη θερμική στρωματοποίηση και τη συναγωγή θερμότητας κατά τον χειμώνα.

	Οριζόντια Κλίμακα Μήκους, L	Κατακόρυφη Κλίμακα Μήκους, H	Κλίμακα Ταχύτητας, U	Κλίμακα Χρόνου, T
Διεργασίες				
Μικρο-τύρβη	1-10 cm	1-10 cm	1-10 cm/s	Μερικά δευτερόλεπτα
Διατμητική τύρβη	0.1-10 m	0.1-10 m	0.1-1 m/s	Μερικά λεπτά
Κύματα	0.1-10 m	1-100 cm	1-10 m/s	Από δευτερόλεπτα έως λεπτά
Συναγωγή	10-1000 m	1-1000 m	0.1-1 m/s	Ώρες, ημέρες, εποχές.
Ατμοσφαιρικά Συστήματα				
Θαλάσσια αύρα	1-10 km	100-1000 m	1-10 m/s	Ώρες
Τυφώνες	100-1000 km	10 km	100 m/s	Ημέρες έως εβδομάδες
Μετεωρολογικές δομές	100-1000 km	10 km	1-10 m/s	Ημέρες έως εβδομάδες
Κλιματικές μεταβολές	Παγκόσμιες	50 km	1-10 m/s	Δεκαετίες
Υδατικά Συστήματα				
Υδροφορείς	1-1000 km	10-100 m	1-10 mm/s	Εποχές
Χείμαρροι	1-10 m	0.1-1 m	10-100 cm/s	Από δευτερόλεπτα έως λεπτά
Ποταμοί	10-1000 km	1-10 m	1-100 cm/s	Λεπτά έως ώρες
Λίμνες	1-100 km	10-1000 m	1-10 m/s	Ημέρες έως εποχές
Ποταμοεκβολές	1-10 km	1-10 m	0.1-1 m/s	Ώρες έως ημέρες
Παράκτιος ωκεανός	1-100 km	10-1000 m	0.1-1 m/s	Ημέρες

Πίνακας 1.2 Κλίμακες Διεργασιών, Υδάτινων και Αέριων Συστημάτων για τη Περιβαλλοντική Υπολογιστική Ρευστομηχανική.

1.6. Στοιχειώδης Όγκος

Ως στοιχειώδη όγκο ορίζουμε τον όγκο που καταλαμβάνει μία μάζα ρευστού, επί την οποία εφαρμόζουμε υπολογισμούς ισοζυγίων (π.χ. ισοζύγιο μάζας, ισοζύγιο ορμής, ενέργειας ή συγκέντρωσης ενός ρύπου). Μπορεί να έχει οποιοσδήποτε διαστάσεις, όπως να είναι τμήμα της ατμόσφαιρας, τμήμα ενός ποταμού, ολόκληρη λίμνη ή να πρόκειται για ολόκληρη την τροπόσφαιρα. Δεν υπάρχει γενικός κανόνας για τον ορισμό του στοιχειώδους όγκου, αλλά θα πρέπει να ορίσουμε τα όριά του σε θέσεις, ώστε να εσωκλείονται κατά βάση ομογενοποιημένες μάζες ρευστού και οι ποσότητες εισροής και εκροής από τον όγκο να είναι εύκολα μετρήσιμες ή εκτιμώμενες. Παραδείγματα στοιχειωδών όγκων δίνονται στις Εικόνες 1.4 και 1.5.



Εικόνα 1.4 Ατμοσφαιρικοί στοιχειώδεις όγκοι.



Εικόνα 1.5 Υδάτινοι στοιχειώδεις όγκοι.

Όταν το ρευστό θεωρείται ως συνεχές μέσο, η ποσότητα που εκφράζει την ανταλλαγή μεταξύ του στοιχειώδους όγκου και του περιβάλλοντος ρευστού καλείται *ροή* (flux). Η ροή μίας παραμέτρου (μάζας, ορμής, ενέργειας, διαλυμένης ή σωματιδιακής ουσίας) ορίζεται ως η ποσότητα της παραμέτρου που διέρχεται από το όριο της ανά μονάδα χρόνου.

$$q = \frac{\text{ποσότητα που διέρχεται}}{\text{εμβαδόν ορίου} \times \text{χρονική διάρκεια}}$$

Έτσι αν η παράμετρος είναι μάζα, τότε η ροή μάζας είναι ο ρυθμός διέλευσης της μάζας από το όριο ανά μονάδα χρόνου με μονάδες $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$. Η παραπάνω σχέση μπορεί να αναλυθεί σε:

$$q = \frac{\text{ποσότητα ρευστού}}{\text{όγκος ρευστού}} \times \frac{\text{όγκος ρευστού που διέρχεται}}{\text{εμβαδόν ορίου} \times \text{χρονική διάρκεια}}$$

Η πρώτη ποσότητα είναι η συγκέντρωση C της ποσότητας. Αν η ποσότητα είναι η μάζα, τότε η συγκέντρωση C εκφράζει την πυκνότητα (ρ), αν είναι η ορμή, τότε το C εκφράζει τη μάζα επί την ταχύτητα ανά όγκο, δηλαδή την πυκνότητα επί την ταχύτητα (ρu). Αν το όριο του στοιχειώδους όγκου έχει εμβαδόν A και η ταχύτητα του ρευστού που διέρχεται από το όριο κάθετα σε αυτό είναι u , τότε η ποσότητα που διέρχεται από το A σε χρονικό διάστημα dt περιλαμβάνεται σε στοιχειώδη όγκο με όριο εμβαδού A και μήκος ίσο με ($u dt$).

Άρα, $dV = A u dt$, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$q = C \frac{dV}{A dt} = C \frac{A u dt}{A dt} = C u \tag{1.5}$$

Άρα, η ροή κάθε ποσότητας διαμέσου ενός ορίου του στοιχειώδους όγκου δίνεται από το γινόμενο της συγκέντρωσης της ποσότητας και της κάθετης στο όριο ταχύτητάς της. Η γενική εξίσωση δίνεται ως:

$$q = -C\bar{u}.n \quad (1.6)$$

όπου το μείον δηλώνει την εισροή της ποσότητας διαμέσου του ορίου στο στοιχειώδη όγκο και το n δηλώνει μόνο τη συνιστώσα του ανύσματος ταχύτητας που είναι κάθετη στο όριο.

Ορίζοντας το ισοζύγιο του στοιχειώδους όγκου γράφουμε:

$$\begin{aligned} \text{Συσσώρευση στο Στοιχειώδη Όγκο} &= \Sigma (\text{Εισροών}) - \Sigma (\text{Εκροών}) + \\ &\Sigma (\text{Πηγές εντός του στοιχειώδους όγκου}) - \Sigma (\text{Αποθηκεύσεις εντός του στοιχειώδους όγκου}) \end{aligned}$$

Οι όροι του ισοζυγίου αναφέρονται σε ρυθμούς μεταβολής (δηλαδή ανά μονάδα χρόνου). Σε χρονικό διάστημα dt ο ρυθμός συσσώρευσης είναι:

$$\text{Συσσώρευση} = \frac{1}{dt} [(CV)_{t+dt} - (CV)_t] \quad (1.7)$$

οπότε για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα:

$$\text{Συσσώρευση} = \frac{1}{dt} (CV) = V \frac{dC}{dt} \quad (1.8)$$

καθώς ο στοιχειώδης όγκος είναι αμετάβλητος στον χρόνο.

Παράλληλα, για διάφορες εισροές και εκροές που συμβολίζονται με i, το ισοζύγιο γράφεται:

$$\Sigma(\text{Εισροές} - \text{Εκροές}) = \Sigma q_i A_i = \Sigma C_i u_i A_i = -\Sigma C_i (\bar{u}_i \cdot n_i) A_i \quad (1.9)$$

και θεωρώντας ότι ο όρος S εκφράζει την καθαρή διαφορά πηγών και αποθηκεύσεων, προκύπτει:

$$V \frac{dC}{dt} = \Sigma (C_i \bar{u}_i A_i) + S \quad (1.10)$$

Αν ολοκληρώσουμε για κάθε οριακή έδρα που περιβάλλει τον στοιχειώδη όγκο καταλήγουμε:

$$\frac{d}{dt} \iiint C dV = -\iint C \bar{u} \cdot n dA + \iiint S dV \quad (1.11)$$

Σε περίπτωση που το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, δεν υπάρχει μεταβολή της συγκέντρωσης στον χρόνο, οπότε:

$$\Sigma(C_i \bar{u}_i A_i) + S = 0 \quad (1.12)$$

1.7. Διατήρηση Μάζας

Μία βασική πρόταση είναι ότι «η μάζα είναι διατηρήσιμη», δηλαδή δεν υπάρχουν πηγές ή καταβυθίσεις μάζας. Στα ρευστά αυτό σημαίνει ότι η διαφορά μεταξύ της μάζας που εισέρχεται και της μάζας που εξέρχεται προκαλεί την αύξηση ή τη μείωση της πυκνότητας του ρευστού στο στοιχειώδη όγκο. Όταν στην προηγούμενη θεώρηση πάρουμε τη μάζα, τότε η ποσότητα C γίνεται μάζα ανά μονάδα όγκου, δηλαδή πυκνότητα, και ο όρος $S=0$. Η εξίσωση (1.10) γράφεται:

$$V \frac{d\rho}{dt} = \Sigma(\rho_i \bar{u}_i A_i) \quad (1.13)$$

και αντίστοιχα η (1.11) γίνεται:

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho dV = - \iint \rho \bar{u} \cdot n dA \quad (1.14)$$

Θεωρώντας ότι η πυκνότητα ρ δεν μεταβάλλεται ιδιαίτερα σε περιβαλλοντικές ροές, καθώς $\rho = \rho_o + \rho'$, προκύπτει:

$$\Sigma(\bar{u}_i A_i) = 0 \quad (1.15)$$

και

$$\iint \bar{u} \cdot n dA = 0 \quad (1.16)$$

1.8. Ανασκόπηση Περιεχομένων Βιβλίου

Το βιβλίο αυτό είναι διαδραστικό, καθώς επιτρέπει τη πρόσβαση σε σχήματα, διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις μέσω υπερ-συνδέσεων. Περιλαμβάνει αλγόριθμους επίλυσης μαθηματικών ομοιωμάτων γραμμένους στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Οι αλγόριθμοι αυτοί βοηθούν το φοιτητή να κατανοήσει καλύτερα το θεωρητικό μέρος κάθε κεφαλαίου.

Το βιβλίο αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται οι κύριες θεωρητικές εξισώσεις της περιβαλλοντικής υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Αναλύονται διεξοδικά οι κύριες εξισώσεις μαθηματικών προσομοιώσεων περιβαλλοντικών ροών (Εξίσωση Navier-Stokes, Συνέχειας, ολοκληρωμένη κατά το βάθος εξίσωση συνέχειας, ολοκληρωμένες πλευρικά εξισώσεις συνέχειας και κίνησης, εξισώσεις μεταφοράς και διάχυσης ρύπου, εξισώσεις υπογείων ροών). Παράλληλα, παρουσιάζονται οι εμπειρικές εξισώσεις εκτίμησης συντελεστών τυρβώδους ιξώδους και διάχυσης. Αναλύεται σε βάθος η διαδικασία επίλυσης των παραπάνω εξισώσεων με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και όγκων ελέγχου και παρουσιάζονται σχετικές ασκήσεις και προβλήματα.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται οι εφαρμοσμένες περιβαλλοντικές ροές και οι διεργασίες μεταφοράς και διάχυσης ρύπων σε αυτές. Ειδικότερα αναλύονται οι διεργασίες και η προσομοίωση των φαινομένων μεταφοράς και διάχυσης ρύπου σε μονοδιάστατες ροές (π.χ. σε κανάλια, χειμάρρους, ποτάμια), δισδιάστατες ροές (π.χ. λίμνες, ταμιευτήρες, ποταμοεκβολές και παράκτια συστήματα) και σε τρισδιάστατες ροές (ανοικτή θάλασσα). Επιπλέον, μελετάται η συμπεριφορά υποθαλάσσιων φλεβών και πλουμιών που αναπτύσσονται

στην παράκτια ζώνη και εξετάζεται ο βέλτιστος σχεδιασμός τέτοιων έργων, ώστε να επιτυγχάνεται ο περιορισμός των περιβαλλοντικών τους επιπτώσεων. Τέλος, παρουσιάζονται παραδείγματα προσομοίωσης και διαχείρισης του υπόγειου υδατικού δυναμικού.

Ειδικότερα, στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η βασική εξίσωση διάχυσης ρύπου (1ος και 2ος Νόμος Fick), αναλύεται η διαδικασία παραγωγής της κάθε εξίσωσης και παρουσιάζονται διεξοδικά οι επιμέρους όροι της. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η εξίσωση της καθαρής συναγωγής ρύπου και η αριθμητική της λύση και στο Κεφάλαιο 4 καταστρώνεται το συνδυασμένο ομοίωμα διάχυσης – συναγωγής ρύπου. Το Κεφάλαιο 5 περιγράφει την εξίσωση διατήρησης μάζας και δίνει την κατάλληλη μορφή της εξίσωσης για προβλήματα επιφανειακών και υπόγειων ροών.

Στο δεύτερο μέρος του βιβλίου, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται υπολογιστικές επιλύσεις υπόγειας υδραυλικής, όπως το πρόβλημα άντλησης νερού από μία γεώτρηση ή από πολλαπλές γεωτρήσεις για τη περίπτωση της μόνιμης ροής. Για την περίπτωση της μη-μόνιμης ροής επιλύεται η μονοδιάστατη και διδιάστατη υπόγεια ροή τόσο όταν πρόκειται για φρεάτιο υδροφορέα, όσο και όταν πρόκειται για υδροφορέα υπό πίεση. Στο Κεφάλαιο 7 περιγράφεται η ροή σε μονοδιάστατα συστήματα, όπως ποταμοί, χειμάρροι και κανάλια, ενώ παράγονται και επιλύονται οι εξισώσεις St. Venant. Στο Κεφάλαιο 8 παρουσιάζεται το μονοδιάστατο ομοίωμα κατακόρυφης διεύθυνσης, το οποίο εισάγει το φοιτητή στον κύκλο θερμικής στρωμάτωσης λιμνών και ταμιευτήρων. Το Κεφάλαιο 9 εξηγεί την έννοια της ποταμοεκβολής, περιγράφει τις συνθήκες στρωματοποίησης – μείξης σε αυτές και τις διεργασίες διαμήκους και κατακόρυφης διασποράς ρύπων. Στο Κεφάλαιο 10 αναλύεται η υδροδυναμική και οι διεργασίες διασποράς ρύπων σε παράκτιες περιοχές, παρουσιάζονται το παλιρροιακό και το ανεμογενές μαθηματικό ομοίωμα, καθώς και το συνδυασμένο παλιρροιακό – ανεμογενές μοντέλο. Το Κεφάλαιο 11 διασυνδέει το μαθηματικό ομοίωμα παράκτιας δυναμικής με το ομοίωμα εκροής ρύπου από υποβρύχιο αγωγό υπό συνθήκες φλέβας, πλουμίου ή τυρβώδους ανωστικής φλέβας. Τέλος, το Κεφάλαιο 12 αναφέρεται σε προβλήματα προσομοίωσης και διαχείρισης υδατικών πόρων, με έμφαση στον προσδιορισμό ζωνών ασφαλείας υδρογεωτρήσεων.

Κεφάλαιο 2

Εξίσωση Διάχυσης Ρύπου

Σύνοψη

Παρουσιάζεται η βασική εξίσωση διάχυσης ρύπου (1^{ος} και 2^{ος} Νόμος Fick), αναλύεται η διαδικασία παραγωγής της κάθε εξίσωσης και παρουσιάζονται διεξοδικά οι επί μέρους όροι της. Παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της εξίσωσης διάχυσης ρύπων κατά το τρισδιάστατο, δισδιάστατο και μονοδιάστατο πεδίο εφαρμογής. Δίνεται η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης διάχυσης και ο φοιτητής εισάγεται στην αριθμητική ανάλυση, τις έννοιες του σφάλματος αποκοπής, της ευστάθειας και της ακρίβειας αριθμητικού σχήματος. Η εξίσωση επιλύεται με τα σχήματα FTCS, Leap-Frog, DuFort-Frankel και Implicit Scheme και αναλύονται τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του κάθε σχήματος. Παρουσιάζεται κώδικας προγραμματισμού Matlab για την επίλυση της εξίσωσης για κάθε αριθμητικό σχήμα.

2.1. Νόμος Διάχυσης του Fick

Σε κάθε υδατικό σύστημα υπάρχει μία φυσική τάση εξισορρόπησης των βαθμίδων συγκέντρωσης των διαφόρων παραμέτρων. Η διεργασία που εκφράζει την τάση αυτή ονομάζεται **διάχυση (diffusion)**. Έτσι, όταν σε μία περιοχή του συστήματος υπάρχει υψηλότερη συγκέντρωση από ό,τι σε μία άλλη, τότε αναπτύσσεται μία **ροή διάχυσης (diffusive flux)** με κατεύθυνση από την περιοχή υψηλότερης συγκέντρωσης προς αυτή με τη χαμηλότερη. Σε περίπτωση που δε λαμβάνει χώρα καμία άλλη διεργασία, το σύστημα σταδιακά αποκτά ομοιόμορφες συνθήκες συγκέντρωσης σε όλο του τον όγκο εξομαλύνοντας κάθε χωρική διαφοροποίηση.

Η ροή μάζας ενός ρύπου λόγω διάχυσης (δηλαδή η μάζα του ρύπου που διασχίζει μία κάθετη στην κίνησή της επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου) είναι ανάλογη με τη χωρική βαθμίδα συγκέντρωσης του ρύπου. Η παραπάνω διατύπωση αποτελεί τον 1^ο Νόμο του Fick για τη διάχυση (Fischer et al., 1979). Στην περίπτωση της μονοδιάστατης ροής, ο νόμος του Fick εκφράζεται από την παρακάτω σχέση:

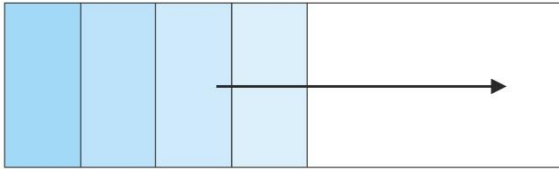
$$q = -D \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2.1)$$

όπου q η ροή μάζας του ρύπου (δηλαδή η μάζα που διέρχεται ανά μονάδα χρόνου από μία μονάδα επιφάνειας, $M L^{-2} T^{-1}$), D ο **συντελεστής μοριακής διάχυσης (molecular diffusion coef., L^2/T)** και C η συγκέντρωση του διαλύματος. Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει τη μεταφορά μάζας από τις υψηλές προς τις χαμηλές συγκεντρώσεις.

Στην περίπτωση θεώρησης της τρισδιάστατης ροής, η διάχυση περιγράφεται από το Νόμο του Fick με την εξίσωση:

$$q = -D \nabla C \quad (2.2)$$

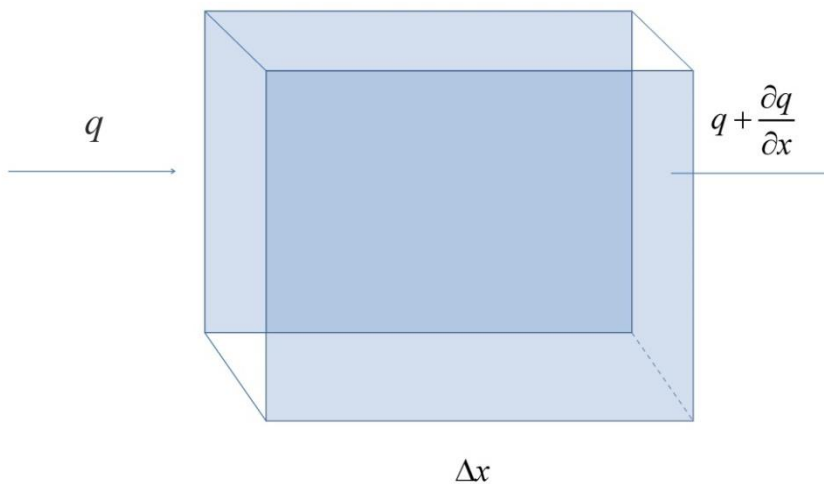
όπου q είναι ένα διάνυσμα ροής μάζας με συνιστώσες q_x, q_y, q_z στο Καρτεσιανό επίπεδο. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο **1ος Νόμος του Fick συνδέει τη ροή μάζας μίας ουσίας (π.χ. ρύπου) με τη χωρική βαθμίδα συγκέντρωσης της διαχεόμενης ουσίας** (Εικόνα 2.1).



Εικόνα 2.1 Η βαθμίδα συγκέντρωσης δημιουργεί ροή μάζας από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη τιμή συγκέντρωσης, φαινόμενο που καλείται διάχυση.

Ο **συντελεστής μοριακής διάχυσης D** εξαρτάται από τις ιδιότητες του ρευστού και της διαχεόμενης ουσίας. Έτσι, το D έχει διαφορετική τιμή στο θαλασσινό νερό από ό,τι στο γλυκό. Η τάξη μεγέθους του D για ουσίες διαλυμένες στο νερό σε θερμοκρασία 20°C είναι περίπου $2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, ενώ για ουσίες διαλυμένες στον αέρα το τυπικό μέγεθος του D είναι $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, δηλαδή υπάρχει μια διαφορά της τάξης 10^4 (Rubin, 2001).

Έστω μία μονοδιάστατη ροή κατά τη x – διεύθυνση διαμέσου ενός στοιχειώδους όγκου με πλευρά Δx (Εικόνα 2.2).



Εικόνα 2.2 Μονοδιάστατη ροή μάζας διαμέσου στοιχειώδους όγκου πλευράς Δx .

Έστω $C(x, t)$, η μάζα του ρύπου ανά μονάδα όγκου στο σημείο x τη χρονική στιγμή t. Η χρονική μεταβολή της συγκέντρωσης C εντός του στοιχειώδους όγκου δίνεται από τον όρο:

$$\frac{\partial C}{\partial t} \Delta x$$

Αν η ροή μάζας του ρύπου στο σημείο x είναι $q(x, t)$, τότε η ροή μάζας του ρύπου στο σημείο $x+\Delta x$ είναι:

$$q(x, t) + \left(\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right) \Delta x$$

με αποτέλεσμα η διαφορά της ροής της μάζας του ρύπου μεταξύ των δύο παραπάνω σημείων να είναι:

$$\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x$$

Η διαφορά αυτή θα πρέπει να είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της μάζας (συγκέντρωσης) στο στοιχειώδη όγκο, ώστε να ικανοποιείται η αρχή διατήρησης της μάζας. Οπότε:

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad \text{Εξίσωση Διατήρησης Μάζας} \quad (2.3)$$

Φτάσαμε, έτσι, σε μία σχέση η οποία συνδέει τη ροή μάζας $q(x, t)$ και τη συγκέντρωση $C(x, t)$, η οποία είναι σωστή, ανεξάρτητα από το μηχανισμό μοριακής μεταφοράς. Αν, όμως, στην παραπάνω εξίσωση αντικαταστήσουμε τη σχέση που προκύπτει από τον 1^ο Νόμο του Fick, τότε προκύπτει:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \quad (2.4)$$

και εναλλακτικά αν παραγωγίσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς το x και αντικαταστήσουμε το $(-q/D)$ με $\partial C/\partial x$, έχουμε:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) \quad (2.5)$$

Αυτές είναι οι **τελικές εξισώσεις διάχυσης του Fick**, οι οποίες περιγράφουν τη μεταφορά της μάζας μέσα από τη διεργασία μοριακής διάχυσης του Fick. Οι εξισώσεις αυτές έχουν εφαρμογές σε πάρα πολλά προβλήματα, όπως η περιγραφή της ροής θερμότητας $q(x, t)$ και η σχέση της με τη συγκέντρωση θερμότητας $C(x, t)$, δηλαδή τη θερμοκρασία.

Έστω σταθερός όγκος V με επιφάνεια S . Η συγκέντρωση μάζας του ρύπου είναι συνάρτηση της θέσης x και του χρόνου t , ώστε η συνολική μάζα στο εσωτερικό του όγκου να είναι:

$$\int_V C(x, t) dV \quad (2.6)$$

Αν η ροή μάζας διαμέσου της επιφάνειας S είναι $\bar{q}(x, t)$, τότε η διατήρηση της μάζας απαιτεί:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V C(x, t) dV + \int_S (\bar{q}(x, t) \cdot n) dS = 0 \quad (2.7)$$

όπου n το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια S . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι ο όγκος V είναι σταθερός έχουμε:

$$\int_V \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{q} \right) dV = 0 \quad (2.8)$$

Επειδή V είναι στοιχειώδης όγκος, είναι δυνατόν να είναι τόσο μικρός ώστε, να τείνει στο μηδέν ($\Delta V \rightarrow 0$), οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \bar{q} \quad (2.9)$$

Επειδή από το Νόμο του Fick έχουμε:

$$\bar{q} = -D \nabla C$$

προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C \quad (2.10)$$

ή για τρισδιάστατη ροή

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (2.11)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η βασική εξίσωση διάχυσης μάζας σε ακίνητο ρευστό, δηλαδή σε ρευστό χωρίς μέση ταχύτητα. Η εξίσωση αυτή περιγράφει την εξάπλωση λόγω διάχυσης μίας μάζας αποβλήτων $M (= C \, dV)$ που εισάγεται στο νερό στο σημείο (x, y, z) τη χρονική στιγμή t . Επειδή η εξίσωση αυτή είναι γραμμική, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποκομίσουμε λύσεις σε πολύ σύνθετα περιβαλλοντικά προβλήματα.

2.2. Αναλυτική Λύση της Εξίσωσης Διάχυσης

Η λύση της εξίσωσης Fick μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς μαθηματικούς τρόπους, ο πιο κλασικός όμως είναι η **διαστατική ανάλυση (dimensional analysis)**. Η συγκέντρωση $C(x, t)$ για τη μονοδιάστατη περίπτωση θα είναι συνάρτηση της μάζας $M (= C \, dV)$, της θέσης x , του χρόνου t , καθώς και του συντελεστή μοριακής διάχυσης D . Η εξίσωση αυτή είναι μία τυπική, παραβολική, μερική, διαφορική εξίσωση.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \quad (2.12)$$

Σημειώνουμε ότι οι διάφορες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων συνδέονται με διαφορετικούς τύπους προβλημάτων ροής. Εξισώσεις που εξαρτώνται από τον χρόνο οδηγούν σε προβλήματα **παραβολικού ή υπερβολικού τύπου**. Η ύπαρξη φυσικών μηχανισμών σκέδασης οδηγεί σε παραβολικού τύπου εξίσωση, καθώς οι βαθμίδες της εξαρτημένης παραμέτρου εξομαλύνονται με τον χρόνο. Αντίθετα, η απουσία μηχανισμών σκέδασης οδηγεί σε υπερβολικού τύπου εξίσωση, η οποία έχει αναλυτική λύση σταθερού πλάτους όταν είναι γραμμική και λύση αυξανόμενου πλάτους όταν είναι μη-γραμμική. Τέλος, οι εξισώσεις που εκφράζουν κατάσταση ισορροπίας του συστήματος (steady-state) είναι **ελλειπτικού τύπου εξισώσεις**.

Εφόσον η διεργασία μοριακής διάχυσης είναι γραμμική, η συγκέντρωση ρύπου C θα πρέπει να είναι ανάλογη της μάζας που εισάγεται στο ρευστό. Η συγκέντρωση ρύπου (C) εκφράζεται ως μάζα ρύπου (M) ανά μονάδα μήκους (L), άρα το C θα πρέπει να είναι ανάλογο του M διαιρούμενου με κάποιο χαρακτηριστικό μήκος. Οι μονάδες του συντελεστή διάχυσης D είναι L^2/T , άρα η ποσότητα \sqrt{Dt} αποτελεί ένα χαρακτηριστι-

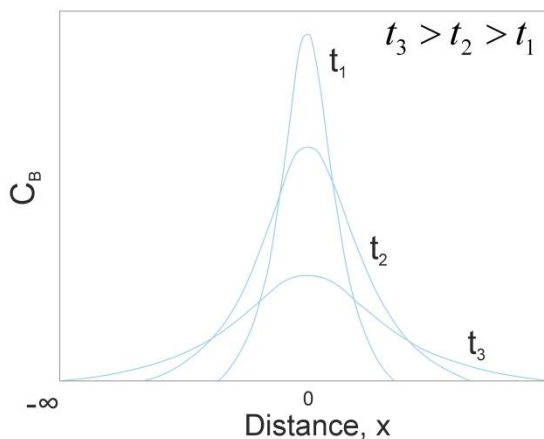
κό μήκος. Η διαστατική ανάλυση δίνει την παρακάτω σχέση ως την αναλυτική λύση για τη μονοδιάστατη εξίσωση διάχυσης:

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} f\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \quad (2.13)$$

Από τη λύση αυτή προκύπτει ότι η κατανομή της συγκέντρωσης στον χρόνο περιγράφεται από την **κανονική κατανομή (κατανομή Gauss)**. Η πλήρης αναλυτική λύση της εξίσωσης Fick είναι (Fischer et al., 1979):

$$C(x, t) = \left(\frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2.14)$$

Ο παράγοντας $\sqrt{4} = 2$ στον παρονομαστή της σχέσης (2.14) δηλώνει ότι η διάχυση λαμβάνει χώρα και προς τις δύο διευθύνσεις του άξονα x . Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει την κανονική κατανομή Gauss της συγκέντρωσης C στον χρόνο, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.3.



Εικόνα 2.3 Κατανομή συγκέντρωσης ρύπου ως προς τον χρόνο (t) και την απόσταση (x).

Η παράμετρος σ^2 εκφράζει το εύρος της κατανομής της συγκέντρωσης του ρύπου ως εξής:

$$\sigma^2 = 2Dt \Rightarrow \sigma = \sqrt{2Dt} \quad (2.15)$$

Προκύπτει ότι εντός του εύρους $\pm\sigma$ υπάρχει κατανεμημένο το 64.2% της μάζας του ρύπου, ενώ εντός του εύρους $\pm 4\sigma$ περιέχεται το 95% της συνολικής μάζας του ρύπου. Όσο η διάχυση προχωρά, το εύρος σ αυξάνει με ρυθμό:

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D$$

Αυτό σημαίνει ότι αν το εύρος κατανομής ενός ρύπου τη χρονική στιγμή t_1 είναι γνωστό, τότε η παράμετρος σ θα είναι γνωστή σε οποιαδήποτε μετέπειτα χρονική στιγμή, καθώς:

$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + 2D(t_2 - t_1) \quad (2.16)$$

Για τη δισδιάστατη εξίσωση διάχυσης ρύπου,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (2.17)$$

η αναλυτική λύση είναι:

$$C(x, y, t) = \left(\frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \right) \exp \left(-\frac{(x^2 + y^2)}{4Dt} \right) \quad (2.18)$$

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι η διάχυση είναι **ισότροπη**, άρα ο συντελεστής διάχυσης έχει την ίδια τιμή και προς τις δύο διαστάσεις (Rubin, 2001).

Σε περίπτωση που θεωρήσουμε **ανισότροπη διάχυση**, τότε ο συντελεστής διάχυσης διαφοροποιείται ανά διεύθυνση (σε D_x, D_y) και η αναλυτική λύση της εξίσωσης διάχυσης γίνεται:

$$C(x, y, t) = \left(\frac{M}{\sqrt{4\pi D_x D_y t}} \right) \exp \left(-\left(\frac{x^2}{4D_x t} + \frac{y^2}{4D_y t} \right) \right) \quad (2.19)$$

Τέλος, για την τρισδιάστατη εξίσωση διάχυσης:

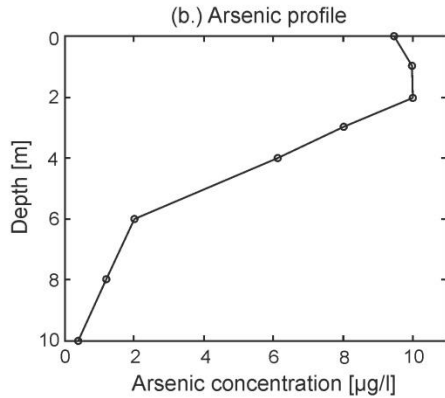
$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (2.20)$$

αναλυτική λύση υπάρχει μόνο για την περίπτωση ισότροπης διάχυσης, η οποία είναι:

$$C(x, y, z, t) = \left(\frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \right) \exp \left(-\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{4Dt} \right) \quad (2.21)$$

2.3. Παράδειγμα Εφαρμογής

Σε μία λίμνη γνωρίζουμε ότι το θερμοκλινές βρίσκεται σε βάθος $D = 3$ m. Αν μετρήσουμε ένα προφίλ κατακόρυφης κατανομής συγκέντρωσης διαλυμένου αρσενικού, όπως της Εικόνα 2.4, να προσδιοριστεί η ροή μάζας μοριακής διάχυσης διαμέσου της διεπιφάνειας του θερμοκλινούς. Ο συντελεστής μοριακής διάχυσης είναι $D = 1 \times 10^{-10}$ m²/s.



Εικόνα 2.4 Κατακόρυφη κατανομή συγκέντρωσης διαλυμένου αρσενικού στη λίμνη. Με διακεκομμένη γραμμή φαίνεται το βάθος του θερμοκλινούς.

Εφαρμόζουμε το Νόμο του Fick της εξίσωσης (2.1) για την κατακόρυφη διεύθυνση:

$$q_z = -D \frac{\partial C}{\partial z}$$

Υπολογίζουμε τη μεταβολή της συγκέντρωσης C γύρω από το βάθος των $z = 3 \text{ m}$. Δηλαδή,

$$\left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=3\text{m}} = \frac{C_{z=2\text{m}} - C_{z=4\text{m}}}{(2-4)}$$

Οπότε,

$$q_z = -D \frac{\partial C}{\partial z} = -1 \times 10^{-10} \frac{(10 - 6.1)}{(2-4)} \frac{1000 \text{ l}}{1 \text{ m}^3} = +1.95 \times 10^{-7} \text{ μg} / \text{m}^2 \text{ s}$$

όπου το θετικό πρόσημο δείχνει ότι η ροή μάζας του ρύπου κινείται προς το βυθό, δηλαδή από τη μεγαλύτερη προς την μικρότερη συγκέντρωση του ρύπου.

2.4. Αριθμητική Λύση της Εξίσωσης Διάχυσης

Η εξίσωση της διάχυσης ενός ρύπου συγκέντρωσης C δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \tag{2.22}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί με τη χρήση των εξισώσεων *πεπερασμένων διαφορών* (finite differences) που εφαρμόζονται στο χωροχρονικό πεδίο ορισμού του προβλήματος ροής, το οποίο καλείται *πλέγμα επίλυσης* (computational grid). Οι μερικές παράγωγοι της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης προσεγγίζονται με πεπερασμένες διαφορές των διακριτών τιμών με τη χρήση αριθμητικών σχημάτων. Τα αριθμητικά σχήματα που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης είναι το FTCS (Forward in Time – Central in Space), το Leapfrog και το DuFort-Frankel (Farlow, 1982).

2.4.1. Το Αριθμητικό Σχήμα FTCS

Το Σχήμα FTCS χρησιμοποιεί κατάντη διαφορές για τη χρονική παράγωγο και κεντρικές διαφορές για τη δεύτερη χωρική παράγωγο, οπότε οι μερικές παράγωγοι προσεγγίζονται ως (Farlow, 1982):

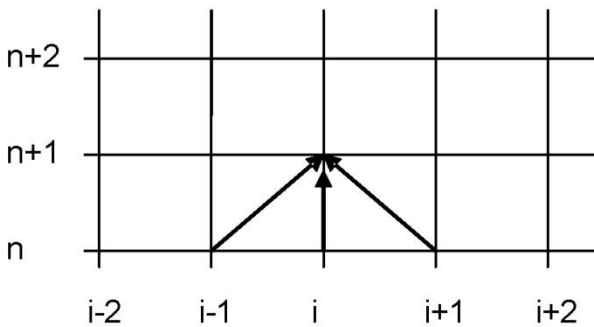
$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \approx \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.24)$$

Οπότε η εξίσωση της διάχυσης (εξ. 2.22) τώρα γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} &= D \left(\frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \Rightarrow \\ C_i^{n+1} &= C_i^n + \left(\frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right) (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \Rightarrow \\ C_i^{n+1} &= C_i^n + d (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (2.25)$$

όπου $d = D \Delta t / \Delta x^2$ καλείται αριθμός διάχυσης (diffusion number). Με βάση τα παραπάνω, το υπολογιστικό πλέγμα επίλυσης της εξίσωσης της διάχυσης με το αριθμητικό σχήμα FTCS δίνεται στην Εικόνα 2.5.



Εικόνα 2.5 Πλέγμα επίλυσης εξίσωσης διάχυσης με το σχήμα FTCS.

2.4.2. Ανάλυση Σφάλματος Αποκοπής (Truncation Error) για το σχήμα FTCS

Ο προσδιορισμός του σφάλματος αποκοπής του σχήματος FTCS προκύπτει με την αντικατάσταση των τιμών των C_i^{n+1} , C_{i+1}^n , C_{i-1}^n από τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor.

$$C_i^{n+1} = C_i^n + \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right)_i^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \right)_i^n \frac{\Delta t^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \right)_i^n \frac{\Delta t^3}{6} + \dots \quad (2.26)$$

$$C_{i+1}^n = C_i^n + \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i^n \frac{\Delta x^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\right)_i^n \frac{\Delta x^3}{6} + \dots \quad (2.27)$$

$$C_{i-1}^n = C_i^n - \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i^n \frac{\Delta x^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\right)_i^n \frac{\Delta x^3}{6} + \dots \quad (2.28)$$

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω αναπτύγματα στην εξίσωση της διάχυσης (εξ. 2.22):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left[D \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2} + \dots \right] \quad (2.29)$$

Οι όροι στην αγκύλη της εξίσωσης (2.29) αντιπροσωπεύουν το σφάλμα αποκοπής του σχήματος. Προκύπτει ότι οι όροι είναι πρώτης τάξης ως προς Δt και δεύτερης τάξης ως προς Δx ή αλλιώς ($O(\Delta t, \Delta x^2)$). Όταν $\Delta t, \Delta x$ τείνουν στο μηδέν, τότε το σφάλμα αποκοπής μηδενίζεται. Ζητούμε επομένως τις συνθήκες υπό τις οποίες οι δύο πρώτοι όροι μηδενίζονται:

$$\left[D \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = \frac{2D \Delta x^2}{12 \Delta t} \frac{\partial^4 C}{\partial x^4}$$

Πολλαπλασιάζω και διαιρώ το δεξί τμήμα της εξίσωσης με D και αντικαθιστώ το $(D \Delta t / \Delta x^2)$ με το d . Προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = \frac{D^2}{6d} \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \quad (2.30)$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση της διάχυσης (εξ. 2.22) ως προς τον χρόνο, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} &= D^2 \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.30):

$$D^2 \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} = \frac{D^2}{6d} \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \quad (2.31)$$

από όπου προκύπτει ότι η τιμή που μηδενίζει το σφάλμα αποκοπής είναι:

$$d = \frac{1}{6} \quad (2.32)$$

Αυτή είναι η τιμή του αριθμού διάχυσης d , στην οποία το αριθμητικό σχήμα FTCS παρουσιάζει τη μέγιστη ακρίβειά του.

Εξετάζοντας την ευστάθεια της αριθμητικής λύσης προκύπτει το **κριτήριο ευστάθειας**:

$$d \leq \frac{1}{2}$$

(2.33)

Αυτό σημαίνει ότι η λύση μας είναι ευσταθής, όταν το d είναι μικρότερο του 0.5 (Smith, 1985). Η απόφαση για την τιμή του αριθμού διάχυσης d ανήκει κάθε φορά στον χρήστη, καθώς αυτός ρυθμίζει το χωρικό βήμα Δx και το χρονικό βήμα Δt (LeVeque, 2007).

Άσκηση 2.1

Σε αγωγό μήκους 1 μ εισέρχεται ρύπος με αρχική κατανομή συγκέντρωσης σύμφωνα με τη σχέση: $C_x = 4x(1-x)$, ο οποίος διαχέεται με συντελεστή μοριακής διάχυσης $D = 1 \text{ m}^2/\text{s}$. Να προσδιοριστεί η κατανομή της συγκέντρωσης του ρύπου κατά μήκος του αγωγού σε διαφορετικές χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια της μοριακής διάχυσης του ρύπου, χρησιμοποιώντας $d = 0.45$ και $d = 0.55$.

Λύση

Η άσκηση θα επιλυθεί στο MS-Excel. Αν διακριτοποιήσουμε τον αγωγό με $\Delta x = 0.025 \mu$, θα δημιουργηθούν 41 στοιχειώδεις διατομές, στις οποίες θα πρέπει να υπολογιστούν οι συγκεντρώσεις του ρύπου λόγω μοριακής διάχυσης. Αν θεωρήσουμε $\Delta t = 0.000281 \text{ s}$ ως χρονικό βήμα για την επίλυση του προβλήματος, τότε θα έχουμε αριθμό διάχυσης $d = 0.45$.

Καταστρώνουμε το πρόβλημα στο φύλλο εργασίας του Excel όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.6:

The screenshot shows an Excel spreadsheet titled "Diffusion - Advection.xls". The spreadsheet is set up for numerical simulation. Column A is labeled "Time" and contains values from 0 to 35. Column B is labeled "x" and contains values from 0 to 1.0 in increments of 0.025. Columns C through W contain numerical values representing concentration at each time step and position. The values start at 0 for x=0 and x=1 and evolve towards a peak in the center of the domain as time progresses.

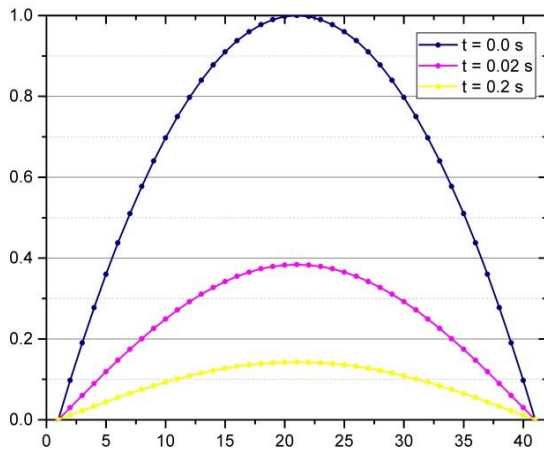
Εικόνα 2.6 Κατάστροψη της επίλυσης της μοριακής διάχυσης ρύπου σε αγωγό στο MS-Excel.

Τοποθετούμε τον χρόνο να μεταβάλλεται κατά την στήλη B ($\text{time} = \text{time} + \Delta t$) και τον αγωγό να διακριτοποιείται κατά τη γραμμή 2 ($x = x + \Delta x$). Οι διατομές του αγωγού ανά $\Delta x = 0.025$ είναι 41 και περιγράφονται από τις στήλες C έως AP. Στις στήλες C ($1^{\text{η}}$ διατομή του αγωγού) και AP (τελευταία διατομή του αγωγού) εφαρμόζουμε απλή οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet για τη διασφάλιση της μη-απόλλειας μάζας (C_1 & $C_{41} = 0$).

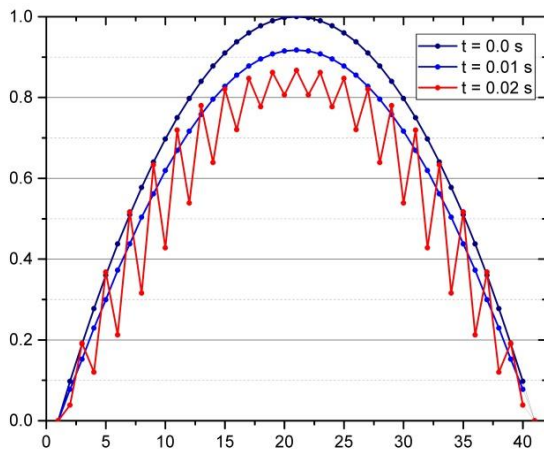
Στη γραμμή 3 επιλύουμε την αρχική κατανομή της συγκέντρωσης του ρύπου, ενώ από τη γραμμή 4 και μετά επιλύουμε το πρόβλημα με τη χρήση του αριθμητικού σχήματος FTCS, όπως δίνεται στην εξίσωση (2.25).

Κάνοντας αντιγραφή και επικόλληση τους τύπους από τη μία γραμμή στην άλλη, μεταφέρουμε την αριθμητική λύση στον χρόνο. Τα αποτελέσματα της κατανομής του ρύπου σε διάφορες χρονικές στιγμές για την περίπτωση που ο αριθμός διάχυσης $d = 0.45$, δηλαδή όταν ισχύει η συνθήκη ευστάθειας της εξίσωσης (2.33), δίνονται στην Εικόνα 2.7.

Αντίστοιχα, η επίλυση του ίδιου προβλήματος μεταβάλλοντας το χρονικό βήμα Δt σε $0,000344$ s αυξάνει τον αριθμό διάχυσης σε $d = 0.55$. Τα αποτελέσματα δίνονται στην Εικόνα 2.8, όπου από τη χρονική στιγμή $t = 0.02$ s φαίνεται η αστάθεια της αριθμητικής λύσης, λόγω παραβίασης της συνθήκης ευστάθειας της εξίσωσης (2.33).



Εικόνα 2.7 Αποτελέσματα επίλυσης της κατανομής συγκέντρωσης ρύπου λόγω μοριακής διάχυσης στο MS-Excel (FTCS, $d = 0.45$).



Εικόνα 2.8 Αποτελέσματα επίλυσης της κατανομής συγκέντρωσης ρύπου λόγω μοριακής διάχυσης στο MS-Excel (FTCS, $d = 0.55$).

2.4.3. Το Αριθμητικό Σχήμα Leap-Frog

Το σχήμα χρησιμοποιεί κεντρικές διαφορές χρονικής και χωρικής παραγώγου (Smith, 1985):

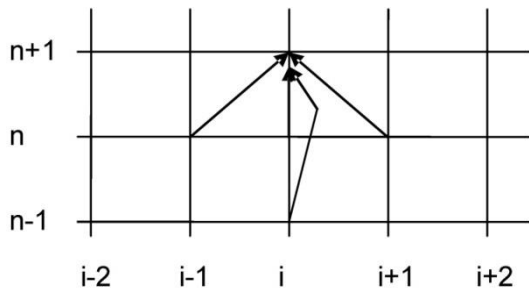
$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n-1}}{2\Delta t} = D \left(\frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \Rightarrow$$

$$C_i^{n+1} = C_i^{n-1} + 2d \left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n \right)$$

(2.34)

Όπως προκύπτει από την εξίσωση (2.34), το Σχήμα αυτό χρησιμοποιεί τρία χρονικά επίπεδα, με αποτέλεσμα να απαιτούνται πληροφορίες τόσο από την τρέχουσα χρονική στιγμή (n), όσο και από προηγούμενη χρονική στιγμή ($n-1$).

Με βάση τα παραπάνω, το υπολογιστικό πλέγμα επίλυσης της εξίσωσης της διάχυσης με το αριθμητικό σχήμα Leap-Frog δίνεται στην Εικόνα 2.9.



Εικόνα 2.9 Πλέγμα επίλυσης εξίσωσης διάχυσης με το σχήμα LeapFrog.

Η ανάλυση του σφάλματος αποκοπής του σχήματος δείχνει ότι αυτό είναι δεύτερης τάξης ως προς τον χρόνο και τον χώρο, δηλαδή $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Αυτό σημαίνει ότι το σχήμα Leap-Frog είναι πολύ πιο ακριβές από το FTCS. Ωστόσο, η ανάλυση ευσταθείας του σχήματος δείχνει ότι αυτό είναι ασταθές για κάθε τιμή του d , δηλαδή η αύξηση της ακρίβειας του σχήματος οδηγεί σε ασταθές, άρα άχρηστο σχήμα (Smith, 1985).

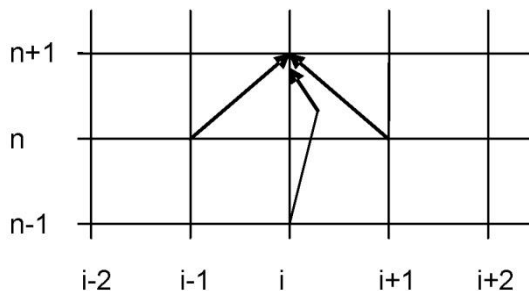
2.4.4. Το Αριθμητικό Σχήμα DuFort-Frankel

Προτείνεται η αντικατάσταση του C_i^n στο δεξιό τμήμα της εξίσωσης διάχυσης από τη μέση τιμή του C_i στις δύο γειτονικές χρονικές στιγμές (Mkwizu, 2012).

$$C_i^n = \frac{C_i^{n+1} + C_i^{n-1}}{2}$$

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n-1}}{2\Delta t} = D \left(\frac{C_{i+1}^n - (C_i^{n+1} + C_i^{n-1}) + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (2.35)$$

Η ακρίβεια του σχήματος εξακολουθεί να είναι δεύτερης τάξης ως προς τον χρόνο και χώρο, δηλαδή $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, ενώ το σχήμα είναι πλέον ευσταθές άνευ όρων, επομένως για οποιαδήποτε τιμή του d . Το υπολογιστικό πλέγμα επίλυσης της εξίσωσης της διάχυσης με το αριθμητικό σχήμα DuFort-Frankel δίνεται στην Εικόνα 2.10.



Εικόνα 2.10 Πλέγμα επίλυσης εξίσωσης διάχυσης με το σχήμα DuFort-Frankel.

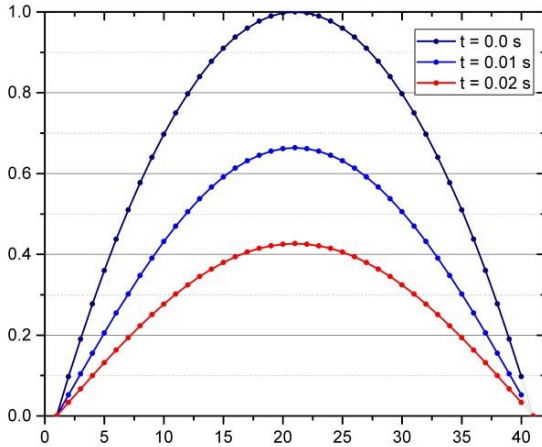
Το σχήμα γράφεται:

$$(1+2d)C_i^{n+1}=(1-2d)C_i^{n-1}+2d(C_{i+1}^n+C_{i-1}^n) \quad (2.36)$$

όπου d ο αριθμός διάχυσης.

Το κύριο χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι η προσθήκη ενός ακόμη επιπέδου χρόνου (όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.10), το οποίο όμως έχει δύο μειονεκτήματα: α) απαιτεί την ταυτόχρονη αποθήκευση και των τριών επιπέδων χρόνου στον Η/Υ, συνεπώς αυξάνει τις απαιτήσεις αποθήκευσης κατά 50%, και β) απαιτεί μία ειδική ρουτίνα κατά το πρώτο βήμα χρόνου, δηλαδή κατά την εισαγωγή των **αρχικών συνθηκών** (initial conditions) του ομοιώματος (Mkwizu, 2012).

Η επίλυση της άσκησης εφαρμογής για τη μοριακή διάχυση ρύπου σε αγωγό με τη χρήση του αριθμητικού σχήματος DuFort-Frankel δίνεται στην Εικόνα 2.11. Προκύπτει ευσταθής λύση ακόμη και για $d = 0.55$, κάτι που δεν ήταν δυνατόν με το σχήμα FTCS.



Εικόνα 2.11 Αποτελέσματα επίλυσης της κατανομής συγκέντρωσης ρύπου λόγω μοριακής διάχυσης στο MS-Excel (DuFort-Frankel, $d = 0.55$).

2.4.5. Το Πεπλεγμένο Αριθμητικό Σχήμα (Implicit Scheme)

Η ικανοποίηση του κριτηρίου $d \leq 0.50$ με δεδομένη την τιμή του χωρικού βήματος Δx , απαιτεί να επιλεγεί μία σχετικά μικρή τιμή του χρονικού βήματος, Δt με αποτέλεσμα ο υπολογιστικός χρόνος για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης της διάχυσης να είναι μεγάλος έως και απαγορευτικός.

Για το λόγο αυτό συχνά επιλέγονται τα **πεπλεγμένα αριθμητικά σχήματα**. Τα σχήματα αυτά μετατρέπουν τις διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές, σε ένα σημείο του κανάβου. Οι αλγεβρικές αυτές εξισώσεις περιέχουν παραπάνω από έναν άγνωστο, κατά συνέπεια δεν είναι πια δυνατός ο απευθείας υπολογισμός των τιμών της συγκέντρωσης, αλλά απαιτείται να επιλυθεί ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (LeVeque, 2007).

Ειδικότερα, το πεπλεγμένο σχήμα προσεγγίζει την εξίσωση διάχυσης ως εξής:

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}=D\frac{C_{i+1}^{n+1}-2C_i^{n+1}+C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.37)$$

από όπου καταλήγουμε:

$$-dC_{i-1}^{n+1}+(1+2d)C_i^{n+1}-dC_{i+1}^{n+1}=C_i^n \quad (2.38)$$

Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να επιλυθεί, καθώς έχει δύο άγνωστες τιμές. Ωστόσο, δημιουργούμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
 \text{Για } i=1 & \quad (1+2d)C_1^{n+1} - dC_2^{n+1} = C_1^n = b_1 \\
 \text{Για } i=2 & \quad -dC_1^{n+1} + (1+2d)C_2^{n+1} - dC_3^{n+1} = C_2^n = b_2 \\
 \text{Για } i=3 & \quad -dC_2^{n+1} + (1+2d)C_3^{n+1} - dC_4^{n+1} = C_3^n = b_3 \\
 & \quad \dots \\
 \text{Για } i=i_{\max}-1 & \quad -dC_{i_{\max}-2}^{n+1} + (1+2d)C_{i_{\max}-1}^{n+1} = C_{i_{\max}-1}^n = b_{i_{\max}-1}
 \end{aligned}$$

Προκύπτει ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων της μορφής:

$$A C^{n+1} = b \quad (2.39)$$

το οποίο επιλύεται με τις κλασικές μεθόδους ανάπτυξης διαγώνιων πινάκων.

Την παραπάνω προσέγγιση μπορούμε να τη γενικεύσουμε, εάν εισαγάγουμε έναν συντελεστή βαρύτητας Θ ($0 \leq \Theta \leq 1$), οπότε η δεύτερη παράγωγος ως προς τον χώρο (x) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} \cong \Theta \left(\frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) + (1-\Theta) \left(\frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right) \quad (2.40)$$

Για μεγάλες τιμές του συντελεστή Θ (κοντά στην μονάδα) το βάρος της διακριτοποίησης προσεγγίζει το χρονικό επίπεδο (n+1) και το σχήμα καλείται πλήρως πεπλεγμένο, ενώ για μικρές τιμές του συντελεστή Θ (κοντά στο μηδέν) το βάρος της διακριτοποίησης προσεγγίζει το χρονικό επίπεδο n και είναι ισοδύναμο με το σχήμα FTCS. Είναι προφανές ότι το μητρώο των συντελεστών της διακριτοποιημένης εξίσωσης της μονοδιάστατης διάχυσης έχει κλασική τριδιαγώνια μορφή και μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο TDMA (THOMAS).

2.4.6. Κώδικας Προγραμματισμού Matlab για την εφαρμογή του σχήματος FTCS

Παρακάτω ακολουθεί κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab για την επίλυση της μονοδιάστατης εξίσωσης διάχυσης με τη χρήση του αριθμητικού σχήματος FTCS.

```

% Solution of the 1-D Diffusion Equation using Finite-Difference Method
% developed by G. Sylaios
numx = 101; %number of grid points in x
numt = 2000; %number of time steps to be iterated over
dx = 1/(numx - 1); % calculate the space increment dx
dt = 0.00005; % determine the time increment dt
x = 0:dx:1; %vector of x values, to be used for plotting
D = 0.1; %define diffusion coefficient
C = zeros(numx,numt); %initialize everything to zero

%specify initial conditions
t(1) = 0; %t=0
C(1,1) = 0; %C=0 at x=0
C(1,numx) = 0; %C=0 at x=1
mu = 0.5; % mean initial pollutant concentration
sigma = 0.05; % standard deviation of initial pollutant concentration

```

```

for i=2:numx-1
    C(i,1) = exp(-(x(i)-mu)^2/(2*sigma^2)) / sqrt(2*pi*sigma^2);
end

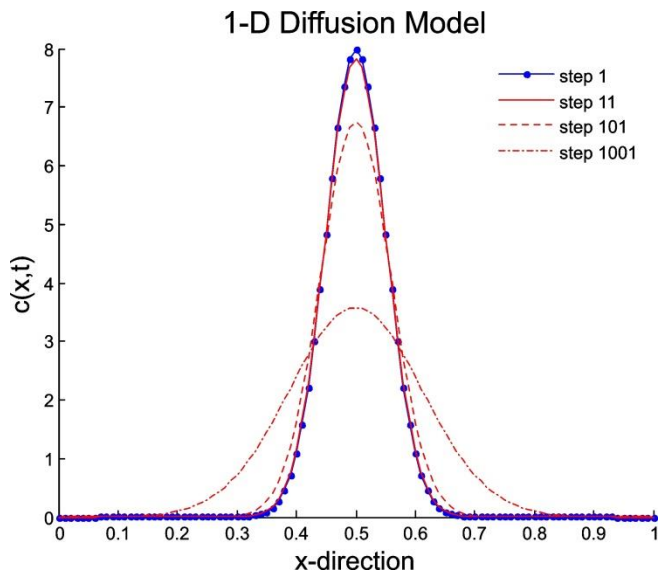
%iterate difference equation - note that C(1,j) and C(numx,j) always re-
main 0
for j=1:numt
    t(j+1) = t(j) + dt; % moving in time through each time-step
    for i=2:numx-1
        C(i,j+1) = C(i,j) + (D*dt/dx^2)*(C(i+1,j) - 2*C(i,j) + C(i-1,j));
    end
end

% Plotting the results
figure(1);
hold on;
plot(x,C(:,1),'.-');
plot(x,C(:,11),'r-');
plot(x,C(:,101),'r--');
plot(x,C(:,1001),'r-');
xlabel('x-direction','FontSize',14);
ylabel('c(x,t)','FontSize',14);
title('1-D Diffusion Model','FontSize', 16)
legend('step 1','step 11','step 101', 'step 1001')

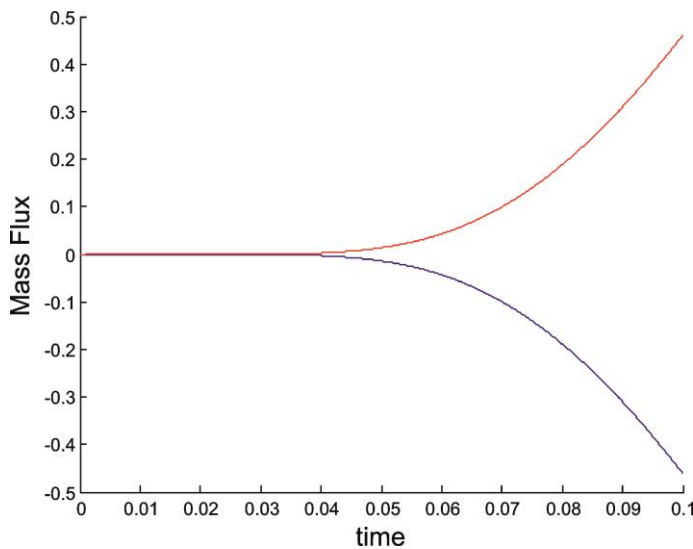
%calculate the flux at x=0 and x=1
for j=1:numt+1
    flux0(j) = -(C(2,j) - C(1,j))/dx;
    flux1(j) = -(C(numx,j)-C(numx-1,j))/dx;
end
figure(2);
hold on;
plot(t,flux0,'b'); plot(t,flux1,'r');
xlabel('time','Fontsize',14);
ylabel('Mass Flux','Fontsize',14)

```

Τα αποτελέσματα του παραπάνω κώδικα δίνονται στις Εικόνες Εικόνα 2.12 και Εικόνα 2.13.



Εικόνα 2.12 Κατανομή συγκέντρωσης ρύπου σε διάφορες χρονικές στιγμές κατά μήκος του άξονα x κατά την προσομοίωση διαμήκουσ διάχυσης. Η κατανομή κατά το $step 1$ εκφράζει την αρχική κατανομή της συγκέντρωσης του ρύπου.



Εικόνα 2.13 Χρονική μεταβολή της ροής μάζας του ρύπου διαμέσου του αριστερού ορίου ($x=0$, κόκκινη γραμμή) και του δεξιού ορίου ($x=1$, μπλε γραμμή) του υπολογιστικού πεδίου.

2.5. Δισδιάστατη της Εξίσωσης Διάχυσης

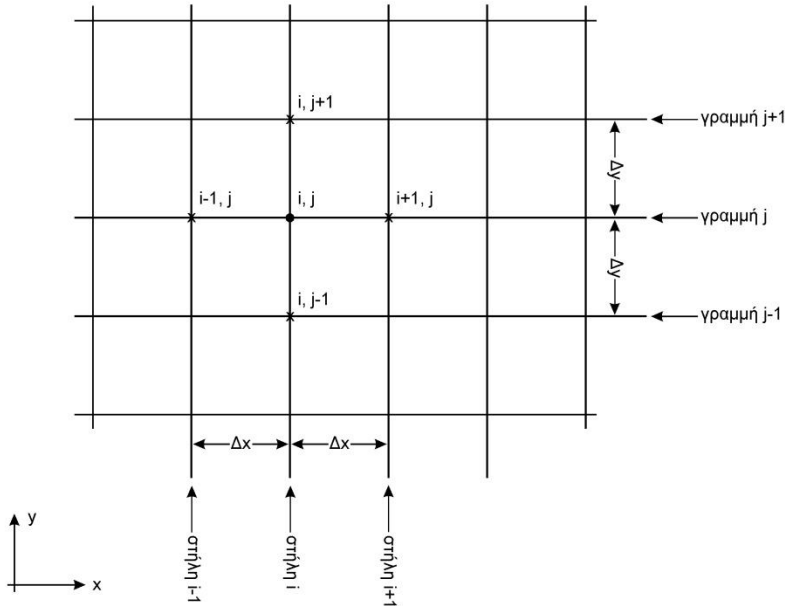
Για την περίπτωση δισδιάστατου φαινομένου η εξίσωση διάχυσης γράφεται:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (2.41)$$

Όμοια, για την περίπτωση κατά την οποία θέλουμε να εφαρμόσουμε ένα ρητό αριθμητικό σχήμα, διακριτοποιούμε τις παραγώγους $\partial^2 C / \partial x^2$ και $\partial^2 C / \partial y^2$ στο χρονικό επίπεδο n . Εάν επιλέξουμε για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης το πλέγμα το οποίο παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.14 και εφαρμόσουμε ένα σχήμα κεντρικών χωρικών διαφορών προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + O((\Delta y)^2) \quad (2.43)$$



Εικόνα 2.14 Πλέγμα για την επίλυση της διδιάστατης εξίσωσης της διάχυσης.

ενώ για τη χρονική παράγωγο μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια προσέγγιση, όπως και για την περίπτωση του μονοδιάστατου σχήματος:

$$\frac{\partial C}{\partial t} \cong \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (2.44)$$

Αν συνδυάσουμε τις τρεις παραπάνω εξισώσεις και τις εισαγάγουμε στη διδιάστατη εξίσωση της διάχυσης, προκύπτει το παρακάτω ρητό σχήμα:

$$C_{i,j}^{n+1} \cong d_x (C_{i+1,j}^n + C_{i-1,j}^n) + (1 - 2d_x - 2d_y) C_{i,j}^n + d_y (C_{i,j+1}^n + C_{i,j-1}^n) \quad (2.45)$$

όπου $d_x = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}$ και $d_y = \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}$ οι ισοδύναμοι αριθμοί διάχυσης.

Επειδή όμως το ρητό αυτό αριθμητικό σχήμα έχει αντίστοιχους περιορισμούς για την επιλογή του αριθμητικού βήματος, όπως και στην περίπτωση του μονοδιάστατου αριθμητικού σχήματος, συχνά επιλέγεται ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα. Στο σχήμα αυτό κατά την διακριτοποίηση στον χώρο παίρνουμε υπόψη

μας και τη συνεισφορά της συγκέντρωσης των γειτονικών σημείων στο χρονικό επίπεδο ($n+1$). Θα ακολουθήσουμε μία παρόμοια στρατηγική, όπως για την περίπτωση του μονοδιάστατου φαινομένου, όσον αφορά τη διακριτοποίηση των παραγώγων του χώρου:

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_{i,j}^{n+1} \cong \Theta \left(\frac{C_{i+1,j}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1} + C_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) + (1-\Theta) \left(\frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}\right) \quad (2.46)$$

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)_{i,j}^{n+1} \cong \Theta \left(\frac{C_{i,j+1}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right) + (1-\Theta) \left(\frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}\right) \quad (2.47)$$

Όπως και προηγουμένως (για το μονοδιάστατο πρόβλημα), ο συντελεστής βαρύτητας Θ έχει ένα εύρος τιμών μεταξύ 0 και 1 ($0 \leq \Theta \leq 1$).

Ακολουθώντας την παραπάνω προσέγγιση, όταν διακριτοποιήσουμε την δισδιάστατη εξίσωση της διάχυσης σε ένα σημείο i, j και εισάγοντας τις σχέσεις (2.46), (2.47) στην εξίσωση (2.41), προκύπτει μία αλγεβρική εξίσωση με πέντε άγνωστους την οποία, παραλείποντας τον εκθέτη $n+1$, μπορούμε να την παρουσιάσουμε με την παρακάτω μορφή:

$$AP_{i,j} C_{i,j} = AE_{i,j} C_{i+1,j} + AW_{i,j} C_{i-1,j} + AN_{i,j} C_{i,j+1} + AS_{i,j} C_{i,j-1} + B_{i,j} \quad (2.48)$$

Στην εξίσωση αυτή ο όρος $AP_{i,j}$ υποδηλώνει το συντελεστή με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η τιμή της συγκέντρωσης στο σημείο i, j , στο οποίο γίνεται η διακριτοποίηση της εξίσωσης. Ο όρος $AE_{i,j}$ αποτελεί το συντελεστή με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η συγκέντρωση στο σημείο το οποίο βρίσκεται στην ίδια γραμμή, αλλά στα δεξιά του σημείου στο οποίο γίνεται η διακριτοποίηση (αλλιώς στο σημείο «ανατολικά», γι' αυτό το λόγο μπαίνει το γράμμα E). Ο όρος $AW_{i,j}$ αποτελεί το συντελεστή με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η συγκέντρωση στο σημείο που βρίσκεται «δυτικά» του σημείου (γι' αυτό το λόγο έχουμε το γράμμα W). Ο όρος $AN_{i,j}$ αποτελεί το συντελεστή με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η συγκέντρωση στο σημείο το οποίο βρίσκεται «βόρεια» του σημείου διακριτοποίησης (γι' αυτό το λόγο βάζουμε το γράμμα N). Τέλος, ο όρος $AS_{i,j}$ αποτελεί το συντελεστή με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η συγκέντρωση στο σημείο το οποίο βρίσκεται «νότια» του σημείου διακριτοποίησης (γι' αυτό το λόγο βάζουμε το γράμμα S). Τέλος, ο συντελεστής $B_{i,j}$ περιλαμβάνει όλους τους όρους οι οποίοι δεν περιλαμβάνουν άγνωστες τιμές της συγκέντρωσης.

Για την περίπτωση την οποία εξετάζουμε εδώ (δηλαδή τη δισδιάστατη εξίσωση της διάχυσης), οι τιμές των συντελεστών της εξίσωσης (2.48) μπορούν να υπολογιστούν από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} AP_{i,j} &= 1 + 2\Theta d_x + 2\Theta d_y \\ AE_{i,j} &= \Theta d_x \\ AW_{i,j} &= \Theta d_x \\ AN_{i,j} &= \Theta d_y \\ AS_{i,j} &= \Theta d_y \\ B_{i,j} &= C_{i,j}^n + (1-\Theta) d_x (C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n) + (1-\Theta) d_y (C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Μία κλασική επαναληπτική μέθοδος επίλυσης είναι η μέθοδος Gauss-Seidel κατά την οποία η τιμή της συγκέντρωσης στο σημείο i, j (σημείο στο οποίο γίνεται η διακριτοποίηση της διαφορικής εξίσωσης) υπολογίζεται συναρτήσει των τιμών της συγκέντρωσης στα γειτονικά σημεία από προηγούμενες επαναλήψεις. Σε κάθε επανάληψη γίνεται διαδοχικός υπολογισμός της τιμής της συγκέντρωσης σε κάθε σημείο του κανάλιου στο οποίο η συγκέντρωση είναι άγνωστη.

Στην περίπτωση κατά την οποία ο υπολογισμός γίνεται από τα «δυτικά» προς τα «ανατολικά» και από το «νότο» προς το «βορρά», ο υπολογισμός γίνεται με βάση την παρακάτω εξίσωση:

$$c_{i,j}^l = (AE_{i,j}c_{i+1,j}^{l-1} + AW_{i,j}c_{i-1,j}^l + AN_{i,j}c_{i,j+1}^{l-1} + AS_{i,j}c_{i,j-1}^l + B_{i,j}) / AP_{i,j} \quad (2.50)$$

όπου ο εκθέτης l δηλώνει την τρέχουσα επανάληψη και ο εκθέτης $l-1$ την προηγούμενη επανάληψη.

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Gauss-Seidel και αποτελεί βελτίωση της μεθόδου Jacobi η οποία γράφεται:

$$c_{i,j}^l = (AE_{i,j}c_{i+1,j}^{l-1} + AW_{i,j}c_{i-1,j}^{l-1} + AN_{i,j}c_{i,j+1}^{l-1} + AS_{i,j}c_{i,j-1}^{l-1} + B_{i,j}) / AP_{i,j} \quad (2.51)$$

Η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει πιο γρήγορα από τη μέθοδο Jacobi, επειδή στην πρώτη λαμβάνονται υπόψη τα αποτελέσματα των πρόσφατων επαναλήψεων, οπότε η «πληροφορία» που έχει προκύψει από τους πρόσφατους υπολογισμούς αξιοποιείται πιο αποτελεσματικά.

Μία παραλλαγή της μεθόδου υπερχαλάρωσης είναι η μέθοδος διαδοχικής υπερχαλάρωσης (successive overrelaxation), η οποία σε πολλές περιπτώσεις αυξάνει την ταχύτητα σύγκλισης:

$$c_{i,j}^l = \alpha (AE_{i,j}c_{i+1,j}^{l-1} + AW_{i,j}c_{i-1,j}^{l-1} + AN_{i,j}c_{i,j+1}^{l-1} + AS_{i,j}c_{i,j-1}^{l-1} + B_{i,j}) / AP_{i,j} + (1-\alpha)c_{i,j}^{l-1} \quad (2.52)$$

Η παράμετρος α ονομάζεται συντελεστής χαλάρωσης και για την περίπτωση κατά την οποία έχει τιμές μεγαλύτερες από τη μονάδα ($\alpha > 1$) έχουμε την προαναφερθείσα περίπτωση της υπερχαλάρωσης.

Στις επαναληπτικές μεθόδους εκτιμούμε ότι έχουμε σύγκλιση, εάν σε κάθε σημείο οι τιμές της συγκέντρωσης ανάμεσα σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις είναι πρακτικά ίδιες, αν δηλαδή τηρείται για κάθε σημείο το παρακάτω κριτήριο:

$$|c_{i,j}^l - c_{i,j}^{l-1}| \leq \varepsilon$$

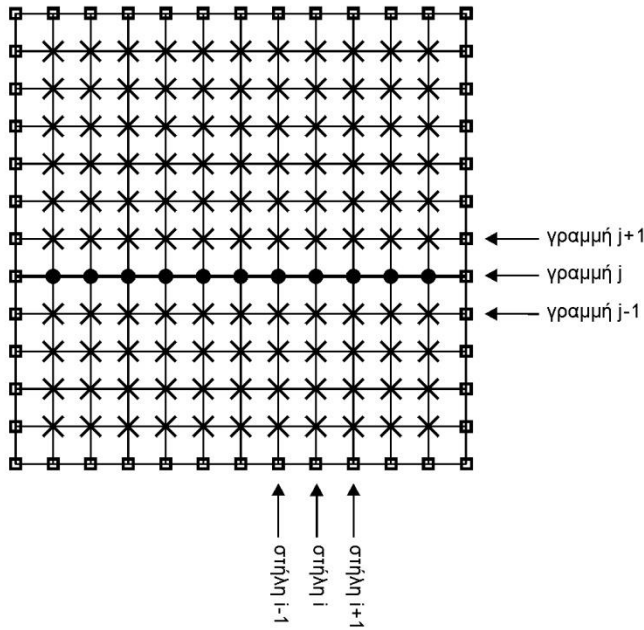
όπου ο αριθμός ε (ο οποίος αποτελεί και το «κριτήριο σύγκλισης»), είναι μία μικρή, προκαθορισμένη τιμή. Σε περίπτωση που επιτευχθεί η σύγκλιση, γίνεται ο υπολογισμός των τιμών του πεδίου της συγκέντρωσης στο επόμενο χρονικό επίπεδο.

Μία πιο γρήγορη σύγκλιση της λύσης επιτυγχάνεται στην περίπτωση που δε γίνεται χωριστός υπολογισμός των τιμών της συγκέντρωσης, αλλά γίνεται ταυτόχρονος υπολογισμός των τιμών της συγκέντρωσης διαδοχικά σε κάθε γραμμή (ή σε κάθε στήλη) του κανάβου. Στη μέθοδο ADI (Alternate Direction Implicite) γίνεται επίλυση (εναλλάξ) κατά γραμμές ή κατά στήλες. Παραδείγματος χάρι, στις μονές επαναλήψεις γίνεται διαδοχική «σάρωση» όλων των γραμμών και στις ζυγές επαναλήψεις διαδοχική σάρωση όλων των στηλών.

Ας υποθέσουμε ότι θα λύσουμε τη δισδιάστατη εξίσωση της διάχυσης σε μία περιοχή η οποία έχει ορθογώνιο σχήμα. Θεωρούμε ότι την περιοχή την διακριτοποιούμε με έναν ομοιόμορφο κανάβο, ο οποίος αποτελείται από M στήλες και N γραμμές. Επίσης, θεωρούμε ότι στις πλευρές του ορθογωνίου αυτού έχουμε οριακές συνθήκες πρώτου τύπου.

Ένα πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι σε κάθε σάρωση (κατά την οποία κάθε φορά επιλύονται όλες οι άγνωστες τιμές της συγκέντρωσης οι οποίες βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στην ίδια στήλη) μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) ή THOMAS (την οποία αναφέραμε παραπάνω) και έχει την παρακάτω γενική δομή:

$$\bar{A}_m \Phi_{m-1} + \bar{B}_m \Phi_m + \bar{C}_m \Phi_{m+1} = \bar{D}_m \quad (2.52)$$



Εικόνα 2.17 Σχηματική αναπαράσταση της εφαρμογής της μεθόδου ADI για την περίπτωση οριζόντιων σαρώσεων. Οι τιμές της συγκέντρωσης στην γραμμή j , στην επανάληψη l (οι οποίες συμβολίζονται με κύκλους) υπολογίζονται ταυτόχρονα με τη μέθοδο THOMAS. Οι τιμές της συγκέντρωσης στα σημεία στα οποία θεωρούνται γνωστές από την ίδια ή την προηγούμενη επανάληψη συμβολίζονται με κύκλους, ενώ οι τιμές στα όρια δίνονται από τις οριακές συνθήκες και συμβολίζονται με τετράγωνα.

Σύμφωνα με όσα γράψαμε πιο πάνω, η γραμμή j (όπως και όλες οι υπόλοιπες, για το συγκεκριμένο πρόβλημα στο οποίο ο κανάβος έχει ορθογωνική μορφή) έχει M κόμβους (αφού θα τμηθεί M φορές από τον αντίστοιχο αριθμό των στηλών του κανάβου), και επειδή στις πλευρές του ορθογωνίου έχουμε οριακές συνθήκες πρώτου τύπου, κατά τις οποίες οι τιμές της άγνωστης μεταβλητής στα όρια είναι γνωστή, έχουμε άγνωστες τιμές σε $M-2$ κόμβους. Κατά συνέπεια, ο δείκτης m μεταβάλλεται από το 1 έως το $(M-2)$ (δηλαδή έχουμε τη σχέση $m = 1, \dots, M-2$). Οι κατάλληλοι συντελεστές για την εφαρμογή της μεθόδου TDMA μπορούν να προσδιοριστούν με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\text{Για } m \geq 2, \text{ έχουμε την σχέση: } \bar{A}_m = -AW_{i,j},$$

$$\text{Για όλα τα } m \text{ έχουμε την σχέση: } \bar{B}_m = -AP_{i,j},$$

$$\text{Για } m \leq M-1 \text{ έχουμε την σχέση: } \bar{C}_m = -AE_{i,j},$$

$$\text{Για } m=1 \text{ έχουμε την σχέση: } D_{i,j} = AW_{i,j}C_{1,j} + AN_{i,j}C_{i,j+1}^{l-1} + AS_{i,j}C_{i,j-1}^l + B_{i,j}$$

$$\text{Για } 2 \leq m \leq M-3 \text{ έχουμε την σχέση: } D_{i,j} = AN_{i,j}C_{i,j+1}^{l-1} + AS_{i,j}C_{i,j-1}^l + B_{i,j}$$

$$\text{Για } m=M-2 \text{ έχουμε την σχέση: } D_{i,j} = AN_{i,j}C_{i,j+1}^{l-1} + AS_{i,j}C_{i,j-1}^l + AE_{i,j}C_{M,j} + B_{i,j}$$

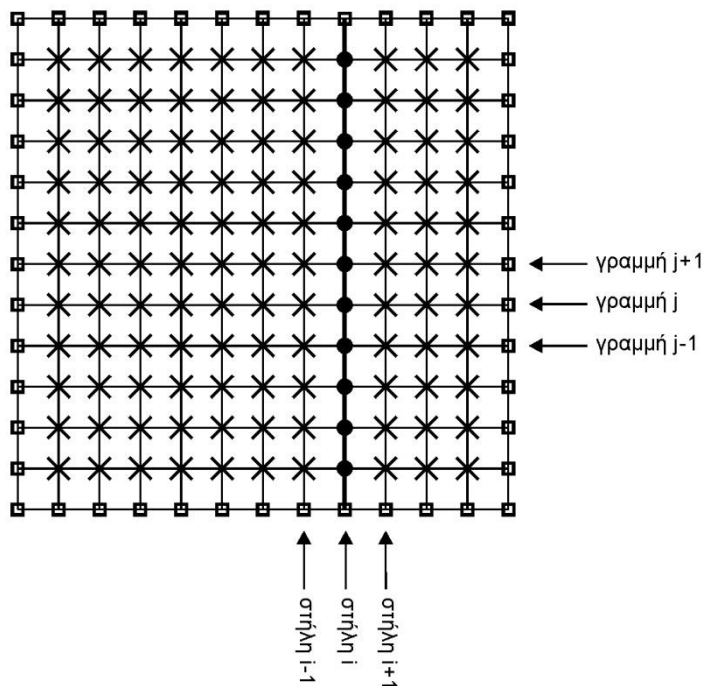
Αφού επιλύσουμε με τη μέθοδο TDMA τις τιμές των Φ_m , θα κάνουμε την παρακάτω αντικατάσταση:

$$C_i = \Phi_{m-1} \text{ για } m = 2, \dots, (M-2).$$

Τέλος θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι για την δεύτερη γραμμή οι τιμές των συγκεντρώσεων $C^l_{i,j-1}$ είναι γνωστές, αφού στο νότιο όριο έχουμε οριακές συνθήκες πρώτου τύπου, και θα πρέπει να γράψουμε $C_{i,1}$ αντί για $C^l_{i,j-1}$. Αντίστοιχα, για τη γραμμή με αύξοντα αριθμό $j = N-1$ οι τιμές των $C^{l-1}_{i,j+1}$ είναι γνωστές, αφού έχουμε και στο βόρειο όριο οριακές συνθήκες πρώτου τύπου και θα πρέπει να γράψουμε $C_{i,N}$ αντί για $C^{l-1}_{i,j+1}$.

Αντίστοιχα, για τις ζυγές επαναλήψεις η υπολογιστική διαδικασία θα είναι η εξής:

Στις ζυγές επαναλήψεις θα γίνουν $(M-2)$ κάθετες σαρώσεις (βλ. Εικόνα 2.18) (θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο TDMA για $(N-2)$ φορές). Ο αριθμός $(M-2)$ προκύπτει από το γεγονός ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα η τιμή των συγκεντρώσεων στην πρώτη ($i = 1$) και την τελευταία γραμμή ($i = M$) είναι γνωστές (έχουμε οριακές συνθήκες πρώτου τύπου).



Εικόνα 2.18 Σχηματική αναπαράσταση της εφαρμογής της μεθόδου ADI για την περίπτωση κάθετων σαρώσεων. Οι τιμές της συγκέντρωσης στην στήλη i , στην επανάληψη l (οι οποίες συμβολίζονται με κύκλους) υπολογίζονται ταυτόχρονα με τη μέθοδο THOMAS. Οι τιμές της συγκέντρωσης στα σημεία στα οποία θεωρούνται γνωστές από την ίδια ή την προηγούμενη επανάληψη συμβολίζονται με κύκλους, ενώ οι τιμές στα όρια δίνονται από τις οριακές συνθήκες και συμβολίζονται με τετράγωνα.

Σύμφωνα με όσα γράψαμε πιο πάνω, η στήλη i έχει N κόμβους (αφού θα τημηθεί N φορές από τον αντίστοιχο αριθμό των γραμμών του κανάβου) και επειδή στις πλευρές του ορθογωνίου έχουμε οριακές συνθήκες πρώτου τύπου, κατά τις οποίες οι τιμές της άγνωστης μεταβλητής στα όρια είναι γνωστή, έχουμε άγνωστες τιμές σε $(N-2)$ κόμβους. Κατά συνέπεια, ο δείκτης m μεταβάλλεται από το 1 έως το $(N-2)$ (δηλαδή έχουμε την σχέση $m = 1, \dots, N-2$).

Οι κατάλληλοι συντελεστές για την εφαρμογή της μεθόδου TDMA μπορούν να προσδιοριστούν με τις παρακάτω σχέσεις:

Για $m \geq 2$, έχουμε την σχέση: $\bar{A}_m = -AS_{i,j}$,

Για όλα τα m έχουμε την σχέση: $\bar{B}_m = AP_{i,j}$,

Για $m \leq N-1$ έχουμε την σχέση: $\bar{C}_m = -AN_{i,j}$,

Για $m=1$ έχουμε την σχέση: $D_{i,j} = AE_{i,j}C_{i+1,j} + AW_{i,j}C_{i-1,j} + AS_{i,j}C_{i,j-1} + B_{i,j}$

Για $2 \leq m \leq N-3$ έχουμε την σχέση: $D_{i,j} = AE_{i,j}C_{i+1,j} + AW_{i,j}C_{i-1,j} + B_{i,j}$

Για $m=N-2$ έχουμε την σχέση: $D_{i,j} = AE_{i,j}C_{i+1,j} + AW_{i,j}C_{i-1,j} + AN_{i,j}C_{i,j+1} + B_{i,j}$

Αφού επιλύσουμε με τη μέθοδο TDMA τις τιμές των Φ_m , θα κάνουμε την παρακάτω αντικατάσταση:

$$C_i = \Phi_{m-1} \text{ για } m=2, \dots, N-2.$$

Τέλος, θα πρέπει να πάρουμε υπόψη μας ότι για τη δεύτερη στήλη οι τιμές των $C_{i+1,j}^1$ είναι γνωστές, αφού στο δυτικό όριο έχουμε οριακές συνθήκες πρώτου τύπου και θα πρέπει να γράψουμε $C_{1,j}$ αντί για $C_{i+1,j}^1$. Αντίστοιχα, για τη στήλη με αύξοντα αριθμό $i = N-1$ οι τιμές των $C_{i+1,j}^1$ είναι γνωστές, αφού έχουμε και στο ανατολικό όριο οριακές συνθήκες πρώτου τύπου και θα πρέπει να γράψουμε $C_{M,1}$ αντί για $C_{i+1,j}^1$.

Βιβλιογραφία

- Farlow, S. (1982).** *Partial differential equations for scientists and engineers*. New York: Wiley.
- Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C., Imberger, J., & Brooks, N. H. (1979).** *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press.
- LeVeque, R. (2007).** *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Mkwizu, M. (2012).** *Numerical Solution for Partial Differential Equations (PDE's): The Stability of One Space Dimension Diffusion Equation with Finite Difference Methods*: Lap Lambert Academic Publishing GmbH KG.
- Rubin, H. (2001).** *Environmental Fluid Mechanics*: CRC Press.
- Smith, G. D. (1985).** *Numerical solution of partial differential equations : finite difference methods* (3rd ed.). Oxford [Oxfordshire] :: Clarendon Press

Κεφάλαιο 3

Εξίσωση Καθαρής Συναγωγής

Σύνοψη

Παρουσιάζεται η εξίσωση συναγωγής και η αριθμητική λύση της με το αριθμητικό σχήμα FTBS. Αναλύονται οι έννοιες της συνέπειας, της ευστάθειας και της σύγκλισης της αριθμητικής λύσης ως προς την αναλυτική, και δίνονται οι προϋποθέσεις ευστάθειας και σύγκλισης αριθμητικού σχήματος. Παρουσιάζεται το πρόβλημα της αριθμητικής διάχυσης και δίνονται υπολογιστικοί τρόποι αντιμετώπισής του. Παρουσιάζεται κώδικας προγραμματισμού σε γλώσσα Matlab για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης της συναγωγής.

3.1. Εξίσωση Καθαρής Συναγωγής Ρύπου

Η μετακίνηση της μάζας ρύπου λόγω υπάρχοντος ρεύματος εντός του πεδίου ροής καλείται **συναγωγή (convection)** και εκφράζεται μαθηματικά από την παρακάτω εξίσωση (Fischer et al., 1979):

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} \quad (3.1)$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται, αν στο πεδίο ροής δεν υπάρχει δημιουργία ή απώλεια μάζας. Η απλούστερη από τις πρότυπες εξισώσεις ροής είναι αυτή της μονοδιάστατης εξίσωσης μεταφοράς μάζας:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη μεταφορά μάζας ενός ρύπου με τη μορφή της συγκέντρωσης C κατά μήκος της διεύθυνσης x στη διάρκεια του χρόνου t . Η μεταφορά της μάζας γίνεται με σταθερή κατά το μήκος και τον χρόνο ταχύτητα ροής u .

Μερικά φυσικά φαινόμενα που συνδέονται με την εξίσωση αυτή είναι:

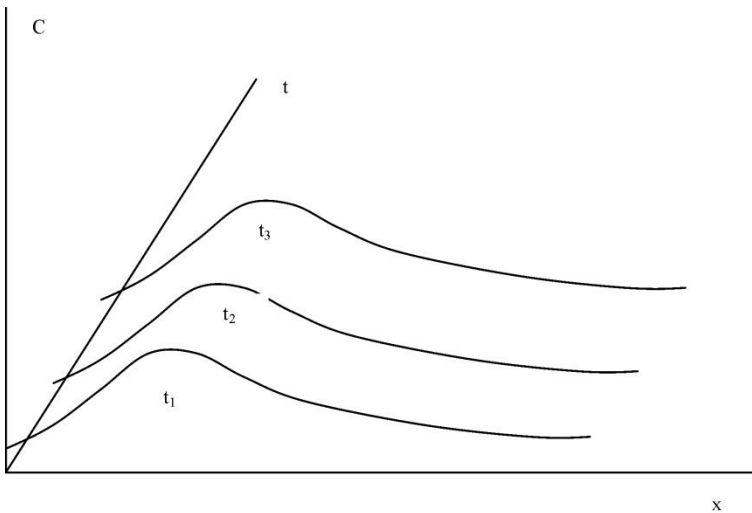
- Διάδοση διαταραχής πυκνότητας αερίου σε σωλήνα,
- Μεταφορά σε κανάλι σταθερής ροής ενός χημικού συστατικού,
- Διάδοση διαταραχής ύψους στάθμης νερού.

Αν η αρχική κατανομή της C τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι γνωστή, τότε η αναλυτική λύση της εξίσωσης αυτής είναι:

$$\text{Αν } C(x,0) = f(x)$$

$$\text{Τότε } C(x, t) = f(x - ut)$$

Άρα, η τιμή της συγκέντρωσης C σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ροής μεταφέρεται αμετάβλητη με σταθερή ταχύτητα u , όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1 (Charpa, 2012).



Εικόνα 3.1 Κατανομή της συγκέντρωσης C λόγω συναγωγής σε διαδοχικές χρονικές στιγμές (t_1, t_2, t_3).

Η εξίσωση μεταφοράς γράφεται:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} \quad (3.3)$$

Η γεωμετρική σημασία της εξίσωσης είναι ότι η κλίση της συγκέντρωσης C κατά την t -διεύθυνση είναι ανάλογη της αρνητικής κλίσης της συγκέντρωσης C στη x -διεύθυνση. Ουσιαστικά, η συγκέντρωση C κινείται στο επίπεδο $x-t$ κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής με κλίση $\frac{dx}{dt} = u$. Οι γραμμές της επιφάνειας (x, t) κατά μήκος των οποίων μεταδίδεται η λύση της εξίσωσης ονομάζονται χαρακτηριστικές γραμμές (characteristic lines) (Fischer et al., 1979).

3.2. Αριθμητική Λύση της Εξίσωσης Συναγωγής

Έστω ότι για την επίλυση της εξίσωσης αυτής επιλέγονται οι ανάντη διαφορές για τη χωρική παράγωγο και οι κατάντη διαφορές για τη χρονική παράγωγο. Τότε:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i^n = \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i^n \frac{\Delta x}{2} + OAT \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_i^n = \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\right)_i^n \frac{\Delta t}{2} + OAT \quad (3.5)$$

Αντικαθιστούμε:

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\right)_i^n \frac{\Delta t}{2} - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i^n \frac{\Delta x}{2} + OAT \quad (3.6)$$

Οι όροι στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης (3.6) είναι οι προσεγγιστικοί όροι της εξίσωσης συναγωγής, ενώ οι όροι στο δεξιό τμήμα είναι το σφάλμα αποκοπής (Biringen et al., 2011). Άρα,

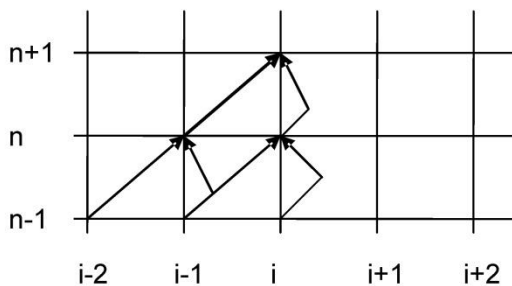
$$\text{Σφάλμα Αποκοπής (Truncation Error)} = \frac{\text{Εξίσωση Μερικών Παραγώγων}}{\text{Εξίσωση Πεπερασμένων Διαφορών}}$$

3.2.1. Το Αριθμητικό Σχήμα FTBS (Forward in Time – Backward in Space)

Αγνοούμε το σφάλμα αποκοπής, οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} - u \frac{\partial C}{\partial x} &\approx \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} - u \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \\ C_i^{n+1} &= C_i^n - \left(\frac{u \Delta t}{\Delta x} \right) (C_i^n - C_{i-1}^n) = 0 \Rightarrow \\ C_i^{n+1} &= (1 - Cr) C_i^n + Cr C_{i-1}^n = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

όπου $Cr = u \Delta t / \Delta x$ είναι ο αριθμός Courant. Το παραπάνω σχήμα είναι ρητό σχήμα (explicit scheme) πεπερασμένων διαφορών, καθώς ο υπολογισμός των συγκεντρώσεων C_i^{n+1} γίνεται με βάση τις συγκεντρώσεις της προηγούμενης χρονικής στιγμής C_i^n .



Εικόνα 3.2 Υπολογιστικό πλέγμα επίλυσης εξίσωσης συναγωγής με το σχήμα FTBS.

Ο προσδιορισμός της αριθμητικής λύσης απαιτεί τον καθορισμό των αρχικών συνθηκών (initial conditions) και των οριακών συνθηκών (boundary conditions). Οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν τις τιμές των C τη χρονική στιγμή $n = 0$ σε όλα τα σημεία του πλέγματος του υπολογιστικού κανάβου (Biringen et al., 2011). Άρα,

$$C_i^0 \quad (i=1, \dots, N)$$

Οι οριακές συνθήκες μπορεί να είναι:

A) απόλυτα καθορισμένες τιμές της συγκέντρωσης C στα όρια του πλέγματος,

$$C_1^n, C_{N_x}^n \quad \forall n$$

Οι τιμές αυτές μπορεί να είναι σταθερές ή μεταβαλλόμενες στον χρόνο. Η οριακή αυτή συνθήκη καλείται **οριακή συνθήκη Dirichlet**.

B) μέσω καθορισμού των χωρικών παραγώγων της συγκέντρωσης C στα όρια του κανάβου,

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_1^n, \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{N_x}^n \quad \forall n$$

Τότε γίνεται έμμεσος υπολογισμός των οριακών τιμών. Χρησιμοποιούμε μια προσεγγιστική λύση για το αριστερό και το δεξιό όριο του κανάβου αντίστοιχα (Rubin, 2001).

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_1^n &\approx \frac{C_2^n - C_1^n}{\Delta x} \Rightarrow C_1^n \approx C_2^n - \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_1^n \Delta x \\ \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{N_x}^n &\approx \frac{C_{N_x}^n - C_{N_x-1}^n}{\Delta x} \Rightarrow C_{N_x}^n \approx C_{N_x-1}^n + \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{N_x}^n \Delta x \end{aligned}$$

Η οριακή αυτή συνθήκη καλείται **οριακή συνθήκη Neumann**.

3.2.2. Ακρίβεια Αριθμητικού Σχήματος

Το σφάλμα αποκοπής ορίζεται ως:

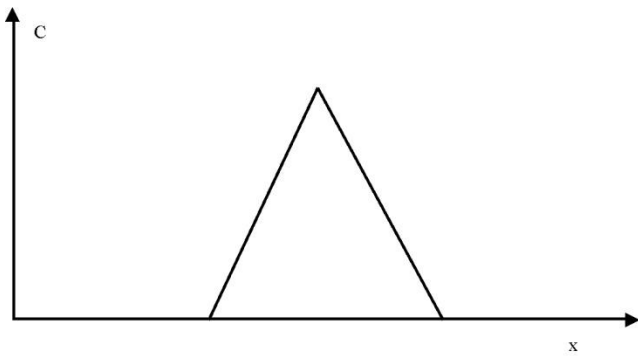
$$\Sigma.A. = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\right)_i^n \frac{\Delta t}{2} - u \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i^n \frac{\Delta x}{2} + OAT \quad (3.8)$$

Άρα, το σχήμα παρουσιάζει ακρίβεια πρώτης τάξης ως προς τα Δx και Δt ($O(\Delta x, \Delta t)$). Το σφάλμα αποκοπής μηδενίζεται όταν, καθώς τα Δx και Δt τείνουν στο μηδέν, οι παράγωγοι $\left(\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\right)_i^n, \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i^n$ των όρων του σφάλματος δεν αυξάνουν με ρυθμό ταχύτερο από το ρυθμό μείωσης των Δx και Δt . Ωστόσο, σε περιοχές ασυνέχειας η αύξηση των παραγών αυτών είναι ανεξέλεγκτη. Αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα αποκοπής μηδενίζεται όταν η λύση είναι αρκετά ομαλή (Iserles, 2008). Αλλά πώς ορίζεται και πώς ποσοτικοποιείται η «αρκετά ομαλή λύση»;

Παράδειγμα εφαρμογής FTBS (A)

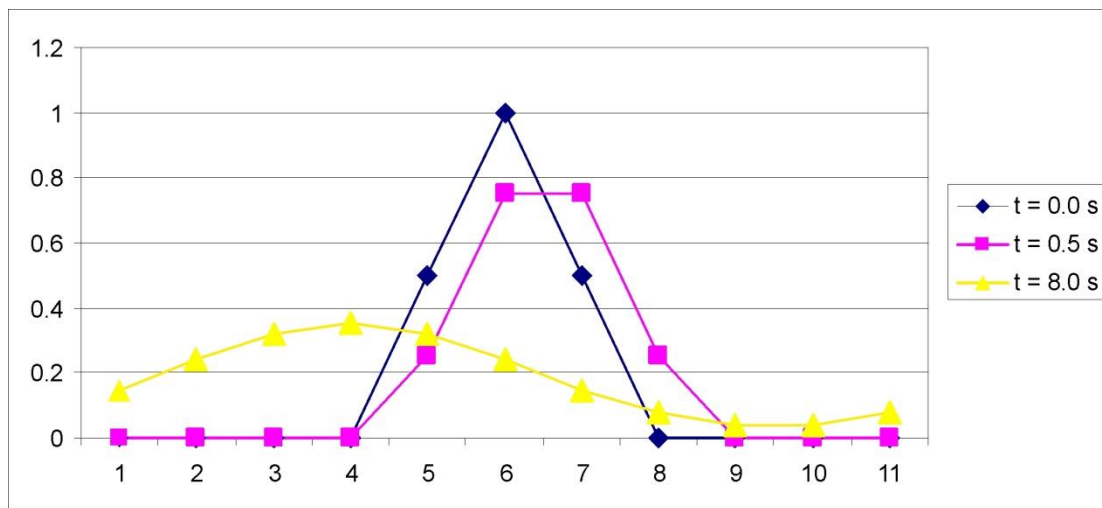
Έστω $u = 1$, $N_x = 11$, $\Delta x = 1$ και αρχική κατανομή συγκέντρωσης ρύπου όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.3. Επιλύουμε την εξίσωση (3.7) στο MS-Excel.

Θεωρούμε ότι ισχύει μία περιοδική οριακή συνθήκη, δηλαδή η μάζα εξέρχεται προς τα δεξιά και στη συνέχεια επανεισάγεται στο πεδίο ροής από τα αριστερά. Η απουσία διάχυσης σημαίνει ότι η κατανομή διατηρεί το αρχικό τριγωνικό σχήμα της, ενώ οποιαδήποτε παρέκκλιση από αυτό οφείλεται σε σφάλματα του αριθμητικού σχήματος. Εξετάζουμε πρώτα τη λύση με $Cr = 0.5$, που σημαίνει ότι $\Delta t = 0.5$ ($N = 20$ χρονικά βήματα)



Εικόνα 3.3 Αρχική κατανομή συγκέντρωσης ρύπου σε αγωγό.

και το αποτέλεσμα της κατανομής της συγκέντρωσης του ρύπου λόγω συναγωγής σε αγωγό για διάφορες χρονικές στιγμές δίνεται στην Εικόνα 3.4.



Εικόνα 3.4 Αποτελέσματα επίλυσης εξίσωσης συναγωγής με σχήμα FTBS ($Cr = 0.5$).

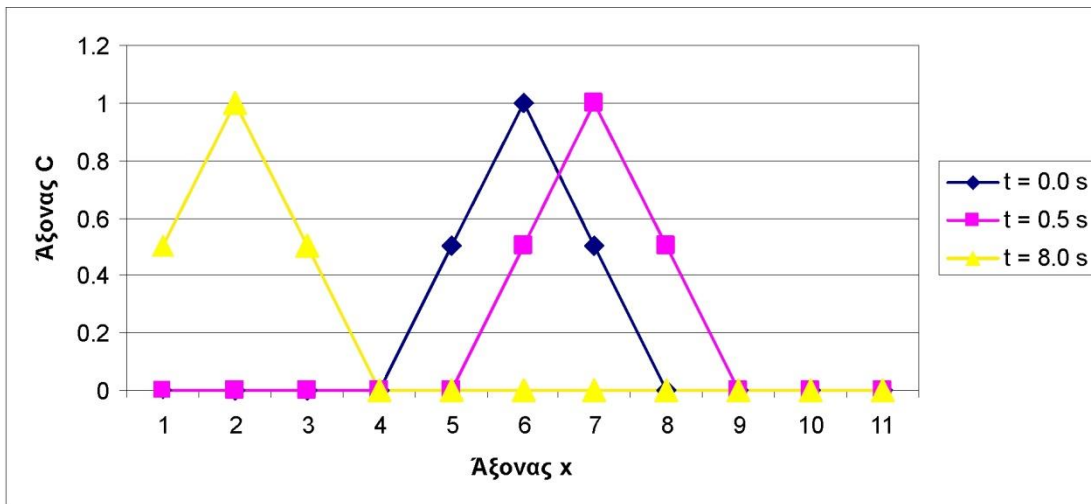
Παρατηρούμε τη μείωση της αρχικής κατανομής συγκέντρωσης ρύπου με τον χρόνο, γεγονός που αποδίδεται στην αριθμητική διάχυση (numerical diffusion). Παρ' όλα αυτά η μέγιστη θέση προωθείται με σωστή ταχύτητα, άρα η αριθμητική διάχυση δεν επηρεάζει τη φάση διάδοσης του ρύπου.

Παράδειγμα εφαρμογής FTBS (B)

Ως δεύτερη περίπτωση εξετάζουμε το $Cr = 1$, που σημαίνει ότι $\Delta t = 1$ ($N = 10$ χρονικά βήματα). Η λύση μετασχηματίζεται:

$$C_i^{n+1} = C_{i-1}^n \quad (3.9)$$

Άρα, η κατανομή επιστρέφει αμετάβλητη στην αρχική της θέση και η αναλυτική λύση συμπίπτει με την αριθμητική.

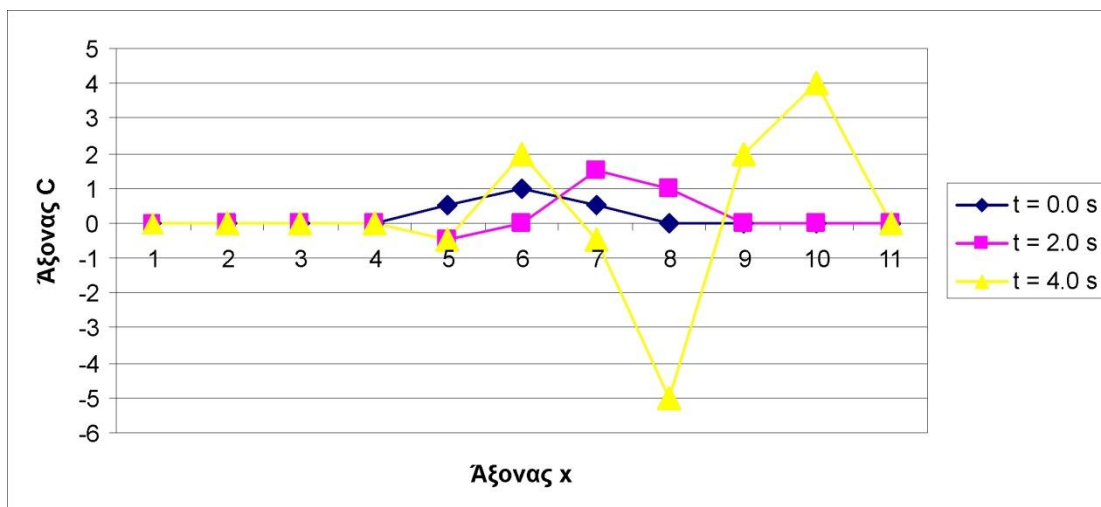


Εικόνα 3.5 Αποτελέσματα επίλυσης εξίσωσης συναγωγής με σχήμα FTBS ($Cr = 1.0$).

Παράδειγμα εφαρμογής FTBS (Γ)

Ως τρίτη περίπτωση εξετάζουμε το $Cr = 2$, που σημαίνει ότι $\Delta t = 2$ ($N = 5$ χρονικά βήματα). Η λύση μετασχηματίζεται:

$$C_i^{n+1} = -C_i^n + 2C_{i-1}^n \quad (3.10)$$



Εικόνα 3.6 Αποτελέσματα επίλυσης εξίσωσης συναγωγής με σχήμα FTBS ($Cr = 2.0$).

Η αριθμητική λύση παρουσιάζει μεγάλες ταλαντώσεις, οι οποίες αυξάνουν με τον χρόνο παράγοντας μη ρεαλιστικά αποτελέσματα. Άρα, το αριθμητικό σχήμα είναι ασταθές για τη συγκεκριμένη συνθήκη.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το αποτέλεσμα μίας αριθμητικής μεθόδου εξαρτάται από: α) το σχήμα που επιλέγουμε και β) από τις αριθμητικές παραμέτρους που επιλέγουμε (Charra, 2012).

Βασικές απαιτήσεις του αριθμητικού σχήματος είναι:

- Η συνέπεια του αριθμητικού σχήματος,
- Η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος και
- Η σύγκλιση του αριθμητικού σχήματος.

Α) Συνέπεια Αριθμητικού Σχήματος

Ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών είναι συνεπές με την εξίσωση μερικών παραγώγων όταν ο μετασχηματισμός είναι ακριβής για $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$. Άρα,

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} (\text{EMΠ} - \text{EΠ}\Delta) = \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} (\Sigma\Lambda) = 0 \quad (3.11)$$

Η ανάπτυξη των όρων C_{i-1}^n, C_i^{n+1} σε σειρές Taylor δίνει:

$$C_{i-1}^n = C_i^n - \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i^n \frac{\Delta x^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\right)_i^n \frac{\Delta x^3}{6} + \left(\frac{\partial^4 C}{\partial x^4}\right)_i^n \frac{\Delta x^4}{24} + OAT$$
$$C_i^{n+1} = C_i^n + \left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\right)_i^n \frac{\Delta t^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 C}{\partial t^3}\right)_i^n \frac{\Delta t^3}{6} + OAT$$

όπου OAT είναι οι Όροι Ανώτερης Τάξης. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση μεταφοράς τις παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - u \frac{\partial C}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2} - u \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \frac{\Delta t^3}{6} + u \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \frac{\Delta x^2}{6} + OAT \right] = 0$$

Προκύπτει ότι όταν $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$, τότε το περιεχόμενο της αγκύλης μηδενίζεται, οπότε η αρχική εξίσωση της μεταφοράς επανακτάται, άρα το σχήμα παρουσιάζει συνέπεια άνευ όρων.

Β) Ευστάθεια Αριθμητικού Σχήματος

Ένα αριθμητικό σχήμα είναι ευσταθές όταν τα σφάλματα δεν αυξάνουν κατά τη διάρκεια της επίλυσης του αριθμητικού σχήματος. Σε ένα ασταθές σχήμα εμφανίζονται σφάλματα που διακρίνονται σε σφάλμα αποκοπής (truncation error) και σφάλμα στρογγυλοποίησης (rounding error), τα οποία αυξάνονται ανεξέλεγκτα δίνοντας μη ρεαλιστικές λύσεις και σφάλματα υπερχείλισης (overflow).

Για τη διερεύνηση της ευστάθειας ξεκινούμε από την εξίσωση μεταφοράς:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x}$$

Αρχικά παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-u \frac{\partial C}{\partial x} \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση του σφάλματος αποκοπής

$$\begin{aligned}
\Sigma.A. &= \left(\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \right)_i \frac{\Delta t}{2} - u \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_i \frac{\Delta x}{2} + OAT \\
&= (u^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2})_i \frac{\Delta t}{2} - u \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_i \frac{\Delta x}{2} + OAT \\
&= -u \frac{(\Delta x - u\Delta t)}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_i + OAT
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = u \frac{(\Delta x - u\Delta t)}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_i + OAT$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $\Delta x - u\Delta t > 0 \Rightarrow Cr < 1$
Στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται αριθμητική διάχυση η οποία τείνει να εξομαλύνει την κατανομή της C.
2. $\Delta x - u\Delta t = 0 \Rightarrow Cr = 1$
Στην περίπτωση αυτή εξαφανίζεται η δεύτερη χωρική παράγωγος στο σφάλμα αποκοπής και η προσέγγιση γίνεται απόλυτα ακριβής.
3. $\Delta x - u\Delta t < 0 \Rightarrow Cr > 1$
Στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται όρος της «αντιδιάχυσης» ο οποίος τείνει να αυξήσει τις όποιες διαταραχές στην κατανομή της συγκέντρωσης C προκαλώντας μη ομαλές λύσεις.

Άρα, το σχήμα FTBS, που γράφεται ως $C_i^{n+1} = (1 - Cr)C_i^n + Cr C_{i-1}^n = 0$, είναι ευσταθές, όταν ισχύει η συνθήκη CFL:

$$Cr = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{3.12}$$

Γ) Σύγκλιση Αριθμητικού Σχήματος

Ένα σχήμα συγκλίνει, όταν για διαρκώς μειούμενα ($\Delta x, \Delta t$) η λύση της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών τείνει προς την αναλυτική. Προκύπτει ότι η πυκνωση του πλέγματος του κανάβου δεν οδηγεί αναγκαστικά σε βελτίωση της αριθμητικής λύσης.

Άλλη προσεγγιστική λύση δίνεται και από το Lax-Wendroff 1 step scheme ως:

$$\begin{aligned}
\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} &= -\frac{U}{2\Delta x} (C_{i+1}^n - C_{i-1}^n) + \frac{U^2 \Delta t}{2\Delta x^2} (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \Rightarrow \\
C_i^{n+1} &= C_i^n - \frac{U \Delta t}{2\Delta x} (C_{i+1}^n - C_{i-1}^n) + \frac{U^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n)
\end{aligned}$$

Η συνδυασμένη εξίσωση μεταφοράς και διάχυσης μάζας είναι:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$$

θεωρώντας ότι η μοριακή διάχυση είναι ισόμορφη προς κάθε κατεύθυνση. Ωστόσο, στο φυσικό περιβάλλον των ποταμών, των λιμνών και των ταμιευτήρων η ροή χαρακτηρίζεται ως τυρβώδης και όχι γραμμική, συνεπώς απαιτείται η χρήση Συντελεστών Τυρβώδους Διάχυσης (D_x , D_y , D_z) (Charpa, 2012).

Παρακάτω παρουσιάζεται κώδικας Matlab για την επίλυση της εξίσωσης της μονοδιάστατης καθαρής συναγωγής ρύπου με τη χρήση του αριθμητικού σχήματος FTBS.

```
% Solution of the 1-D Advection Equation using Finite-Difference Method
% developed by G. Sylaios

numx = 101; %number of grid points in x
numt = 2000; %number of time steps to be iterated over
dx = 1/(numx - 1); % calculate the space increment dx
dt = 0.00005; % determine the time increment dt

x = 0:dx:1; %vector of x values, to be used for plotting

C = zeros(numx,numt); %initialize everything to zero
u = 0.8; % define velocity
Cr = u*dt/dx; % define the Courant number

%specify initial conditions
t(1) = 0; %t=0
C(1,1) = 0; %C=0 at x=0
C(1,numx) = 0; %C=0 at x=1
mu = 0.5; % mean initial pollutant concentration
sigma = 0.05; % standard deviation of initial pollutant concentration
for i=2:numx-1
    C(i,1) = exp(-(x(i)-mu)^2/(2*sigma^2)) / sqrt(2*pi*sigma^2);
end

%iterate difference equation - note that C(1,j) and C(numx,j) always remain 0
for j=1:numt
    t(j+1) = t(j) + dt; % moving in time through each time-step
    for i=2:numx-1
        C(i,j+1) = (1-Cr)*C(i,j) + Cr*C(i-1,j);
    end
end

figure(1);
hold on;
plot(x,C(:,1));
plot(x,C(:,11));
plot(x,C(:,101));
plot(x,C(:,1001));
plot(x,C(:,2001));
xlabel('x');
ylabel('c(x,t)');

%calculate the flux at x=0 and x=1
for j=1:numt+1
    flux0(j) = -(C(2,j) - C(1,j))/dx;
    flux1(j) = -(C(numx,j)-C(numx-1,j))/dx;
end
```

```

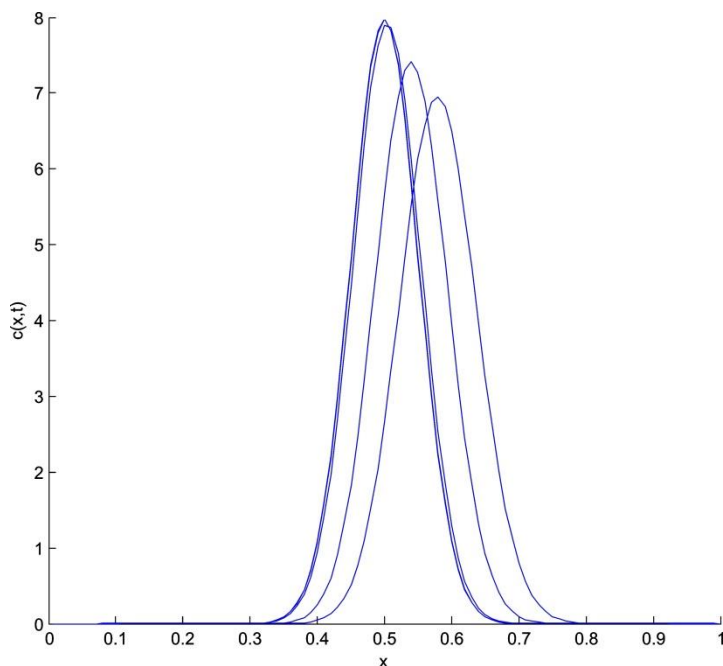
figure(2);
hold on;
plot(t,flux0,'b');
plot(t,flux1,'r');
xlabel('t');
ylabel('flux')
legend ('flux at point 0', 'flux at point 1');

%calculate approximation to the integral of c from x=0 to x=1
for j=1:numt+1
    s(j) = sum(C(1:numx-1,j))*dx;
end

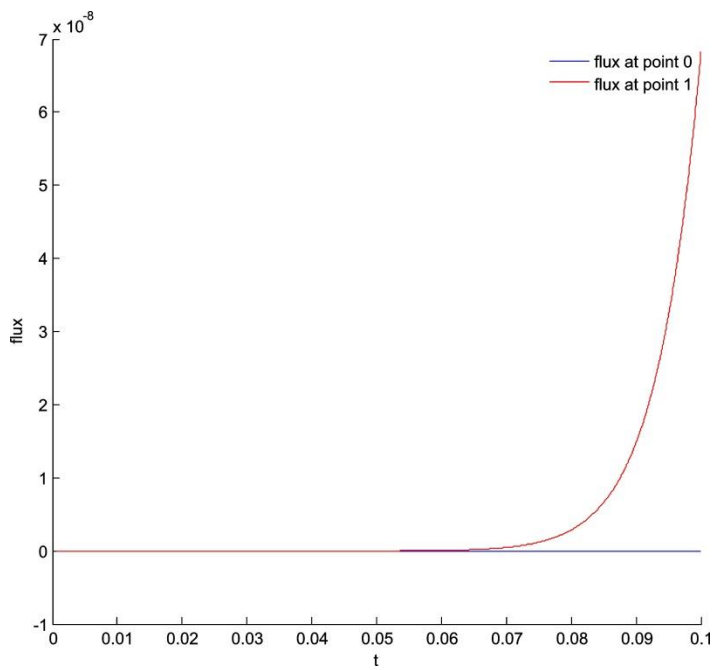
%calculate the amount of C that leaves through the boundaries due to flux
% s0 is the amount of C that leaves through x=0
% s1 is the amount of C that leaves through x=1
s0(1) = 0;
s1(1) = 0;
for j=1:numt
    s0(j+1) = s0(j) - flux0(j)*dt;
    s1(j+1) = s1(j) + flux1(j)*dt;
end

```

Τα αποτελέσματα της μαθηματικής προσομοίωσης δίνονται παρακάτω:



Εικόνα 3.7 Κατανομή συγκέντρωσης ρύπου σε διάφορες χρονικές στιγμές κατά μήκος του άξονα x κατά την προσομοίωση της καθαρής συναγωγής. Η κατανομή κατά το *step 1* εκφράζει την αρχική κατανομή της συγκέντρωσης του ρύπου.



Εικόνα 3.8 Χρονική μεταβολή της ροής μάζας του ρύπου διαμέσου του δεξιού ορίου ($x=1$, κόκκινη γραμμή) και του αριστερού ορίου ($x=0$, μπλε γραμμή) του υπολογιστικού πεδίου.

Βιβλιογραφία

- Biringen, S., Chow, C.-Y., & Wiley, I. (2011).** An introduction to computational fluid mechanics by example. from <http://www.books24x7.com/marc.asp?bookid=43159>
- Chapra, S. C. (2012).** Applied numerical methods with MATLAB for engineers and scientists. New York: McGraw-Hill.
- Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C., Imberger, J., & Brooks, N. H. (1979).** Mixing in Inland and Coastal Waters. Academic Press.
- Iserles, A. (2008).** A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations: Cambridge University Press.
- Rubin, H. (2001).** Environmental Fluid Mechanics: CRC Press.

Κεφάλαιο 4

Συνδυασμένη Εξίσωση Διάχυσης – Συναγωγής

Σύνοψη

Καταστρώνεται το συνδυασμένο ομοίωμα διάχυσης - συναγωγής ρύπου, αναλύονται οι αρχικές και οριακές συνθήκες και δίνονται οι αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις για μονοδιάστατη και δισδιάστατη ροή. Αναλύεται η τάξη μεγέθους κάθε όρου της συνδυασμένης εξίσωσης, ο αδιάστατος αριθμός Peclet κανάβου και η σημασία του σε περιβαλλοντικές ροές. Η αριθμητική λύση δίνεται με το σχήμα FTCS και αναλύονται οι προϋποθέσεις και οι περιορισμοί ευστάθειας και συνέπειας του σχήματος. Δίνεται κώδικας σε γλώσσα Matlab για την αριθμητική επίλυση της συνδυασμένης εξίσωσης διάχυσης - συναγωγής.

4.1. Συνδυασμένη Εξίσωση Διάχυσης - Συναγωγής Ρύπου

Για την κατάστρωση του μαθηματικού ομοιώματος διάδοσης ρύπου αρχικά πρέπει να καθοριστούν τα προς υπολογισμό μεγέθη. Αυτά είναι συνήθως η συγκέντρωση του ρύπου $C(x,y,t)$ που περιγράφει την αναλογία μάζας ή όγκου ρύπου σε μάζα ή όγκο διαλύματος (ή αιωρήματος). Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι το ppt (parts per thousand), το ppm (parts per million) και το mg/l (milligram per litre). Η προς υπολογισμό ποσότητα είναι βαθμωτή, με αποτέλεσμα να απαιτείται μια εξίσωση πεδίου, η οποία θα λαμβάνει υπόψη την αρχή διατήρησης της μάζας του ρύπου κατά την κίνηση και διάχυσή του. Για τη σύνθεση του μαθηματικού ομοιώματος εφαρμόζεται ο Νόμος του Fick με την παραδοχή ότι ισχύει και για την περίπτωση τυρβώδους ροής (Charra, 2008). Εξετάζοντας στην περίπτωση της μονοδιάστατης κίνησης το ισοζύγιο εισερχόμενης και εξερχόμενης μάζας από δύο διατομές κατά την κατεύθυνση της ροής με ταχύτητα u που απέχουν κατά dx , έχουμε:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(UC) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial C}{\partial x}\right) \pm \lambda C \quad (4.1)$$

όπου D ο συντελεστής τυρβώδους διάχυσης και λ ο συντελεστής αποδόμησης ή γένεσης μάζας. Στην περίπτωση τρισδιάστατης κίνησης η παραπάνω εξίσωση γίνεται (Charra, 2008):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(UC) + \frac{\partial}{\partial x}(VC) + \frac{\partial}{\partial x}(WC) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z \frac{\partial C}{\partial z}\right) \pm \lambda C \quad (4.2)$$

Όπως εξηγήσαμε παραπάνω, μπορούμε να θεωρήσουμε τη μέση τιμή της ταχύτητας κατά το βάθος ως αντιπροσωπευτική του προφίλ ταχύτητας που επικρατεί στην περιοχή αυτή, οπότε απλοποιούμε το ομοίωμα σε δισδιάστατο, το περιορίζουμε δηλαδή στις διευθύνσεις x, y . Οι οριακές συνθήκες που συμπληρώνουν το ομοίωμα είναι (Charra & Canale, 2006):

α) Συνθήκη στερεών ορίων: Εκεί εφαρμόζεται συνήθως η αρχή της μη διάβασης, που σημαίνει το μηδενισμό της εγκάρσιας στο στερεό όριο ταχύτητας, οπότε σύμφωνα με το Νόμο του Fick έχουμε $(\partial C / \partial n) = 0$.

β) Συνθήκη ορίων ελεύθερης διάβασης: Τέτοια συνήθως είναι τα όρια ανοικτής θάλασσας ή η ανοικτή περιοχή που οριοθετεί κάθε παγίδα ρύπανσης (δηλαδή νοητή γραμμή μέσα από την οποία περνά η μάζα του ρύπου χωρίς επιστροφή στο πεδίο ροής). Η συνθήκη που εφαρμόζεται εκεί αφορά τη χωρική σταθερότητα του ρυθμού ροής:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(A_n \frac{\partial C}{\partial n}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 C}{\partial n^2} = 0 \quad (4.3)$$

γ) **Συνθήκη πηγών ρύπανσης:** Είναι περιοχές του πεδίου από όπου εισέρχεται ο ρύπος στο πεδίο ροής με τιμές που ορίζει κάθε φορά ο χρήστης. Η συγκέντρωση αυτή C μπορεί να είναι σταθερή στον χρόνο ή να μεταβάλλεται μέσα από μία συνάρτηση συνήθως λογαριθμικής μορφής.

Επιστρέφουμε στη μονοδιάστατη εξίσωση μεταφοράς – διάχυσης:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

Η αρχική συνθήκη ορίζεται:

$$C(x,0) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ C_0, & x < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Η αναλυτική λύση είναι:

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x-ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (4.6)$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει την απλή περίπτωση εκροής ενός ρύπου στο σημείο $x = 0$, αρχικής συγκέντρωσης C_0 σε κανάλι μονοδιάστατης ροής σταθερής ταχύτητας u , με συντελεστή διάχυσης D (Fischer et al., 1979).

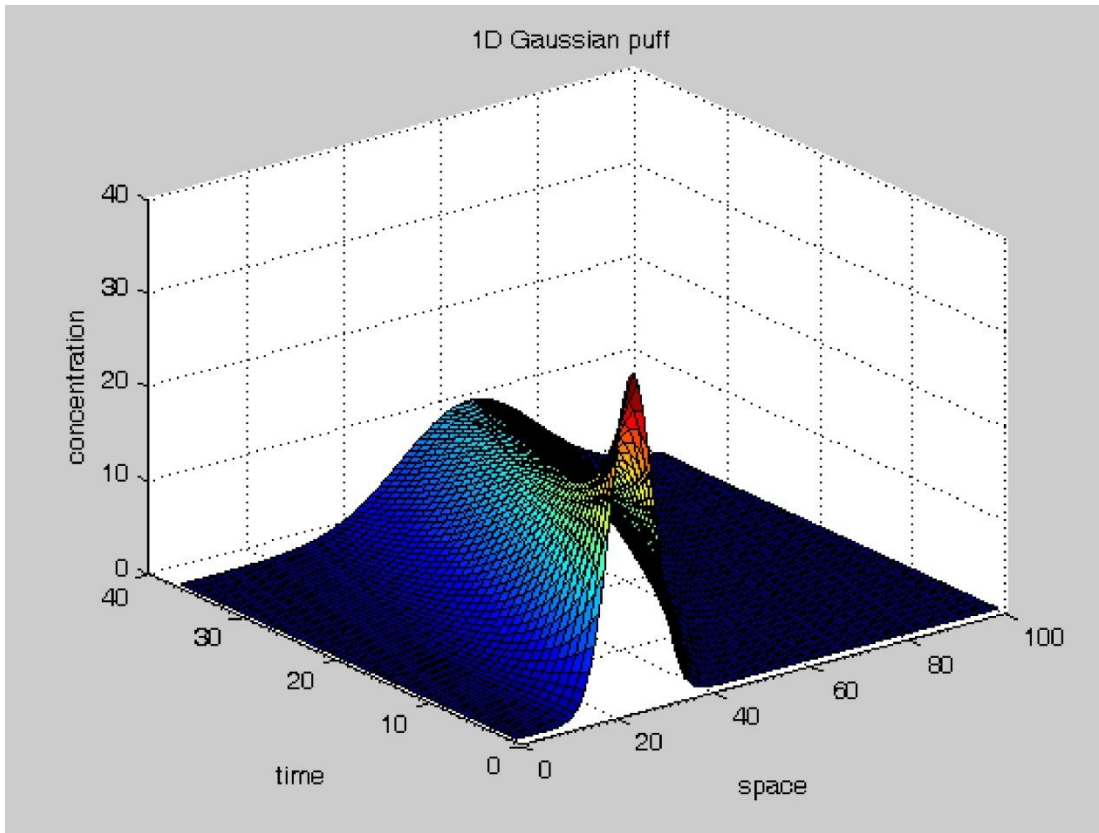
Μία άλλη έκφραση της παραπάνω σχέσης είναι (Rubin, 2001):

$$C(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi t} \sqrt{D}} \exp \left[-\frac{(x-ut)^2}{4tD} \right] \quad (4.7)$$

όπου M εκφράζει τη συνολική μάζα ανά μονάδα επιφάνειας που εισέρχεται στο υδάτινο σύστημα. Το παρακάτω πρόγραμμα Matlab επιλύει την παραπάνω αναλυτική εξίσωση.

```
% Analytical Solution to the Advection - Diffusion Equation
Dx = 0.000625; % diffusivity
v = 0.1; % velocity
M = 1; % mass
xmin = -0.05; xmax = 2.15; % x-axis interval
t = [1:4:20]; % time
%-----execution-----
x = linspace (xmin,xmax,100);
c = [ ];
for i = 1:size(t,2)
xx = x - v*t(i);
c = [c; (M/sqrt(4*pi*Dx*t(i)))*ones(1,size(x)).*
exp(-(xx.*xx)/(4*Dx*t(i)))]];
end
%-----output-----
plot (c'); hold on; xlabel ('space');
ylabel ('concentration'); title ('1D Gaussian puff');
```

Το αποτέλεσμα δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα όπου φαίνεται ότι το «κύμα» της ρύπανσης διαδίδεται στον χώρο και τον χρόνο λόγω συναγωγής, ενώ παράλληλα αυξάνει το εύρος διακύμανσης λόγω διάχυσης.



Εικόνα 4.1 Επίλυση της αναλυτικής εξίσωσης μεταφοράς-διάχυσης ρύπου.

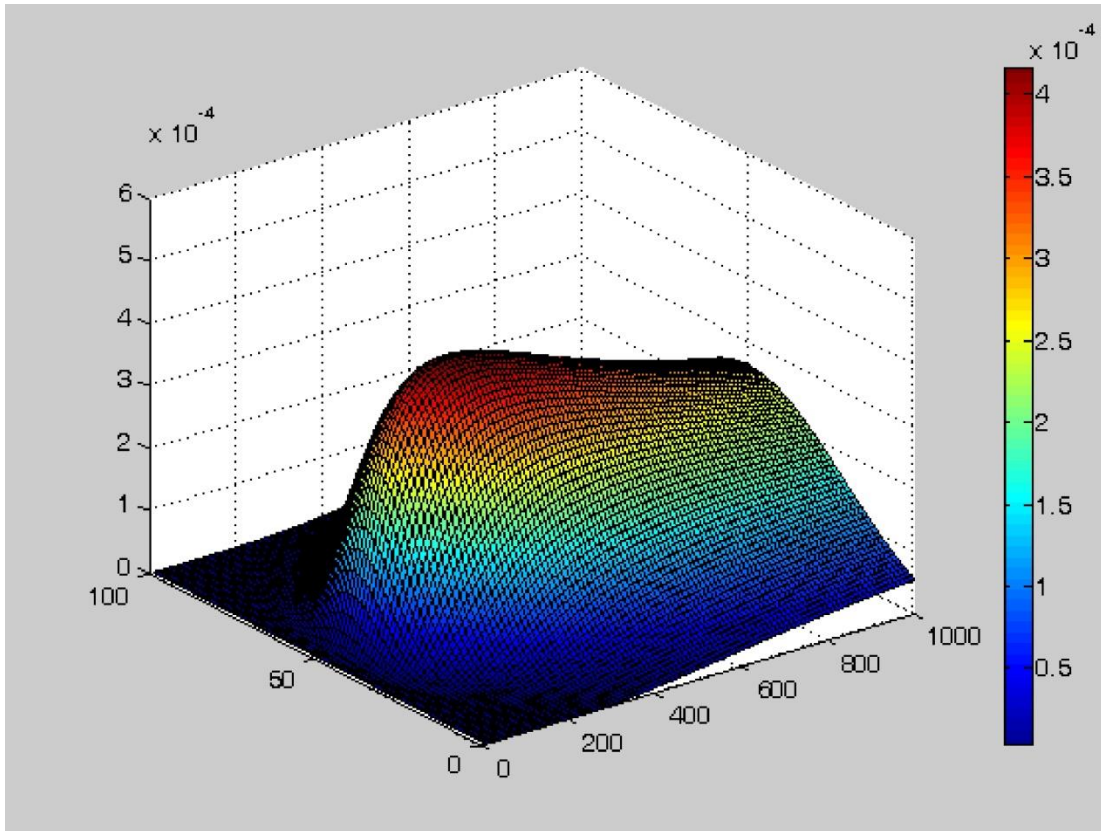
Αντίστοιχα, στην περίπτωση εκροής ενός ρύπου στο σημείο $x = 0$, αρχικής συγκέντρωσης C_0 σε κανάλι μονοδιάστατης ροής σταθερής ταχύτητας u , με συντελεστή διάχυσης D , ο οποίος συνεχίζει να εκλύεται καθ' όλη τη διάρκεια του προβλήματος, η αναλυτική λύση είναι:

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x-ut}{\sqrt{4Dt}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x+ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \exp \left(\frac{ux}{D} \right) \right] \quad (4.8)$$

Στην περίπτωση της συνδυασμένης μεταφοράς – διάχυσης ρύπου κατά τις δύο διευθύνσεις x, y του οριζοντίου επιπέδου η αναλυτική λύση γίνεται:

$$C(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi t} \sqrt{D_x D_y}} \exp \left[\frac{1}{-4t} \left(\frac{(x-ut)^2}{D_x} + \frac{(y-vt)^2}{D_y} \right) \right] \quad (4.9)$$

όπου u, v οι ταχύτητες ροής κατά τις δύο διευθύνσεις αντίστοιχα.



Εικόνα 4.2 Επίλυση της αναλυτικής εξίσωσης μεταφοράς-διάχυσης ρύπου σε δύο διευθύνσεις.

4.2. Αριθμητικές Λύσεις – Παρουσίαση σχημάτων πεπερασμένων διαφορών

Όπως φαίνεται από την εξίσωση της τυρβώδους μεταφερόμενης διάχυσης συντηρητικού ή όχι ρύπου, το μαθηματικό ομοίωμα συνοψίζεται στη λύση μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους μικτού (υπερβολικού και παραβολικού) τύπου. Η μεταφορά της ρύπανσης συνιστά διάδοση κύματος με ταχύτητα διάδοσης (u, v) ενώ η διάχυση γίνεται με ρυθμό ανάλογο των D_x, D_y . Στο παρελθόν έχουν δοκιμαστεί διάφορα σχήματα πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση του μαθηματικού ομοιώματος μεταφερόμενης διάχυσης. Η αναλογία με την οποία η μεταφορά και η διάχυση μπαίνουν στην τελική εξίσωση της ρύπανσης περιγράφεται ποσοτικά από τον αριθμό Peclet (Thomann & Mueller, 1987). Ο αριθμός Peclet είναι ένα αδιάστατο μονώνυμο που διαμορφώνεται από ένα χαρακτηριστικό μέγεθος ταχύτητας U (m/sec), ένα χαρακτηριστικό μήκος L (m) και μία χαρακτηριστική τιμή του τυρβώδους συντελεστή ανάμιξης D (m^2/sec) ως εξής:

$$Pe = \frac{UL}{D} \quad (4.10)$$

Στην τρισδιάστατη εξίσωση μεταφοράς – διάχυσης ο αριθμός Pe γίνεται:

$$Pe = \frac{(UC + VC + WC)}{\left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} + K_y \frac{\partial C}{\partial y} + K_z \frac{\partial C}{\partial z}\right)} \quad (4.11)$$

όπου K_x, K_y, K_z οι συντελεστές τυρβώδους διάχυσης.

Ανάλογα με τις τιμές του αριθμού Peclet, άλλοτε υπερέχει το υπερβολικό μέρος και άλλοτε το παραβολικό. Τιμές $O[Pe] > 1$ δείχνουν ότι η μεταφορά του ρυπαντή (advection) υπερισχύει της διάχυσης (diffusion). Κάνοντας μία κριτική των δυνατοτήτων των αριθμητικών σχημάτων επίλυσης μπορούμε να πούμε ότι το κυριότερο πρόβλημα που εμφανίζεται είναι η ανισότροπη εισαγωγή στην αριθμητική λύση των αριθμητικών παραμορφωτικών σφαλμάτων με τη μορφή της αριθμητικής διάχυσης ή της διασποράς. Οι ρητές μορφές των σχημάτων διαφορών υπόκεινται σε περιορισμούς σε ό'τι αφορά τις μέγιστες τιμές των βημάτων Δx , Δt , ενώ τα πεπλεγμένα σχήματα είναι σταθερά για όλες τις τιμές Δt , Δx . Οι συνθήκες ευστάθειας για τη συνδυασμένη εξίσωση διάχυσης – συναγωγής δίνονται παρακάτω:

$$u_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad D_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} \quad (4.12)$$

Βέβαια, ουσιαστικά σφάλματα στην ακρίβεια της λύσης εμφανίζονται με την αύξηση των τιμών των μονώνυμων των παραπάνω ανισοτήτων, καθώς χάνεται πληροφορία με την υπέρμετρη αύξηση του βήματος χρόνου. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία σειρά από αριθμητικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών για την αριθμητική λύση του ομοιώματος μεταφερόμενης διάχυσης στην πιο απλή μονοδιάστατη μορφή του με σταθερή ταχύτητα u και σταθερό συντελεστή τυρβώδους διάχυσης D .

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4.13)$$

Για την αριθμητική προσέγγιση του παραβολικού μέρους του διαφορικού τελεστή εφαρμόζεται συνήθως ρητό ή πεπλεγμένο σχήμα διαφορών (όπως το Crank Nikolson).

4.2.1. Αριθμητικό Σχήμα FTCS

Το σχήμα FTCS αναπτύσσεται ως εξής:

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{Cr}{2}(C_{i+1}^n - C_{i-1}^n) + d(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \quad (4.14)$$

όπου

$$Cr = \frac{u \Delta t}{\Delta x}, \quad d = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \quad (4.15)$$

Παρακάτω θα εξετάσουμε τη συνέπεια και την ευστάθεια του σχήματος.

A. Συνέπεια Σχήματος

Γράφουμε τη μερική διαφορική εξίσωση αναπτύσσοντας και τους Όρους Ανώτερης Τάξης (OAT):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \Delta t - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \Delta t^2 - \dots - \frac{1}{6} u \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \Delta x^3 - \dots - \frac{1}{12} D \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \Delta x^4 - \dots \sum_{i=1}^n X_i Y_i \quad (4.16)$$

Προκύπτει ότι το σφάλμα αποκοπής είναι Πρώτης τάξης κατά τον χρόνο και Δευτέρας τάξης κατά τον χώρο, δηλαδή $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$.

B. Ευστάθεια Σχήματος

Η συνδυασμένη συνθήκη ευστάθειας είναι:

$$Cr \leq 2d \leq 1 \quad (4.17)$$

και το κριτήριο ευστάθειας Hirt:

$$Cr Pe \leq 2 \quad (4.18)$$

Η επίδραση του αριθμού Peclet στη λύση φαίνεται από:

$$\begin{aligned} C_i^{n+1} &= C_i^n - \frac{Cr}{2}(C_{i+1}^n - C_{i-1}^n) + d(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \Rightarrow \\ C_i^{n+1} &= \left(\frac{1}{2}Cr + d\right)C_{i-1}^n + (1 - 2d)C_i^n + \left(-\frac{1}{2}Cr + d\right)C_{i+1}^n \end{aligned} \quad (4.19)$$

Αλλά επειδή:

$$Cr = \frac{u \Delta t}{\Delta x} = \frac{u \Delta t \Delta x D}{\Delta x \Delta x D} = \frac{D \Delta t u \Delta x}{\Delta x^2 D} = d Pe \quad (4.20)$$

αντικαθιστώντας έχουμε,

$$C_i^{n+1} = \frac{1}{2}d(2 + Pe)C_{i-1}^n + (1 - 2d)C_i^n + \frac{1}{2}d(2 - Pe)C_{i+1}^n \quad (4.21)$$

Άρα, όταν $Pe > 2$, τότε η συγκέντρωση C_i^{n+1} αποκτά αρνητική τιμή, οπότε το κριτήριο ευστάθειας είναι η εξίσωση (4.18).

4.2.2. Αριθμητικό Σχήμα Upwind (Ανάντη Διαφορών)

Όταν στην εξίσωση (4.13) έχουμε $u > 0$, τότε:

$$C_i^{n+1} = C_i^n - Cr(C_i^n - C_{i-1}^n) + d(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \quad (4.22)$$

ενώ όταν $u < 0$, τότε γράφουμε:

$$C_i^{n+1} = C_i^n - Cr(C_{i+1}^n - C_i^n) + d(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \quad (4.23)$$

Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά των συγκεντρώσεων εναλλάσσει τη φορά της ανάλογα με τη φορά της ροής του μονοδιάστατου συστήματος.

A. Συνέπεια Σχήματος

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C}{\partial t^2} \Delta t - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \Delta t^2 - \dots - \frac{1}{6} u \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \Delta x^2 + \dots + \frac{1}{12} D \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \Delta x^3 - \dots \quad (4.24)$$

Άρα, το σφάλμα αποκοπής είναι πρώτης τάξης στον χώρο και τον χρόνο, δηλαδή $O(\Delta t) + O(\Delta x)$.

B. Ευστάθεια Σχήματος

Η συνθήκη ευστάθειας για αυτό το σχήμα είναι:

$$Cr^2 \leq (Cr + 2d) \leq 1 \quad (4.25)$$

Άρα, το σχήμα ανάντη διαφορών είναι συνεπές και ευσταθές υπό όρους.

Γ. Αριθμητική Διάχυση Σχήματος

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2} u \Delta x - \frac{1}{2} u^2 \Delta t \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \\ &+ \left(-\frac{1}{3} u^3 \Delta t^2 + u D \Delta t + \frac{1}{2} u^2 \Delta t \Delta x - \frac{1}{6} u \Delta x^2 \right) \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Ο όρος αριθμητικής διάχυσης } \left(\frac{1}{2} u \Delta x - \frac{1}{2} u^2 \Delta t \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{2} u \Delta x (1 - Cr) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

- Αν $Cr = 1$ τότε η αριθμητική διάχυση μηδενίζεται.
- Αν $Cr \leq 1$ τότε η αριθμητική διάχυση είναι μεγαλύτερη του μηδενός, οπότε η αριθμητική διάχυση προστίθεται στη φυσική διάχυση.

Άλλα αριθμητικά σχήματα για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς – διάχυσης είναι:

Σχήμα Lax-Wendroff ενός βήματος

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = -\frac{u}{2\Delta x} (c_{i+1}^n - c_{i-1}^n) + \frac{u^2 \Delta t}{\Delta x^2} (c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n)$$

Σχήμα Lax-Wendroff δύο βημάτων

$$\begin{aligned} c_i^n &= \frac{c_{i+1}^n + c_{i-1}^n}{2} - \frac{u \Delta t}{4\Delta x} (c_{i+1}^n - c_{i-1}^n) \\ c_i^{n+1} &= c_i^n - \frac{u \Delta t}{2\Delta x} (c_{i+1}^n - c_{i-1}^n) \rightarrow \\ c_i^{n+1} &= c_i^n - \frac{u \Delta t}{4\Delta x} (c_{i+2}^n - c_{i-2}^n) + \left(\frac{u \Delta t}{2\Delta x} \right)^2 \frac{1}{2} (c_{i+2}^n - 2c_i^n + c_{i-2}^n) \end{aligned}$$

Σχήμα κεντρικό (leap frog)

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{u}{2\Delta x}(c_{i+1}^n - c_{i-1}^n)$$

Πεπλεγμένο σχήμα

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = -\frac{u}{4\Delta x}(c_{i+1}^{n+1} + c_{i+1}^n - c_{i-1}^{n+1} - c_{i-1}^n)$$

Σχήμα Fromm

$$c_i^{n+1} = c_i^n - \frac{u\Delta t}{4\Delta x}(c_{i+1}^n - c_{i-1}^n + c_i^n - c_{i-2}^n) + \left(\frac{u\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 (c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n) + \frac{u^2\Delta t^2 - 2u\Delta t\Delta x}{4\Delta x^2}(c_{i-2}^n - 2c_{i-1}^n + c_i^n)$$

```
% Solution of the 1-D Advection-Diffusion Equation using Finite-
Difference Method
% developed by G. Sylaios

numx = 101; %number of grid points in x
numt = 2000; %number of time steps to be iterated over
dx = 1/(numx - 1); % calculate the space increment dx
dt = 0.00005; % determine the time increment dt

x = 0:dx:1; %vector of x values, to be used for plotting

C = zeros(numx,numt); %initialize everything to zero
D = 0.1; % define the diffusion coefficient
u = 0.8; % define velocity
Cr = u*dt/dx; % define the Courant number

%specify initial conditions
t(1) = 0; %t=0
C(1,1) = 0; %C=0 at x=0
C(1,numx) = 0; %C=0 at x=1
mu = 0.5; % mean initial pollutant concentration
sigma = 0.05; % standard deviation of initial pollutant concentration
for i=2:numx-1
    C(i,1) = exp(-(x(i)-mu)^2/(2*sigma^2)) / sqrt(2*pi*sigma^2);
end

%iterate difference equation - note that C(1,j) and C(numx,j) always re-
main 0
for j=1:numt
    t(j+1) = t(j) + dt; % moving in time through each time-step
    for i=2:numx-1
        C(i,j+1) = C(i,j) - Cr*(C(i,j)-C(i-1,j)) + (D*dt/dx^2)*(C(i+1,j)-
2*C(i,j)+C(i-1,j));
    end
end
```

```

figure(1);
hold on;
plot(x,C(:,1));
plot(x,C(:,11));
plot(x,C(:,101));
plot(x,C(:,1001));
plot(x,C(:,1999));
xlabel('x');
ylabel('c(x,t)');

%calculate the flux at x=0 and x=1
for j=1:numt+1
    flux0(j) = -(C(2,j) - C(1,j))/dx;
    flux1(j) = -(C(numx,j)-C(numx-1,j))/dx;
end

figure(2);
hold on;
plot(t,flux0,'b');
plot(t,flux1,'r');
xlabel('t');
ylabel('flux')
legend ('flux at point 0', 'flux at point 1');

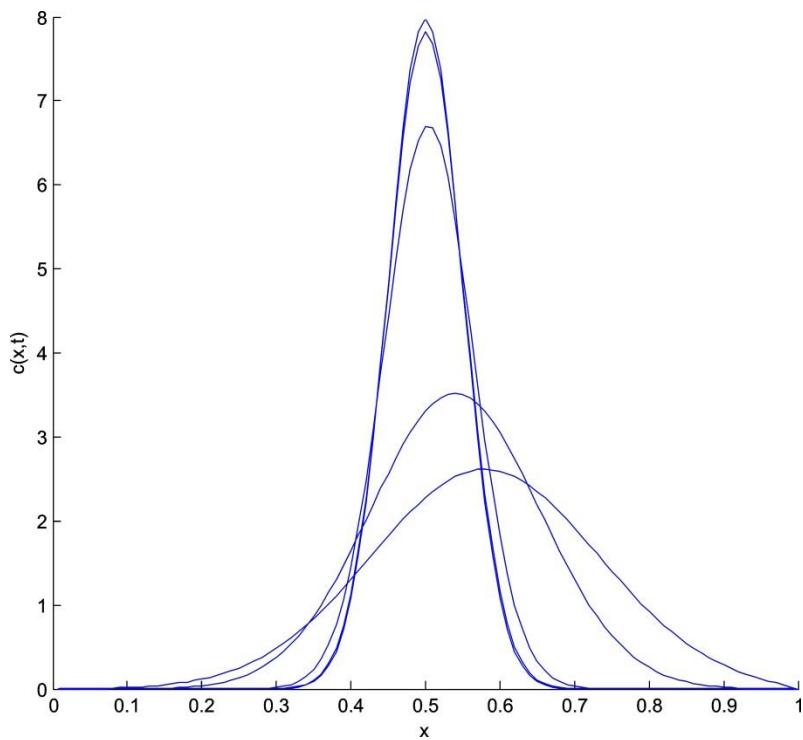
%calculate approximation to the integral of c from x=0 to x=1
for j=1:numt+1
    s(j) = sum(C(1:numx-1,j))*dx;
end

%calculate the amount of C that leaves through the boundaries due to flux
% s0 is the amount of C that leaves through x=0
% s1 is the amount of C that leaves through x=1
s0(1) = 0;
s1(1) = 0;
for j=1:numt
    s0(j+1) = s0(j) - flux0(j)*dt;
    s1(j+1) = s1(j) + flux1(j)*dt;
end

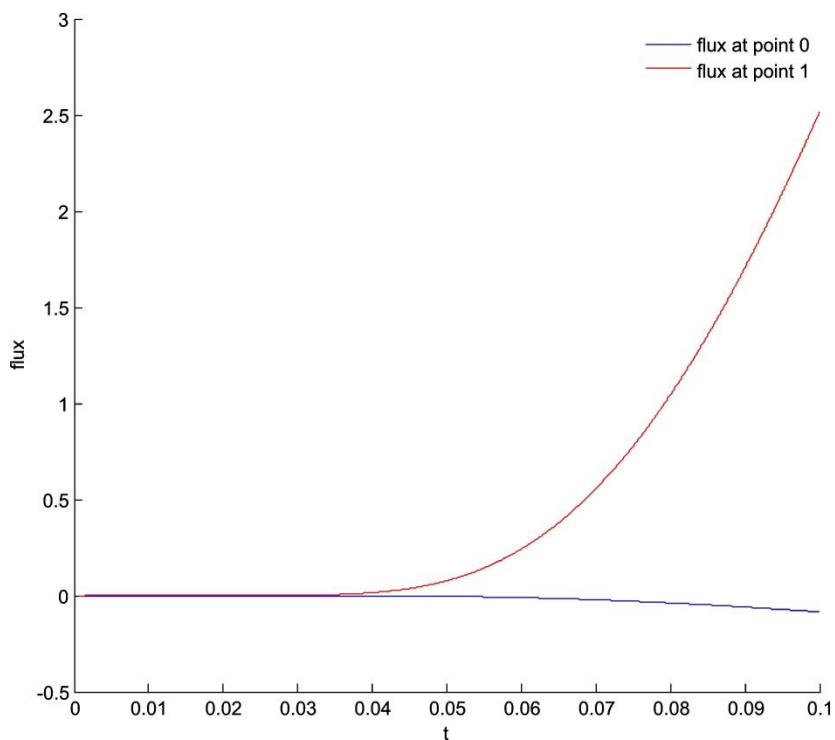
figure(3);
hold on;
plot(t,s,'g');
plot(t,s0+s1,'r');
plot(t,s+s0+s1,'b');

xlabel('t');
ylabel('c_{total}');

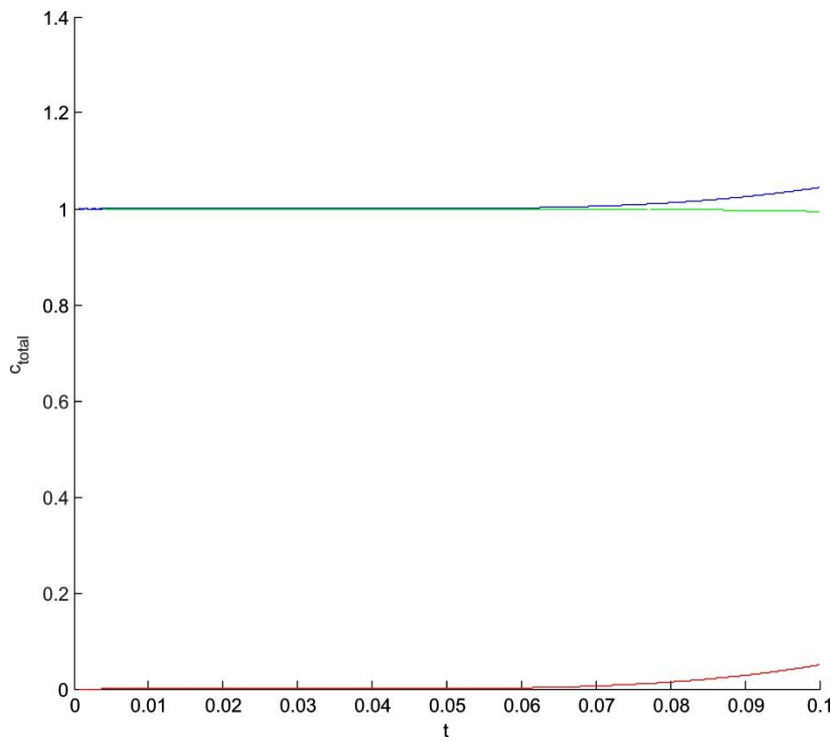
```



Εικόνα 4.3 Κατανομή συγκέντρωσης ρύπου σε διάφορες χρονικές στιγμές κατά μήκος του άξονα x κατά την προσομοίωση της συναγωγής - διάχυσης. Η κατανομή κατά το *step 1* εκφράζει την αρχική κατανομή της συγκέντρωσης του ρύπου.



Εικόνα 4.4 Χρονική μεταβολή της ροής μάζας του ρύπου διαμέσου του δεξιού ορίου ($x=1$, κόκκινη γραμμή) και του αριστερού ορίου ($x=0$, μπλε γραμμή) του υπολογιστικού πεδίου.



Εικόνα 4.5 Χρονική μεταβολή της συνολικής συγκέντρωσης ρύπου που αφήνει το υπολογιστικό πεδίο διαμέσου όλων των ανοικτών ορίων του.

Βιβλιογραφία

Chapra, S. C. (2008). *Surface water-quality modeling*: Waveland press.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2006). *Numerical methods for engineers*. Boston: McGraw-Hill Higher Education.

Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C., Imberger, J., & Brooks, N. H. (1979). *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press.

Rubin, H. (2001). *Environmental Fluid Mechanics*: CRC Press.

Thomann, R. V., & Mueller, J. A. (1987). *Principles of surface water quality modeling and control*.

Κεφάλαιο 5

Ειδικές Εξισώσεις Περιγραφής Ροής

Σύνοψη

Περιγράφεται η εξίσωση διατήρησης μάζας και δίνεται η κατάλληλη μορφή της εξίσωσης για προβλήματα επιφανειακών και υπόγειων ροών. Επίσης αναλύεται η μορφή της για συμπιεσμένα και ασυμπίεστα ρευστά, όπως και για υπόγειους υδροφορείς (υπό πίεση, φρεάτιους). Δίνονται παραδείγματα επίλυσης των εξισώσεων και των εφαρμογών τους σε περιβαλλοντικές ροές. Παρουσιάζεται η ολοκληρωμένη με το βάθος εξίσωση συνέχειας και η ολοκληρωμένη κατά το πλάτος εξίσωση συνέχειας και αναλύονται οι επιμέρους εφαρμογές τους. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις Navier-Stokes κατά τις τρεις διαστάσεις και αναλύονται οι φυσικές έννοιες και ο τρόπος παραγωγής του κάθε όρου τους. Αναλύεται η τάξη μεγέθους κάθε όρου σε περιβαλλοντικές ροές και παρουσιάζονται οι διαδικασίες παραμετροποίησης των όρων τύρβης (μοντέλα τύρβης). Δίνονται οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (εξίσωση Darcy και εξίσωση Forchheimer).

5.1. Βασικές αρχές για περιγραφή των περιβαλλοντικών ροών

Οι περιβαλλοντικές ροές λαμβάνουν χώρα σε ποταμούς, λίμνες, στην θάλασσα, αλλά και σε υπόγειους υδροφόρους. Για τις τρεις πρώτες περιπτώσεις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ροή λαμβάνει χώρα σε κενό χώρο, ενώ στερεά σώματα υπάρχουν στα όρια της ροής. Εδώ η κλίμακα προσέγγισης είναι αυτή του συνεχούς μέσου: το ελάχιστο μέγεθος ενός σωματιδίου ρευστού έχει μέγεθος ένα μικρό κλάσμα του χιλιοστού. Αντίθετα, στις περισσότερες περιπτώσεις υπόγειων ροών η ροή λαμβάνει χώρα σε ένα μεγάλο αριθμό από μικρά «κανάλια», τα όρια των οποίων καθορίζονται από τα τοιχώματα μικρών κόκκων άμμου ή από τα τοιχώματα ρωγμών. Σε αυτήν την περίπτωση δεν έχει νόημα να θεωρήσουμε τη ροή σε κάθε ένα από τα παραπάνω κανάλια χωριστά, αλλά παίρνουμε μέσο όρο σε έναν όγκο ελέγχου ο οποίος περιέχει τόσο το ρευστό όσα και το στερεό (κόκκους άμμου ή τμήματα βράχου). Για αυτήν λοιπόν την περίπτωση η κλίμακα παρατήρησης είναι αυτή του «ισοδύναμου συνεχούς» και το ελάχιστο μέγεθος παρατήρησης έχει μέγεθος μερικά χιλιοστά, μερικά εκατοστά ή ακόμα και μερικά μέτρα. Τόσο για την πρώτη περίπτωση (κατά την οποία η ροή λαμβάνει χώρα σε ποταμούς, λίμνες ή στη θάλασσα), όσο και στη δεύτερη περίπτωση (κατά την οποία η ροή λαμβάνει χώρα σε ένα «υπόγειο», πορώδες μέσο) οι εξισώσεις που χρησιμοποιούμε προκύπτουν και από το ισοζύγιο της μάζας και από το ισοζύγιο της ορμής. Όμως η μορφή των εξισώσεων είναι διαφορετική, αφού τα φαινόμενα είναι θεμελιωδώς διαφορετικά, όπως επίσης και η κλίμακα παρατήρησης. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις αυτές.

5.2. Οι εξισώσεις Navier-Stokes

5.2.1. Εξίσωση της συνέχειας στην κλίμακα του συνεχούς

Θα χρησιμοποιήσουμε μία περιγραφή ροής κατά Lagrange για να εξετάσουμε το ισοζύγιο της μάζας σε ένα στοιχειώδες σωματίδιο ρευστού. Υπενθυμίζουμε ότι η περιγραφή ροής κατά Lagrange αντιστοιχεί στην οπτική ενός παρατηρητή ο οποίος κινείται μαζί με τα σωματίδια του ρευστού, σε αντίθεση με την περιγραφή κατά Euler, η οποία αντιστοιχεί σε παρατηρήσεις σε σταθερά σημεία στον χώρο (π.χ. Κωτσοβίνος 2008). Περιγραφή Lagrange: Παρακολουθούμε την κίνηση ενός σωματιδίου και καταγράφουμε όλες τις αλλαγές που λαμβάνουν χώρα πάνω στο στοιχειώδη αυτό όγκο. Περιγραφή Euler: Καταλαμβάνουμε μία θέση στον χώρο (σημείο) και παρατηρούμε όλα τα σωματίδια που περνούν από αυτήν (Χωρική περιγραφή).

Η μάζα m η οποία περιέχεται στο στοιχειώδες αυτό σωματίδιο μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση:

$$m = \iiint_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) dV \quad (5.1)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, V ο όγκος του σωματιδίου, \vec{x} η θέση του σωματιδίου στον χώρο και το τριπλό ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα όγκου.

Σύμφωνα με την αρχή της διατήρησης της μάζας η μάζα του σωματιδίου αυτού δε θα αλλάζει στον χρόνο, κατά συνέπεια θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (5.2)$$

Στην παραπάνω σχέση ο όρος $\frac{D}{Dt}$ συμβολίζει την «ολική παράγωγο», η οποία αποδίδει το ρυθμό της αλλαγής μίας ποσότητας σε ένα στοιχειώδες σωματίδιο, όπως τη «μετράει» ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με το σωματίδιο αυτό.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το θεώρημα του Reynolds, (βλ. και Κωτσοβίνος (2008)) το οποίο γράφεται:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V_0} \Phi(\vec{x}, t) dV_0 = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \nabla \vec{U} \right\} dV \quad (5.3)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το σύμβολο \vec{U} αντιστοιχεί στην ταχύτητα του ρευστού και το σύμβολο ∇ είναι ο τελεστής Nabla. Η μεταβλητή Φ μπορεί να είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, ένα διάνυσμα ή ένας ταυνοστής.

Μπορούμε, επίσης, να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω κλασική σχέση, η οποία συνδέει την ολική με τη μερική παράγωγο:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \Phi \quad (5.4)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση που εκφράζει το θεώρημα του Reynolds και θέτοντας $\Phi = \rho$ προκύπτει ότι:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho(\vec{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{U} \nabla \rho + \rho \nabla \vec{U} \right\} dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{U} \right\} dV \quad (5.5\alpha)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho(\vec{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{U} \right\} dV \quad (5.5\beta)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση (5.2), δηλαδή ότι $\frac{Dm}{Dt} = 0$, προκύπτει:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (5.6)$$

Παίρνουμε υπόψη μας την παραπάνω εξίσωση (5.6) και το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (5.5β) προκύπτει ότι:

$$\iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{U} \right\} dV = 0 \quad (5.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση δεν ισχύει για ένα συγκεκριμένο μέγεθος του σωματιδίου, αλλά για ένα μεγάλο εύρος μεγεθών του. Η μοναδική περίπτωση, λοιπόν, να ισχύει αυτή η εξίσωση είναι η συνάρτηση στο εσωτερικό του ολοκληρώματος να είναι ίση με το μηδέν.

Κατά συνέπεια αποδείξαμε ότι ισχύει η παρακάτω κλασική εξίσωση (η οποία ονομάζεται για ιστορικούς λόγους και εξίσωση της συνέχειας):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{U}) = 0 \quad (5.8)$$

Την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να την εκφράσουμε χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις Einstein:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (5.9\alpha)$$

ή επίσης ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τον «κλασικό» αλγεβρικό τρόπο γραφής:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5.9\beta)$$

όπου u , v και w είναι οι συνιστώσες του πεδίου των ταχυτήτων στις διευθύνσεις x , y και z αντίστοιχα.

Για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής (κατά την οποία η πυκνότητα του ρευστού μπορεί να θεωρηθεί σταθερή) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση:

$$\nabla (\vec{U}) = 0 \quad (5.10)$$

η οποία μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας το συμβολικό τρόπο γραφής του Einstein με την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial (U_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (5.11\alpha)$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{\partial (u)}{\partial x} + \frac{\partial (v)}{\partial y} + \frac{\partial (w)}{\partial z} = 0 \quad (5.11\beta)$$

5.2.2. Οι εξισώσεις Navier-Stokes

Για να περιγράψουμε πλήρως το φαινόμενο της ροής πρέπει να λάβουμε επίσης υπόψη μας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (βλ. Κωτσοβίνος (2008)), σύμφωνα με τον οποίο:

Ρυθμός αλλαγής της ορμής σε ένα στοιχειώδες σωματίδιο ρευστού = δυνάμεις ασκούμενες στο σωματίδιο αυτό.

Παρακολουθούμε την κίνηση ενός στοιχειώδους όγκου ρευστού $V(t)$. Ο όγκος αυτός περικλείεται από μία νοερή επιφάνεια $S(t)$ η οποία, αν και παραμορφώνεται κατά τη ροή περικλείει, πάντα τα ίδια σωματίδια ρευστού.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\text{ορμή} = \text{μάζα} \times \text{ταχύτητα}$$

Συμβολίζοντας τη μάζα του σωματιδίου ρευστού με dm μπορούμε να την εκφράσουμε με τη σχέση:

$$dm = \rho dV$$

Η ορμή, λοιπόν του σωματιδίου μπορεί να εκφραστεί με το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\iiint_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{U}(\vec{x}, t) dV \quad (5.12)$$

Κατά συνέπεια, εάν θεωρήσουμε ότι οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στο σωματίδιο ρευστού που εξετάζουμε είναι τόσο δυνάμεις όγκου \vec{F}_V , όσο και επιφανειακές δυνάμεις \vec{F}_S , ο προαναφερθείς νόμος του Νεύτωνα μπορεί να εκφραστεί με την παρακάτω σχέση:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \vec{F}_V + \vec{F}_S \quad (5.13)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$\vec{F}_V = \iiint_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{f}(\vec{x}, t) dV \quad (5.14\alpha)$$

και

$$\vec{F}_S = \iiint_{V(t)} \text{div} \hat{\sigma} dV \quad (5.14\beta)$$

Κατά συνέπεια ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \iiint_{V(t)} (\rho \vec{f} + \text{div} \hat{\sigma}) dV \quad (5.15)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το ρυθμό αλλαγής της ορμής με έναν πιο εύχρηστο τρόπο, εάν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds που παρουσιάσαμε παραπάνω θέτοντας $\Phi = \rho \vec{U}$.

Προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \iiint_{V(t)} \left[\frac{D\rho \vec{U}}{Dt} + \rho \vec{U} \operatorname{div} \vec{U} \right] dV \quad (5.16\alpha)$$

η οποία μπορεί επίσης να γραφεί ως:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \iiint_{V(t)} \left[\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{U} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} \right) \right] dV \quad (5.16\beta)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση της συνέχειας, την οποία αποδείξαμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού (βλ. εξίσωση 5.8), προκύπτει ότι η εξίσωση (5.16β) μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \iiint_{V(t)} \left[\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} \right] dV \quad (5.17)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την προηγούμενη σχέση μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (5.15) (η οποία αντιστοιχεί στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα) με την παρακάτω μορφή:

$$\iiint_{V(t)} \left[\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} \right] dV = \iiint_{V(t)} (\rho \vec{f} + \operatorname{div} \hat{\sigma}) dV \quad (5.17\alpha)$$

ή ισοδύναμα:

$$\iiint_{V(t)} \left(\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} - \rho \vec{f} - \operatorname{div} \hat{\sigma} \right) dV = 0 \quad (5.17\beta)$$

Στην παραπάνω εξίσωση η ολοκλήρωση γίνεται σε έναν αυθαίρετο όγκο V . Κατά συνέπεια για να είναι το ολοκλήρωμα ίσο με το μηδέν, πρέπει η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα να είναι ίση με το μηδέν.

Προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \vec{f} + \operatorname{div} \hat{\sigma} \quad (5.18)$$

Η εξίσωση αυτή (εξίσωση δυναμικής ισορροπίας), αν πάρουμε υπόψη μας την σχέση μεταξύ ολικής και μερικής παραγώγου, μπορεί να γραφεί (βλ. και Κωτσοβίνος (2008))

$$\left(\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)$$

και με την παρακάτω μορφή:

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.19)$$

Η παραπάνω διανυσματική εξίσωση (η οποία αντιστοιχεί σε τρεις αλγεβρικές) είναι από τις θεμελιώδεις σχέσεις της Ρευστομηχανικής. Ισχύει για κάθε ρευστό, συμπιεστό ή ασυμπίεστο, νευτώνειο ή μη νευτώνειο, για στρωτή ή τυρβώδη ροή. Δεν αποτελεί όμως ένα κλειστό, «επιλύσιμο» σύστημα εξισώσεων, παρ' όλο που μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας και την εξίσωση της συνέχειας, επειδή έχουμε στην διάθεση μας τέσσερις εξισώσεις και 10 αγνώστους: τρεις συνιστώσες, έξι συνιστώσες του ταυνοστή τάσεων, και την πίεση (ή την πυκνότητα).

Για νευτώνειο ρευστό και ασυμπίεστη ροή ισχύει η σχέση:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 U_i \quad (5.20)$$

όπου P είναι η πίεση, μ είναι το δυναμικό ιξώδες και ∇^2 είναι ένας τελεστής, ο οποίος όταν εφαρμόζεται επί ενός διανύσματος (π.χ. του πεδίου ταχυτήτων) ονομάζεται τελεστής Stokes και είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, το οποίο εκφράζεται με την σχέση:

$$\nabla^2 U_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} \quad (5.21)$$

Από τις παραπάνω (εξισώσεις 5.19 και 5.20) προκύπτει ότι στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής η εξίσωση Navier-Stokes (η οποία είναι η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας για νευτώνεια ρευστά μπορεί να γραφεί σε συμπαγή μορφή (χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις Einstein):

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} \right) \quad (5.22)$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει τη δυναμική ισορροπία των εξής μεταβαλλόμενων δυνάμεων:

- των δυνάμεων αδρανείας,
- των εξωτερικών δυνάμεων (συνήθως δυνάμεων βαρύτητας),
- των δυνάμεων που προκύπτουν από τις διαφορές πιέσεως,
- των δυνάμεων του ιξώδους.

Οι δυνάμεις αδρανείας αποτελούνται από δύο όρους: τον όρο $\rho \partial U_i / \partial t$, ο οποίος αντιστοιχεί στην τοπική επιτάχυνση, και τον όρο $\rho U_j \partial U_i / \partial x_j$, ο οποίος αντιστοιχεί στη μεταθετική επιτάχυνση. Ο όρος αυτός, ο οποίος αντιστοιχεί στη μεταθετική επιτάχυνση, παίζει σημαντικό ρόλο στην ισορροπία των δυνάμεων για προβλήματα με μεγάλη ταχύτητας ροής τα οποία παρουσιάζονται συχνά στη φύση και κατά συνέπεια στα περιβαλλοντικά προβλήματα. Οι εξωτερικές δυνάμεις (οι οποίες συμβολίζονται στην εξίσωση 5.22 με τον όρο ρf_i) είναι σημαντικές για ροές με ελεύθερη επιφάνεια, αλλά και για πεδία ροής στα οποία συνυπάρχουν ρευστά με διαφορετικές πυκνότητες (π.χ. γλυκό και θερμό νερό, νερό και παράγωγα πετρελαίου κ.λπ.).

Οι δυνάμεις οι οποίες προκύπτουν από τις διαφορές πίεσης είναι σημαντικές για μεγάλο αριθμό ροών, αλλά όχι για όλους τους τύπους ροών. Τέλος, οι δυνάμεις ιξώδους (οι οποίες αντιστοιχούν στον όρο $\mu \nabla^2 U_i$) στην περίπτωση τυρβωδών ροών (δηλαδή ροών με μεγάλες ταχύτητες) είναι σημαντικές κυρίως κοντά στα στερεά όρια. Αντίθετα στην περίπτωση ροών σε υπόγειους γεωλογικούς σχηματισμούς (για τις οποίες θα μιλήσουμε στο τέλος του κεφαλαίου αυτού) οι δυνάμεις του ιξώδους επηρεάζουν σημαντικά την κίνηση των ρευστών.

Στο σύστημα των εξισώσεων (5.21) και (5.22) θεωρούμε ως άγνωστους κατά κανόνα το πεδίο των ταχυτήτων (το οποίο έχει στην γενική περίπτωση τρεις συνιστώσες τις u , v και w) και την πίεση P .

Έχει ενδιαφέρον να παρουσιάσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις Navier-Stokes σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας.

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.23)$$

Εξισώσεις Navier-Stokes (N.S.)

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (5.24\alpha)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (5.24\beta)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \quad (5.24\gamma)$$

5.2.3. Μοντέλα για τυρβώδεις ροές

Για τις εξισώσεις Navier-Stokes υπάρχουν λίγες αναλυτικές λύσεις που αντιστοιχούν σε σχετικά απλά προβλήματα. Εκτός αυτού, η επίλυση των εξισώσεων N.S. σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας (διαδικασία που αποκαλείται «απευθείας επίλυση») παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία στην περίπτωση τυρβώδους ροής. Άλλωστε, πρόκειται για τον τύπο της ροής που αντιστοιχεί στα περισσότερα προβλήματα τα οποία εμφανίζονται σε πρακτικές εφαρμογές.

Θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια τα βασικά χαρακτηριστικά της στρατηγικής για την προσομοίωση τυρβωδών ροών, για προβλήματα που παρουσιάζονται συχνά στην πράξη (βλ. επίσης τα κλασικά βιβλία των Rodi (1980) και Rodi (1993)).

Παρά τις προόδους που έχουν παρουσιαστεί πρόσφατα όσον αφορά την άμεση επίλυση των εξισώσεων N.S., η πιο διαδεδομένη προσέγγιση είναι να μην επιχειρείται η προαναφερθείσα «απευθείας επίλυση», αλλά να λαμβάνονται μέσοι όροι των χαρακτηριστικών μεγεθών ως προς τον χρόνο, πριν επιχειρηθεί η απευθείας επίλυση.

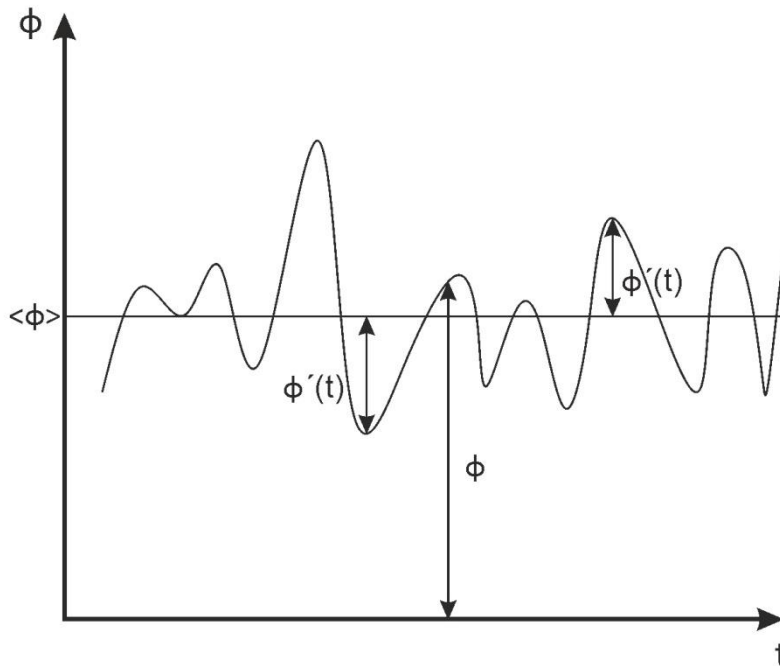
Δηλαδή, για κάθε μέγεθος ϕ δε θεωρούμε τις «στιγμιαίες» τιμές (όπου η διακύμανση ως προς τον χρόνο των στιγμιαίων τιμών στην περίπτωση τυρβώδους ροής είναι εξαιρετικά έντονη), αλλά τις μέσες τιμές τους ως προς τον χρόνο, οι οποίες ορίζονται από την παρακάτω σχέση:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi dt \quad (5.25)$$

Στην παραπάνω σχέση η μεταβλητή ϕ μπορεί να αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε μεταβλητή του φαινομένου που εξετάζουμε (συνιστώσα του πεδίου των ταχυτήτων, πίεση, συγκέντρωση μία συγκεκριμένης ουσίας, θερμοκρασία κ.λπ.). Η μεταβλητή T συμβολίζει τον χρόνο ολοκλήρωσης, ο οποίος είναι αρκετά μεγάλος, ώστε ο μέσος όρος να είναι ανεξάρτητός του.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς και εισάγοντας τη μεταβλητή ϕ' , η οποία δίνει (σε κάθε στιγμή) την απόκλιση της στιγμιαίας τιμής του μεγέθους Φ από το μέσο όρο $\langle \Phi \rangle$ (βλ. και Εικόνα 5.1), προκύπτει η σχέση:

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \phi' \quad (5.26)$$



Εικόνα 5.1 Μεταβολές του μεγέθους για την περίπτωση τυρβώδους ροής, του ορισμού του μεγέθους του μέσου όρου και του μεγέθους (διαταραχών).

Βάζοντας στην εξίσωση (5.25) $\Phi = \langle \Phi \rangle + \phi'$ προκύπτει ότι:

$$\langle \Phi \rangle = \langle \langle \Phi \rangle + \phi' \rangle \quad (5.27\alpha)$$

Εφαρμόζοντας το μέσο όρο ως προς τον χρόνο, όπως αυτό ορίζεται από την εξίσωση (5.25), στην εξίσωση (5.26) και παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση (5.27α) προκύπτει ότι:

$$\langle \phi' \rangle = 0 \quad (5.27\beta)$$

Οι εξισώσεις για τη μακροσκοπικά μόνιμη ροή, αν λάβουμε υπόψη μας τις εξισώσεις (5.25), (5.26) και (5.27β), μπορούν με τη χρήση των συμβάσεων συμβολικής γραφής να γραφούν ως εξής:

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (5.28)$$

$$\rho \left(\langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle \right) = \rho \langle f_i \rangle - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \langle U_i \rangle \quad (5.29)$$

Λόγω της εξίσωσης της συνέχειας, όπως αυτή παρουσιάζεται παραπάνω, και επειδή ισχύει η σχέση:

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0$$

η εξίσωση (5.29) μπορεί και να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$\langle \Phi \rangle = \langle \langle \Phi \rangle \rangle \quad (5.27\alpha)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \langle U_i U_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j} \right) = \rho \langle f_i \rangle - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \langle U_i \rangle \quad (5.30)$$

Η παραπάνω διανυσματική εξίσωση (η οποία αντιστοιχεί σε τρεις αλγεβρικές) σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας δεν αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, επειδή εκτός από τις τρεις συνιστώσες των μέσων τιμών του πεδίου ταχυτήτων $\langle U_i \rangle$ και τις μέσες τιμές του πεδίου της πίεσης $\langle P \rangle$ είναι επίσης άγνωστες οι τιμές $\langle u'_i u'_j \rangle$, οι οποίες αντιστοιχούν σε έξι διαφορετικές μεταβλητές, έχουμε δηλαδή ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με δέκα αγνώστους. Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι να βρούμε έναν τρόπο να εκφράσουμε τις τιμές του ταυστή $\langle u'_i u'_j \rangle$ συναρτήσει των όρων $\langle U_i \rangle$ και ενδεχόμενα $\langle P \rangle$. Οι άγνωστες αυτές μεταβλητές όταν παρουσιάζονται στη μορφή $\tau_{ij} = \rho \langle u'_i u'_j \rangle$ ονομάζονται τυρβώδεις τάσεις. Για να μπορέσουμε να τις προσεγγίσουμε υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις:

1. να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του τυρβώδους ιξώδους,
2. να επιλυθούν διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τη μεταβολή των τυρβωδών τάσεων.

Κατά την πρώτη περίπτωση (της προσέγγισης του τυρβώδους ιξώδους) υιοθετείται η παρακάτω προσέγγιση:

$$-\bar{\tau}_{ij} = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle = \mu_i \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (5.31\alpha)$$

Στην παραπάνω εξίσωση μ_i είναι ο συντελεστής του τυρβώδους ιξώδους, k η κινητική ενέργεια της τυρβώδους ροής ενώ δ_{ij} είναι το «δέλτα του Kronecker».

Το δέλτα του Kronecker ορίζεται από τις σχέσεις: $\delta_{ij} = 1$ για την περίπτωση $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ για την περίπτωση $i \neq j$.

Η κινητική ενέργεια της τυρβώδους ροής περιγράφεται από τη σχέση:

$$k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle (u'_1)^2 \rangle + \langle (u'_2)^2 \rangle + \langle (u'_3)^2 \rangle \right) \quad (5.31\beta)$$

Είναι η ενέργεια η οποία «αποσύρεται» από την κυρίως ροή και θέτει τους στροβίλους σε κίνηση.

Ο συντελεστής του τυρβώδους ιξώδους μ_t εξαρτάται από τις ιδιότητες του πεδίου ροής και όχι από τις ιδιότητες του ρευστού. Σε ορισμένα προβλήματα η τιμή του μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, στα περισσότερα όμως πρέπει να ληφθεί υπόψη η μεταβολή του στον χώρο, ενδεχομένως και στον χρόνο.

Μία από τις πιο δημοφιλείς προσεγγίσεις για τον προσδιορισμό του μ_t είναι η προσέγγιση του μοντέλου k - ε που χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$\mu_t = c_\mu \rho k^2 / \varepsilon \quad (5.32)$$

Οι μεταβλητές ρ και k έχουν ήδη οριστεί, c_μ είναι μία κατάλληλη παράμετρος, ενώ ε είναι ο ρυθμός «καταστροφής της κινητικής ενέργειας» της τύρβης. Με τον όρο καταστροφή εννοούμε τη μετατροπή της σε θερμότητα η οποία είναι μία εκφυλισμένη μορφή ενέργειας. Στην τυρβώδη ροή σε πρώτη φάση δημιουργούνται μεγάλοι στροβίλοι οι οποίοι μετατρέπονται σε ολοένα μικρότερους. Όταν αυτή η διεργασία οδηγήσει στη δημιουργία στροβίλων του ελάχιστου μεγέθους, η ενέργεια τους μεταβάλλεται σε θερμότητα. Επειδή τόσο η κινητική ενέργεια της τυρβώδους ροής k , όσο και ο ρυθμός «καταστροφής της κινητικής ενέργειας» της τύρβης ε μεταβάλλονται στον χώρο, πρέπει να περιγραφούν με τη βοήθεια διαφορικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τις εξισώσεις Navier-Stokes και από την εξίσωση της συνέχειας.

Στην περίπτωση μεγάλων αριθμών Reynolds η εξίσωση για την κινητική ενέργεια της τυρβώδους ροής είναι η παρακάτω:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = - \frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{u'_j u'_j}{2} \right) \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{p'}{\rho} \right) \rangle}{\partial x_i} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \left\langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle \quad (5.33\alpha)$$

Η φυσική σημασία των όρων είναι η εξής:

- $\langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i}$: ο όρος αυτός αντιστοιχεί στο φαινόμενο της συναγωγής (μεταφοράς) του k .

Μπορούμε, δηλαδή, να υποθέσουμε ότι η κινητική ενέργεια της τύρβης «συμπαράσύρεται» και μεταφέρεται από το κυρίως πεδίο των ταχυτήτων.

- $\frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{u'_j u'_j}{2} \right) \rangle}{\partial x_i}$: Ο όρος αυτός προσομοιώνει τη διάχυση της ποσότητας k λόγω των διαταραχών (αυξομειώσεων) του πεδίου ταχυτήτων.

- $\frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{p'}{\rho} \right) \rangle}{\partial x_i}$: Ο όρος αυτός προσομοιώνει τη διάχυση της ποσότητας k λόγω των διαταραχών (αυξομειώσεων) του πεδίου της πίεσης. Στην διεθνή βιβλιογραφία ο όρος αυτός ονομάζεται και «pressure strain».
- $\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j}$: Ο όρος αυτός αντιστοιχεί στην παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, η οποία «αποσύρεται από την κυρίως ροή». Θα συμβολίσουμε την παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας με το σύμβολο \bar{P}_{prod} .
- $\nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle \langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \rangle$: Ο όρος αυτός αντιστοιχεί στην καταστροφή της κινητικής ενέργειας, η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα μέσω των δυνάμεων του ιξώδους. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\varepsilon = \nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle \langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \rangle$.

Στην περίπτωση της μακροσκοπικά μόνιμης ροής στην οποία θα επικεντρωθούμε η εξίσωση (5.33α) γράφεται:

$$\langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = - \frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{u'_j u'_j}{2} \right) \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{p'}{\rho} \right) \rangle}{\partial x_i} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle \langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \rangle \quad (5.33\beta)$$

Εκτός από τον πρώτο και τελευταίο από τους παραπάνω όρους, οι υπόλοιποι δεν είναι εκφρασμένες συναρτήσεις των μεγεθών που θεωρούνται γνωστά: των μέσων τιμών του πεδίου ταχυτήτων $\langle U_i \rangle$, των μέσων τιμών του πεδίου πίεσης $\langle P \rangle$, της κινητικής ενέργειας της τυρβώδους ροής k και του ρυθμού της καταστροφής της κινητικής ενέργειας ε . Για να προκύψει ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, πρέπει για τους όρους αυτούς να γίνουν υποθέσεις, οι οποίες ισχύουν σε σημαντικό αριθμό ροών, αλλά δεν ισχύουν σε όλες τις περιπτώσεις. Με τη διαδικασία της λήψης των μέσων όρων ως προς τον χρόνο, την οποία αναφέραμε παραπάνω, χάνονται ορισμένες πληροφορίες για τη ροή. Η έλλειψη αυτών των πληροφοριών πρέπει να καλυφθεί με ορισμένες υποθέσεις.

Για πολλά πρακτικά προβλήματα στην πράξη χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι το φαινόμενο της διάχυσης της ποσότητας μπορεί να περιγραφεί από μία διαδικασία τύπου Fick και χρησιμοποιείται η παρακάτω προσέγγιση:

$$\langle u'_i \left(\frac{u'_j u'_j}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) \rangle = - \frac{1}{\rho} \frac{\mu_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (5.34)$$

Στην παραπάνω εξίσωση μ_i είναι ο συντελεστής του τυρβώδους ιξώδους (ο οποίος μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της εξίσωσης (5.32), στην οποία δεν εμφανίζονται άλλοι άγνωστοι εκτός από τα μεγέθη k και ε), ενώ η παράμετρος σ_k προσδιορίζεται από πειραματικά δεδομένα.

Όσον αφορά τον όρο παραγωγής της ποσότητας k , δηλαδή τον όρο

$$\bar{P}_{prod} = - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \quad (5.35)$$

στο μοντέλο k-ε (αλλά και σε αντίστοιχες προσεγγίσεις), για τον όρο ο οποίος αντιστοιχεί στις «τυρβώδεις τάσεις» (δηλαδή τον όρο $\langle u'_i u'_j \rangle$) υιοθετείται η προσέγγιση του τυρβώδους ιξώδους, την οποία αναφέραμε παραπάνω (βλ. εξίσωση 5.32). Συνολικά για τη μεταφορά της κινητικής ενέργειας της τυρβώδους ροής στα μοντέλα αυτά χρησιμοποιείται η παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \bar{P}_{prod} - \varepsilon \quad (5.36\alpha)$$

η οποία μπορεί να γραφεί, λαμβάνοντας υπόψη μας τις εξισώσεις (5.30) και (5.35), και ως εξής:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (5.36\beta)$$

Προφανώς για «μακροσκοπικά μόνιμες» ροές, περίπτωση στην οποία εστιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, ο πρώτος όρος της αριστερής πλευράς της παραπάνω εξίσωσης είναι ίσος με το μηδέν. Προκύπτει ότι:

$$\langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \bar{P}_{prod} - \varepsilon \quad (5.36\gamma)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η παραπάνω εξίσωση έχει τη δομή της εξίσωσης της μεταφοράς- διάχυσης – πηγής /καταβόθρας.

Με μία αντίστοιχη διαδικασία, μπορούμε να διατυπώσουμε την «ακριβή διαδικασία» για τη μεταφορά της ποσότητας ε:

Μπορούν να γίνουν αντίστοιχες υποθέσεις, όπως προηγουμένως (δηλαδή για την εξίσωση μεταφοράς της ποσότητας k). Πιο συγκεκριμένα:

1. Η παραγωγή της ποσότητας ε από την κυρίως ροή είναι αμελητέα και οι αντίστοιχοι όροι πρέπει να τεθούν ίσοι με το μηδέν. Η υπόθεση αυτή ισχύει για την περίπτωση των μεγάλων αριθμών Reynolds.
2. Η παραγωγή της ποσότητας ε από την αλλαγή σχήματος των στροβίλων μείον την καταστροφή της ίδιας ποσότητας μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση:

$$c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \bar{P}_{prod} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

όπου ο όρος \bar{P}_{prod} έχει οριστεί από την εξίσωση (5.35), ενώ οι παράμετροι $c_{1\varepsilon}$ και $c_{2\varepsilon}$ προσδιορίζονται με τη βοήθεια πειραματικών δεδομένων.

3. Οι όροι οι οποίοι περιγράφουν τη διάχυση της ποσότητας ε μπορούν να περιγραφούν από τη σχέση:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right)$$

Προκύπτει τελικά η παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση για τη μεταφορά της ποσότητας ε, για την περίπτωση μακροσκοπικά μόνιμης ροής:

$$\rho U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \bar{P}_{prod} - c_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

ή αντίστοιχα:

$$\rho U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{1\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon}{k} \left\{ \mu_i \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right\} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει επίσης τη δομή της εξίσωσης μεταφοράς/ διάχυσης / πηγής/ καταβόθρας: ο όρος αριστερά είναι όρος μεταφοράς, ο πρώτος όρος στην δεξιά πλευρά είναι όρος διάχυσης, ο δεύτερος όρος στη δεξιά πλευρά περιγράφει την παραγωγή της ποσότητας ε (άρα είναι όρος πηγής) ενώ ο τελευταίος όρος περιγράφει την καταστροφή της ποσότητας αυτής (άρα είναι όρος πηγής).

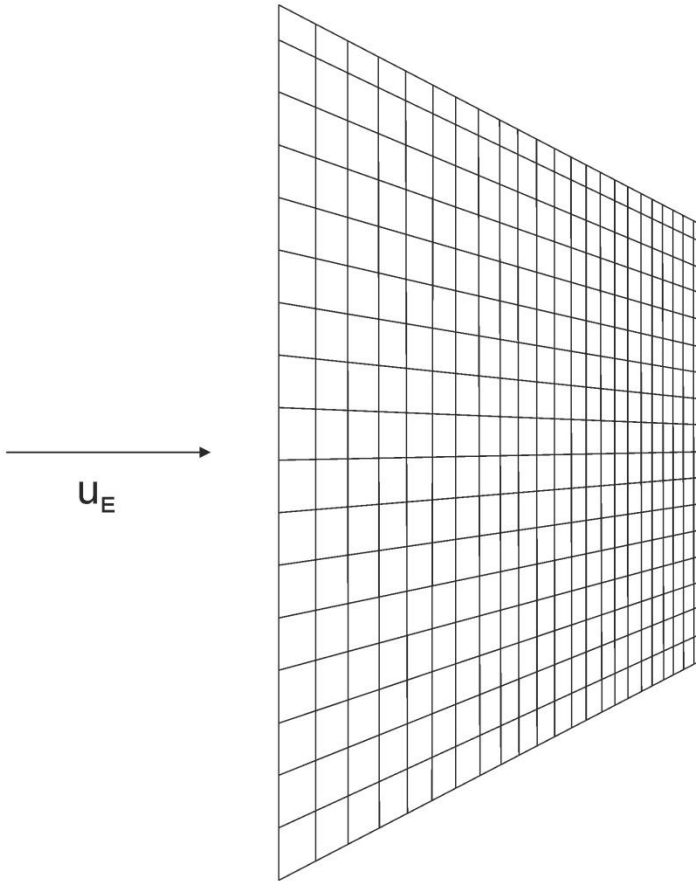
Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (5.28), (5.30), (5.36) και (5.37), μαζί με τις βοηθητικές αλγεβρικές εξισώσεις (5.30) και (5.35), αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων. Για την περίπτωση τρισδιάστατης ροής έχουμε έξι εξισώσεις και έξι αγνώστους. Οι ποσότητες $c_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, c_{1\varepsilon}, c_{2\varepsilon}$ είναι παράμετροι οι οποίες έχουν προσδιοριστεί από πειραματικά δεδομένα. Για μεγάλο αριθμό ροών οι ποσότητες αυτές μπορούν να θεωρηθούν σταθερές και να χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω τιμές.

c_μ	$c_{1\varepsilon}$	$c_{2\varepsilon}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Πίνακας 5.1 Τιμές των παραμέτρων του μοντέλου k - ε για την οποία αυτές μπορούν να θεωρηθούν σταθερές.

Ένα παράδειγμα προσδιορισμού των παραπάνω ποσοτήτων είναι η περίπτωση προσδιορισμού του συντελεστή $c_{2\varepsilon}$. Για το σκοπό αυτό διεξήχθη το εξής πείραμα, το οποίο παρουσιάζεται στην Εικόνα 5.2: ανάντη ενός ορθογώνιου πλέγματος δημιουργήθηκε ένα πεδίο ροής το οποίο ήταν μονοδιάστατο και ομοιόμορφο με μέση ταχύτητα ίση με την ποσότητα:

$$\langle U_1 \rangle = \langle U_x \rangle = U_E \quad (5.38)$$



Εικόνα 5.2 Πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό της παραμέτρου του μοντέλου k - ε

ενώ προφανώς οι άλλες δύο συνιστώσες του μακροσκοπικού πεδίου ταχυτήτων ήταν ίσες με το μηδέν.

Θεωρώντας επιπλέον ότι η διάχυση και παραγωγή των ποσοτήτων k και ε κατάντη του πλέγματος ήταν αμελητέες, προκύπτει ότι:

$$U_E \frac{\partial k}{\partial x_i} = -\varepsilon \quad (5.39\alpha)$$

$$\rho U_E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -c_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.39\beta)$$

Είναι προφανές ότι στον παραπάνω τύπο ροής, στην περιοχή του πλέγματος, λόγω των διαταραχών του πεδίου ταχύτητας από το πλέγμα έχουμε, παραγωγή κινητικής ενέργειας, η οποία όμως δεν υφίσταται κατάντη. Είναι, επίσης, σαφές ότι για το συγκεκριμένο τύπο εμποδίου σε ικανή απόσταση κατάντη η ροή μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφη και μονοδιάστατη.

Δύο επιπλέον ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά του συστήματος των εξισώσεων είναι τα παρακάτω:

1. Από το μακροσκοπικό πεδίο ταχυτήτων εμφανίζεται μόνο μία συνιστώσα η U_E , η οποία μπορεί να προσδιοριστεί από τα δεδομένα του πειράματος, άρα δεν είναι αναγκαία η επίλυση των εξισώσεων (5.29).
2. Από τις πέντε παραμέτρους του μοντέλου k - ε (βλ. και Πίνακας 5.1) εμφανίζεται μόνο η μία, η $c_{2\varepsilon}$.

Παίρνοντας, λοιπόν, υπόψη μας τη λύση του συστήματος εξισώσεων (5.39α, β) και προσδιορίζοντας την κινητική ενέργεια μέσα από πειραματικές μετρήσεις, μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή του συντελεστή $c_{2ε}$. Υπάρχουν, όμως, και πολλές εξαιρέσεις, στις οποίες οι τιμές αυτές δεν ισχύουν.

Για περιπτώσεις κατά τις οποίες η παραγωγή κινητικής ενέργειας και η καταστροφή της δεν είναι τοπικά σε ισορροπία είναι πιθανό η προσέγγιση του τυρβώδους ιξώδους (εξίσωση 5.30) να μην ισχύει και θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν άλλες προσεγγίσεις, όπως επίλυση διαφορικών εξισώσεων για τις τυρβώδεις τάσεις (βλ. Rodi (1980), Rodi (1993) και Warner et al. 2005).

Τα παραπάνω μοντέλα προσομοίωσης της τυρβώδους ροής, κυρίως τα μοντέλα $k-\epsilon$ στα οποία δώσαμε έμφαση, έχουν εφαρμογή σε πολλά προβλήματα τα οποία σχετίζονται με την Περιβαλλοντική Μηχανική, όπως στην κατανόηση της υδραυλικής συμπεριφοράς στο σημείο συμβολής ενός ποταμού και ενός παραποτάμου (βλ. Lane et al. 1999), στο σχεδιασμό Δεξαμενών Δευτεροβάθμιας Καθίζησης σε μία Εγκατάσταση Επεξεργασίας Λυμάτων (βλ. Stamou et al. 2009), στη βελτίωση της λειτουργίας δεξαμενών για την επεξεργασία πόσιμου νερού (Stamou 2008), σε προβλήματα ρύπανσης της ατμόσφαιρας στο εσωτερικό πόλεων, στα οποία υπεισέρχεται και το φαινόμενο της αστικής χαράδρας (βλ. Jeong, and Andrews 2002, Assimakopoulos et al. 2003 και Li et al. 2006).

Οι βασικές αρχές επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων των μοντέλων τύρβης είναι αντίστοιχες με αυτές οι οποίες έχουν ήδη παρουσιαστεί, ορισμένες επιπλέον λεπτομέρειες δίνονται στον Patankar (1980) και στους Μαρκάτο και Ασημακόπουλο (1995).

5.3. Προσομοίωση υπόγειων ροών

Οι υπόγειες ροές λαμβάνουν χώρα κατά κανόνα σε «πορώδη μέσα», τα οποία μπορεί να αποτελούνται από κόκκους, όπως οι ροές που λαμβάνουν χώρα σε αμμώδεις σχηματισμούς, είτε σε μεγάλο αριθμό από αγωγούς, όπως οι ροές σε ρωγματομένους υδροφορείς. Για να θεωρηθεί ο σχηματισμός πορώδης μέσο στην τελευταία περίπτωση, πρέπει ο αριθμός των ρωγμών να είναι μεγάλος.

Όπως αναφέραμε ο χώρος στον οποίο λαμβάνει χώρα η ροή στα παραπάνω πορώδη μέσα έχει εξαιρετικά πολύπλοκη γεωμετρία, με αποτέλεσμα να είναι απαραίτητο να εξετάζουμε το μέσο όρο των μεγεθών τα οποία μας ενδιαφέρουν σε έναν «Αντιπροσωπευτικό Στοιχειώδη Όγκο» (ή Α.Σ.Ο.), ο οποίος πρέπει να έχει διαστάσεις κατά πολύ μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες των κόκκων, είτε από τη μέση απόσταση των ρωγμών. Με τη μέθοδο αυτή δεν εξετάζουμε πια την τιμή των υδροδυναμικών ή άλλων χαρακτηριστικών που μας ενδιαφέρουν σε κάθε σημείο, αλλά τη μέση τιμή τους στον Α.Σ.Ο., γι' αυτό η προσέγγιση που περιγράψαμε παραπάνω ονομάζεται και προσέγγιση του «ισοδύναμου συνεχούς μέσου». Οι διαστάσεις του Α.Σ.Ο. πρέπει να είναι πολύ μεγάλες, ώστε οι μέσες τιμές των μεγεθών που θα προκύψουν από την παραπάνω διαδικασία ολοκλήρωσης να είναι ανεξάρτητες από τον Α.Σ.Ο. Από την άλλη, όμως, πρέπει να είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του χώρου στον οποίο λαμβάνει χώρα η ροή, ώστε ο Α.Σ.Ο. να φαίνεται σαν ένα «σημείο». Αυτός είναι και ο λόγος που η προσέγγιση του ισοδύναμου συνεχούς μέσου μπορεί να εφαρμοστεί σε ρωγματομένους υδροφορείς με πυκνό δίκτυο ρωγμών. Σε υδροφορείς με μικρό αριθμό ρωγμών οι ελάχιστες απαιτούμενες διαστάσεις του Α.Σ.Ο. μπορεί να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις διαστάσεις του υδροφορέα οπότε ο Α.Σ.Ο. δεν μπορεί να θεωρηθεί σημείο (δηλαδή δεν έχει αμελητέες διαστάσεις σε σχέση με τον χώρο στον οποίο λαμβάνει χώρα η ροή), οπότε δεν ισχύει και η προσέγγιση του ισοδύναμου συνεχούς μέσου. Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια τις εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την κίνηση του νερού σε υπόγειους υδροφορείς τόσο για περιπτώσεις στις οποίες ισχύουν οι προσεγγίσεις της συμβατικής υπόγειας υδραυλικής, (ισχύουν ο νόμος του Darcy και η υπόθεση της υδραυλικής ισορροπίας στο εσωτερικό ενός Α.Σ.Ο.), όσο και για την αντίθετη περίπτωση. Μία λεπτομερής περιγραφή της μαθηματικής προσέγγισης για την πρώτη περίπτωση υπάρχει και στο κλασικό σύγγραμμα του Bear (1979).

Σε πορώδη μέσα στα οποία υφίσταται προσέγγιση του ισοδύναμου συνεχούς μέσου και η ροή είναι έρπουσα ισχύει ο νόμος του Darcy ο οποίος γράφεται:

$$q_i = -K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (5.40)$$

όπου q_i είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα στην κλίμακα του ισοδύναμου συνεχούς μέσου, h το πιεζομετρικό φορτίο (το οποίο ορίζεται από την σχέση $h=p/\gamma+z$ όπου p είναι η πίεση, γ το ειδικό βάρος και z η απόσταση από το επίπεδο αναφοράς), ενώ K_{ij} είναι η υδραυλική αγωγιμότητα, η οποία στην εξίσωση (5.40) δίνεται με τη μορφή τανυστή, ώστε να μπορέσουν να προσομοιωθούν οι ροές σε ανισότροπα πορώδη μέσα. Στην περίπτωση αυτή στις διευθύνσεις που έχουμε μικρότερη πτώση της πιεζομετρίας για την ίδια ταχύτητα, η τιμή της αγωγιμότητας είναι μεγαλύτερη από τις άλλες, όπου η πτώση της πιεζομετρίας είναι μεγαλύτερη.

Για την περίπτωση ενός ισότροπου πορώδους μέσου η εξίσωση του Darcy μπορεί να γραφεί με την εξής απλούστερη μορφή:

$$q_i = -K \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (5.41)$$

Στην παραπάνω εξίσωση η υδραυλική αγωγιμότητα είναι βαθμωτό μέγεθος.

Επειδή κατά κανόνα τόσο οι συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων, όσο και το πιεζομετρικό φορτίο είναι άγνωστα μεγέθη, η εξίσωση (5.40) και αντίστοιχα η εξίσωση (5.41) δεν αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, άρα πρέπει να πάρουμε υπόψη μας και την αρχή της διατήρησης της μάζας. Εξετάζουμε το ισοζύγιο της μάζας σε ένα ορθογωνικό (ή σχεδόν ορθογωνικό) πρίσμα του υπόγειου υδροφορέα (βλ. π.χ. Bear 1979).

Στην περίπτωση αυτή για υδροφορείς υπό πίεση ισχύει η παρακάτω εξίσωση της συνέχειας:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Bq_i}{\partial x_i} = N \quad (5.42a)$$

ή ισοδύναμα

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Bq_x}{\partial x} + \frac{\partial Bq_y}{\partial y} = N \quad (5.42b)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις S [-] είναι ένας κατάλληλος συντελεστής αποθηκευτικότητας η ακριβής τιμή του οποίου εξαρτάται από τη συμπιεστότητα του νερού και του στερεού σκελετού, B [L] είναι το πάχος του υδροφορέα, ενώ N είναι ένας όρος πηγής-καταβόθρας, ο οποίος περιγράφει τις ανταλλαγές μάζας του υπόγειου υδροφορέα με το εξωτερικό, εκτός από αυτές οι οποίες γίνονται στα εξωτερικά όρια. Μία τυπική περίπτωση μόνιμης μονοδιάστατης ροής σε υδροφορέα υπό πίεση περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο και παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 6.1.

Στην περίπτωση ενός φρεατίου υδροφορέα προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hq_i}{\partial x_i} = N \quad (5.43a)$$

ή ισοδύναμα:

$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hq_x}{\partial x} + \frac{\partial hq_y}{\partial y} = N \quad (5.43b)$$

Όσον αφορά την εξίσωση (5.43a) πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι η μεταβλητή h αντιστοιχεί στο βάθος ροής, ενώ η αποθηκευτικότητα S_y αν και έχει την ίδια φαινομενολογική σημασία με την παράμετρο S της

εξίσωσης (5.42α), έχει διαφορετικό φυσικό υπόβαθρο, μια και η παράμετρος S_y αντιστοιχεί στο ενεργό πορώδες και δεν εξαρτάται από τη συμπιεστότητα του νερού και του στερεού σκελετού. Μία τυπική περίπτωση μόνιμης μονοδιάστατης ροής σε φρεάτιο υδροφορέα περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο και παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 6.2.

Εισάγοντας την εξίσωση του Darcy στην εξίσωση της συνέχειας προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο.

Εισάγοντας, λοιπόν, την εξίσωση (5.41) στην εξίσωση (5.43β) προκύπτει η εξίσωση:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(T \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + N \quad (5.44)$$

όπου T [L^2/T] είναι η μεταφορικότητα ή μεταβιβαστικότητα του υδροφορέα.

Στην περίπτωση που η τιμή του T είναι σταθερή, προκύπτει αντίστοιχα η εξίσωση:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_i} + N \quad (5.45\alpha)$$

η οποία με τη χρήση του κλασικού (ή συμβατικού) τρόπου γραφής έχει ως εξής:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + N \quad (5.45\beta)$$

Η εξίσωση (5.44) και ισοδύναμα οι εξισώσεις (5.45α) και (5.45β) έχουν τη δομή της εξίσωσης της διάχυσης με όρο πηγής – καταβόθρας.

Στην περίπτωση όπου $N=0$ η εξίσωση (5.45β) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_h \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (5.46)$$

όπου D_h ($D_h=T/S$) είναι ο συντελεστής υδραυλικής διάχυσης. Η παραπάνω εξίσωση, είναι η εξίσωση διάχυσης χωρίς όρους πηγής – καταβόθρας, τη λύση της οποίας παρουσιάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Οι εξισώσεις (5.44), (5.45α) και (5.46) που περιγράφουν ροές σε υδροφορείς υπό πίεση είναι γραμμικές. Από την άλλη είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι αντίστοιχες εξισώσεις για τους υδροφορείς με ελεύθερη επιφάνεια δεν είναι γραμμικές.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5.41) και (5.43α) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N \quad (5.47\alpha)$$

Στην περίπτωση, όμως, κατά την οποία οι μεταβολές της στάθμης είναι μικρές σε σχέση με τη μέση τιμή της, η εξίσωση (5.47α) μπορεί να γραμμικοποιηθεί και να λάβει την παρακάτω μορφή:

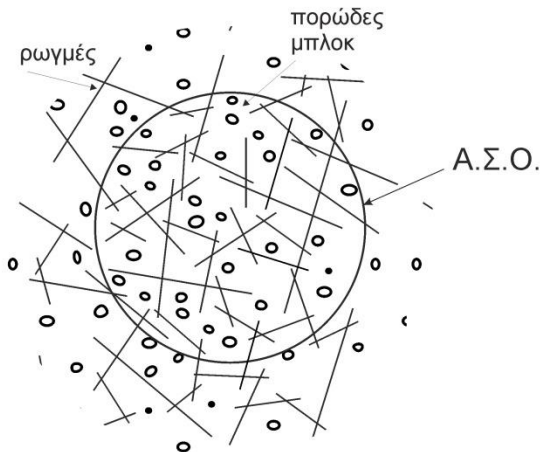
$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_e \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_e \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N \quad (5.47\beta)$$

όπου T_e είναι μία ισοδύναμη μεταβιβαστικότητα (ή μεταφορικότητα) η οποία ορίζεται από την σχέση:

$$T_e = Kh_m \quad (5.47\gamma)$$

όπου h_m είναι μία κατάλληλη μέση τιμή του βάθους ροής.

Ως τώρα είχαμε υποθέσει ότι στον Α.Σ.Ο. υπάρχουν συνθήκες υδραυλικής ισορροπίας. Σε ορισμένες, όμως, περιπτώσεις, όπως π.χ. σε ρωγματομένους υδροφορείς η υπόθεση αυτή δεν ισχύει και οι υδραυλικές συνθήκες σε χωριστές ομάδες πόρων είναι πολύ διαφορετικές, π.χ. σε υδροφορείς οι οποίοι έχουν πρωτογενείς και δευτερογενείς πορώδες (βλ. Εικόνα 5.3).



Εικόνα 5.3 Σχηματική παρουσίαση υδροφορέα με διπλό πορώδες, στον οποίο συνυπάρχει το πορώδες μπλοκ (πρωτογενές πορώδες) και το δίκτυο ρωγμών (δευτερογενές πορώδες), για τον οποίο μπορεί να εφαρμοστεί το διπλό πορώδες συνεχούς μορφής.

Αν υποθέσουμε ότι το δίκτυο ρωγμών (το οποίο αναφέρεται και σαν δευτερογενές πορώδες) είναι αρκετά πυκνό, ώστε να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε την υδραυλική του συμπεριφορά με την υπόθεση του ισοδύναμου συνεχούς μέσου, τότε θα πρέπει να εξετάσουμε διαφορετικές μέσες τιμές για τις συνθήκες του δικτύου ρωγμών, τις οποίες θα συμβολίσουμε με τον δείκτη 2 (τις αντίστοιχες τιμές στο πρωτογενές πορώδες θα τις συμβολίσουμε με το δείκτη 1) (βλ. επίσης Barenblatt et al. 1960, Aifantis 1977).

Στην περίπτωση διδιάστατης ροής σε υδροφορέα υπό πίεση χωρίς ανταλλαγές με το εξωτερικό περιβάλλον, όταν έχουμε ισοτροπία και ομοιομορφία των παραμέτρων, η υδραυλική συμπεριφορά διπλού πορώδους περιγράφεται με την εξίσωση (για μία λεπτομερή απόδειξη βλ. Moutsopoulos et al. 2001):

$$S_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = T_1 \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} \right) + \kappa (h_2 - h_1) \quad (5.48\alpha)$$

$$S_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} = T_2 \left(\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) + \kappa (h_1 - h_2) \quad (5.48\beta)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (5.48α και β) προσομοιώνει της ανταλλαγές ρευστού ανάμεσα στα δύο ισοδύναμα συνεχή μέσα (πρωτογενές πορώδες και δίκτυο ρωγμών) μέσα στον ίδιο Α.Σ.Ο.

Στην περίπτωση κατά την οποία η ροή στα πορώδη μέσα δεν είναι έρπουσα δεν ισχύει η εξίσωση του Darcy αλλά η εξίσωση του Forchheimer (Joseph, et al. 1982), η οποία χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις που χρησιμοποιήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$-\frac{\partial h}{\partial x_i} = a q_i + b q_i \sqrt{q_j q_j} \quad (5.49)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία η ροή είναι δισδιάστατη η εξίσωση Forchheimer μπορεί να γραφεί με τη χρήση του κλασικού τρόπου γραφής:

$$-\frac{\partial h}{\partial x} = a q_x + b q_x \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \quad (5.50\alpha)$$

$$-\frac{\partial h}{\partial y} = a q_y + b q_y \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \quad (5.50\beta)$$

όπου προφανώς q_x και q_y είναι οι συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα. Εδ'ως λαμβάνουμε υπόψη εκτός από την εξίσωση Forchheimer και την κατάλληλη μορφή της εξίσωσης της συνέχειας.

Αντί της εξίσωσης Forchheimer μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση Izbash, η οποία στην περίπτωση μονοδιάστατης ροής γράφεται:

$$-\frac{\partial h}{\partial x} = \lambda q_x^m \quad (5.51)$$

Ενώ η ισχύς της εξίσωσης Izbash έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά (όπως άλλωστε και η εξίσωση Forchheimer), το θεωρητικό της υπόβαθρο δεν έχει τεκμηριωθεί, σε αντίθεση με την περίπτωση της εξίσωσης Forchheimer, για την οποία υπάρχει μεγάλος αριθμός θεωρητικών εργασιών.

Βιβλιογραφία

- Aifantis, E. C. (1977).** *Introducing a multi-porous medium.* Dev. Mech, 8, 209-211.
- Assimakopoulos, V., ApSimon, H., & Moussiopoulos, N. (2003).** *A numerical study of atmospheric pollutant dispersion in different two-dimensional street canyon configurations.* Atmospheric Environment, 37(29), 4037-4049.
- Barenblatt, G., Zheltov, I. P., & Kochina, I. (1960).** *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata].* Journal of applied mathematics and mechanics, 24(5), 1286-1303.
- Bear, J. (1979).** *Hydraulics of groundwater.* McGraw-Hill Series in water Resources and Environmental Engineering Show all parts in this series.
- Forchheimer, P. (1901).** *Wasserbewegung durch boden.* Z. Ver. Deutsch. Ing, 45(1782), 1788.
- Jeong, S. J., & Andrews, M. J. (2002).** *Application of the $k-\epsilon$ turbulence model to the high Reynolds number skimming flow field of an urban street canyon.* Atmospheric Environment, 36(7), 1137-1145.
- Joseph, D., Nield, D., & Papanicolaou, G. (1982).** *Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium.* Water Resources Research, 18(4), 1049-1052.
- Lane, S., Bradbrook, K., Richards, K., Biron, P., & Roy, A. (1999).** *The application of computational fluid dynamics to natural river channels: three-dimensional versus two-dimensional approaches.* Geomorphology, 29(1), 1-20.
- Li, X.-X., Liu, C.-H., Leung, D. Y., & Lam, K. (2006).** *Recent progress in CFD modelling of wind field and pollutant transport in street canyons.* Atmospheric Environment, 40(29), 5640-5658.
- Moutsopoulos, K., Konstantinidis, A., Meladiotis, I., Tzimopoulos, C., & Aifantis, E. (2001).** *Hydraulic Behavior and Contaminant Transport in Multiple Porosity Media.* Transport in Porous Media, 42(3), 265-292. doi: 10.1023/A:1006745924508
- Patankar, S. (1980).** *Numerical heat transfer and fluid flow:* CRC Press.
- Rodi, W. (1980).** *Turbulent models and their application in hydraulics—a state of the art review.* International Association for Hydraulics Research, Delft.
- Rodi, W. (1993).** *Turbulence models and their application in hydraulics:* CRC Press.
- Stamou, A. I. (2008).** *Improving the hydraulic efficiency of water process tanks using CFD models.* Chemical Engineering and Processing: Process Intensification, 47(8), 1179-1189.
- Stamou, A. I., Theodoridis, G., & Xanthopoulos, K. (2009).** *Design of secondary settling tanks using a CFD model.* Journal of Environmental Engineering, 135(7), 551-561.
- Warner, J. C., Sherwood, C. R., Arango, H. G., & Signell, R. P. (2005).** *Performance of four turbulence closure models implemented using a generic length scale method.* Ocean Modelling, 8(1), 81-113.
- Κωτσοβίνος Ν. Ε. (2008).** *Ρευστομηχανική:* Εκδόσεις Σπανίδη.
- Μαρκάτος Ν., Ασιμακόπουλος Δ (1995).** *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική:* Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Κεφάλαιο 6

Υπολογιστικές Επιλύσεις Υπόγειας Υδραυλικής

Σύνοψη

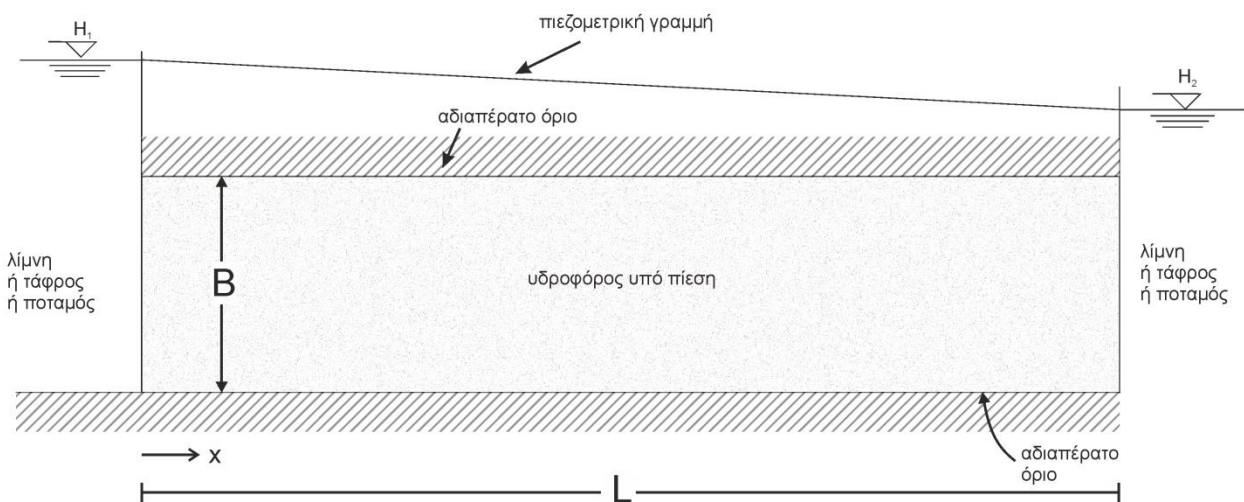
Το κεφάλαιο θα διακρίνεται σε δύο υποκεφάλαια: 1. αναλυτικές λύσεις και 2. αριθμητικές λύσεις. Θα παρουσιαστούν αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα της μόνιμης ροής, τόσο για το πρόβλημα της άντλησης νερού από μία μόνο γεώτρηση όσο και για το πρόβλημα πολλαπλών γεωτρήσεων, όπως και για τη περίπτωση ύπαρξης ποταμών και γεωτρήσεων ή αδιαπέρατων ορίων και γεωτρήσεων. Για τη περίπτωση της μη-μόνιμης ροής θα παρουσιαστεί η λύση του Theis. Θα δοθούν αριθμητικά σχήματα για την επίλυση της μονοδιάστατης και δισδιάστατης υπόγειας ροής, τόσο για τη περίπτωση ύπαρξης φρεατίου υδροφορέα όσο και για την περίπτωση υδροφορέα υπό πίεση. Θα παρουσιαστούν αριθμητικά σχήματα για την επίλυση του δισδιάστατου προβλήματος, με έμφαση στη χρήση πεπλεγμένων μεθόδων.

6.1. Αναλυτικές λύσεις

6.1.1. Αναλυτικές λύσεις για την περίπτωση μόνιμης ροής

6.1.1.1. Αναλυτική λύση για μονοδιάστατη μόνιμη ροή σε έναν υπό πίεση υδροφορέα ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ποταμούς ή τάφρους

Πιθανώς η πιο απλή περίπτωση είναι η παρακάτω: εξετάζουμε τη μονοδιάστατη μόνιμη ροή σε έναν υδροφορέα ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τάφρους (ή ποταμούς ή λίμνες) με γνωστή στάθμη. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 6.1.



Εικόνα 6.1 Σχηματική παρουσίαση (τομή) του προβλήματος το οποίο εξετάζεται στην παράγραφο 6.1.1.1: Μόνιμη ροή σε υπό πίεση υδροφορέα ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τάφρους.

Εάν θεωρήσουμε ότι η ροή είναι μόνιμη, μονοδιάστατη και επιπλέον δεν υπάρχουν ανταλλαγές ρευστού με το εξωτερικό περιβάλλον ($N=0$) η εξίσωση (5.45β) απλοποιείται στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (6.1)$$

Εφόσον, όπως προαναφέραμε, οι στάθμες του νερού στις δύο τάφρους είναι γνωστές, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις παρακάτω Οριακές Συνθήκες (Ο.Σ.):

$$\text{Για } x=0, h=H_1 \quad (6.2\alpha)$$

$$\text{Για } x=L, h=H_2 \quad (6.2\beta)$$

όπου L είναι το μήκος του υδροφορέα ή ισοδύναμα η απόσταση ανάμεσα στις δύο τάφρους.

Ολοκληρώνοντας την (6.1) δύο φορές και παίρνοντας υπόψη μας τις Οριακές Συνθήκες (6.2α, β) προκύπτει ότι:

$$h = H_1 + \frac{(H_2 - H_1)}{L} x \quad (6.3)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση του Darcy (εξίσωση 5.41) προκύπτει ότι:

$$q_x = K \frac{(H_1 - H_2)}{L} \quad (6.4)$$

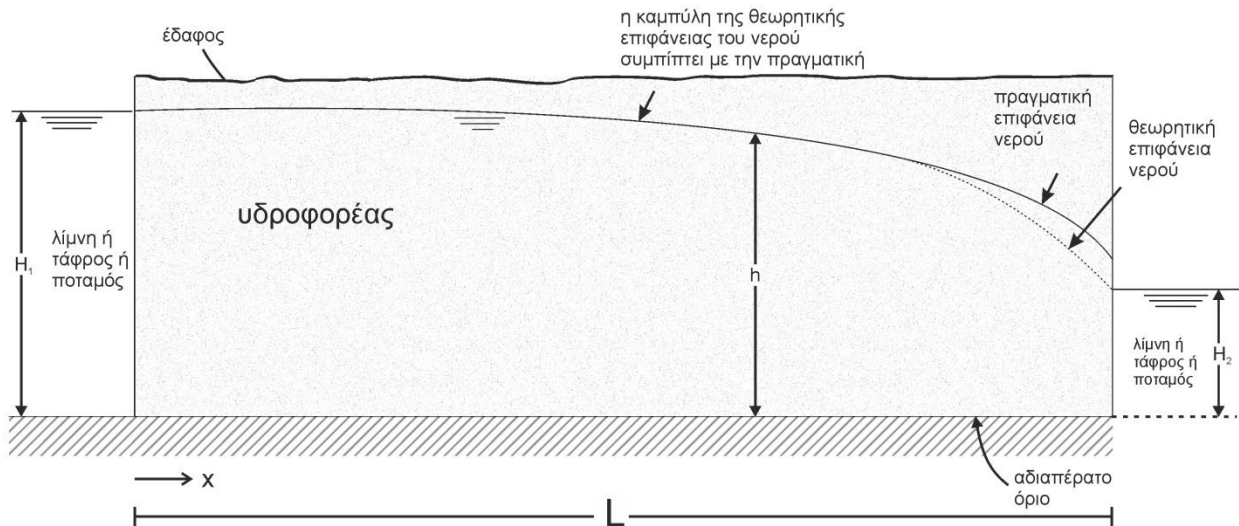
Η εξίσωση (6.4) υποδηλώνει ότι στην περίπτωση κατά την οποία η στάθμη του νερού στο σημείο $x=0$ είναι ψηλότερα από τη στάθμη του νερού στο σημείο $x=L$, δηλαδή όταν ισχύει η σχέση $H_1 > H_2$, η τιμή του q_x είναι θετική και το νερό κινείται κατά τη θετική φορά του x . Αντίθετα, στην περίπτωση που $H_2 > H_1$, η τιμή του q_x είναι αρνητική και το νερό κινείται κατά την αρνητική φορά του x .

Παίρνοντας, επίσης, υπόψη μία από τις βασικές αρχές της Ρευστομηχανικής – Υδραυλικής, ότι η παροχή Q μπορεί να οριστεί σαν το γινόμενο της μέσης ταχύτητας επί το εμβαδόν της επιφάνειας στην οποία λαμβάνει χώρα η ροή και το οποίο είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$Q = KBw \frac{(H_0 - H_1)}{L} \quad (6.5)$$

6.1.1.2. Αναλυτική λύση για μονοδιάστατη μόνιμη ροή για ένα φρεάτιο υδροφορέα ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τάφρους

Θα εξετάσουμε εδώ ένα πρόβλημα αντίστοιχο με αυτό που εξετάσαμε προηγουμένως, με τη διαφορά ότι ο υδροφορέας είναι φρεάτιος (δηλαδή έχει ελεύθερη επιφάνεια). Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 6.2.



Εικόνα 6.2 Σχηματική παρουσίαση (τομή) του προβλήματος το οποίο εξετάζεται στην παράγραφο 6.1.1.2: Μόνιμη ροή σε φρεάτιο υδροφορέα ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τάφρους.

Εάν στην περίπτωση αυτή θεωρήσουμε επιπλέον ότι η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας K είναι σταθερή, η εξίσωση (5.47α) γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0 \quad (6.6\alpha)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 0 \quad (6.6\beta)$$

Οι οριακές συνθήκες είναι ίδιες με αυτές του προβλήματος που παρουσιάσαμε στο υποκεφάλαιο (6.1.1.1), δηλαδή τις εξισώσεις (6.2α, β).

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (6.6β) και προσδιορίζοντας τις σταθερές ολοκλήρωσης με τη βοήθεια των σχέσεων (6.2α, β) προκύπτει ότι:

$$h = \sqrt{H_1^2 + \frac{(H_2^2 - H_1^2)}{L} x} \quad (6.7)$$

Παίρνοντας και πάλι υπόψη μας τον νόμο του Darcy (εξίσωση 5.41)

$$q_x = \frac{1}{2} \frac{K}{L} \frac{(H_1^2 - H_2^2)}{\sqrt{H_1^2 + \frac{(H_2^2 - H_1^2)}{L} x}} \quad (6.8)$$

Εξετάζοντας την εξίσωση (6.8) είναι δυνατό να διαπιστώσουμε και πάλι ότι εάν ισχύει η σχέση $H_1 > H_2$, η τιμή του q_x είναι θετική και στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητική.

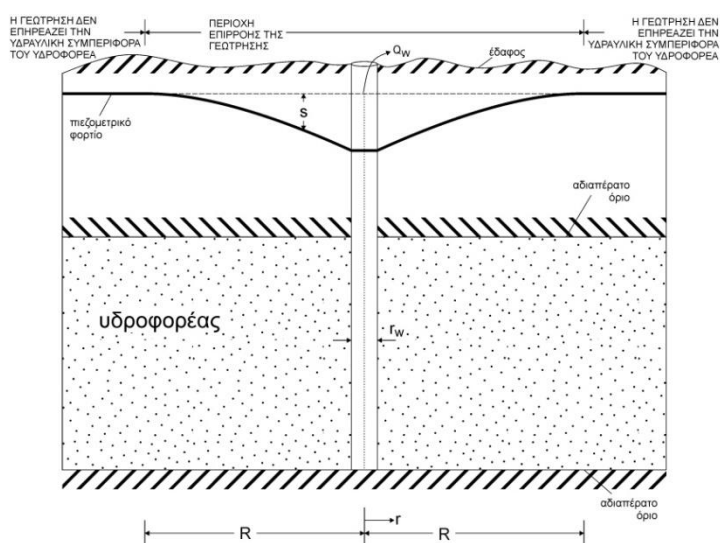
Μπορούμε να λάβουμε και πάλι υπόψη ότι η παροχή Q μπορεί να οριστεί ως το γινόμενο της ταχύτητας επί το εμβαδόν A της επιφάνειας στην οποία λαμβάνει χώρα η ροή. Το εμβαδόν είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας και ίσο με $A=hw$ (όπου h είναι το βάθος ροής και w το πλάτος του υδροφορέα). Προκύπτει ότι:

$$Q = Kw \frac{(H_1^2 - H_2^2)}{2L} \quad (6.9)$$

Όπως παρουσιάζεται στον Bear (1979), σελ. 78-79 το κατάντη άκρο του υδροφορέα, σε μικρή απόσταση από την τάφρο κατάντη η ροή δεν είναι οριζόντια, οπότε σε αυτήν την (σχετικά μικρή) περιοχή οι εξισώσεις (6.6α) και (6.7) δεν ισχύουν. Παρ' όλα αυτά έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι η εξίσωση (6.9), η οποία ονομάζεται και «εξίσωση εκροής των Dupuit-Forchheimer» (Dupuit-Forchheimer discharge formula) ισχύει, παρ' όλο που η ροή κατάντη δεν είναι οριζόντια.

6.1.1.3. Αναλυτική λύση για μόνιμη ροή σε έναν υπό πίεση υδροφορέα προκαλούμενη από αντλητική γεώτρηση

Θεωρούμε την περίπτωση κατά την οποία σε έναν υπό πίεση υδροφορέα έχουμε μόνιμη ροή, η οποία προκαλείται από μία αντλητική γεώτρηση. Θεωρούμε ότι το κέντρο της γεώτρησης βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 6.3.



Εικόνα 6.3 Σχηματική παρουσίαση (τομή) του προβλήματος το οποίο εξετάζεται στην παράγραφο 6.1.1.3: Μόνιμη ροή υπό πίεση υδροφορέα η οποία προκαλείται από αντλητική γεώτρηση.

Εάν θεωρήσουμε τις ιδιότητες του υδροφορέα σταθερές (ομοιογενείς) και ότι $N=0$, η εξίσωση (5.46), λόγω του γεγονότος ότι η ροή είναι μόνιμη, γράφεται:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (6.10α)$$

ή ισοδύναμα

$$\nabla' h = 0 \quad (6.10\beta)$$

όπου το σύμβολο ∇' αντιστοιχεί στον δισδιάστατο τελεστή Nabla.

Επειδή το πεδίο ροής που θα εξετάσουμε είναι συμμετρικό εκ περιστροφής, θα το εκφράσουμε σε πολικές συντεταγμένες, οπότε η μερική διαφορική εξίσωση (6.10α) ή η (6.10β) μετατρέπεται στην παρακάτω κανονική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} = 0 \quad (6.11)$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι η απόσταση από την αρχή των συντεταγμένων (στην προκειμένη περίπτωση η απόσταση από το κέντρο της γεώτρησης).

Θεωρούμε ότι η γεώτρηση έχει πεπερασμένη ακτίνα επιρροής και δεν επηρεάζει τη ροή σε απόσταση μεγαλύτερη από $r=R$, κατά συνέπεια μπορούμε να εφαρμόσουμε την παρακάτω οριακή συνθήκη:

$$\text{Για } r = R, h = H \quad (6.12)$$

Το μέγεθος R ονομάζεται ακτίνα επιρροής, ενώ το μέγεθος H συμβολίζει την αρχική τιμή της πιεζομετρίας πριν τεθεί σε λειτουργία η γεώτρηση. Η τιμή του H θεωρείται σταθερή.

Στη συνέχεια μπορούμε να ορίσουμε την πτώση της πιεζομετρίας s , η οποία προκαλείται από τη λειτουργία της γεώτρησης και η οποία ορίζεται από την σχέση:

$$s = H - h \quad (6.13)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (6.13) στην (6.11) προκύπτει η σχέση

$$\frac{d^2 s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{ds}{dr} = 0 \quad (6.14)$$

Αντίστοιχα, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.12) και (6.13) προκύπτει η σχέση:

$$\text{Για } r = R, s = 0 \quad (6.15)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει απλούστατα το γεγονός ότι η επίδραση της γεώτρησης σταματά σε απόσταση R από το κέντρο της γεώτρησης και κατά συνέπεια η πτώση στάθμης s την οποία προκαλεί η αντλητική γεώτρηση είναι μηδενική σε αποστάσεις από την αρχή των συντεταγμένων ίσες ή μεγαλύτερες από R .

Θεωρώντας ότι η αντλούμενη παροχή Q_w είναι σταθερή και ότι η ακτίνα της γεώτρησης είναι ίση με r_w προκύπτει η σχέση:

$$\left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right)_{r=r_w} = -\frac{Q_w}{2\pi T} \quad (6.16)$$

Όπως αναφέραμε ήδη, η παράμετρος T είναι η μεταφορικότητα (ή μεταβιβαστικότητα) του υδροφορέα.

Μία εξίσωση η οποία ικανοποιεί τόσο τη διαφορική εξίσωση (6.14) όσο και τις οριακές συνθήκες (6.15) (6.16) είναι η εξής:

$$s = -\frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left[\frac{r}{R} \right] \quad (6.17)$$

6.1.1.4. Αναλυτική λύση για μόνιμη ροή σε έναν υπό πίεση υδροφορέα στον οποίο υπάρχει σύστημα γεωτρήσεων

Στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε ένα σύστημα \bar{N} γεωτρήσεων τοποθετημένων μεταξύ τους σε απόσταση μικρότερη από την ακτίνα επιρροής R , μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας, οπότε η συνολική πτώση στάθμης είναι ίση με το άθροισμα των πτώσεων στάθμης οι οποίες προκαλούνται από τις επιμέρους γεωτρήσεις (π.χ. Bear, 1979, σ.350). Παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση (6.17) προκύπτει ότι η πτώση στάθμης σε ένα τυχαίο σημείο δίνεται από τη σχέση:

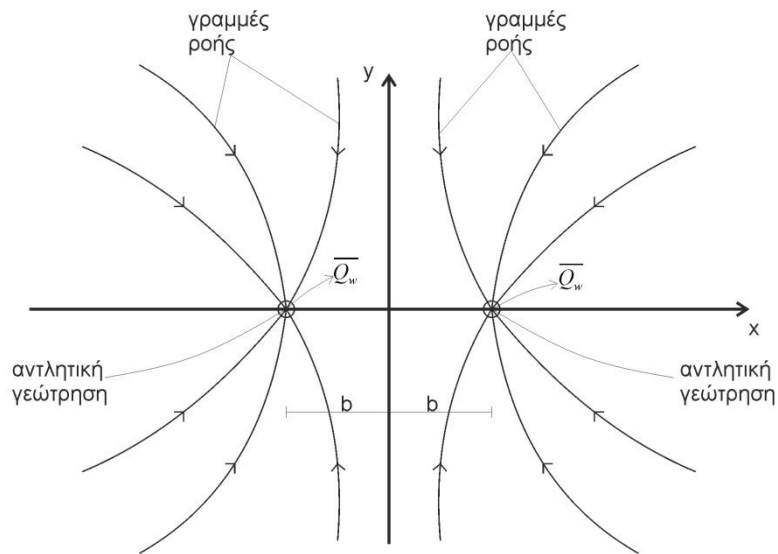
$$s = -\sum_{m=1}^{\bar{N}} \left\{ \frac{(Q_w)_m}{2\pi T} \ln \left[\frac{\sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2}}{R} \right] \right\} \quad (6.18)$$

Στην παραπάνω εξίσωση $(Q_w)_i$ είναι η παροχή η οποία αντλείται (εισάγεται) από τη γεώτρηση m , ενώ x_m και y_m είναι οι συντεταγμένες του κέντρου της γεώτρησης m . Στην εξίσωση (6.18) ισχύει η σύμβαση ότι η $(Q_w)_i$ είναι θετική στην περίπτωση άντλησης και αρνητική στην περίοδο επαναφόρτισης.

Δύο κλασικές εφαρμογές της εξίσωσης (6.18) είναι η περίπτωση ενός διπόλου, κατά την οποία δύο γεωτρήσεις αντλούν από έναν υδροφορέα την ίδια παροχή \bar{Q}_w και η περίπτωση κατά την οποία κατά την οποία η παροχή \bar{Q}_w η οποία αντλείται από μία γεώτρηση, διοχετεύεται σε μία δεύτερη. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις θεωρούμε ότι η απόσταση μεταξύ των δύο γεωτρήσεων είναι ίση με $2b$.

Επίσης, στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, θεωρούμε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου της πρώτης γεώτρησης ($m=1$) είναι $x_1=b, y_1=0$ και οι συντεταγμένες του κέντρου της δεύτερης γεώτρησης ($m=2$) είναι $x_2=-b, y_2=0$.

Στην πρώτη περίπτωση, κατά την οποία έχουμε δύο αντλητικές γεωτρήσεις, ισχύει ότι $(Q_w)_1 = (Q_w)_2 = \bar{Q}_w$. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.4.

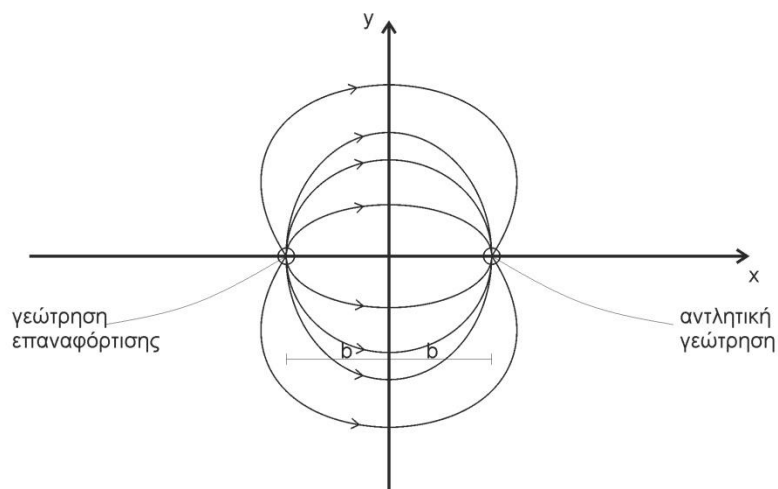


Εικόνα 6.4 Σχηματική παρουσίαση (κάτοψη) δίπολου το οποίο αποτελείται από δύο αντλητικές γεωτρήσεις.

Παίρνοντας υπόψη την εξίσωση (6.18) προκύπτει ότι:

$$s = -\frac{\bar{Q}_w}{2\pi T} \left\{ \ln \left[\frac{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}}{R} \right] + \ln \left[\frac{\sqrt{(x+b)^2 + y^2}}{R} \right] \right\} \quad (6.19)$$

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε τις σχέσεις $(Q_w)_1 = \bar{Q}_w$ και $(Q_w)_2 = -\bar{Q}_w$, εφόσον η δεύτερη γεώτρηση είναι γεώτρηση επαναφόρτισης (βλ. και την Εικόνα 6.5).



Εικόνα 6.5 Σχηματική παρουσίαση (κάτοψη) δίπολου το οποίο αποτελείται από μία αντλητική γεώτρηση και μία γεώτρηση επαναφόρτισης.

Από την εξίσωση (6.18) προκύπτει ότι:

$$s = -\frac{\bar{Q}_w}{2\pi T} \left\{ \ln \left[\frac{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}}{R} \right] - \ln \left[\frac{\sqrt{(x+b)^2 + y^2}}{R} \right] \right\} \quad (6.20\alpha)$$

Παίρνοντας υπόψη μία από τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων $\ln[a] - \ln[b] = \ln\left[\frac{a}{b}\right]$, και τελικά προκύπτει ότι:

$$s = -\frac{\bar{Q}_w}{2\pi T} \left(\ln \left[\frac{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+b)^2 + y^2}} \right] \right) \quad (6.20\beta)$$

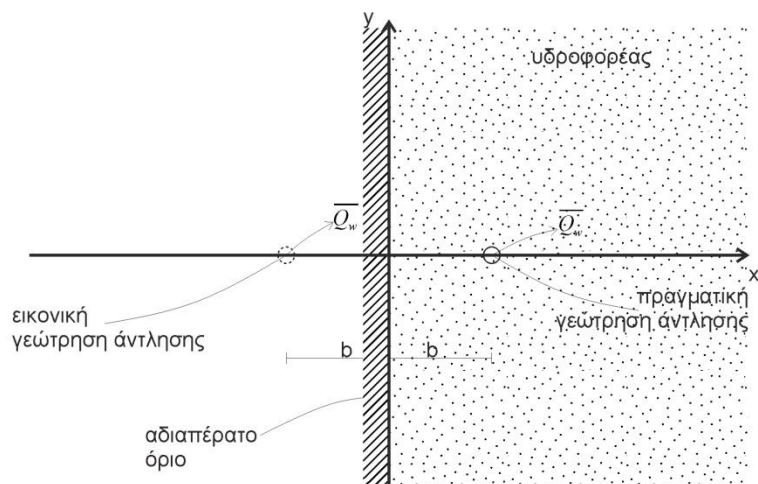
Η εξίσωση (6.20β) υποδεικνύει μία σημαντική ιδιότητα του διπόλου το οποίο αποτελείται από μία αντλητική γεώτρηση και μία γεώτρηση επαναφόρτισης: η υδραυλική συμπεριφορά δεν εξαρτάται από την ακτίνα επιρροής R , γεγονός που κάνει τη χρήση της εξίσωσης (6.20β) πιο εύκολη και το αποτέλεσμα πιο αξιόπιστο. Παρατηρώντας την (6.19) διαπιστώνουμε ότι η υδραυλική συμπεριφορά του διπόλου το οποίο αποτελείται από δύο αντλητικές γεωτρήσεις δεν είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα επιρροής R . Πρέπει να σημειώσουμε, επίσης, ότι η περίπτωση του διπόλου το οποίο αποτελείται από μία αντλητική γεώτρηση και μία γεώτρηση επαναφόρτισης έχει τουλάχιστον δύο σημαντικές εφαρμογές:

- Το γεωθερμικό δίπολο, στο οποίο αντλείται θερμό νερό από μία γεώτρηση, αφαιρείται ένα μέρος της θερμότητάς της με τη βοήθεια εναλλακτών και στην συνέχεια το (κρύο) νερό διοχετεύεται σε μία γεώτρηση επαναφόρτισης για να διατηρηθεί η πίεση στον υδροφορέα σταθερή.
- Τη μέθοδο *pump and treat*, κατά την οποία αντλείται νερό από ένα ρυπασμένο υδροφορέα, το νερό καθαρίζεται με κατάλληλη επεξεργασία και στη συνέχεια διοχετεύεται και πάλι στον υδροφορέα σε μία δεύτερη γεώτρηση επαναφόρτισης.

6.1.1.5. Ροή σε υδροφορέα που συνορεύει με ευθύγραμμο αδιαπέρατο όριο και από τον οποίο αντλείται νερό με γεώτρηση

Θεωρούμε έναν ημίαιπρο υδροφορέα ο οποίος συνορεύει με ευθύγραμμο αδιαπέρατο όριο που συμπίπτει με τον άξονα των y . Από τον υδροφορέα αυτό αντλείται νερό μέσω γεώτρησης, η οποία βρίσκεται σε απόσταση b από τον υδροφορέα και το κέντρο της έχει συντεταγμένες $x=b, y=0$.

Αν θεωρήσουμε μία δεύτερη εικονική αντλητική γεώτρηση με κέντρο στις συντεταγμένες $x=-b, y=0$, από την οποία αντλείται παροχή \bar{Q}_w , (βλ. Εικόνα 6.6 για μία σχηματική παρουσίαση του προβλήματος), η υδραυλική συμπεριφορά του προβλήματος το οποίο εξετάζουμε περιγράφεται για $x>0$ από την εξίσωση (6.19).



Εικόνα 6.6 Σχηματική παρουσίαση (κάτοψη) του προβλήματος το οποίο εξετάζεται στην παράγραφο 6.1.1.5: Αντληση από γεώτρηση η οποία βρίσκεται κοντά σε ευθύγραμμο αδιαπέρατο όριο.

Πραγματικά, αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (6.19), προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\bar{Q}_w}{2\pi T} \left(\frac{x-b}{(x-b)^2 + y^2} + \frac{x+b}{(x+b)^2 + y^2} \right) \quad (6.21)$$

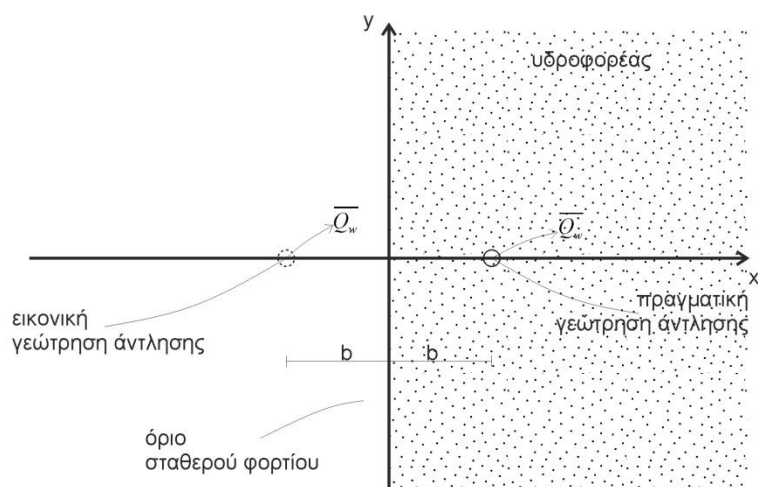
Κατά συνέπεια πληρούται η συνθήκη ότι ο άξονας των y είναι αδιαπέρατο όριο. Πραγματικά, από την (6.21) προκύπτει ότι για $x=0$, $\partial s / \partial x = 0$.

Επειδή η δεύτερη εικονική γεώτρηση μπορεί να θεωρηθεί είδωλο της πραγματικής γεώτρησης με καθρέφτη τον άξονα των y , η μέθοδος που περιγράψαμε αναφέρεται στην αγγλοσαξονική βιβλιογραφία ως *method of images* και μεταφράζεται στην ελληνική βιβλιογραφία ως μέθοδος των εικόνων, ενώ πιθανόν μία πιο ακριβής μετάφραση θα ήταν η μέθοδος των ειδώλων. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται επίσης στον Bear (1979) στις σελ. 361-362, βλ. και το Σχήμα 8-25, ενώ στο βιβλίο του Τολίκα (1997) στη σελ. 154.

6.1.1.6. Ροή σε υδροφορέα ο οποίος συνορεύει με ευθύγραμμο όριο σταθερής πιεζομετρίας και από τον οποίο αντλείται νερό από μία γεώτρηση

Θεωρούμε έναν ημιάπειρο υδροφορέα ο οποίος συνορεύει με ευθύγραμμο όριο σταθερού φορτίου το οποίο συμπίπτει με τον άξονα των y . Από αυτόν αντλείται νερό από μία γεώτρηση η οποία βρίσκεται σε απόσταση b και το κέντρο έχει συντεταγμένες $x=b$, $y=0$.

Αν θεωρήσουμε μία δεύτερη εικονική γεώτρηση επαναφόρτισης με κέντρο στις συντεταγμένες $x=-b$, $y=0$, στην οποία διοχετεύεται παροχή \bar{Q}_w , (βλ. Εικόνα 6.7 για μία σχηματική παρουσίαση του προβλήματος), η υδραυλική συμπεριφορά του προβλήματος που εξετάζουμε περιγράφεται για $x>0$ από την εξίσωση (6.20).



Εικόνα 6.7 Σχηματική παρουσίαση (κάτοψη) του προβλήματος το οποίο εξετάζεται στην παράγραφο 6.1.1.6: Αντληση από γεώτρηση η οποία βρίσκεται κοντά σε ευθύγραμμο αδιαπέρατο όριο.

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι στο υδραυλικό πεδίο το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση (6.20) ο άξονας των y είναι όριο σταθερού φορτίου. Από την προηγούμενη εξίσωση για $x=0$ προκύπτει ότι $s=0$ κατά συνέπεια η αντλητική γεώτρηση δεν επηρεάζει το πιεζομετρικό φορτίο στον άξονα των y , το οποίο μπορεί να θεωρηθεί όριο σταθερής πιεζομετρίας.

Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται επίσης στον Bear (1979), στις σελ. 357-360, βλ. και το Σχήμα 8-24, ενώ στο βιβλίο του Τολικά (1997) στην σελ. 155.

6.1.1.7. Αναλυτική λύση για άντληση από υδροφορέα με ομοιόμορφη ροή

Επειδή οι εξισώσεις που περιγράφουν την νταρσιανή ροή σε υδροφορέα υπό πίεση είναι γραμμικές, μπορεί, όπως είδαμε και προηγουμένως, να εφαρμοστούν σε αυτές λύσεις οι οποίες στηρίζονται στην αρχή της επαλληλίας.

Ένα τέτοιο παράδειγμα το οποίο θα εξετάσουμε στην συνέχεια είναι η περίπτωση άντλησης από υδροφορέα ο οποίος δεν βρισκόταν σε ηρεμία πριν την έναρξη της αντλητικής διαδικασίας, αλλά στον οποίο λάμβανε χώρα ροή με ομοιόμορφη ταχύτητα q_0 .

Θα μελετήσουμε εδώ την περίπτωση κατά την οποία αντλούμε νερό με σταθερή παροχή Q_w . Θα εξετάσουμε το φαινόμενο αρκετό χρόνο μετά την έναρξη της αντλητικής διαδικασίας, ώστε η ροή να μπορεί να θεωρηθεί μόνιμη.

Θεωρούμε για λόγους ευκολίας ότι η αντλητική γεώτρηση είναι τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων, ότι η ομοιόμορφη ροή είναι παράλληλη στον άξονα των x και λαμβάνει χώρα κατά την αρνητική διεύθυνση των x .

Το πιεζομετρικό φορτίο h και η ροϊκή συνάρτηση ψ αντίστοιχα δίνονται από τις σχέσεις:

$$h = \frac{q_0 B}{T} x + \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left[\frac{r}{r_w} \right] \quad (6.22)$$

όπου h_0 μία κατάλληλη τιμή αναφοράς του πιεζομετρικού φορτίου.

Στην περίπτωση νταρσιανής ροής οι γραμμές ροής ψ είναι κάθετες στις γραμμές ίσης πιεζομετρίας, οι οποίες περιγράφονται από την παρακάτω σχέση:

$$\psi = -q_0 y - \frac{Q_w}{2\pi B} \operatorname{arctg} \left[\frac{y}{x} \right] \quad (6.23)$$

Για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες το πηγάδι μπορεί να θεωρηθεί ως «σημείο» μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω σχέση για την πιεζομετρία:

$$h = \frac{q_0 B}{T} x + \frac{Q_w}{4\pi T} \ln [x^2 + y^2] \quad (6.24)$$

Ο τύπος της ροής που εξετάζουμε εδώ έχει έναν υδροκρίτη που αντιστοιχεί σε ένα σύνορο και έχει την εξής ιδιότητα: ένα σωματίδιο νερού που αρχικά είναι έξω από τα όριά του δεν θα καταλήξει ποτέ στην αντλητική υδρογεώτρηση. Αντίθετα, αν το σωματίδιο αυτό είναι τοποθετημένο στο εσωτερικό των ορίων του υδροκρίτη, κάποια στιγμή θα αντληθεί από τη γεώτρηση η οποία βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

Η γνώση λοιπόν της θέσης αυτού του υδροκρίτη σχετίζεται με τον προσδιορισμό των ορίων της ζώνης προστασίας μίας υδρογεώτρησης, οι περιοχές οι οποίες βρίσκονται εκτός υδροκρίτη δεν απαιτείται να συμπεριληφθούν σε μία ζώνη προστασίας.

Επειδή ο υδροκρίτης αντιστοιχεί σε μία ορισμένη γραμμική ροή οι συντεταγμένες του περιγράφονται από την παρακάτω σχέση:

$$y/x = \pm \operatorname{tg} [2\pi q_0 B y / Q_w] \quad (6.25)$$

Το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί στις θετικές τιμές του y , ενώ το αρνητικό στις αρνητικές τιμές του y .

Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα του τύπου ροής που εξετάζουμε εδώ είναι ότι ανάντη εμφανίζεται ένα στάσιμο σημείο, στο οποίο οι συνιστώσες της ταχύτητας μηδενίζονται και έχει συντεταγμένες:

$$x_s = -\frac{Q_w}{2\pi B q_0} \quad (6.26\alpha)$$

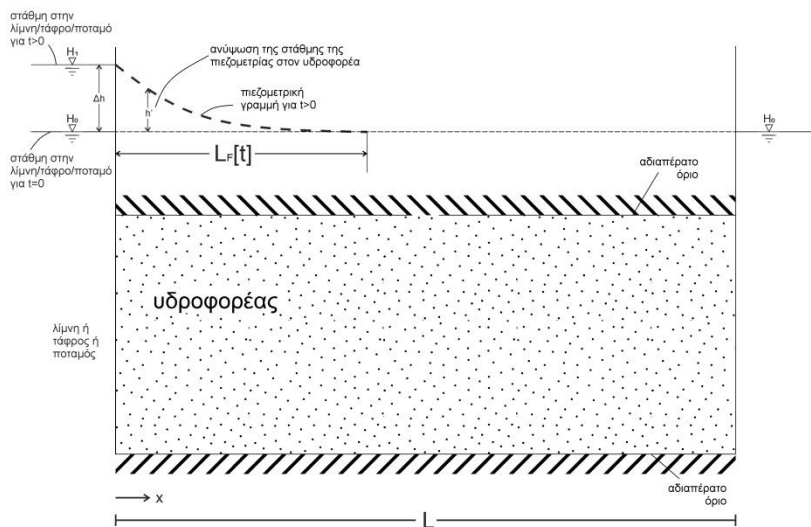
$$y_s = 0 \quad (6.26\beta)$$

Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται στον Bear (1979) στις σ. 367-370, βλ. και το Σχήμα 8.29.

6.1.2. Αναλυτικές λύσεις για την περίπτωση μη μόνιμης ροής

6.1.2.1. Μονοδιάστατη μη μόνιμη ροή για υπό πίεση υδροφορέα, ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ποταμούς ή τάφρους, η οποία προκαλείται από την απότομη άνοδο της στάθμης μίας από τις τάφρους

Εξετάζουμε μία μονοδιάστατη ροή σε υπόγειο υδροφορέα, ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τάφρους (ή ποταμούς). Οι συνθήκες είναι τέτοιες ώστε η ροή η οποία λαμβάνει χώρα είναι υπό πίεση. Η απόσταση μεταξύ των δύο τάφρων (ή ποταμών) ισούται με L . Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 6.8.



Εικόνα 6.8 Σχηματική παρουσίαση (τομή) του προβλήματος το οποίο εξετάζεται στην παράγραφο 6.1.2.1: Μονοδιάστατη μη μόνιμη ροή σε ημιάπειρο υδροφόρο υπό πίεση.

Θεωρούμε ότι ισχύει ο νόμος του Darcy, ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση της συνέχειας στη γραμμική (ή γραμμικοποιημένη) μορφή της, και ότι οι τιμές των παραμέτρων είναι σταθερές στον χώρο και ότι δεν έχουμε όρους πηγής-καταβόθρας.

Κατά συνέπεια η πιεζομετρία μπορεί να περιγραφεί από την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_H \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (6.27)$$

όπου D_H είναι ο συντελεστής υδραυλικής διάχυσης, ο οποίος, όπως ήδη αναφέραμε στο κεφάλαιο 5, ορίζεται από τη σχέση $D_H = T/S$, όπου S είναι ο συντελεστής αποθηκευτικότητας και T η μεταφορικότητα (ή μεταβιβαστικότητα) του υδροφόρου σχηματισμού.

Αρχικά θεωρούμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε υδραυλική ισορροπία και η τιμή της πιεζομετρίας είναι σταθερή σε όλον τον σχηματισμό και ίση με $h = H_0$.

Για $t \geq 0$ έχουμε απότομη ανύψωση της στάθμης του ποταμού, ο οποίος έρχεται σε επαφή με τον υδροφόρο στο σημείο $x=0$ στα $h = H_1$. Η στάθμη της πιεζομετρίας στο δεύτερο ποταμό είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου. Εξαιτίας της ανόδου της στάθμης αρχίζει η ροή μέσα στον υδροφόρο σχηματισμό.

Εισάγοντας την μεταβλητή $h' = h - H_0$, η οποία συμβολίζει τη διαταραχή η οποία προκαλείται στο πιεζομετρικό φορτίο του υδροφόρου από την απότομη άνοδο της στάθμης του ποταμού, μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = D_H \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \quad (6.28)$$

με αρχικές συνθήκες $h' = 0$ και οριακές συνθήκες $h' = \Delta h = H_1 - H_0$ για $x=0$ και $h' = 0$ για $x=L$.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6.28), αλλά και οι οριακές της συνθήκες, έχουν την ίδια μαθηματική δομή με τη μαθηματική εξίσωση για τον προσδιορισμό της συνιστώσας της ταχύτητας u για τη ροή ανάμεσα σε δύο πλάκες «από τις οποίες η μια είναι ακίνητη και η άλλη αρχίζει ξαφνικά να κινείται». Το φαινόμενο αυτό εξετάζεται στη Ρευστομηχανική, βλ. π.χ. κεφάλαιο 4, εξίσωση 4.6.3.7 στον Κωτσοβίνο (2007).

Κατά συνέπεια η γενική μορφή της λύσης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$h'[x,t] = \Delta h \left(1 - \frac{x}{L} \right) - 2 \frac{\Delta h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left[-n^2 \pi^2 \frac{D_H t}{L^2} \right] \sin \left[\frac{n \pi x}{L} \right] \quad (6.29)$$

Για σχετικά μικρούς χρόνους, για τους οποίους η διαταραχή δεν έχει φτάσει στον ποταμό κατάντη, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η λύση για ημίαιρο μέσο (βλέπε π.χ. και πάλι το κεφάλαιο 4 στον Κωτσοβίνο (2007). εξίσωση 4.6.2.13, ή το ίδιο κεφάλαιο στον Κωτσοβίνο (2008)).

Για το πρόβλημα το οποίο εξετάζουμε η λύση γράφεται:

$$h'[x,t] = \Delta h \left(1 - \operatorname{erf} \left[\frac{x}{2\sqrt{D_H t}} \right] \right) \quad (6.30)$$

όπου erf η συνάρτηση σφάλματος (error function).

Στην περίπτωση ημίαιρου μέσου το μήκος του μετώπου της διαταραχής L_F μπορεί να εκτιμηθεί από την εξίσωση (βλ. π.χ. και την εξίσωση 4.6.2.13 στον Κωτσοβίνο (2007)):

$$L_F = 3\sqrt{D_H t} \quad (6.31)$$

Προφανώς για να ισχύει η εξίσωση (6.30) πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$L_F < L \quad (6.32)$$

Στην Εικόνα 6.8 απεικονίζονται συνθήκες για τις οποίες ισχύει η παραπάνω σχέση. Επίσης, οι αναλυτικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (6.28) τις οποίες παρουσιάσαμε (βλ. εξισώσεις 6.29 και 6.30) μπορούν να προκύψουν και με χρήση των μετασχηματισμών Laplace, η απόδειξη όμως δεν εμπίπτει στο πλαίσιο αυτού του βιβλίου.

Με βάση την εξίσωση (6.30) μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα Darcy στον υδροφορέα με την παρακάτω σχέση:

$$q = \frac{(\Delta h) K}{\sqrt{\pi D_H t}} e^{-\frac{x^2}{4D_H t}} \quad (6.33)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η εισροή του νερού από το υδάτινο σώμα στον υπόγειο υδροφορέα λαμβάνει χώρα στην περιοχή $x=0$ και, θεωρώντας ότι ο υδροφόρος έχει πλάτος w , ο όγκος νερού ο οποίος εισρέει δίνεται από την σχέση:

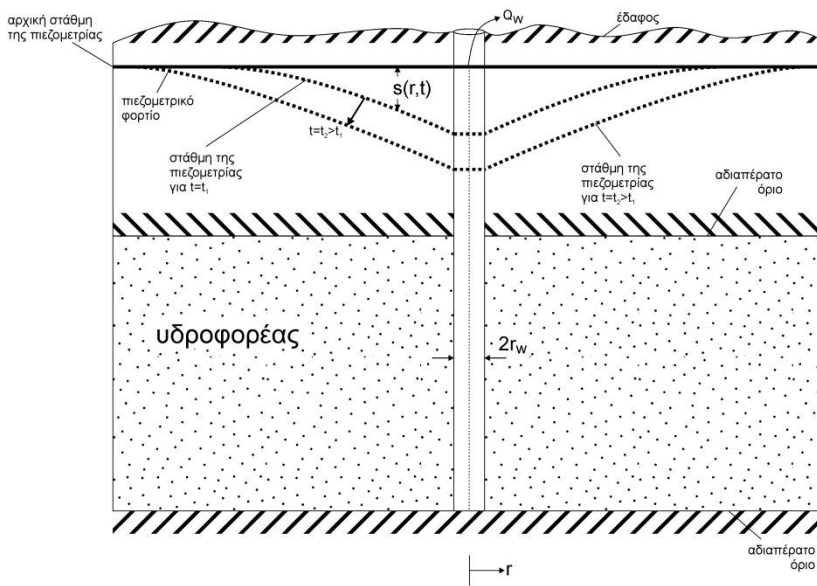
$$V = \int_0^t \frac{(\Delta h) KB}{\sqrt{\pi D_H t'}} w dt' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\Delta h) KB w \sqrt{\frac{t}{D_H}} \quad (6.34)$$

Για υδροφορείς με ελεύθερη επιφάνεια, εάν οι μεταβολές στο βάθος ροής είναι μικρές, ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμικοποιημένη εξίσωση (5.47β) που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και αν αντί του πάχους του υδροφορέα B λάβουμε υπόψη ένα χαρακτηριστικό βάθος ροής H_m , προκύπτει η σχέση:

$$V = \int_0^t \frac{(\Delta h) KH_m}{\sqrt{\pi(T_e / S_y) t'}} w dt' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\Delta h) KH_m w \sqrt{\frac{t}{T_e / S_y}} \quad (6.35)$$

6.1.2.2. Μη μόνιμη ροή για την περίπτωση άντλησης νερού από γεώτρηση σε άπειρο υπό πίεση υδροφορέα

Θεωρούμε την περίπτωση άντλησης νερού από άπειρο υπό πίεση υδροφορέα με ομοιογενείς ιδιότητες (το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.9).



Εικόνα 6.9 Σχηματική παρουσίαση (τομή) του προβλήματος το οποίο εξετάζεται στην παράγραφο 6.1.2.2: Μη μόνιμη ροή σε άπειρο υδροφορέα υπό πίεση η οποία προκαλείται από αντλητική γεώτρηση.

Θεωρώντας ότι το κέντρο της γεώτρησης βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, η εξίσωση για την πιεζομετρία γράφεται ως εξής:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) \quad (6.36)$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ η απόσταση από τη γεώτρηση.

Θεωρούμε ότι πριν από την έναρξη της άντλησης το σύστημα ήταν σε ισορροπία, δηλαδή η στάθμη της πιεζομετρίας ήταν παντού σταθερή: $h = H$.

Η πτώση της στάθμης ορίζεται ως: $s = H - h$, κατά συνέπεια η εξίσωση που περιγράφει την πτώση στάθμης έχει την ίδια δομή με την εξίσωση για το πιεζομετρικό φορτίο:

$$S \frac{\partial s}{\partial t} = T \left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} \right) \quad (6.37)$$

Η αρχική συνθήκη γράφεται:

$$s(r,0) = 0 \quad (6.38)$$

ενώ η πρώτη οριακή συνθήκη προκύπτει από το γεγονός ότι δεν υπάρχει πτώση στάθμης σε άπειρη απόσταση από τον υδροφορέα:

$$s(\infty, t) = 0 \quad (6.39)$$

Θεωρώντας ότι η αντλούμενη παροχή Q_w είναι σταθερή, μπορούμε να ορίσουμε και τη δεύτερη οριακή συνθήκη με την παρακάτω μεθοδολογία:

$$Q_w = 2\pi r_w T \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_{r=r_w} \quad (6.40)$$

όπου $r = r_w$ η ακτίνα της γεώτρησης.

Για να μετατραπεί η εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.37) σε κανονική διαφορική εξίσωση, κάνουμε μετασχηματισμό ομοιότητας εισάγοντας τη μεταβλητή Boltzmann:

$$u = r^2 / (4D_H t) \quad (6.41)$$

Προκύπτει ότι:

$$\frac{d^2 s}{du^2} + \left(1 + \frac{1}{u} \right) \frac{ds}{du} = 0 \quad (6.42)$$

Η αρχική συνθήκη (6.38) και οι οριακές συνθήκες (6.39) και (6.40) μετατρέπονται στις εξής οριακές συνθήκες:

$$\text{Για } \eta \rightarrow \infty, s = 0 \quad (6.43)$$

και επίσης:

$$\left(u \frac{ds}{du} \right)_{u \rightarrow 0} = \frac{Q_w}{4\pi T} \quad (6.44)$$

Για την τελευταία εξίσωση έγινε η παραδοχή ότι η γεώτρηση μπορεί να θεωρηθεί σημείο, επειδή έχει μικρές διαστάσεις σε σχέση με τις διαστάσεις του προβλήματος.

Θέτοντας $ds/du = \Lambda$, λύνοντας την κανονική διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού που προκύπτει, ολοκληρώνοντας και παίρνοντας υπόψη μας τις οριακές συνθήκες, έχουμε τη λύση των εξισώσεων (6.37) και (6.42):

$$s = \frac{Q_w}{4\pi T} W[u] \quad (6.45\alpha)$$

όπου $W[u]$ είναι η συνάρτηση πηγαδιού $W(u)$ η οποία ορίζεται από την σχέση:

$$W[u] = \int_u^\infty \frac{e^{-u'}}{u'} du' \quad (6.45\beta)$$

Τιμές για τη συνάρτηση $W(u)$ είναι καταχωρημένες σε πίνακες, π.χ. Bear (1979), σελ. 320 – 321, πίνακας 8.2.

Στην πράξη για $u < 0.01$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$W[u] \cong -0.5722 - \ln[u],$$

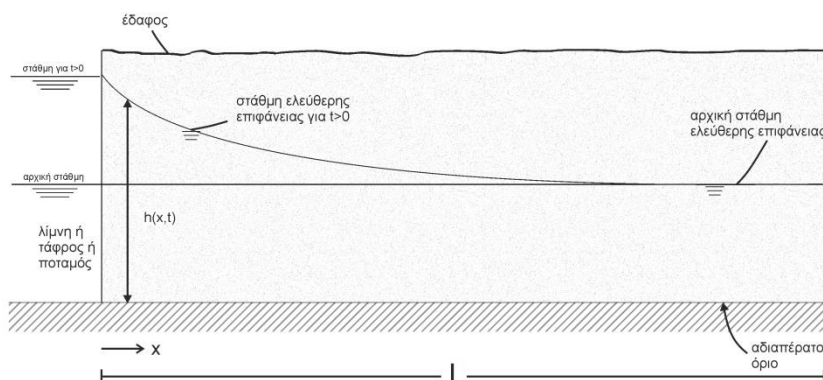
κατά συνέπεια η εξίσωση (6.45α) μπορεί να γραφεί με την εξής μορφή:

$$s \cong \frac{Q_w}{4\pi T} \left(-0.5722 - \ln \left[\frac{r^2 S}{4Tt} \right] \right) = \frac{Q_w}{4\pi T} \ln \left[\frac{2.25Tt}{r^2 S} \right] \quad (6.46)$$

Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται και στον Bear (1979), στις σελ. 318-321.

6.1.2.3. Αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης Boussinesq για την περίπτωση μη μόνιμης ροής

Οι περισσότερες αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης Boussinesq για την περίπτωση μη μόνιμης ροής αναφέρονται σε μονοδιάστατη ροή σε ημίαιπρο υδροφορέα (βλ. Εικόνα 6.10).



Εικόνα 6.10 Σχηματική παρουσίαση (τομή) του προβλήματος το οποίο εξετάζεται στην παράγραφο 6.1.2.3: Μη μόνιμη ροή σε άπειρο υδροφορέα υπό πίεση η οποία προκαλείται από αντλητική γεώτρηση.

Η μερική διαφορική εξίσωση (εξίσωση 5.47α του κεφαλαίου 5) μπορεί να μετατραπεί σε κανονική διαφορική εξίσωση με τον μετασχηματισμό Boltzmann. Λύσεις της εξίσωσης αυτής έχουν προταθεί από την Polubarinova-Kochina (1962), η οποία είχε χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των διαταραχών. Οι Tolikas et al. (1984) ανέπτυξαν μία προσεγγιστική αναλυτική λύση, η οποία έχει τις ίδιες «γεωμετρικές» ιδιότητες (ως προς τα χαρακτηριστικά του σημείου καμπής και του μήκους διείδυσης) με την ακριβή λύση. Ο Moutsopoulos

(2010) χρησιμοποίησε την προσέγγιση των Tolikas et al. (1984) για τον κατάντη κλάδο και ανέπτυξε μία προσεγγιστική αναλυτική λύση της μη γραμμικής εξίσωσης Boussinesq για τον κλάδο ανάντη. Στην ίδια εργασία παρουσιάζεται μία κριτική ανάλυση των προτεινόμενων λύσεων στη βιβλιογραφία. Μία αναλυτική λύση της εξίσωσης Boussinesq για ένα πρόβλημα με συμμετρία εκ περιστροφής (διάθεση ρευστού από γεώτρηση) παρουσιάζεται από τους Li et al. (2006).

6.1.2.4. Μη μόνιμη ροή σε υδροφορείς με διπλό πορώδες

Αναλυτικές λύσεις της μονοδιάστατης μη μόνιμης ροής σε υδροφορείς με διπλό πορώδες έχουν παρουσιαστεί από τον Onder (1998) και από τους Moutsopoulos and Tsihrintzis (2009). Και στις δύο περιπτώσεις μελετήθηκε το πρόβλημα ενός υδροφορέα ο οποίος αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία, η ροή προκαλείται από την απότομη άνοδο της πιεζομετρίας ανάντη και η περιγραφή του προβλήματος αντιστοιχεί με αυτήν η οποία παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.8, ο υδροφορέας όμως έχει διπλό πορώδες (βλ. Εικόνα 5.3) και κατά συνέπεια πρέπει να επιλυθούν οι αντίστοιχες εξισώσεις. Ο Onder (1998) εξέτασε την περίπτωση κατά την οποία η αγωγιμότητα του πρωτογενούς πορώδους είναι αμελητέα, ο υδροφορέας είναι πεπερασμένου μήκους και το όριο κατάντη θεωρείται αδιαπέρατο. Οι Moutsopoulos and Tsihrintzis (2009) μελέτησαν την περίπτωση ενός ημιάπειρου υδροφορέα και θεώρησαν μη αμελητέα τόσο τη μεταφορικότητα (και κατά συνέπεια την υδραυλική αγωγιμότητα) των ρωγμών, όσο και την υδραυλική αγωγιμότητα του πρωτογενούς πορώδους. Και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των μετασχηματισμών Laplace για να μετατραπούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις σε κανονικές διαφορικές εξισώσεις.

Οι Wilson and Aifantis (1982) ανέπτυξαν αναλυτικές λύσεις για την περίπτωση παραμορφώσιμων πορωδών μέσων, ενώ αναλυτικές λύσεις για την περίπτωση άντλησης από πηγάδι παρουσίασαν οι Warren and Root (1963).

6.1.2.5. Αναλυτικές λύσεις για την εξίσωση Forchheimer

Αναλυτικές λύσεις για την εξίσωση Forchheimer σε περίπτωση μονοδιάστατης μη μόνιμης ροής σε υδροφορέα υπό πίεση έχουν παρουσιαστεί από τους Moutsopoulos and Tsihrintzis (2005). Η γεωμετρία του υδροφορέα και οι οριακές συνθήκες είναι αντίστοιχες με αυτές του προβλήματος το οποίο εξετάστηκε στην παράγραφο 6.1.2.1 και παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.8 με τη διαφορά ότι εξετάζεται η περίπτωση κατά την οποία οι δυνάμεις αδράνειας είναι μη αμελητέες και κατά συνέπεια θα πρέπει να πάρουμε υπόψη μας ότι η κίνηση του νερού περιγράφεται από την εξίσωση Forchheimer και όχι από την εξίσωση Darcy. Για μικρούς χρόνους κατά τους οποίους οι ταχύτητες είναι μεγάλες και οι μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης Forchheimer είναι πιο σημαντικοί από τους γραμμικούς όρους, χρησιμοποιείται μετασχηματισμός ομοιότητας, ενώ για μεγάλους χρόνους κατά τους οποίους συμβαίνει το αντίστροφο χρησιμοποιείται η μέθοδος των διαταραχών και η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης Forchheimer για την περίπτωση μη μόνιμης μονοδιάστατης ροής έχουν παρουσιαστεί στις δημοσιεύσεις Moutsopoulos (2007) και Moutsopoulos (2009), όπου οι μερικές διαφορικές εξισώσεις της συνέχειας και Forchheimer μετατράπηκαν σε κανονική διαφορική εξίσωση με τη χρήση μετασχηματισμού ομοιότητας και στη συνέχεια λύθηκαν με τη βοήθεια της μεθόδου αποσύνθεσης Adomian. Μία αναλυτική λύση της εξίσωσης Forchheimer για την περίπτωση άντλησης από γεώτρηση παρουσιάστηκε από τους Mathias et al. (2008), οι οποίοι χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των διαταραχών. Η λύση των Mathias et al. (2008) θεωρείται ότι έχει ένα πιο στερεό θεωρητικό υπόβαθρο από τις λύσεις των Sen (1989) και Wu (2002), οι οποίοι εξέτασαν αντίστοιχα προβλήματα.

6.2. Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων της μη μόνιμης ροής

6.2.1. Γενικές αρχές

Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του υπόγειου νερού στην περίπτωση υδροφορέων υπό πίεση και πολλές φορές στην περίπτωση φρεατίων υδροφορέων έχει την ίδια μορφή (μαθηματική δομή) με την εξίσωση της διάχυσης (ή αντίστοιχα με την εξίσωση της θερμότητας). Για αυτόν τον λόγο οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση των εξισώσεων αυτών (της διάχυσης ή της θερμότητας), τις οποίες παρουσιάσαμε σε

προηγούμενο κεφάλαιο μπορούν να εφαρμοστούν και σε προβλήματα υπόγειας υδραυλικής. Όπως, όμως, θα δούμε στη συνέχεια, σε πολλές περιπτώσεις παραλλαγές των αριθμητικών μεθόδων που παρουσιάσαμε μπορούν να εμφανιστούν και στην περίπτωση κατά την οποία οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή δεν έχουν την δομή της εξίσωσης της διάχυσης.

6.2.2. Αριθμητική επίλυση της εξίσωση Boussinesq

Ένα ρητό αριθμητικό σχήμα για την επίλυση της εξίσωσης Boussinesq προτάθηκε από τους Upadhyaya and Chauha (1998).

Στην περίπτωση μονοδιάστατης ροής χωρίς όρους πηγής – καταβόθρας η εξίσωση Boussinesq με σταθερή τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας (βλ. την εξίσωση 5.47α του κεφαλαίου 5) γράφεται:

$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (6.47)$$

ή ισοδύναμα

$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} = K \left(h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (6.48)$$

χρησιμοποιώντας μία προσέγγιση ανάλογη με αυτήν την οποία χρησιμοποίησαν οι Duffort και Frankel (1953).

Για την παράγωγο ως προς τον χρόνο χρησιμοποιείται ένα σχήμα κεντρικών διαφορών:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cong \frac{h_i^{n+1} - h_i^{n-1}}{2\Delta t} \quad (6.49)$$

όπου όπως και σε προηγούμενα κεφάλαια ο δείκτης i αντιστοιχεί στον αύξοντα αριθμό του κόμβου ενώ ο εκθέτης στο χρονικό επίπεδο. Το $n+1$ συμβολίζει το τρέχον χρονικό επίπεδο, ενώ το $n-1$ δύο χρονικά επίπεδα πριν από το τρέχον χρονικό επίπεδο. Δt είναι το χρονικό βήμα.

Αντίστοιχα εφαρμόζουμε μία αντίστοιχη προσέγγιση, δηλαδή το σχήμα κεντρικών διαφορών για την πρώτη παράγωγο στον χώρο:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \cong \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (6.50)$$

όπου Δx είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων του κανάβου η οποία θεωρείται σταθερή.

Για τη δεύτερη παράγωγο ως προς τον χώρο χρησιμοποιήθηκε από τους Upadhyaya and Chauha (1998) προσέγγιση αντίστοιχη με αυτήν των Duffort και Frankel (1953),

Δε χρησιμοποιείται η κλασική προσέγγιση κεντρικών διαφορών για το χρονικό επίπεδο n , δηλαδή η σχέση (6.51):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cong \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (6.51)$$

αλλά η παρακάτω προσέγγιση:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cong \frac{h_{i+1}^n - (h_i^{n+1} + h_i^{n-1}) + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (6.52)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω σχέσεις, αλλά και το γεγονός ότι η διακριτοποίηση γίνεται στον κόμβο i , προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$h_i^{n+1} \cong \frac{\frac{h_i^{n-2}}{2\Delta t} + \frac{K}{S} \left[h_i^n \left(\frac{h_{i+1}^n - h_i^{n-1} + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2(\Delta x)} \right)^2 \right]}{\left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{Kh_i^n}{S(\Delta x)^2} \right)} \quad (6.53)$$

Το παραπάνω αριθμητικό σχήμα είναι ρητό και έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς τον χρόνο και τον χώρο.

6.2.3. Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων διπλού πορώδους

Μία βιβλιογραφική ανασκόπηση ορισμένων από τα πιο σημαντικά αριθμητικά σχήματα έχει παρουσιαστεί από τους Ngien et al. (2012). Εδώ θα παρουσιάσουμε ορισμένα από τα βασικά παραδείγματα.

Η εξίσωση διπλού πορώδους για την περίπτωση οριζόντιας ροής μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$S_i \frac{\partial h_i}{\partial t} = T_i \left(\frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} \right) + \kappa (h_j - h_i) \quad (6.54)$$

όπου $i=1,2$, εάν $i=1$ τότε $j=2$, εάν $i=2$ τότε $j=1$.

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να επιλυθεί επαναληπτικά θεωρώντας τις τιμές του h γνωστές από προηγούμενες επαναλήψεις (Moutsopoulos et al., 2001 και Μελαδιώτης και Μουτσόπουλος 2002):

$$S_i \frac{\partial h_i^l}{\partial t} - T_i \left(\frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial y^2} \right) + \kappa h_i^l = \kappa h_j^{l-1} \quad (6.55)$$

Στην παραπάνω εξίσωση οι εκθέτες l και $l-1$ δηλώνουν την τρέχουσα και προηγούμενη επανάληψη αντίστοιχα. Θεωρούμε, λοιπόν τη μεταβλητή h_i^l άγνωστη, ενώ τις τιμές της μεταβλητής h_j^{l-1} γνωστές από την προηγούμενη επανάληψη. Κατά συνέπεια η παραπάνω εξίσωση έχει τη δομή της εξίσωσης διάχυσης (ή ισοδύναμα της θερμότητας) με όρους πηγής – καταβόθρας και μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι κλασικές αριθμητικές μέθοδοι. Π.χ. για περιττές τιμές του l μπορούμε να θέσουμε $i=1$ και $j=2$ ενώ για άρτιες τιμές του l το αντίστροφο ($i=2$ και $j=1$). Για τις δύο πρώτες επαναλήψεις μπορούμε να θεωρήσουμε ως τιμές της μεταβλητής h_j^{l-1} αυτές που έχουν προκύψει από το προηγούμενο χρονικό βήμα. Οι επαναλήψεις συνεχίζονται ώσπου να επιτευχθεί σύγκλιση για τις τιμές της πιεζομετρίας σε όλους τους κόμβους. Περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα εφαρμογής δίνονται από τους Moutsopoulos et al., 2001 και Μελαδιώτη και Μουτσόπουλο (2002).

Οι Zhang et al. (2004) ανέπτυξαν ένα αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση μη ισόθερμης ροής σε διπλό πορώδες με παραμόρφωση.

6.2.4. Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Forchheimer

Οι Mathias et al. (2008), οι οποίοι εξέτασαν την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Forchheimer σε περίπτωση άντλησης νερού από γεώτρηση, σε ένα πρόβλημα στο οποίο υπήρχε συμμετρία εκ περιστροφής διακριτοποιήσαν στον χώρο τόσο την εξίσωση συνέχειας (βλ. τις εξισώσεις τους 14 και 19) όσο και την εξίσωση Forchheimer (βλ. τις εξισώσεις τους 15-18). Η κανονική διαφορική εξίσωση η οποία προέκυψε επιλύθηκε με την υπορουτίνα ODE15s του προγράμματος MATLAB των Shampine and Reichelt (1997) και Shampine et al. (1999).

Μία εναλλακτική προσέγγιση για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Forchheimer είναι η χρήση ενός ισοδύναμου συντελεστή υδραυλικής αγωγιμότητας (ή ισοδύναμα υδραυλικής διάχυσης), ο οποίος εξαρτάται από το πεδίο των ταχυτήτων (Moutsopoulos and Tsihrintzis 2005, Mijic et al. 2013). Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση μία διαφορικής εξίσωσης η οποία έχει την δομή της εξίσωσης διάχυσης, ενδεχομένως με όρους πηγής – καταβόθρας, βλ. την εξίσωση (20) των Mijic et al. (2013). Επειδή, όμως, οι τιμές του πεδίου των ταχυτήτων είναι άγνωστες το πρόβλημα πρέπει να λυθεί επαναληπτικά.

Βιβλιογραφία

- Du Fort, E. C., & Frankel, S. P. (1953).** *Stability Conditions in the Numerical Treatment of Parabolic Differential Equations. Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 7(43), 135-152. doi: 10.2307/2002754
- Li, X.-X., Liu, C.-H., Leung, D. Y., & Lam, K. (2006).** *Recent progress in CFD modelling of wind field and pollutant transport in street canyons. Atmospheric Environment*, 40(29), 5640-5658.
- Mijic, A., Mathias, S. A., & LaForce, T. C. (2013).** *Multiple Well Systems with Non-Darcy Flow. Groundwater*, 51(4), 588-596.
- Mathias, S.A., Butler, A.P., & Zhan, H. (2008).** *Approximate solutions for Forchheimer flow to a well. ASCE J. Hydraul. Eng-ASCE* 134, 1318–1325.
- Meladiotis, I., Moutsopoulos K. (2002).** *Hydrogeological conditions and hydraulic behaviour of the fractured aquifer of Mavropigi (Prefecture of Kozani, Greece). Metalleiol Metall Chron*, 12(1–2), 27–38.
- Moutsopoulos, K. N., Konstantinidis, A. A., Meladiotis, I., Tzimopoulos, C. D., & Aifantis, E. C. (2001).** *Hydraulic behavior and contaminant Transport in multiple porosity media, Transport in Porous Media*, vol. 42, 265-292.
- Moutsopoulos, K. N., & Tsihrintzis, V. A. (2005).** *Approximate analytical solutions of the Forchheimer equation. Journal of Hydrology*, vol.309(1-4), 93-103.
- Moutsopoulos, K. N. (2007).** *One-dimensional unsteady inertial flow in phreatic aquifers, induced by a sudden change of the boundary head. Transport in Porous Media*, vol. 70, 97-125. doi 10.1007/s11242-006-9086-z.
- Moutsopoulos, K. N. (2009).** *Exact and approximate analytical solutions for unsteady fully developed turbulent flow in porous media and fractures for time dependent boundary conditions. Journal of Hydrology*, 369(1–2), 78-89. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydro.2009.02.025>
- Moutsopoulos, K. N., & Tsihrintzis, V. A. (2009).** *Analytical solutions and simulation approaches for double porosity aquifers. Water Resources Management*, vol. 23(3), 395-415.
- Moutsopoulos, K.N (2010).** *The Analytical Solution of the Boussinesq Equation for Flow Induced by a Step Change of the Water Table Elevation Revisited. Transport in Porous Media*, 85(3), 919-940. doi: 10.1007/s11242-010-9599-3.
- Ngien, S.K., Rahman, N.A., Ahmad, K., & Lewis, R.L. (2012).** *A review of experimental studies on double-porosity soils. Sci.Res. Essays*, 7(38), 3243-3250.
- Önder, H. (1998).** *One-dimensional transient flow in a finite fractured aquifer system. Hydrological Sciences Journal*, 43(2), 243-265. doi: 10.1080/02626669809492120
- Polubarinova-Kochina, P. Y. (1962).** *Theory of Groundwater Movement. Princeton University Press. Princeton, NJ.*
- Sen, Z. (1989).** *Nonlinear flow toward wells. J. Hydraul. Eng-ASCE* 115 (2), 193–209.
- Shampine, L.F., & Reichelt, M.W. (1997).** *The MATLAB ODE Suite. SIAM J. Sci. Comput.* 18, 1–22.
- Shampine, L.F., Reichelt, M.W., & Kierzenka, J.A. (1999).** *Solving Index-1 DAEs in MATLAB and Simulink. SIAM J. Sci. Comput.* 41, 538–552.
- Tolikas, P. K., Sidiropoulos, E. G., & Tzimopoulos, C. D. (1984).** *A Simple Analytical Solution for the Boussinesq One-Dimensional Groundwater Flow Equation. Water Resources Research*, 20(1), 24-28.
- Upadhyaya, A., & Chauhan, H. (1998).** *Solutions of Boussinesq equation in semiinfinite flow region. Journal of irrigation and drainage engineering*, 124(5), 265-270.
- Warren, J.E., & Root, P.J. (1963).** *The behaviour of naturally fractured reservoirs. SPE J* 3,245–255

- Wilson, R. K., & Aifantis, E. C. (1982).** *On the theory of consolidation with double porosity.* International Journal of Engineering Science, 20(9), 1009-1035. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225\(82\)90036-2](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(82)90036-2)
- Wu, Y.S. (2002).** *An approximate analytical solution for non-Darcy flow toward a well in fractured media.* Water Resour. Res. 38 (3), 1023. doi:10.1029/2001WR000713
- Zhang, K., Wu, Y.-S., Bodvarsson, G. S., & Liu, H.-H. (2004).** *Flow Focusing in Unsaturated Fracture Networks.* Vadose Zone Journal, 3(2), 624-633. doi: 10.2136/vzj2004.0624
- Κωτσοβίνος, Ν. Ε. (2007).** *Ρευστομηχανική:* Εκδόσεις Δ.Π.Θ.
- Τολίκας, Δ.Κ. (1997).** *Υπόγεια υδραυλική:* Εκδόσεις Επίκεντρο.

Κεφάλαιο 7

Ροή και Διασπορά Ρύπων σε Ποτάμια και Κανάλια

Σύνοψη

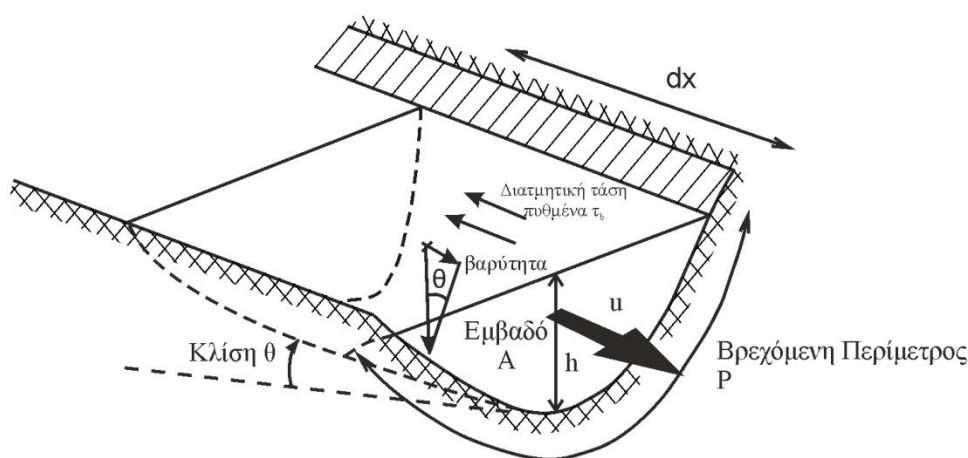
Δίνονται οι παραδοχές που απαιτούνται για την περιγραφή ροής σε μονοδιάστατα συστήματα όπως οι ποταμοί, τα κανάλια και οι χείμαρροι. Παράγονται οι μονοδιάστατες εξισώσεις St. Venant και αναλύονται οι επιμέρους όροι τους. Επιλύονται οι εξισώσεις St. Venant αριθμητικά και παρουσιάζεται κώδικας προγραμματισμού σε γλώσσα Matlab για την επίλυση αυτή. Κατόπιν, αναλύονται μέθοδοι προσδιορισμού του διαμήκους συντελεστή τριβής σε σχέση με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ποταμού-καναλιού και των συνθηκών ροής τους. Ορίζεται το μήκος πλήρους ανάμειξης ρύπου και δίνονται οι αναλυτικές λύσεις μονοδιάστατης και διδιάστατης επίλυσης διασποράς ρύπου, ανάλογα με τη σχετική θέση της πηγής εκροής ως προς την όχθη του ποταμού. Δίνονται κώδικες επίλυσης προβλημάτων σε γλώσσα Matlab και λυμένα παραδείγματα και προβλήματα εφαρμογής.

7.1. Εξισώσεις St. Venant

Ποτάμια, χείμαρροι και κανάλια μπορούν να θεωρηθούν ως μονοδιάστατα συστήματα στα οποία η ροή οφείλεται στη βαρύτητα ενώ αντίσταση στη ροή προβάλλει η τριβή των πλευρικών τοιχωμάτων και του πυθμένα. Οι κύριες εξισώσεις που εκφράζουν τη ροή σε τέτοια συστήματα είναι οι μονοδιάστατες εξισώσεις Saint-Venant (Fischer et al., 1979). Θεωρούμε ένα τμήμα ενός τέτοιου συστήματος όπως φαίνεται στην Εικόνα 7.1, και ορίζουμε τις παραμέτρους:

- A , εμβαδόν διαβρεχόμενης διατομής ποταμού,
- P η διαβρεχόμενη περίμετρος,
- S η κλίση πυθμένα, και
- h το μέγιστο βάθος νερού.

Τα μεγέθη A και P είναι συνάρτηση του h , καθώς όταν το h αυξάνει, αυξάνονται και τα A και P με τρόπο που σχετίζεται με τη μορφή της διατομής του καναλιού. Συνεπώς, για κανάλια ορθογωνικής διατομής $A = Wh$ και $P = W + 2h$.



Εικόνα 7.1 Ενδεικτικό τμήμα μήκους dx ενός ποταμού για το προσδιορισμό του ισοζυγίου μάζας και ορμής. Τα σύμβολα είναι: u η μέση κατά τη διατομή ταχύτητα, h το βάθος του ποταμού, A το εμβαδόν της διατομής, P η διαβρεχόμενη περίμετρος και S η κλίση.

Για το ισοζύγιο μάζας θεωρούμε ότι η συσσώρευση μάζας ($\rho A dx$) κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος οφείλεται στην πιθανή διαφορά μεταξύ της εισροής (ρAu) στο σημείο x και της εκροής στο σημείο $x+\Delta x$. Για μικρό χρονικό διάστημα dt το ισοζύγιο γράφεται:

$$\rho A dx|_{at+dt} = \rho A dx|_{at} + \rho Au|_{at,x} - \rho Au|_{at,x+dx} \quad (7.1)$$

το οποίο, όταν τα dx και dt τείνουν στο μηδέν, γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A) = 0 \quad (7.2)$$

Καθώς το νερό είναι ασυμπίεστο, δεν υπάρχει μεταβολή της πυκνότητάς του σε τόσο μικρή χωρική κλίμακα, συνεπώς μπορούμε να διαιρέσουμε με την πυκνότητα (ρ) και

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0 \quad (7.3)$$

Για την περίπτωση ορθογωνικής διατομής, όπου $A = Wh$, η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hA) = 0 \quad (7.4)$$

Για το ισοζύγιο ορμής προκύπτει ότι η μεταβολή της ορμής κατά μήκος της στοιχειώδους διατομής ισούται με την εισερχόμενη ορμή μείον την εξερχόμενη ορμή της διατομής συν το σύνολο των δυνάμεων που παράγουν επιτάχυνση της ροής (δηλαδή που δρουν κατά τη διεύθυνση της ροής), μείον το σύνολο των δυνάμεων που είναι υπεύθυνες για την επιβράδυνση της ροής (που δρουν αντίθετα στη ροή). Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\text{Ορμής}] &= \text{Εισροή Ορμής στο } \xi \\ &\quad - \text{Εκροή Ορμής στο } \xi + \delta \xi \\ &\quad + \text{Πίεση στο σημείο εισροής} \\ &\quad - \text{Πίεση στο σημείο εκροής} \\ &\quad + \text{Βαρύτητα} \\ &\quad - \text{Τριβή} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Η ορμή είναι η μάζα επί την ταχύτητα, δηλαδή $(\rho dV)u = \rho Au dx$, ενώ η ροή ορμής είναι η ροή μάζας επί την ταχύτητα, δηλαδή $(\rho Au)u = \rho Au^2$.

Η δύναμη πίεσης σε κάθε άκρο της διατομής είναι:

$$F_p = \iint p dA = \int_0^h p(z)W(z) dz \quad (7.6)$$

όπου $p(z)$ και $W(z)$ είναι αντίστοιχα η μεταβαλλόμενη με το βάθος πίεση και το πλάτος της διατομής. Θεωρώντας υδροστατική ισορροπία, η πίεση αυξάνει γραμμικά με το βάθος, δηλαδή $p(z) = \rho g(h - z)$, οπότε η δύναμη πίεσης γίνεται:

$$F_p = \int_0^h \rho g(h - z)W(z) dz \quad (7.7)$$

Διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μεταβολή της πίεσης κατά μήκος της διατομής, δηλαδή η οριζόντια πιεσοβαθμίδα είναι:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g A \quad (7.8)$$

Η δύναμη βαρύτητας προκύπτει από το βάρος κάθε τμήματος νερού της διατομής, κατά τη διεύθυνση ροής, το οποίο είναι το γινόμενο ($mg \sin \theta$), όπου θ η γωνία κλίσης της διατομής με το οριζόντιο επίπεδο.

$$\text{Βαρύτητα} = [(\rho dV)g] \sin \theta = \rho g A S dx \quad (7.9)$$

όπου S η κλίση του πυθμένα του ποταμού κατά τη x -διεύθυνση.

Τέλος, η δύναμη τριβής προκύπτει από τη διατμητική τάση πυθμένα επί τη διαβρεχόμενη περίμετρο:

$$\text{Τριβή} = \tau_b P dx \quad (7.10)$$

όπου η τ_b είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας ροής επί το συντελεστή σύρσεως, δηλαδή $\tau_b = C_D \rho u^2$. Άρα η δύναμη τριβής γίνεται:

$$\text{Τριβή} = C_D \rho u^2 P dx \quad (7.11)$$

Αν γράψουμε το τελικό ισοζύγιο ορμής:

$$\begin{aligned} \frac{[\rho A u dx]_{at+dt} - [\rho A u dx]_{at}}{dt} &= \rho A u^2|_{at,x} - \rho A u^2|_{at,x+dx} + F_p|_{at,x} - F_p|_{at,x+dx} + g \rho A S dx - C_D \rho P u^2 dx \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho A u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A u^2) &= -\frac{\partial F_p}{\partial x} + \rho g S A - C_D \rho u^2 P \end{aligned} \quad (7.12)$$

Με τη χρήση της εξίσωσης διατήρησης μάζας (Εξ. 7.3) και διαιρώντας με ρA , έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + g S - C_D \frac{u^2}{R_h} \quad (7.13)$$

Η παραπάνω είναι η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά μήκος ποταμού, καναλιού ή χειμάρρου και αποτελεί τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα ροής u με το βάθος h του ποταμού. Με R_h συμβολίζεται ο λόγος του εμβαδού της διατομής προς τη διαβρεχόμενη περίμετρο, ο οποίος καλείται *υδραυλική ακτίνα*.

Καθώς τα περισσότερα ποτάμια έχουν μεγάλο πλάτος και μικρό βάθος, η διαβρεχόμενη περίμετρος είναι περίπου ίση με το πλάτος ($P \sim W$), οπότε η υδραυλική ακτίνα είναι περίπου ίση με το μέσο βάθος του ποταμού (Rutherford, 1994)..

$$R_h \cong \frac{A}{W} = \bar{h} \cong h \quad (7.14)$$

Οι εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους (u και A) που ονομάζονται εξισώσεις Saint-Venant.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0 \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + gS - C_D \frac{u^2}{R_h} \quad (7.16)$$

ή αλλιώς γράφονται ως σχέσεις μεταξύ της ποτάμιας παροχής Q και της διατομής A ως εξής:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7.17)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x} - gS + C_D \frac{u^2}{R_h} = 0 \quad (7.18)$$

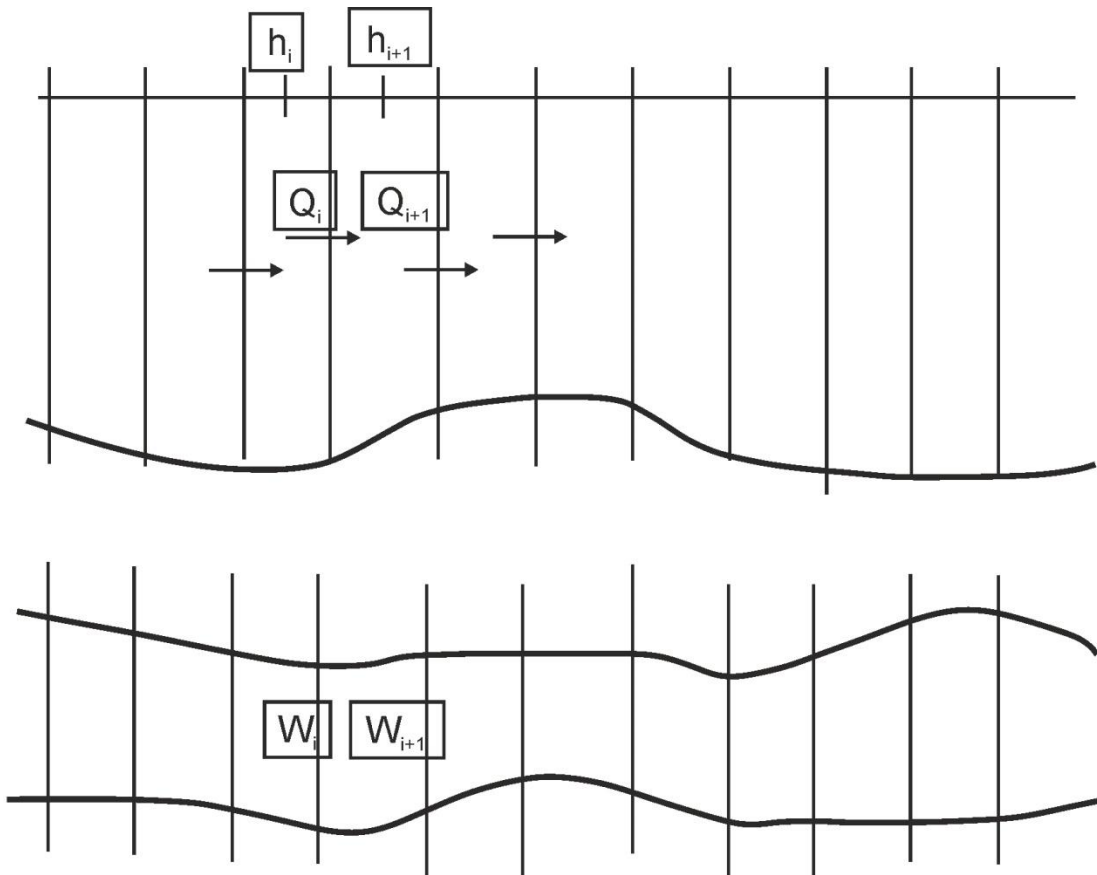
7.2. Επίλυση Εξισώσεων St. Venant

Σε περίπτωση που το ποτάμι που εξετάζουμε θεωρηθεί ως πεδίο μεταβλητού πλάτους, τότε οι εξισώσεις St. Venant απλοποιούνται με την πλευρική ολοκλήρωσή τους και τη λήψη της μέσης κατά το πλάτος ταχύτητας. Έτσι, οι ταχύτητες παρουσιάζουν μόνο τη διαμήκη συνιστώσα και αναφέρονται σε όλη τη διατομή του ποταμού. Οι εξισώσεις χωρίς την επίδραση της τριβής είναι (Ji, 2008):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{W} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2 / A)}{\partial x} = -gA \frac{\partial h}{\partial x} - gAS \quad (7.20)$$

Ο ποταμός διακριτοποιείται σε στοιχειώδη τμήματα Δx όπως φαίνεται στην Εικόνα 7.2.



Εικόνα 7.2 Διακριτοποίηση ποταμού μεταβλητού βάθους (h) και πλάτους (W).

Οι εξισώσεις γράφονται με τη μορφή πεπερασμένων διαφορών ως:

$$\begin{aligned} \frac{h_i^{n+1/2} - h_i^{n-1/2}}{\Delta t} &= -\frac{2}{W_i + W_{i+1}} \left[\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right] \\ \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} &= -\frac{(Q_{i+1}^n)^2 / A_{i+1} - (Q_{i-1}^n)^2 / A_{i-1}}{2\Delta x} - gA_i \frac{h_i^{n+1/2} - h_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x} \\ &\quad - gA_i \left[\frac{U_i^n}{C^2 R_i} + \frac{(|U_{i+1}^n| - |U_i^n|) \text{sign}(U_i^n)}{2g \cdot 2\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (7.21)$$

Οι οριακές συνθήκες εφαρμόζονται στην πρώτη και στην τελευταία διατομή του υπολογιστικού πλέγματος. Στο ανάντη όριο δίνεται συνήθως η ποτάμια παροχή, ενώ στο κατόντη όριο μπορεί να δοθεί η παλιρροιακή μεταβολή της στάθμης της θάλασσας (Dyer, 1973).

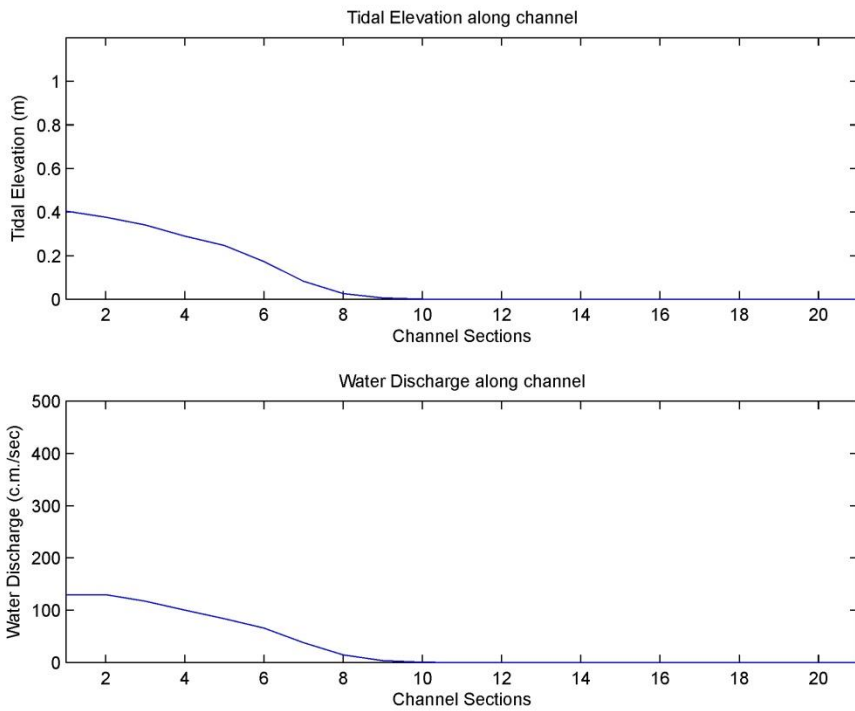
Το πρόγραμμα **Tidal.m** γραμμένο σε γλώσσα Matlab επιλύει τις παραπάνω εξισώσεις St. Venant για ροή κατά μήκος παλιρροιακού ποταμού.

```
% 1-D tidal circulation model
% developed by G. Sylaios
im = 21; % number of transects
dt = .5; % time-step
dx = 100; % space-step
c = 50; % bottom friction coeff
pr = 500; % tidal wave period
zo = 0.5; % tidal wave height
```

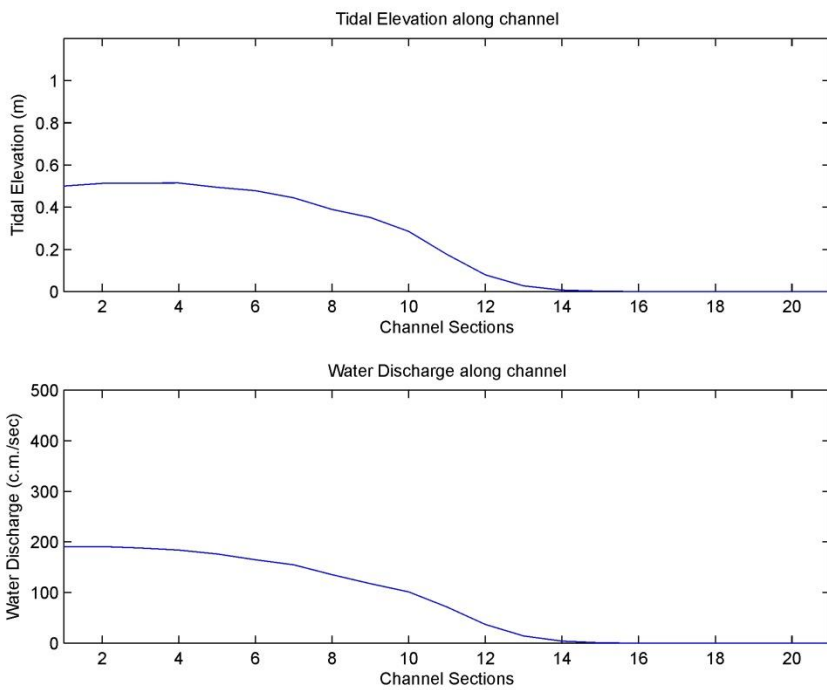
```

nm = 1000; % time-steps number per run
bk = 1;
% Zero all matrices
r = zeros(im,1); a = zeros(im,1); b = zeros(im,1); ho = zeros(im,1);
h = zeros(im,1); z = zeros(im,1); zn = zeros(im,1); q = zeros(im,1);
qn = zeros(im,1);
% Set model initial conditions
i = 1:1:im;
b(i) = 30; ho(i) = 10; z(i) = 0; q(i) = 0; qn(i) = 0;
% Initiate Model Computations
n = 0;
t = 0;
while n<150
    n = n+1; t = t+dt;
    z(1) = zo*sin(2*3.14*t/pr);
    i=2:1:im-1;
    h(i)=ho(i)+(z(i)+z(i-1))/2;
    h(1)=ho(1)+z(1);
    h(im)=ho(im)+z(im-1);
    i = 1:1:im;
    a(i)=b(i).*h(i);
    r(i)=a(i)./(b(i)+2*h(i));
    i = 1:1:im-1;
    zn(i)=z(i)-2*dt/dx*(q(i+1)-q(i))./(b(i)+b(i+1));
    i = 2:1:im-1;
    vv=0;
    vv=abs(q(i+1)./a(i+1))-abs(q(i-1)./a(i-1))/(4*9.8*dx);
    qn(i)=q(i)-dt*(q(i+1).^2./a(i+1)-q(i-1).^2./a(i-1))/(2*dx)-...
        dt*9.81*a(i).*(z(i)-z(i-1))/dx-...
        dt*9.8*a(i).*(q(i)./a(i))./(c.^2.*r(i))+vv.*sign(q(i));
    qn(1) = qn(2);
    % qn(im) = 0;
    qn(im) = z(im-1)*sqrt(9.81*b(im)*a(im));
    zn(im) = q(im)/a(im);
    i = 1:1:im;
    q(i) = qn(i);
    z(i) = zn(i);
end
f1 = figure;
h1 = subplot(2,1,1), grid;
plot(i,z(i),'-');
axis (h1, [1 21 0 1.2]);
title ('Tidal Elevation along channel')
xlabel ('Channel Sections')
ylabel ('Tidal Elevation (m)')
h2 = subplot(2,1,2), grid;
plot(i,q(i));
axis (h2, [1 21 0 500]);
title ('Water Discharge along channel')
xlabel ('Channel Sections')
ylabel ('Water Discharge (c.m./sec)')

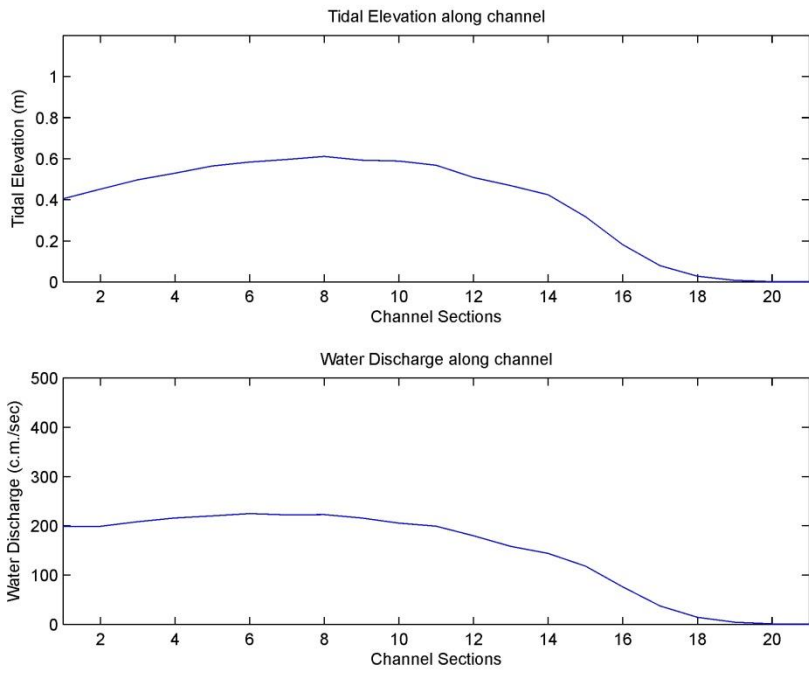
```



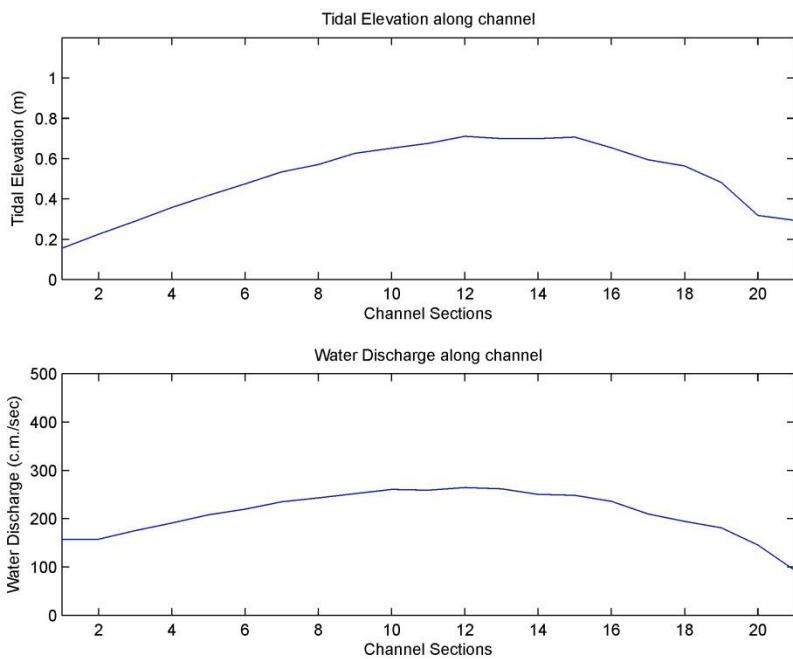
Εικόνα 7.3 Μεταβολή της παλιρροιακής στάθμης και της παροχής κατά μήκος του ποταμού το χρονικό βήμα $n=150$.



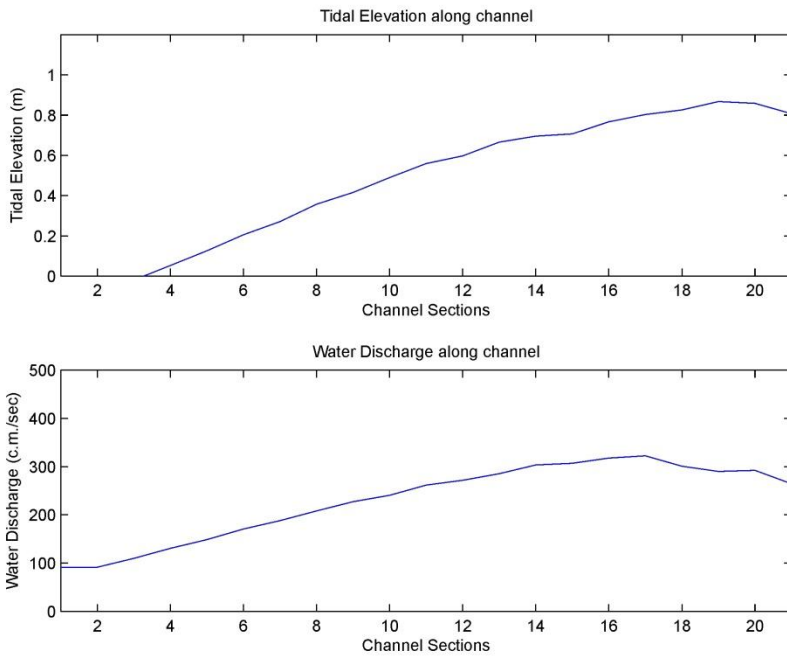
Εικόνα 7.4 Μεταβολή της παλιρροιακής στάθμης και της παροχής κατά μήκος του ποταμού το χρονικό βήμα $n=250$.



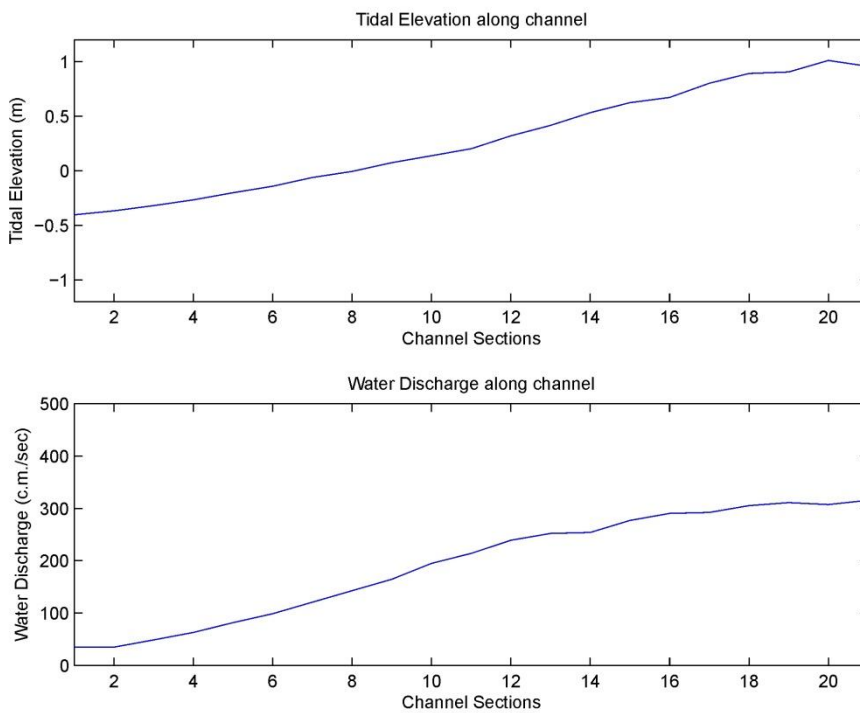
Εικόνα 7.5 Μεταβολή της παλιρροιακής στάθμης και της παροχής κατά μήκος του ποταμού το χρονικό βήμα $n=350$.



Εικόνα 7.6 Μεταβολή της παλιρροιακής στάθμης και της παροχής κατά μήκος του ποταμού το χρονικό βήμα $n=450$.



Εικόνα 7.7 Μεταβολή της παλιρροιακής στάθμης και της παροχής κατά μήκος του ποταμού το χρονικό βήμα $n=550$.



Εικόνα 7.8 Μεταβολή της παλιρροιακής στάθμης και της παροχής κατά μήκος του ποταμού το χρονικό βήμα $n=650$.

7.3. Μεταφορά και Διάχυση Ρύπου σε Ποταμό

Με τις εξισώσεις St. Venant μπορούμε να καθορίσουμε το μέσο κατά τη διατομή πεδίο ροής του ποταμού ή του χειμάρρου. Για να διαπιστώσουμε τη μεταφορά και διάχυση ενός ρύπου που εκλύεται από ένα εργοστάσιο κατά μήκος του ποταμού, θα πρέπει να συνδυάσουμε τις εξισώσεις αυτές με τη μονοδιάστατη εξίσωση μεταφοράς – διάχυσης ρύπου, δηλαδή:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (7.22)$$

όπου D_x ο συντελεστής τυρβώδους διάχυσης κατά τη x-διεύθυνση.

Η σύνδεση του συντελεστή τυρβώδους διάχυσης και των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του καναλιού γίνεται με χρήση της εξίσωσης Fischer et al. (1979).

$$D_x = 0.011 \frac{U^2 W^2}{h U^*} \quad (7.23)$$

όπου D_x ο συντελεστής διαμήκους διάχυσης ($m^2 s^{-1}$), U η ταχύτητα ροής ($m s^{-1}$), W το πλάτος του ποταμού (m), h το βάθος του ποταμού (m), U^* η διατμητική ταχύτητα ροής ($m s^{-1}$), με:

$$U^* = \sqrt{\tau_o / \rho} = \sqrt{g h S} \quad (7.24)$$

όπου τ_o η διατμητική τάση στον πυθμένα του ποταμού, ρ η πυκνότητα του νερού του ποταμού και S η κλίση του ποταμού κατά τη x – διεύθυνση.

Άλλη σχέση είναι αυτή των McQuivey & Keefer (1974):

$$D_x = 0.05937 \frac{Q}{SW} \quad (7.25)$$

όπου Q είναι η μέση παροχή του ποταμού ($m^3 s^{-1}$).

Εμπειρικές τιμές του πλευρικού συντελεστή διάχυσης κυμαίνονται μεταξύ 0.1 – 0.2, με προσδιοριζόμενες τιμές σε αρδευτικό κανάλι μεταξύ 0.24 – 0.25. Ο συντελεστής πλευρικής τυρβώδους διάχυσης δίνεται από τη σχέση:

$$D_y = 0.6 \bar{h} U^* \quad (7.26)$$

Το μήκος του ποταμού (L_m) που απαιτείται για την πλήρη ανάμειξη μίας ουσίας δίνεται από τις σχέσεις:

A) για πλευρική απορροή ουσίας

$$L_m = 0.4 U \frac{W^2}{D_y} \quad (7.27)$$

B) για απορροή από το κέντρο του ποταμού

$$L_m = 0.1 U \frac{W^2}{D_y} \quad (7.28)$$

Γ) για πλευρική απορροή (Yotsukura & Sayre, 1976)

$$L_m = 8.52U \frac{W^2}{h} \quad (7.29)$$

Ο συντελεστής κατακόρυφης τυρβώδους διάχυσης D_z εξαρτάται κατά βάση από το προφίλ της ταχύτητας. Το λογαριθμικό προφίλ ταχύτητας μας δίνει μία σχέση του συντελεστή αυτού ως:

$$D_z = 0.067 \bar{h} U_* \quad (7.30)$$

7.4. Αναλυτική Επίλυση Εξίσωσης Μεταφοράς-Διάχυσης Ρύπου σε Ποταμό

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε την κατανομή της συγκέντρωσης ενός ρύπου κατάντη μίας σημειακής πηγής σε ένα κανάλι/ποτάμι με χρήση της αναλυτικής λύσης της εξίσωσης μεταφοράς-διάχυσης ρύπου. Στις περισσότερες περιπτώσεις η ροή θα έχει μεγαλύτερο πλάτος από ό,τι βάθος (έστω τυπικό κανάλι πλάτους 30 μ και βάθους 1 μ).

Θεωρώντας ότι ο συντελεστής πλευρικής διάχυσης είναι δεκαπλάσιος του κατακόρυφου ($D_y = 10 D_z$), ο χρόνος πλήρους ανάμειξης θα είναι ανάλογος του τετραγώνου του μήκους πλήρους ανάμειξης. Επομένως, ο χρόνος πλευρικής ανάμειξης θα είναι $30^2/10 = 90$ φορές μεγαλύτερος του χρόνου κατακόρυφης ανάμειξης.

Θεωρώντας στη συνέχεια ένα κανάλι ορθογωνικής διατομής βάθους h , στο οποίο εκρέει μάζα M ενός ρύπου ανά μονάδα χρόνου, η συγκέντρωση C του ρύπου κατάντη της πηγής δίνεται από τη σχέση:

$$C(x, y) = \left(\frac{M}{Uh \sqrt{4\pi D_y x / \bar{U}}} \right) \exp(-y^2 \bar{U} / 4D_y x) \quad (7.31)$$

υπό την προϋπόθεση ότι το κανάλι έχει απεριόριστο πλάτος. Οι συντεταγμένες (x, y) όπου προσδιορίζεται η συγκέντρωση του ρύπου εκφράζουν τη διαμήκη κατάντη απόσταση x από την πηγή εκπομπής του ρύπου και την εγκάρσια απόσταση y από την δεξιά κατάντη όχθη του ποταμού.

Αν το κανάλι έχει πλάτος W , τότε ορίζουμε τις αδιάστατες παραμέτρους:

$$C_o = \frac{M}{(UhW)}, \quad x' = \frac{x D_y}{U W^2}, \quad y' = \frac{y}{W}$$

τότε η συγκέντρωση κατάντη της πηγής δίνεται:

$$\frac{C}{C_o} = \frac{1}{(4\pi x')^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \exp[-(y' - 2n - y'_o)^2 / 4x'] + \exp[-(y' - 2n + y'_o)^2 / 4x'] \} \quad (7.32)$$

όπου C_o η συγκέντρωση στην πηγή εκροής, y'_o η πλευρική θέση της πηγής ($y'_o = 0$ και $y'_o = 1$ αντιστοιχούν στις όχθες του καναλιού και $y'_o = 0,5$ στο κέντρο του καναλιού) και y' η θέση στο σημείο προσδιορισμού της συγκέντρωσης του ρύπου (όμοια $y' = 0$ και $y' = 1$ αντιστοιχούν στις όχθες του καναλιού και $y' = 0,5$ στο κέντρο του καναλιού). Ο μετρητής n κινείται από το $-\infty$ έως το $+\infty$, αλλά έχει βρεθεί ότι η λύση δε διαφέρει σημαντικά για τιμές n μεταξύ -1 έως $+1$.

Οι παραπάνω σχέσεις συνδέουν την ταχύτητα ροής με τους τυρβώδεις συντελεστές διάχυσης ενός ρέοντος υδατικού συστήματος. Ωστόσο, συνήθως μετρήσεις ταχύτητας ή παροχής σε τέτοια συστήματα είναι σπάνιες. Η εξίσωση Manning που δίνεται παρακάτω συνδέει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενός καναλιού με την ταχύτητα ροής του:

$$U = \frac{C_o}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (7.33)$$

όπου $C_o = 1$, n = συντελεστής τριβής πυθμένα Manning, R = υδραυλική ακτίνα ($= A_C/P$), P = η διαβρεχόμενη περίμετρος του καναλιού, A_C η διαβρεχόμενη διατομή του καναλιού και S = η διαμήκης κλίση του πυθμένα του καναλιού.

Ενδεικτικές τιμές συντελεστή Manning για διάφορα υλικά πυθμένα δίνονται στον Πίνακα 7.1.

Υλικό	n
Τσιμέντο	0.012
Κροκαλώδης πυθμένας με τσιμέντο πλευρικά	0.020
Κροκαλώδης πυθμένας με πέτρες πλευρικά	0.023
Φυσικό κανάλι καθαρό και ευθύγραμμο	0.030
Φυσικό κανάλι καθαρό, καμπύλης τροχιάς	0.040
Φυσικό κανάλι με καλάμια, καμπύλης τροχιάς	0.050

Πίνακας 7.1 Τιμές συντελεστή Manning (n) για διάφορα υλικά πυθμένα.

Η παροχή συνδέεται με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του καναλιού από τη σχέση (Fischer et al., 1979):

$$Q = \frac{C_o}{n} A_C R^{2/3} S^{1/2} \quad (7.34)$$

Η διατομή του καναλιού, η υδραυλική ακτίνα και το βάθος συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} A_C &= (W + Sh)h \\ P &= W + 2h\sqrt{S^2 + 1} \\ R &= \frac{A_C}{P} = \frac{(W + Sh)h}{W + 2h\sqrt{S^2 + 1}} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση Manning παίρνουμε:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[(W + Sh)h]^{5/3}}{(W + 2h\sqrt{S^2 + 1})^{2/3}} S^{1/2} \quad (7.35)$$

Σε περίπτωση που η παροχή Q είναι γνωστή, τότε με τη χρήση της παραπάνω εξίσωσης προσδιορίζουμε το μέσο βάθος ροής (Prandle, 2009).

Ασκηση 7.1

Βιομηχανία εκλύει ανά ημέρα 3 εκατομμύρια κ.μ. ενός διαλυμένου ρύπου συγκέντρωσης 200 ppm κοντά στο κέντρο ενός μεγάλου πλάτους ποταμού. Το ποτάμι έχει μέσο βάθος 3 μ, μέση ταχύτητα ροής 1 m/s και διατμητική ταχύτητα 0.2 m/s. Αν ο ρύπος έχει πλήρη ανάμειξη, να προσδιοριστεί το πλάτος του πλουμίου και η μέγιστη συγκέντρωση σε απόσταση 1.000 μ κατάντη της εκροής.

Λύση

Η ροή μάζας δίνεται:

$$\dot{M} = QC = \frac{3.000.000 m^3}{86.400 s} 200 ppm = 6.944,4 (m^3 / s) \cdot ppm$$

Ο συντελεστής πλευρικής διάχυσης ρύπου είναι:

$$D_y = 0,6 h U_* = 0,6 \times 3 \times 0,2 = 0,36 m^2 / s$$

Το πλάτος του πλουμίου είναι:

$$b = 4\sigma = 4\sqrt{2D_y x / \bar{U}} = 4\sqrt{2 \times 0,36 \times 1000 / 1} = 107 m$$

Η μέγιστη συγκέντρωση ρύπου είναι:

$$C(x, y) = \left(\frac{M}{\bar{U} h \sqrt{4\pi D_y x / \bar{U}}} \right) = \frac{6.944}{1 \times 3 \times \sqrt{4 \times 3,14 \times 0,36 \times 1000 / 1}} = 34,42 ppm$$

Ασκηση 7.2

Βιομηχανία εκκλύει συντηρητική ουσία στις όχθες ενός ποταμού με ορθογωνική διατομή. Το ποτάμι έχει πλάτος 60 μ, μέσο βάθος 5 μ και μέση ροή 2 m/s. Η κλίση του είναι 0,0002. Να υπολογιστεί το μήκος πλήρους ανάμειξης, δηλαδή η περιοχή όπου η συγκέντρωση του ρύπου διαφέρει κατά λιγότερο από 5% από τη μέση του συγκέντρωση.

Λύση

Η διατμητική ταχύτητα είναι:

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{ghS} = \sqrt{9,81 \times 5 \times 0,0002} = 0,09 m / s$$

Ο συντελεστής πλευρικής διάχυσης είναι:

$$D_y = 0,15 h U_* = 0,15 \times 5 \times 0,09 = 0,075 m^2 / s$$

Το μήκος πλήρους ανάμειξης ρύπου για πλευρική απορροή δίνεται:

$$L_m = 0,4 U \frac{W^2}{D_y} = 0,4 \times 2 \times 60^2 / 0,075 = 38.400 m$$

Ασκηση 7.3

Σε ποταμό πλάτους 20 μ και βάθους 3 μ, η μέση ταχύτητα ροής είναι 0,8 m/s, ο συντελεστής πλευρικής ανάμειξης είναι 0,5 m²/s και ο συντελεστής διαμήκους ανάμειξης είναι 500 m²/s. Να υπολογιστεί το μήκος πλήρους ανάμειξης για εισροή στο κέντρο του ποταμού, η τυπική απόκλιση της κατανομής Gauss και ο χρόνος που απαιτείται για την πλήρη ανάμειξη του πλουμίου.

Λύση

Το μήκος πλήρους ανάμειξης για εκροή από το κέντρο του ποταμού δίνεται:

$$L_m = 0.4U \frac{W^2}{D_y} = 0,4 \times 0,8 \times 20^2 / 0,5 = 256 \text{ m}$$

Η απόσταση αυτή με ταχύτητα ροής 0,8 m/s καλύπτεται σε 320 s, δηλαδή σε 5 λεπτά.

$$\sigma^2 = 2D_x t = 2 \times 500 \times 320 = 3,2 \times 10^5 \text{ m} \Rightarrow \sigma = 565 \text{ m}$$

Ο χρόνος που απαιτείται για την πλήρη ανάμειξη του πλουμίου είναι:

$$t = \frac{6\sigma}{U} = 4.242 \text{ s} \cong 1 \text{ ώρα και } 10 \text{ λεπτά}$$

Ασκηση 7.4

Ένα τραπεζοειδούς διατομής κανάλι έχει τα εξής χαρακτηριστικά: $Q = 6,25 \text{ m}^3/\text{s}$, $SX = 0,0002$, $W = 10 \text{ m}$, $Sy = 2:1$, $n=0,035$. Να υπολογιστεί το μέσο βάθος ροής, το εμβαδόν διατομής και η ταχύτητα ροής του καναλιού.

Λύση

Από τη σχέση:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[(W + Sh)h]^{5/3}}{(W + 2h\sqrt{S^2 + 1})^{2/3}} S^{1/2}$$

Αντικαθιστώ και βρίσκω $h = 1,24 \text{ m}$. Η διαβρεχόμενη διατομή είναι:

$$A_c = (W + Sh)h = 15,5 \text{ m}^2$$

Τέλος, η μέση ταχύτητα ροής σε όλη τη διατομή προσδιορίζεται ως:

$$U = \frac{Q}{A_c} \Rightarrow U = 0,403 \text{ m/s}$$

7.5. Αριθμητική Επίλυση Εξίσωσης Μεταφοράς-Διάχυσης Ρύπου σε Ποταμό

Με τη συνδυασμένη χρήση των εξισώσεων St. Venant και την εξίσωση συναγωγής-διάχυσης ρύπου έχουμε το σύστημα:

$$\frac{\eta_i^{n+1/2} - \eta_i^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{2}{B_i + B_{i+1}} \left[\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = -\frac{(Q_{i+1}^n)^2 / A_{i+1} - (Q_{i-1}^n)^2 / A_{i-1}}{2\Delta x} - gA_i \frac{\eta_i^{n+1/2} - \eta_i^{n-1/2}}{\Delta x} - gA_i \left[\frac{U_i^n}{C^2 R_i} + \frac{(|U_{i+1}^n| - |U_i^n|) \text{sign}(U_i^n)}{2g \cdot 2\Delta x} \right]$$

$$c_i^{n+1} = c_i^n - (Q_i^n / A_i) \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} + D \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Ο κώδικας Matlab για την επίλυση του συστήματος αυτού δίνεται παρακάτω:

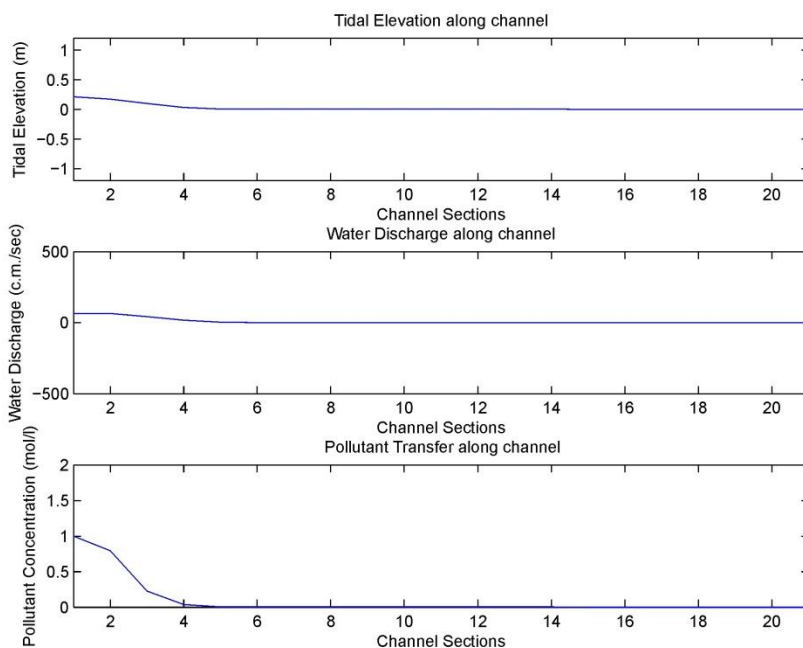
```
% 1-D tidal circulation model
% developed by G. Sylaios
% define initial parameters
im = 21; dt = .1; dx = 100; ch = 50; pr = 500; zo = 0.5; nm = 1000; bk = 1; D = 0.01;
% Zero all matrices
r = zeros(im,1); a = zeros(im,1); b = zeros(im,1); ho = zeros(im,1);
h = zeros(im,1); z = zeros(im,1); zn = zeros(im,1); q = zeros(im,1);
qn = zeros(im,1); c = zeros(im,1); cn = zeros(im,1); co = zeros(im,1);
% Set model initial conditions
i = 1:1:im;
b(i) = 30; ho(i) = 10; z(i) = 0; q(i) = 0; qn(i) = 0;
i = 1:1:2;
c(i) = 1.0; cn(i) = 1.0; co(i) = 1.0;
% Start model computations
n = 0;
t = 0;
while n<950
    n = n+1; t = t+dt;
    z(1) = zo*sin(2*3.14*t/pr);
    i=2:1:im-1;
    h(i)=ho(i)+(z(i)+z(i-1))/2;
    h(1)=ho(1)+z(1);
    h(im)=ho(im)+z(im-1);
    i = 1:1:im;
    a(i)=b(i).*h(i);
    r(i)=a(i)./(b(i)+2*h(i));
    i = 1:1:im-1;
    zn(i)=z(i)-2*dt/dx*(q(i+1)-q(i))./(b(i)+b(i+1));
    i = 2:1:im-1;
    vv=0;
    vv=abs(q(i+1)./a(i+1))-abs(q(i-1)./a(i-1))/(4*9.8*dx);
    qn(i)=q(i)-dt*(q(i+1).^2./a(i+1)-q(i-1).^2./a(i-1))/(2*dx)-
        dt*9.81*a(i).*(z(i)-z(i-1))/dx-
        dt*9.8*a(i).*(q(i)./a(i))./(ch.^2.*r(i))
    +vv.*sign(q(i));
    qn(1) = qn(2);
    cn(i) = c(i) - (qn(i)/a(i)) * (dt/(2*dx)) * (c(i+1) -
        c(i-1)) + (D*dt/dx*dx) * (c(i+1) - 2*c(i) + c(i-1));
    % qn(im) = 0;
    qn(im) = z(im-1)*sqrt(9.81*b(im)*a(im));
    zn(im) = q(im)/a(im);
    i = 1:1:im;
    q(i) = qn(i);
```

```

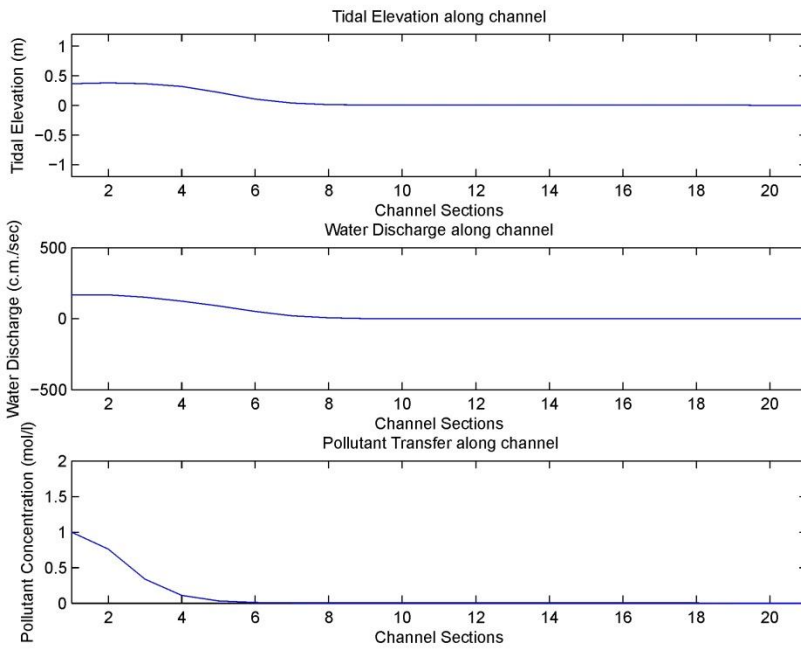
z(i) = zn(i);
co(i) = c(i);
c(i) = cn(i);
end
f1 = figure;
h1 = subplot(3,1,1), grid;
plot(i, z(i), '-');
axis (h1, [1 21 -1.2 1.2]);
title ('Tidal Elevation along channel')
xlabel ('Channel Sections')
ylabel ('Tidal Elevation (m)')
h2 = subplot(3,1,2), grid;
plot(i, q(i));
axis (h2, [1 21 -500 500]);
title ('Water Discharge along channel')
xlabel ('Channel Sections')
ylabel ('Water Discharge (c.m./sec)')
h3 = subplot(3,1,3), grid;
plot(i, c(i));
axis (h3, [1 21 0 2]);
title ('Pollutant Transfer along channel')
xlabel ('Channel Sections')
ylabel ('Pollutant Concentration (mol/l)')

```

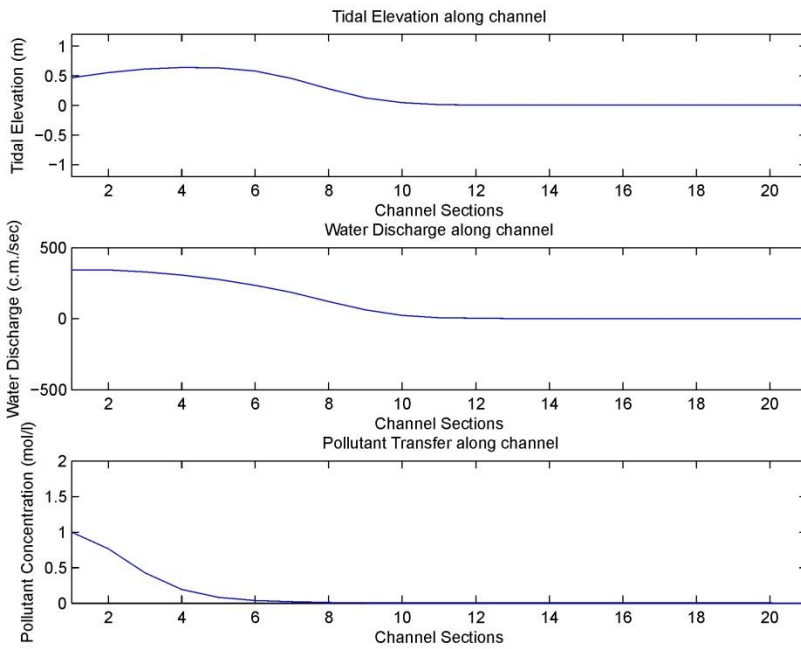
Τα αποτελέσματα εφαρμογής του μαθηματικού ομοιώματος δίνονται παρακάτω.



Εικόνα 7.9 Μεταβολή της παλιρροιακής στάθμης, της ποτάμιας παροχής και της συγκέντρωσης ρύπου κατά μήκος του ποταμού το χρονικό βήμα $n=350$.



Εικόνα 7.10 Μεταβολή της παλιρροιακής στάθμης, της ποτάμιας παροχής και της συγκέντρωσης ρύπου κατά μήκος του ποταμού το χρονικό βήμα $n=650$.



Εικόνα 7.11 Μεταβολή της παλιρροιακής στάθμης, της ποτάμιας παροχής και της συγκέντρωσης ρύπου κατά μήκος του ποταμού το χρονικό βήμα $n=950$.

Βιβλιογραφία

- Dyer, K. (1973).** *Estuaries: A physical introduction*. London: John Wiley.
- Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C., Imberger, J., & Brooks, N. H. (1979).** *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press.
- Ji, Z.-G. (2008).** *Hydrodynamics and water quality: modeling rivers, lakes, and estuaries*: John Wiley & Sons.
- McQuivey, R. S., & Keefer, T. N. (1974).** *Simple method for predicting dispersion in streams*. Journal of Environmental Engineering Div. ASCE 110(4), pp. 997-1111.
- Prandle, D. (2009).** *Estuaries: dynamics, mixing, sedimentation and morphology*: Cambridge University Press.
- Rutherford, J. (1994).** *River mixing*: John Wiley & Son Ltd.
- Yotsukura, N., & Sayre, W. W. (1976).** *Transverse mixing in natural channels*. Water Resources Research(12), pp. 695-704.

Κεφάλαιο 8

Μείξη σε Λίμνες και Ταμιευτήρες

Σύνοψη

Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει το μονοδιάστατο μαθηματικό ομοίωμα κατά την κατακόρυφη διεύθυνση και εισάγει το φοιτητή στη κατανόηση του κύκλου θερμικής στρωματοποίησης -αποστρωματοποίησης λιμνών και ταμιευτήρων. Αναλύονται οι όροι του επιλιμνίου, μεταλιμνίου και υπολιμνίου και περιγράφεται ο βιο-γεωχημικός και οικολογικός κύκλος των θρεπτικών αλάτων και της πρωτογενούς παραγωγής στα συστήματα αυτά, ώστε να κατανοηθεί η σημασία του θερμοκλινούς. Δίνονται αδιάστατοι συντελεστές έκφρασης του βαθμού στρωμάτωσης της υδάτινης στήλης και εισάγεται η έννοια της θερμικής ροής, της κατακόρυφης συναγωγής και της συναγωγής διείσδυσης. Περιγράφεται το θερμικό ισοζύγιο λιμνών και ταμιευτήρων και δίνεται το ομοίωμα σύνδεσης του θερμικού ισοζυγίου με τις συνθήκες στρωμάτωσης - μείξης της υδάτινης στήλης. Συζητείται η δράση του ανέμου στη μεταβολή των συνθηκών αυτών. Τέλος, περιγράφεται το μαθηματικό ομοίωμα μείξης ρύπων σε συνθήκες στρωμάτωσης - μείξης υδάτινης στήλης.

8.1. Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται σε φυσικές διεργασίες μείξης που συμβαίνουν σε σχετικά στάσιμα υδατικά συστήματα, από μικρούς ταμιευτήρες έως μεγάλες λίμνες, όπως π.χ., η Λίμνη Βαϊκάλη. Οι λίμνες και οι ταμιευτήρες αποτελούν φυσικές ή τεχνητές λεκάνες, των οποίων η μεταβολή της ποιότητας του νερού οφείλεται σε φυσικά ή ανθρωπογενή αίτια. Γενικά, τα συστήματα αυτά χαρακτηρίζονται από πολύ υψηλή πρωτογενή παραγωγικότητα (primary production), δηλαδή υψηλή παραγωγή οργανικής ύλης ανά μονάδα όγκου νερού. Η υψηλή αυτή παραγωγή της οργανικής ύλης λαμβάνει χώρα στην ευφωτική ζώνη της λίμνης, δηλαδή στο ανώτερο στρώμα της, στο οποίο η ένταση της ηλιακής ακτινοβολίας είναι ίση με το 1% της προσπίπτουσας στην επιφάνεια ηλιακής ακτινοβολίας. Η περιοχή αυτή της λίμνης καλείται τροφογενετική ζώνη. Εδώ η συγκέντρωση οργανικού υλικού είναι πολύ υψηλή λόγω της επιτόπιας παραγωγής (αυτόχθονων οργανικών ουσιών) και λόγω της μεταφοράς μέσω των χειμάρρων και των ποταμών από την ευρύτερη λεκάνη απορροής της λίμνης (αλλόχθονων οργανικών ουσιών). Η παραγωγή φυτοπλαγκτόν στο επιφανειακό στρώμα της λίμνης συνοδεύεται από τη παραγωγή ζωοπλαγκτόν το αμέσως επόμενο χρονικό διάστημα και καθώς τα περισσότερα φυτικά είδη διαβιούν για περίπου 3 – 4 εβδομάδες, μετά την ολοκλήρωση του κύκλου ζωής τους μετατρέπονται σε νεκρή οργανική ύλη η οποία αποικοδομείται, προσροφάται στο αιωρούμενο υλικό και καθιζάνει προς το πυθμιαίο στρώμα της λίμνης (τροφολυτική ζώνη).

Οι ταμιευτήρες (reservoirs) είναι τεχνητές λίμνες που κατασκευάζονται για την αποθήκευση νερού με σκοπό την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, τον περιορισμό των πλημμυρών ή την αρδευτική ή υδρευτική χρήση του νερού. Οι ταμιευτήρες μεταβάλλουν τη θερμοκρασία του κατάντη νερού και πολλές φορές τη συγκέντρωση αιωρούμενων σωματιδίων, τη συγκέντρωση θρεπτικών αλάτων και τη θολερότητά του. Η Εικόνα 8.1 παρουσιάζει τη θέση του Ταμιευτήρα Πλατανόβρυσης στο βόρειο τμήμα του ποταμού Νέστου.

Οι λίμνες και οι ταμιευτήρες διαφέρουν από τα ποτάμια στο ότι έχουν μεγαλύτερα βάθη και τις ασθενέστερες οριζόντιες ταχύτητες. Το νερό παραμένει στο εσωτερικό του συστήματος για μακρό χρονικό διάστημα που ορίζεται ως χρόνος παραμονής (residence time). Πρόκειται για το μέσο χρόνο που δαπανά ένα σωματίδιο νερού στο σύστημα από την ώρα της εισροής έως την ώρα της εκροής του. Όσο περισσότερο παραμένει στο σύστημα ένα σωματίδιο νερού, τόσο περισσότερο δέχεται τοπικές επιδράσεις, όπως θέρμανση ή ψύξη, ιζηματοποίηση, βιολογικές ή χημικές μετατροπές, κ.λπ. Αν ο όγκος του ταμιευτήρα είναι V και ο ρυθμός εισροής προς τον ταμιευτήρα είναι Q , τότε ο χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι (Fischer et al., 1979):

$$T = \frac{V}{Q}$$

(8.1)

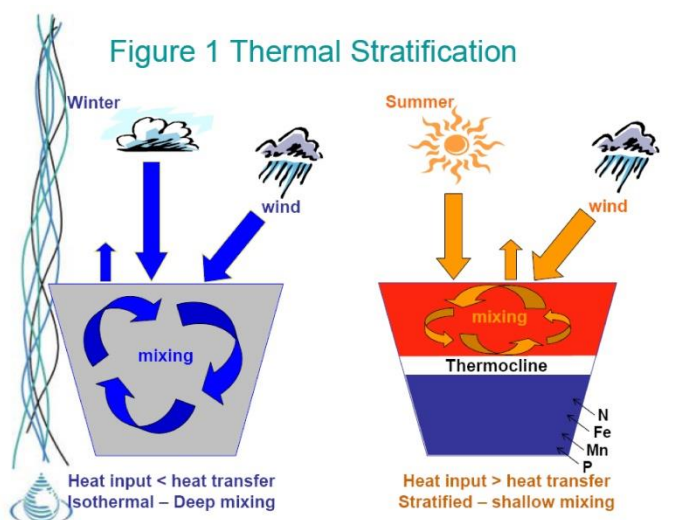
Όταν ο χρόνος παραμονής υπερβαίνει το ένα έτος, θεωρούμε ότι οι εποχιακές μεταβολές είναι ιδιαίτερα σημαντικές και ότι οι θερμικές επιδράσεις (θερινή θέρμανση και χειμερινή ψύξη) ελέγχουν τη δυναμική της λίμνης, και ειδικότερα το επίπεδο τύρβης της, άρα και τη δυνατότητά της να αναμειξει και να διαχύσει ρύπους.



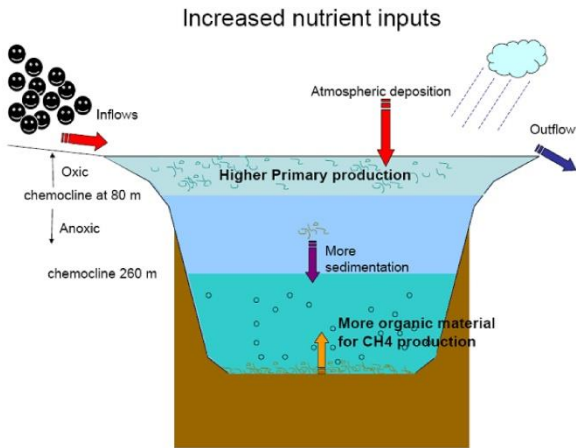
Εικόνα 8.1 Ο ταμιευτήρας Πλατανόβρυσης στον ποταμό Νέστο.

Ο κύριος παράγοντας που ρυθμίζει τις φυσικές, χημικές και βιολογικές διεργασίες στο εσωτερικό της λίμνης ή του ταμιευτήρα είναι η θερμοκρασία, η οποία προκαλεί τη θερμική στρωμάτωση (thermal stratification) της λίμνης κατά την άνοιξη και το καλοκαίρι ή τη θερμική ανάμειξη (thermal mixing) της λίμνης κατά το φθινόπωρο και τον χειμώνα (Εικόνα 8.2).

Παρατηρούμε τον ετήσιο κύκλο μίας λίμνης ξεκινώντας από τον χειμώνα. Βρίσκουμε ότι η λίμνη χαρακτηρίζεται ως θερμικά ομοιόμορφη, από την επιφάνεια ως το πυθμένα. Το επιφανειακό νερό της ψύχεται, αυξάνει την πυκνότητά του και βυθίζεται. Αυτήν την περίοδο επικρατούν έντονα κατακόρυφα ρεύματα (convective currents). Οι άνεμοι είναι ισχυροί αυξάνουν τη τύρβη του επιφανειακού στρώματος διατηρώντας τη λίμνη σε ομοιόμορφη κατάσταση. Τα ανεμογενή κύματα στην επιφάνεια της λίμνης αυξάνουν την οξυγόνωση του νερού της μέχρι τα βαθύτερα στρώματα.



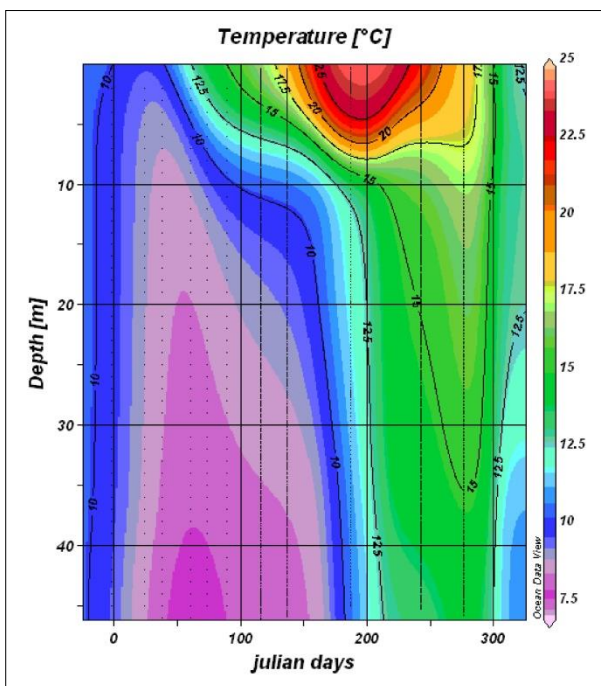
Εικόνα 8.2 Θερμικός κύκλος στρωματοποίησης – αποστρωματοποίησης σε μία λίμνη ή ταμιευτήρα.



Εικόνα 8.3 Βιογεωχημική επίδραση της θερμικής στρωμάτωσης σε λίμνη.

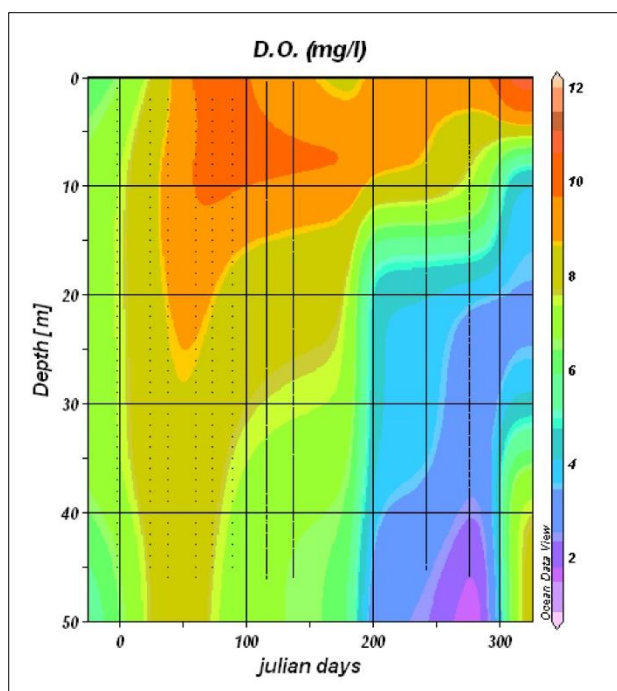
Κατά την άνοιξη και μέχρι το καλοκαίρι η θερμοκρασία του αέρα αυξάνει, προκαλώντας αύξηση στην επιφανειακή θερμοκρασία της λίμνης και συνεπώς στη θερμική στρωμάτωση της. Διακρίνουμε τρία κύρια στρώματα: α) το επιλίμνιο (από 0 έως 25 μ), δηλαδή το στρώμα επιφανειακής ανάμειξης, όπου επικρατούν σχετικά ισόμορφες συνθήκες, άρα η κατανομή της θερμοκρασίας είναι ομοιόμορφη με το βάθος, β) το μεταλίμνιο που συμπίπτει με το θερμοκλινές στρώμα, όπου η θερμοκρασία μεταβάλλεται (μειώνεται) απότομα με το βάθος και γ) το υπολίμνιο που αποτελεί το σχετικά ισόθερμο πυθμιαίο στρώμα (Sylaios et al., 2008).

Η παρουσία της θερμικής αυτής στρωμάτωσης επηρεάζει σημαντικά την κατανομή του διαλυμένου οξυγόνου (DO) και των θρεπτικών αλάτων και άλλων ουσιών. Κατά την άνοιξη η πρωτογενής παραγωγή (δηλαδή η φωτοσύνθεση) αυξάνει τη συγκέντρωση DO στο επιλίμνιο, το οποίο δεν μεταφέρεται σε μεγαλύτερα βάθη λόγω της παρουσίας του θερμοκλινούς. Η παραγωγή πλαγκτού στο επιλίμνιο οδηγεί στη δημιουργία νεκρής οργανικής ύλης, η οποία κινείται κατακόρυφα έως το υπολίμνιο (Sylaios et al., 2008). Η αποσύνθεση της νεκρής αυτής οργανικής ύλης στον πυθμένα της λίμνης το καλοκαίρι καταναλώνει το υπάρχον DO, με αποτέλεσμα να συνεχίζεται υπό συνθήκες υποξίας ή ανοξίας (αερόβιες ή αναερόβιες συνθήκες) (Εικόνα 8.3).



Εικόνα 8.4 Ετήσια κατανομή θερμοκρασίας νερού με το βάθος στη φραγμαλίμνη Πλατανόβρυσης.

Η μείωση της θερμοκρασίας του αέρα το φθινόπωρο και τον χειμώνα εξασθενεί το θερμοκλινές προκαλώντας κατακόρυφη μείξη στο εσωτερικό της λίμνης. Η ψύξη και η βύθιση επιφανειακών μαζών προκαλούν την άνοδο του νερού του πυθμένα, το οποίο είναι πλούσιο σε θρεπτικά άλατα που εκλύθηκαν κατά την αποικοδόμηση του φυτοπλαγκτού. Τα θρεπτικά αυτά άλατα φθάνουν στην επιφάνεια της λίμνης το φθινόπωρο και υπό την επίδραση της ηλιακής ακτινοβολίας είναι δυνατή η εκ νέου παραγωγή φυτοπλαγκτού (δευτερογενής παραγωγή – secondary production).



Εικόνα 8.5 Ετήσια κατανομή διαλελυμένου οξυγόνου με το βάθος στη φραγμαλίμνη Πλατανόβρυσης.

Η θερμική στρωμάτωση των λιμνών εξαρτάται και από τα μορφολογικά χαρακτηριστικά τους. Συνήθως οι βαθιές λίμνες έχουν σταθερή στρωμάτωση ως το φθινόπωρο, ενώ οι αβαθείς είναι θερμικά ομογενοποιημένες καθ' όλο το έτος. Μία σειρά κριτήρια έχουν αναπτυχθεί για να διακρίνουμε μία λίμνη ως θερμικά στρωματοποιημένη ή θερμικά ομοιογενή (Wetzel, 2001).

1. α) αν $\alpha < 10$ και $F_d < 0.01$, τότε η λίμνη είναι θερμικά στρωματοποιημένη,
β) αν $\alpha > 10$ και $F_d > 0.01$, τότε η λίμνη είναι θερμικά ομοιογενής,

όπου α είναι ο λόγος των ετήσιων εισροών νερού στη λίμνη (V_{in}) προς το συνολικό όγκο της λίμνης (V_{Lake}) και F_d είναι ο αριθμός Froude που ορίζεται ως:

$$F_d = \sqrt{\frac{Q^2}{\Delta\rho g z^3}} \quad (8.2)$$

όπου Q η παροχή των εισροών στη λίμνη, $\Delta\rho$ η διαφορά πυκνότητας επιλιμνίου και υπολιμνίου και z το βάθος της λίμνης.

2. Ο τοπικός αριθμός Richardson Ri , ο οποίος ορίζεται ως:

$$Ri = -\frac{g}{\rho} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \quad (8.3)$$

Όσο μεγαλύτερη η τιμή του Ri , τόσο υψηλότερη η στρωματοποίηση της υδάτινης στήλης, ενώ όταν αυτή προσεγγίζει το μηδέν, επικρατούν συνθήκες πλήρους μείξης και σε αρνητικές τιμές επικρατεί ασταθής στρωματοποίηση, η οποία οδηγεί σε αναστροφή της υδάτινης στήλης. Ο αριθμός αυτός εκφράζει την τοπική στρωματοποίηση της στήλης και απαιτεί πολλά δεδομένα (προφίλ) ταχύτητας ροής και πυκνότητας, δηλαδή κυρίως θερμοκρασίας.

3. Ο αριθμός στρώματος Richardson Ri_L ως:

$$Ri_L = \frac{\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right) g D}{u^2} \quad (8.4)$$

όπου D το πάχος του επιλιμνίου, $\Delta \rho$ η διαφορά πυκνότητας επιλιμνίου και υπολιμνίου και u η ταχύτητα ροής στο επιλίμνιο.

4. Ο αριθμός Froude Fi ο οποίος προκύπτει ως η τετραγωνική ρίζα του ανάστροφου του Ri_L , ως:

$$Fi = \frac{u}{\sqrt{\frac{\Delta \rho}{\rho} g D}} \quad (8.5)$$

Ο αριθμός Froude προσδιορίζει τη στρωματοποίηση της υδάτινης στήλης συγκρίνοντας την ταχύτητα ροής του επιφανειακού στρώματος ως προς την ταχύτητα προώθησης ενός κυματισμού που αναπτύσσεται στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων.

- α) αν $Fi \ll 1$, τότε επικρατεί στρωματοποίηση στη λίμνη, ενώ
β) αν $Fi \cong 1$, τότε επικρατεί μείξη στη λίμνη.

8.2. Στρωματοποίηση

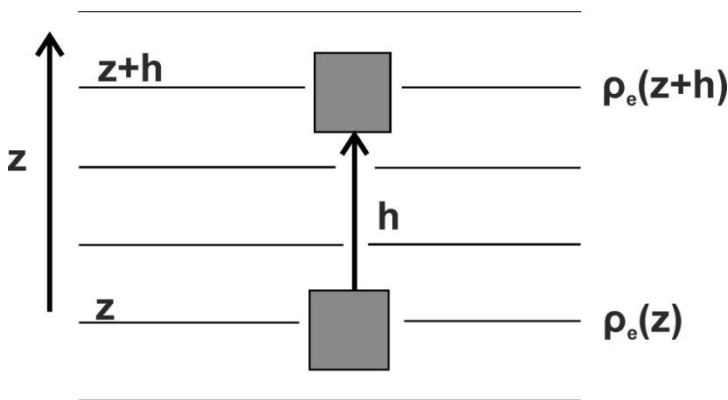
Η στρωματοποίηση της υδάτινης στήλης της λίμνης προκύπτει ως συνέπεια της θέρμανσής της, δηλ. το νερό που γίνεται θερμότερο, διαστέλλεται αποκτώντας μικρότερη πυκνότητα. Οι κατακόρυφες διαφορές πυκνότητας δημιουργούν ανωστικές δυνάμεις. Η κατανομή της πυκνότητας στην υδάτινη στήλη μιας λίμνης είναι συνήθως γραμμική ως προς τη θερμοκρασία της, δηλ.

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (8.6)$$

όπου ρ_0 η πυκνότητα αναφοράς που προκύπτει σε συνθήκες θερμοκρασίας T_0 και α ο συντελεστής θερμικής διαστολής. Για γλυκό νερό θερμοκρασίας 10-20 °C η τιμή του $\alpha \sim 2.57 \times 10^{-4} (\text{°C})^{-1}$. Για τιμή $T_0 = 15^\circ \text{C}$, η τιμή $\rho_0 = 999 \text{ kg} / \text{m}^3$. Ωστόσο, η θερμοκρασία και η πυκνότητα μεταβάλλονται κατακόρυφα λόγω της στρωματοποίησης, αλλά και λόγω της κίνησης του νερού (ρεύματα, κύματα και τύρβη). Καθώς οι μεταβολές αυτές δεν έχουν ίση βαρύτητα, γράφουμε:

$$\rho = \rho_0 + \rho_e(z) + \rho'(x, y, z, t) \quad (8.7)$$

όπου ρ είναι η τοπική και στιγμιαία πυκνότητα, ρ_0 είναι η πυκνότητα αναφοράς, ρ_e είναι η μεταβολή της πυκνότητας λόγω στρωματοποίησης και μόνο (συνάρτηση της κατακόρυφης μετατόπισης) και ρ' η υπολειπόμενη πυκνότητα που οφείλεται στη ροή του νερού. Έτσι, $(\rho_0 + \rho_e)$ είναι η πυκνότητα χωρίς την επίδραση της κίνησης του νερού. Τυπικά η πυκνότητα ρ' είναι πολλές τάξεις μικρότερη της ρ_e η οποία είναι πολλές τάξεις μικρότερη της ρ_0 .



Εικόνα 8.6 Μετατόπιση υδάτινης μάζας σε στρωματοποιημένο ρευστό και μεταβολή των δυνάμεων που ενεργούν πάνω της.

Θεωρούμε μία μάζα νερού σε ηρεμία [άρα $\rho'(x, y, z, t) = 0$], με όγκο V στο επίπεδο z και πυκνότητα $(\rho_0 + \rho_e(z))$. Αν η μάζα μετατοπιστεί στο υψηλότερο επίπεδο $(z+h)$ χωρίς μεταβολή της πυκνότητάς της (Εικόνα 8.6), τότε στη νέα θέση οι δυνάμεις που ενεργούν είναι:

1. το βάρος της ίσο με $mg = [\rho_0 + \rho_e(z)]Vg$ και
2. οι δυνάμεις πίεσης οι οποίες δημιουργούν μία ανωστική δύναμη ίση με το βάρος του νερού που απομακρύνθηκε από τη θέση του για να μετακινηθεί η συγκεκριμένη μάζα, δηλ. $[\rho_0 + \rho_e(z+h)]Vg$.

Η συνισταμένη δύναμη είναι η άνωση μείον τη βαρύτητα δηλαδή $[\rho_e(z+h) - \rho_e(z)]Vg$. Η δύναμη αυτή δημιουργεί κατακόρυφη επιτάχυνση στην υδάτινη μάζα, της τάξης του d^2h/dt^2 , όπου h η κατακόρυφη μετατόπιση. Σύμφωνα με το Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα (μάζα επί επιτάχυνση = σύνολο ενεργούντων δυνάμεων) έχουμε:

$$[\rho_0 + \rho_e(z)]V \frac{d^2h}{dt^2} = [\rho_e(z+h) - \rho_e(z)]Vg \quad (8.8)$$

Καθώς το h είναι μικρό, η διαφορά στις πυκνότητες στο δεξί τμήμα της εξίσωσης μπορεί να προσεγγιστεί από την παράγωγό τους. Διαιρώντας με h έχουμε:

$$[\rho_0 + \rho_e(z)] \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{d\rho_e}{dz} gh \quad (8.9)$$

Καθώς το ρ_e είναι πολύ μικρότερο του ρ_0 μόνο ο όρος ρ_0 μένει από την παρένθεση στο αριστερό τμήμα. Το αποτέλεσμα περιγράφει την εξέλιξη της κατακόρυφης μετατόπισης της μάζας στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = N^2h \quad (8.10)$$

όπου

$$N = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_e}{dz} \quad (8.11)$$

Αν $N^2 > 0$, η εξίσωση μοιάζει με αυτήν ενός εκκρεμούς, όπου η μάζα κινείται με ημιτονοειδή τρόπο ταλαντευόμενη πάνω-κάτω γύρω από μία θέση ισορροπίας ($h=0$). Από φυσική άποψη, όταν το $N^2 > 0$, τότε η πυκνότητα ρ_e μειώνεται προς τα πάνω και όταν η μάζα κινείται προς τα πάνω βρίσκει νερό χαμηλότερης πυκνότητας από αυτήν, οπότε και βυθίζεται. Όταν κινείται προς τα κάτω, αποκτά ταχύτητα και φθάνει στη θέση ισορροπίας. Μετά τη θέση ισορροπίας, η μάζα περιβάλλεται από βαρύτερο νερό, οπότε δέχεται ανοδική ανωστική δύναμη και επιστρέφει προς τα πάνω. Η ταλάντωση αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον, ωστόσο στη πράξη επεμβαίνει η τριβή μειώνοντας το πλάτος της. Καθώς η ποσότητα N έχει μονάδες συχνότητας (1/s, ή Hz) η ποσότητα N καλείται *συχνότητα στρωματοποίησης* (stratification frequency).

Στην περίπτωση που $N^2 < 0$, η εξίσωση (8.10) αποκτά εκθετικά αυξανόμενη λύση. Η μάζα βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας της βαρύτερο νερό, με αποτέλεσμα οι δυνάμεις άνωσης να επιτρέπουν την περαιτέρω ανοδική της κίνηση. Αντίστοιχα, αν η μάζα κινούταν προς τα κάτω, θα έβρισκε ελαφρύτερο από αυτήν νερό, οπότε θα βυθιζόταν ακόμα περισσότερο. Και στις δύο περιπτώσεις η υδάτινη μάζα δεν επιστρέφει στη θέση ισορροπίας και η κατάσταση αυτή καλείται *ασταθής*.

Συνεπώς, η ποσότητα N^2 προσδιορίζει την ευστάθεια της υδάτινης στήλης ως εξής:

- αν $N^2 > 0$, έχουμε *ευσταθή ισορροπία* (static stability),
- αν $N^2 < 0$, έχουμε *ασταθή ισορροπία* (unstable stability).
- Τέλος, αν $N^2 = 0$ έχουμε απουσία στρωματοποίησης και *ουδέτερη ισορροπία* (neutral stability).

Στην περίπτωση λιμνών και ταμιευτήρων όπου η πυκνότητα του νερού ρυθμίζεται από τη θερμοκρασία του, η ένταση της θερμικής στρωματοποίησης εκφράζεται από την ποσότητα:

$$N^2 = +ag \frac{dT}{dz} \quad (8.12)$$

8.3. Συναγωγή

Η ψύξη της επιφάνειας της λίμνης δημιουργεί μία ελαφρώς ψυχρότερη και υψηλότερης πυκνότητας υδάτινη μάζα. Υπό συνθήκες ασταθούς ισορροπίας η μάζα αυτή βυθίζεται για να αντικατασταθεί από θερμότερο και ελαφρύτερο νερό που καταλαμβάνει τη θέση της. Καθώς η ψυχρή μάζα κινείται στη διαρκώς αυξανόμενης πυκνότητας στήλη, κάποια στιγμή βρίσκει το επίπεδο που αντιστοιχεί στην πυκνότητά της και παραμένει εκεί. Η κατακόρυφη ταχύτητά της είναι:

$$w = -\sqrt{gh \frac{\rho'}{\rho_0}} \quad (8.13)$$

όπου ρ' είναι η αύξηση της πυκνότητάς της η οποία προκαλεί την επιτάχυνση της μάζας, που οφείλεται στη μείωση της θερμοκρασίας κατά T' . Ισχύει: $\rho' = -\alpha\rho_0 T'$, οπότε η ταχύτητα w είναι συνάρτηση της πτώσης θερμοκρασίας:

$$w = -\sqrt{agh|T'|} \quad (8.14)$$

Η ποσότητα θερμότητας μίας υδάτινης μάζας είναι η μάζα m επί τη θερμοχωρητικότητα της C_v ($C_v = 4186 \text{ J/kg } ^\circ\text{K}$) επί τη θερμοκρασία της T . Καθώς η μάζα είναι η πυκνότητα επί τον όγκο της, έχουμε:

$$\text{Θερμικό Περιεχόμενο} = \rho_0 V C_v T \quad (8.15)$$

όπου το θερμικό περιεχόμενο μιας υδάτινης μάζας εκφράζεται σε Joule (J). Αντίστοιχα, ορίζουμε τη ροή θερμότητας της υδάτινης μάζας ως την ποσότητα θερμότητας που εισρέει σε αυτήν ή εκρέει από αυτήν ανά τετραγωνικό μέτρο ανά δευτερόλεπτο ($\text{J/m}^2 \text{ s} = \text{W/s}$). Ας συμβολίσουμε με τη ροή θερμότητας \tilde{H} σε μία επιφανειακή μάζα νερού μιας λίμνης λόγω ατμοσφαιρικής ψύξης. Στην περίπτωση αυτή αποκτά θερμοκρασιακό έλλειμμα T' και βυθίζεται με ταχύτητα w . Οπότε:

$$\begin{aligned} \text{Θερμική Ροή} &= \frac{\text{μεταβολή θερμικού περιεχομένου}}{\text{Οριζόντια επιφάνεια} \times \text{Χρόνος}} = \\ &= \frac{\text{μεταβολή θερμικού περιεχομένου} \times \text{κατακόρυφη μετατόπιση}}{\text{όγκος μάζας} \times \text{χρόνος}} = \\ &= \frac{\text{μεταβολή θερμικού περιεχομένου}}{\text{όγκος}} \times \text{κατακόρυφη ταχύτητα} \end{aligned}$$

ή αλλιώς:

$$\tilde{H} = \frac{\rho_0 V C_v |T'|}{V} |w| = \rho_0 C_v |w T'| \quad (8.16)$$

από όπου προκύπτει:

$$w = -\left(\frac{\alpha gh \tilde{H}}{\rho_0 C_v}\right)^{1/3} \quad (8.17)$$

και

$$T' = -\left(\frac{\tilde{H}^2}{\rho_0^2 C_v^2 \alpha gh}\right)^{1/3} \quad (8.18)$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ιδιότητες της τύρβης λόγω κατακόρυφης συναγωγής. Η κατακόρυφη διάχυση που δημιουργεί η τύρβη προκύπτει ως το γινόμενο της κατακόρυφης ταχύτητας (που ορίσαμε ως $|w|$) και της μέγιστης τυρβώδους μετατόπισης της υδάτινης μάζας $d_{\max} = h$. Έτσι:

$$D = 0.1 |w| h = 0.1 \left(\frac{\alpha g h^4 \tilde{H}}{\rho_0 C_v} \right)^{1/3} \quad (8.19)$$

όπου λύνουμε ως προς το βάθος μέγιστης κατακόρυφης μετατόπισης h ώστε να προσδιοριστεί η μέγιστη περιοχή επίδρασης της τύρβης.

8.4. Συναγωγή Διείσδυσης

Όπως σημειώσαμε νωρίτερα, η ψύξη της υδάτινης μάζας από την επιφάνεια της λίμνης, προκαλεί τη βύθισή της, η οποία αναμιγνύει την υδάτινη στήλη και περιορίζει τη στρωματοποίηση από την επιφάνεια ως το βάθος h . Η περιοχή όπου συμβαίνει η βύθιση αυτή λέγεται *πλήρως αναμεμιγμένη* (fully mixed). Η περαιτέρω ψύξη της επιφάνειας προκαλεί νέα βύθιση υδάτινης μάζας, η οποία αναμιγνύει τη στήλη σε μεγαλύτερα βάθη. Έτσι, η ζώνη μείξης γίνεται βαθύτερη και ψυχρότερη. Αυτού του τύπου η κατακόρυφη συναγωγή ονομάζεται *συναγωγή διείσδυσης* (penetrative convection). Η διαδικασία συνεχίζεται ως τον πυθμένα ή ως τη διακοπή της επιφανειακής ψύξης (ό,τι συμβεί πρώτο).

Έστω ότι η υδάτινη στήλη είναι στρωματοποιημένη, με γραμμική πτώση της θερμοκρασίας με το βάθος, κατά το τέλος του καλοκαιριού, δηλαδή

$$T_{initial}(z) = T_0 + (T_{Surface} - T_0) \frac{z}{H} \quad (8.20)$$

όπου T_0 η αρχική θερμοκρασία στο πυθμένα της λίμνης, που θεωρείται θερμοκρασία αναφοράς. Η στρωματοποίηση εκφράζεται με μία μόνο τιμή από την επιφάνεια ως τον πυθμένα, το N^2 , ως:

$$N^2 = \alpha g \frac{dT_{initial}}{dz} = \alpha g \frac{T_{surface} - T_0}{H} \quad (8.21)$$

όπου H είναι το βάθος της λίμνης. Η θερμοκρασία στο στρώμα συναγωγής είναι:

$$T = T_0 \frac{N^2}{\alpha g} (H - h) + \Delta T \quad (8.22)$$

που αποτελεί την πρώτη σχέση που συνδέει τα h , T , ΔT . Εμπειρικές σχέσεις μεταξύ των τριών μεγεθών είναι:

$$T = T_0 \frac{N^2}{3\alpha g} (3H - 2h) \quad (8.23)$$

$$\Delta T = \frac{N^2 h}{3\alpha g} \quad (8.24)$$

$$h = \sqrt{\frac{6\alpha g \tilde{H} t}{\rho_0 C_v N^2}} \quad (8.25)$$

από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε τη θερμοκρασία, την πτώση της θερμοκρασίας και το βάθος της ζώνης συναγωγής για κάθε ροή θερμότητας. Ο συντελεστής κατακόρυφης διάχυσης δίνεται ως (Fischer et al., 1979):

$$D = 0.1 \left(\frac{\alpha g \tilde{H}}{\rho_0 C_v} \right) \left(\frac{6t}{N^2} \right)^{2/3} \quad (8.26)$$

8.5. Συναγωγή διείσδυσης σε ολόκληρη την υδάτινη στήλη

Καθώς η απώλεια θερμότητας συνεχίζεται τον χειμώνα, η συναγωγή διείσδυσης φθάνει στον πυθμένα. Τότε $h=H$ και η κατακόρυφη ταχύτητα είναι:

$$w = - \left(\frac{\alpha g H \tilde{H}}{\rho_0 C_v} \right)^{1/3} \quad (8.27)$$

και ο συντελεστής κατακόρυφης διάχυσης αποκτά την τιμή:

$$D = 0.1 \left(\frac{\alpha g H^4 \tilde{H}}{\rho_0 C_v} \right)^{1/3} \quad (8.28)$$

η οποία μεταβάλλεται μόνο με τη ροή θερμότητας.

Κώδικας Matlab για την επίλυση των παραπάνω παραμέτρων δίνεται παρακάτω. Το μοντέλο παράγει τη διαφορά θερμοκρασίας επιλμνίου – υπολμνίου και το πάχος του μεταλμνίου για χρονική διάρκεια 45 ωρών.

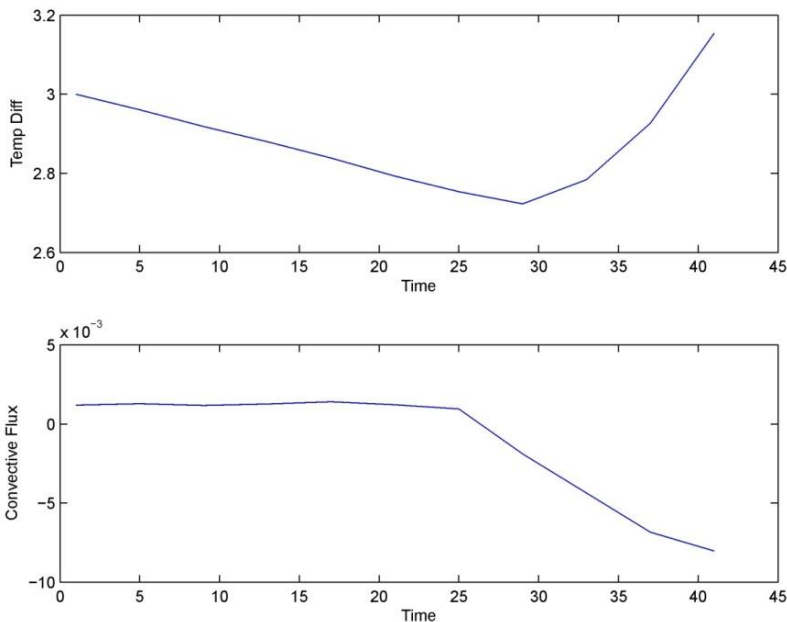
```
% Lake Hypolimnion - Epilimnion Temperature Change
% developed by G. Sylaios
time = 1:4:11*4;
Q = [-105, -113, -103, -111, -123, -106, -83, 165, 382, 602, 713]; % net
radiation
DeltaT = [3.00,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]; % temperature
difference epilimnion - hypolimnion
h = [10.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0] ; % metalimnion height
% Define model constants
alfa = 2.57*10^(-4);
Cp = 4179;
CT = 0.5;
rho = 997;
g = 9.81;
dt = 14400;
Ck = 0.13;
```

```

% Model calculations
for i = 1:length(Q)
    param1(i) = alfa*DeltaT(i)*g*h(i);
    uf(i) = ((alfa*g*h(i)*(-Q(i)))/(Cp*rho)).^(1/3);
    Conv(i) = Ck*uf(i).^3*dt;
    ReqEnergy(i) = CT*uf(i).^2+param1(i);
    Deltah(i) = Conv(i)/ReqEnergy(i);
    h(i+1) = h(i)+Deltah(i);
    TempChange1(i) = (-Q(i))*dt/(Cp*rho*h(i+1));
    TempChange2(i) = DeltaT(i)*Deltah(i)/h(i+1);
    TempChange(i) = DeltaT(i)+0.1*Deltah(i)-TempChange1(i)-TempChange2(i);
    DeltaT(i+1) = TempChange(i);
end
figure;subplot(2,1,1);plot(time,DeltaT(1:11));
subplot(2,1,2);plot(time,Conv(1:11))

```

Αποτελέσματα του μοντέλου δίνονται στην Εικόνα 8.7.



Εικόνα 8.7 Μεταβολή της διαφοράς θερμοκρασίας επιλιμνίου – υπολιμνίου και κατακόρυφη ροή συναγωγής.

8.6. Ανεμογενής Μείξη

Η κατακόρυφη μείξη στην επιφάνεια της λίμνης δεν οφείλεται μόνο στην κατακόρυφη συναγωγή, αλλά και στην επίδραση του ανέμου. Ο άνεμος στην επιφάνεια μιας λίμνης προκαλεί κύματα τα οποία παράγουν τύρβη που διαχέεται στην υδάτινη στήλη (Martin & McCutcheon, 1998). Η ορμή του ανέμου μεταδίδεται στην επιφάνεια της λίμνης μέσω της διατμητικής τάσης, η οποία συμβολίζεται με τ_{wind} . Η διατμητική τάση είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του ανέμου W :

$$\tau_{wind} = C_D \rho_{air} W^2 \quad (8.29)$$

όπου C_D είναι ο αδιάστατος συντελεστής σύρσεως ($= 1.0 \times 10^{-3}$ έως 1.5×10^{-3}) και ρ_{air} η πυκνότητα του αέρα (1.2 kg/m^3). Αν ορίσουμε ως διατμητική ταχύτητα u^* την ταχύτητα τύρβης που παράγει ο άνεμος στην επιφάνεια της λίμνης, τότε:

$$\tau_{\text{wind}} = \rho_0 u_*^2 \quad (8.30)$$

ή αλλιώς

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_{\text{wind}}}{\rho_0}} \quad (8.31)$$

Υπό σταθερό άνεμο και άρα σταθερό u^* το βάθος διείδυσης της ανεμογενούς ανάμειξης είναι:

$$h = \left(\frac{12mu_*^3 t}{N^2} \right)^{1/3} \quad (8.32)$$

όπου $m = 1.25$. Ο συντελεστής κατακόρυφης διάχυσης είναι:

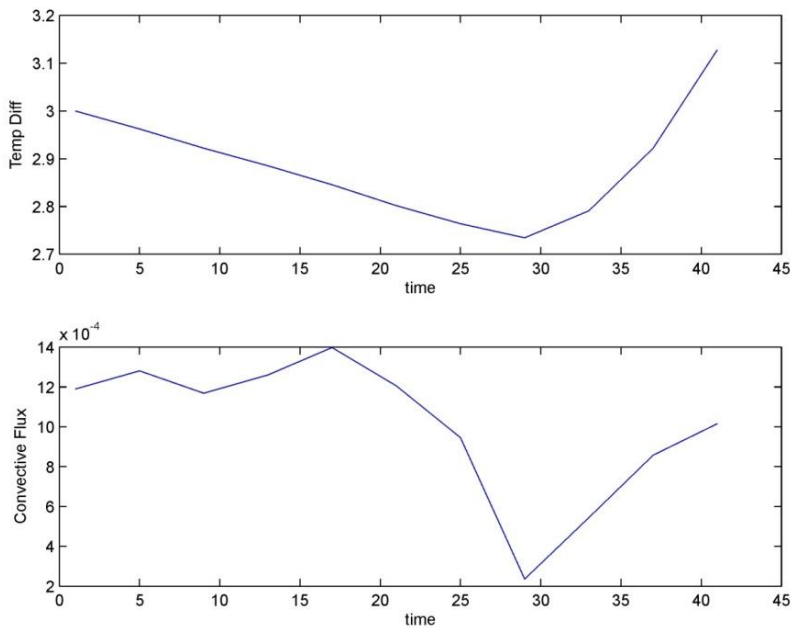
$$D = 0.1u_* h = 0.1u_*^2 \left(\frac{12mt}{N^2} \right)^{1/3} \quad (8.33)$$

```
% Lake Hypolimnion - Epilimnion Temperature Change under Wind Impact
% developed by G. Sylaios
time = 1:4:11*4;
Q = [-105, -113, -103, -111, -123, -106, -83, 165, 382, 602, 713]; % net
radiation
U = [7.1, 8.2, 5.6, 4.7, 3.2, 3.1, 2.5, 4.9, 6.8, 7.7, 10.3]; % Wind ve-
locity
DeltaT = [3.00,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]; % temperature
difference epilimnion - hypolimnion
h = [10.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0] ; % metalimnion height
% Define model constants
alfa = 2.57*10^(-4);
Cp = 4179;
CT = 0.5;
rho = 997;
g = 9.81;
dt = 14400;
Ck = 0.13;
ita = 1.23;
% Model calculations
for i = 1:length(Q);
    param1(i) = real(alfa.*DeltaT(i)*g.*h(i));
    uf(i) = real(((alfa*g*h(i)*(-Q(i)))/(Cp*rho)).^(1/3));
    ustar(i) = ((1.3*10^(-3)*1.2)/(rho*U(i))).^(1/2);
    Conv(i) = (Ck*uf(i).^3+ita^3*Ck*ustar(i).^3)*dt;
    q(i) = (uf(i)+ita^3*ustar(i)).^(1/3);
end
```

```

ReqEnergy(i) = CT*q(i)+alfa*DeltaT(i)*g*h(i);
Deltah(i) = Conv(i)/ReqEnergy(i);
h(i+1) = h(i)+Deltah(i);
TempChange1(i) = (-Q(i))*dt/(Cp*rho*h(i));
TempChange2(i) = DeltaT(i)*Deltah(i)/h(i);
TempChange(i) = DeltaT(i)+0.1*Deltah(i)-TempChange1(i)-TempChange2(i);
DeltaT(i+1) = TempChange(i);
end;
figure;subplot(2,1,1);plot(time,DeltaT(1:11));
xlabel('time');ylabel('Temp Diff');
subplot(2,1,2);plot(time,Conv(1:11));
xlabel('time');ylabel('Convective Flux')

```



Εικόνα 8.8 Μεταβολή της διαφοράς θερμοκρασίας επιλίμνιου – υπολίμνιου και κατακόρυφη ροή συναγωγής υπό την επίδραση ανεμογενούς μείζης.

8.7. Θερμικό Ισοζύγιο Λιμνών

Όπως έχει εξηγηθεί, η θερμοκρασία των λιμνών και των ταμιευτήρων μεταβάλλεται στον χώρο και στον χρόνο. Οι μεταβολές αυτές προκύπτουν ως αποτέλεσμα της μεταφοράς θερμότητας μέσω ρευμάτων, την απορρόφηση της ηλιακής ενέργειας ή την απώλεια θερμότητας λόγω εξάτμισης, κ.λπ. Το μέγεθος και ο χαρακτήρας των θερμοκρασιακών αυτών μεταβολών εξαρτάται από τον καθαρό ρυθμό θερμικής ροής, δηλαδή από τη διαφορά του ποσού της εισερχόμενης (incoming) και απερχόμενης (outgoing) ακτινοβολίας, και οι υπολογισμοί που αναφέρονται στους ρυθμούς θερμικής ροής ονομάζονται *θερμικά ισοζύγια* (heat budgets).

Το σύμβολο Q αναπαριστά τη μέση ροή θερμότητας σε Joules/sec/m^2 ή W/m^2 στη διάρκεια ενός 24ώρου ή ενός έτους. Η ροή θερμότητας ανά m^2 εμβαδόν λίμνης και σε χρονικό διάστημα Δt είναι:

$$\tilde{H} = \frac{Q(t+1) - Q(t)}{\Delta t} \quad (8.34)$$

Συνεπώς για τον υπολογισμό της ροής θερμότητας απαιτείται ο προσδιορισμός της στιγμιαίας ροής (εισροής ή εκροής) θερμότητας στην επιφάνεια της λίμνης. Οι συνιστώσες της θερμικής ροής σε μία υδάτινη μάζα είναι:

- $Q_s \rightarrow$ ο ρυθμός εισροής ηλιακής ενέργειας στην επιφάνεια της λίμνης (solar radiation),
- $Q_{at} \rightarrow$ ο ρυθμός εισροής της ατμοσφαιρικής ενέργειας στην επιφάνεια της λίμνης (atmospheric radiation),
- $Q_b \rightarrow$ ο καθαρός ρυθμός απώλειας θερμότητας της λίμνης μέσω της εκπομπής μεγάλου μήκους ακτινοβολίας προς την ατμόσφαιρα και το διάστημα (back radiation),
- $Q_h \rightarrow$ ο ρυθμός εισροής/εκροής θερμότητας από την επιφάνεια της λίμνης λόγω επαφής με την ατμόσφαιρα (conduction),
- $Q_e \rightarrow$ ο ρυθμός εισροής/εκροής θερμότητας λόγω εξάτμισης/συμπύκνωσης.

Άλλες πηγές θερμότητας σχετίζονται με το εσωτερικό της Γης, τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας των κυμάτων στην παράκτια ζώνη, την απελευθέρωση θερμότητας από χημικές ή πυρηνικές αντιδράσεις, οι οποίες όμως θεωρούνται αμελητέες.

Το ισοζύγιο θερμότητας για κάθε υδάτινο σώμα εκφράζεται από την εξίσωση:

$$Q_T = +Q_s + Q_{at} + Q_b + Q_h + Q_e \quad (8.35)$$

όπου Q_T είναι το συνολικό κέρδος ή απώλεια θερμότητας του υδάτινου σώματος στη χρονική περίοδο αναφοράς.

Η εξίσωση (8.35) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των ισοζυγίων θερμότητας, όταν ο κάθε όρος της προσδιοριστεί αριθμητικά, έχοντας θετικό πρόσημο για εισροή θερμότητας στην υδάτινη μάζα και αρνητικό πρόσημο για εκροή θερμότητας από αυτήν. Στην πραγματικότητα οι τιμές του όρου Q_s είναι πάντα θετικές, οι τιμές του όρου Q_b είναι πάντα αρνητικές και οι όροι Q_h και Q_e είναι γενικά αρνητικοί, αλλά μπορεί να γίνουν θετικοί σε ορισμένες περιπτώσεις. Οι παραπάνω όροι ροής θερμότητας θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν με την επιφάνεια της υπό μελέτη περιοχής για τον υπολογισμό της συνολικής θερμικής ενέργειας που ευθύνεται για την άνοδο ή την πτώση της θερμοκρασίας του νερού.

Η μη μεταβολή της θερμοκρασίας μίας υδάτινης μάζας στον χρόνο δε σημαίνει ότι δεν υπάρχει ροή θερμότητας από και προς τη μάζα αυτή, αλλά ότι το αλγεβρικό άθροισμα των όρων του θερμικού ισοζυγίου είναι μηδέν.

Ο όρος Q_s

Η μικρού μήκους κύματος προσπίπτουσα ηλιακή ακτινοβολία διακρίνεται σε αυτήν που διεισδύει στην υδάτινη στήλη και σε αυτήν που δε διεισδύει. Η ιδιότητα αυτή της προσπίπτουσας ηλιακής ακτινοβολίας εξαρτάται από το μήκος κύματός της. Η ακτινοβολία με μήκος κύματος μικρότερο των 700 nm θεωρείται ότι διεισδύει στην υδάτινη στήλη και ονομάζεται PAR (Photosynthetically Active Radiation). Εμπειρικά έχει βρεθεί ότι η ακτινοβολία αυτή αντιστοιχεί στο 45% της προσπίπτουσας ηλιακής ακτινοβολίας. Συνεπώς θεωρούμε ότι το υπόλοιπο 55% δε διεισδύει στην υδάτινη στήλη.

Ο όρος Q_s εξαρτάται από έναν αριθμό παραγόντων όπως:

1. το μήκος της ημέρας, το οποίο μεταβάλλεται με την εποχή και το γεωγραφικό πλάτος,
2. την απορρόφηση της εισερχόμενης ακτινοβολίας από την ατμόσφαιρα. Η απορρόφηση εξαρτάται από την παρουσία σκόνης και υδρατμών στην ατμόσφαιρα και την ανύψωση του Ηλίου. Όταν ο Ήλιος βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση, η ακτινοβολία κινείται στην ατμόσφαιρα διανύοντας τη μικρότερη απόσταση, οπότε η απορρόφηση είναι ελάχιστη. Η απορρόφηση της ηλιακής ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη όταν ο Ήλιος βρίσκεται σε θέσεις μικρότερες ή μεγαλύτερες των 90° ,
3. την επίδραση των σύννεφων, τα οποία απορροφούν και διασπείρουν την ηλιακή ακτινοβολία,
4. την ανάκλαση από την επιφάνεια της θάλασσας, η οποία εξαρτάται από την ανύψωση του Ηλίου και την κατάσταση της επιφάνειας της λίμνης ή της θάλασσας (ήρεμη ή κυματώδης).

Άρα:

$$Q_s = Q_o f(A)(1 - R_t)(1 - 0.65C^2) \quad (8.36)$$

όπου Q_o η ηλιακή ακτινοβολία στο επίπεδο της ανώτερης ατμόσφαιρας ($\text{cal/m}^2 \text{ day}$), $f(A)$ ο παράγοντας μείωσης της ακτινοβολίας στην ατμόσφαιρα, που σχετίζεται με τις οπτικές ιδιότητες της στήλης αέρα, όπως η περιεχόμενη σκόνη, η υγρασία και η ανακλαστικότητα της γήινης επιφάνειας, R_t είναι η ανακλαστικότητα της επιφάνειας του νερού ($R_t = 0.03$) και C η νεφοκάλυψη του ουρανού ($0 \leq C \leq 1$).

Ο όρος Q_{at}

Είναι η ροή μεγάλου μήκους ενέργειας που προέρχεται από τη μάζα του αέρα της ατμόσφαιρας μετά την ανάκλαση από την επιφάνεια του νερού και είναι συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας αέρα, της νεφοκάλυψης και της ανακλαστικότητας του νερού. Άρα:

$$Q_{at} = C_{at} \sigma T^6 (1 + 0.17C^2)(1 - R_t) \quad (8.37)$$

όπου C_{at} είναι μία εμπειρική σταθερά ($= 0.906 \times 10^{-5}$), σ η σταθερά Stefan-Boltzman [$= 4.875 \times 10^{-8} \text{ kcal}/(\text{m}^2 \text{ hr } ^\circ\text{K}^4)$] και T η απόλυτη θερμοκρασία στην επιφάνεια του νερού ($^\circ\text{K}$).

Ο όρος Q_e

Ο όρος εξάτμισης Q_e είναι πολύ σημαντικός, αλλά ο προσδιορισμός του δύσκολος. Η απώλεια θερμότητας λόγω εξάτμισης οφείλεται στην απαιτούμενη λανθάνουσα θερμότητα για την αλλαγή φάσης του νερού σε αέριο.

$$Q_e = \rho_w L E \quad (8.38)$$

όπου ρ_w είναι η πυκνότητα του νερού ($= 998 \text{ kg/m}^3$), L η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης ($L = 597.1 - 0.57 T$) (cal/g), E ο ρυθμός εξάτμισης [$E = 0.072 u (e_s - e_a)$] όπου u η ταχύτητα του ανέμου, e_s η πίεση κορεσμού υδρατμών στη θερμοκρασία της επιφάνειας της λίμνης και e_a η πίεση κορεσμού υδρατμών στη θερμοκρασία του αέρα.

Ο όρος Q_b

Η εξερχόμενη ροή θερμότητας Q_b , αφορά την απώλεια θερμότητας λόγω εκπομπής από τη θάλασσα ή τη λίμνη της μεγάλου μήκους κύματος ακτινοβολίας. Η ακτινοβολία αυτή προσδιορίζεται με υπολογισμό του ρυθμού απώλειας της μεγάλου μήκους κύματος ακτινοβολίας και με την αφαίρεση της από την εισερχόμενη μεγάλου μήκους κύματος ακτινοβολία. Ο Angstrom (1920) έδειξε ότι ο καθαρός ρυθμός απώλειας της θερμότητας εξαρτάται από την απόλυτη θερμοκρασία της επιφάνειας της θάλασσας και από την ποσότητα υγρασίας της ατμόσφαιρας ακριβώς πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Η θερμοκρασία της θάλασσας προσδιορίζει το ρυθμό απώλειας της θερμότητας, ενώ η υγρασία της ατμόσφαιρας προσδιορίζει τη μεγάλου μήκους θερμότητα που μεταφέρεται στη θάλασσα από την ατμόσφαιρα, καθώς τα σύννεφα και οι υδρατμοί αποτελούν τη μόνη πηγή μεγάλου μήκους κύματος ακτινοβολίας. Οι τιμές του Q_b σε συνθήκες χωρίς σύννεφα κυμαίνονται μεταξύ 115 και 70 W/m^2 , με τις υψηλές τιμές να λαμβάνουν χώρα σε συνθήκες υψηλής θερμοκρασίας και χαμηλής υγρασίας και αντίστροφα. Η τιμή του Q_b είναι αντιστρόφως ανάλογη της θερμοκρασίας για τον εξής λόγο. Η αύξηση της θερμοκρασίας έχει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερη εκπομπή θερμότητας, αλλά συνοδεύεται από αύξηση της σχετικής υγρασίας στην ατμόσφαιρα. Η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας ακολουθεί αυτήν της θάλασσας, όμως η ποσότητα των υδρατμών αυξάνεται εκθετικά, με αποτέλεσμα η εκπομπή ακτινοβολίας της ατμόσφαιρας προς τη θάλασσα να αυξάνεται γρηγορότερα από την εκπομπή ακτινοβολίας της θάλασσας προς την ατμόσφαιρα. Το αποτέλεσμα είναι η μείωση του όρου Q_b καθώς η θερμοκρασία της θάλασσας αυξάνει.

Ο όρος Q_b εξαρτάται από τους εξής παράγοντες:

- την επίδραση των νεφών, τα οποία αυξάνουν την επιστρεφόμενη ακτινοβολία, έτσι ώστε η καθαρή ροή απώλειας θερμότητας να μειώνεται,
- την επίδραση του πάγου και της χιονοκάλυψης, τα οποία μεταβάλλουν σημαντικά το θερμικό ισοζύγιο. Στην περίπτωση απουσίας πάγου ή χιονιού, η ανάκλαση της μικρού μήκους κύματος ακτινοβολίας Q_s είναι σχετικά μικρή (10-15%), και το ποσοστό που απορροφάται είναι μεγάλο. Όταν η επιφάνεια καλυφθεί με πάγο ή χιόνι, η ανάκλαση της ακτινοβολίας είναι υψηλή (50-80%) και η απορρόφηση πολύ μικρή. Ωστόσο, ο ρυθμός απώλειας θερμότητας, Q_b , είναι περίπου ίδιος σε κάθε περίπτωση, οπότε κατά τη παγοκάλυψη ή τη χιονοκάλυψη της επιφάνειας της θάλασσας υπάρχει μείωση της εισερχόμενης θερμότητας κατά $(Q_s - Q_b)$. Αυτό προκαλεί τη διατήρηση του πάγου, αμέσως μετά το σχηματισμό του.

Άρα:

$$Q_b = \varepsilon_w \alpha T^4 \quad (8.39)$$

όπου ε_w η ικανότητα εκπομπής της επιφάνειας του νερού ($\varepsilon_w = 0.96$), T η απόλυτη θερμοκρασία του νερού στην επιφάνεια της λίμνης ($^{\circ}\text{K}$) και α η σταθερά Stefan-Boltzman ($\alpha = \sigma$).

Ο όρος Q_h

Ο όρος αυτός αφορά τη μεταφορά θερμότητας λόγω επαφής, δηλαδή το κέρδος ή την απώλεια θερμότητας μίας μάζας νερού λόγω επαφής με την πιο θερμή ή πιο ψυχρή ατμόσφαιρα. Δίνεται από τη σχέση:

$$Q_h = \beta Q_e \quad (8.40)$$

όπου

$$\beta = \frac{Q_h}{Q_e} = c_b \frac{T_s - T_a}{e_s - e_a} \quad (8.41)$$

όπου c_b είναι η σταθερά Bowen ($=0.63 \text{ mbar}/^{\circ}\text{C}$). Άρα:

$$Q_h = \beta Q_e = 0.0072 \rho_w L u (T_s - T_a) \quad (8.42)$$

8.8. Θερμοκρασία Νερού Επιλιμνίου - Υπολιμνίου

Μετά τον υπολογισμό του θερμικού ισοζυγίου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη θερμοκρασία νερού στο καλά αναμεμιγμένο επιλίμνιο ως:

$$V_e \frac{dT_e}{dt} = \frac{1}{\rho c} \tilde{H} + v_i A (T_h - T_e) \quad (8.43)$$

όπου V_e ο όγκος του επιλιμνίου (m^3), T_e και T_h η θερμοκρασία του επιλιμνίου και του υπολιμνίου, αντίστοιχα ($^{\circ}\text{C}$), \tilde{H} η εισροή ή εκροή θερμότητας από την επιφάνεια του νερού, A το εμβαδόν της λίμνης στο θερμοκλινές και v_i ο συντελεστής κατακόρυφης ανταλλαγής θερμότητας στο θερμοκλινές.

Η εξίσωση του ισοζυγίου θερμότητας στο υπολίμνιο είναι:

$$V_h \frac{dT_h}{dt} = v_t A (T_e - T_h) \quad (8.44)$$

όπου V_h ο όγκος του υπολιμνίου. Επειδή κατά το καλοκαίρι το υπολίμνιο αυξάνει αργά αλλά σταθερά τη θερμοκρασία του, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dT_h}{dt} + \frac{v_t A_t}{V_h} T_h = \frac{v_t A_t}{V_h} \bar{T}_e \quad (8.45)$$

όπου T_e η μέση θερμοκρασία του επιλιμνίου. Αν η θερμοκρασία του υπολιμνίου στην έναρξη της καλοκαιρινής περιόδου στρωμάτωσης είναι $T_{h,i}$ η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$T_h = T_{h,i} \exp\left(-\frac{v_t A_t}{V_h} t\right) + \bar{T}_e \left[1 - \exp\left(-\frac{v_t A_t}{V_h} t\right)\right] \quad (8.46)$$

Η ίδια μπορεί να γραφεί έτσι ώστε ο συντελεστής θερμικής ανταλλαγής επιλιμνίου – υπολιμνίου στο θερμοκλινές να περιγραφεί ως:

$$v_t = \frac{V_h}{A_t t_s} \ln \frac{T_{h,i} - \bar{T}_e}{T_{h,s} - \bar{T}_e} \quad (8.47)$$

όπου t_s είναι ο χρόνος από την έναρξη της στρωματοποίησης κατά τον οποίο η θερμοκρασία του υπολιμνίου $T_{h,s}$ έχει μετρηθεί.

Άσκηση 8.1

Μία λίμνη εμφανίζει υψηλή στρωματοποίηση από τον Ιούλιο έως το Σεπτέμβριο. Κατά το διάστημα αυτό, το θερμοκλινές βρίσκεται περίπου στα 15 μ βάθος. Η μέση θερμοκρασία του επιλιμνίου είναι 17.61°C και το εμβαδόν του θερμοκλινούς είναι περίπου $18,500 \times 10^6 \mu^2$. Η θερμοκρασία στο υπολίμνιο (όγκου $1,380 \times 10^9 \mu^3$) αυξάνει από 4.53°C στα μέσα Ιουλίου σε 5.12°C στα μέσα Σεπτεμβρίου. Να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής ανταλλαγής επιλιμνίου – υπολιμνίου στο θερμοκλινές.

Λύση

Στη σχέση:

$$v_t = \frac{V_h}{A_t t_s} \ln \frac{T_{h,i} - \bar{T}_e}{T_{h,s} - \bar{T}_e}$$

αντικαθιστώ

$$v_t = \frac{(1,390 \times 10^9)}{18,500 \times 10^6 \times 60} \ln \frac{4.35 - 17.61}{5.12 - 17.61} = 0.0744 \text{ m/d}$$

Επιπλέον, η εξίσωση θερμικού ισοζυγίου του υπολιμνίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής ανταλλαγής στη διάρκεια ενός πλήρους έτους:

$$v_t = \frac{V_h \left(\frac{dT_h}{dt} \right)}{A_t (T_e - T_h)}$$

Από τη χρήση πεπερασμένων διαφορών με κεντρικές χρονικές διαφορές, έχουμε:

$$\frac{dT_h}{dt} \approx \frac{T_h^{n+1} - T_h^{n-1}}{2\Delta t}$$

οπότε:

$$v_t = \frac{V_h}{2A_t \Delta t} \frac{T_h^{n+1} - T_h^{n-1}}{T_e^n - T_h^n}$$

Με τον ίδιο τρόπο και η εξίσωση θερμικού ισοζυγίου του επιλιμνίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής ανταλλαγής στη διάρκεια ενός πλήρους έτους:

$$V_e \frac{dT_e}{dt} = \frac{1}{\rho c} \tilde{H} + v_t A (T_h - T_e) \Rightarrow$$

$$v_t = \frac{V_e \frac{T_e^{n+1} - T_e^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\tilde{H}}{\rho c}}{A_t (T_h^n - T_e^n)}$$

8.9. Υδατικό Ισοζύγιο Λιμνών

Οι εισροές και εκροές νερού από τις λίμνες είναι υπεύθυνες για τη διακύμανση της στάθμης τους, και επηρεάζουν σημαντικά την μεταφορά θρεπτικών αλάτων, την αραίωση και τη συσσώρευσή τους στο εσωτερικό των λιμνών, καθώς και τις φυσικές, χημικές και βιολογικές διεργασίες τους. Το υδατικό ισοζύγιο μίας λίμνης σε ετήσια βάση εκφράζεται από την εξίσωση:

$$S = \frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} + G + PA_s - EA_s \quad (8.48)$$

όπου ως S συμβολίζεται η μεταβολή του όγκου της λίμνης στη διάρκεια του έτους (m^3/yr), Q_{in} και Q_{out} η εισερχόμενη και εξερχόμενη παροχή νερού (m^3/yr) αντίστοιχα, G η ροή υπόγειου νερού από ή προς τη λίμνη (m^3/yr), P ο ρυθμός βροχόπτωσης (m^3/yr), E ο ρυθμός εξάτμισης (m^3/yr) και A_s το εμβαδόν της λίμνης (m^2).

Ο όρος Q_{in}

Η παρακάτω προσέγγιση δίνει μία εναλλακτική δυνατότητα υπολογισμού της επιφανειακής απορροής, υπολογίζοντας τις διαφορές μεταξύ της βροχόπτωσης και της εξάτμισης σε ολόκληρη τη λεκάνη απορ-

ροής. Είναι μία εμπειρική εξίσωση που αναπτύχθηκε από τον Schreiber (1904) και έχει εφαρμογή σε τροπικές περιοχές και μεσαία γεωγραφικά πλάτη.

$$V_Q = 1000 * A * r * [\exp(-e_0 / r)] \quad (8.49)$$

$$e_0 = 1.0 * 10^9 * \exp(4.62 * 10^3 / T) \quad (8.50)$$

όπου:

V_Q είναι η μηνιαία επιφανειακή απορροή σε m^3

T είναι η μέση μηνιαία θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin.

A είναι η επιφάνεια της λεκάνης απορροής της λίμνης, σε km^2

r είναι η βροχόπτωση, σε mm ανά μήνα.

Η μέθοδος αυτή έχει εφαρμογή μόνο για μηνιαίες τιμές, δηλαδή δεν πρέπει να χρησιμοποιείται για δεδομένα μεγαλύτερων περιόδων, και είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στην ποιότητα των μετεωρολογικών δεδομένων και στην μέτρηση της επιφάνειας της λεκάνης απορροής. Η εξίσωση δίνει πολύ χαμηλά αποτελέσματα (εξωπραγματικά) για πολύ ξηρούς και θερμούς μήνες και υπερεκτιμά τους μήνες με τις πολύ υψηλές καταιγίδες. Προτείνεται να ελεγχθεί η εξίσωση αυτή για την περιοχή μίας λίμνης από την οποία υπάρχουν δεδομένα πεδίου.

Ο όρος P

Προκύπτει από το γινόμενο της ετήσιας βροχόπτωσης (σε mm) με το συνολικό εμβαδόν της λίμνης (σε km^2).

Ο όρος E

Η εκτίμηση του όγκου εξάτμισης από την επιφάνεια της λίμνης δίνεται ως:

$$E A_s = 0.01 \frac{f(U_w)(e_s - e_{air})}{L_e \rho_w} A_s \quad (8.51)$$

όπου

$L_e = 597.3 - 0.57T$ είναι η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης νερού, T η θερμοκρασία νερού ($^{\circ}C$), ρ_w η πυκνότητα του νερού και $f(U_w)$ δίνεται από:

$$f(U_w) = 19.0 + 0.95U_w^2$$

όπου U_w η ένταση του ανέμου (m/s). Τέλος, η τάση κορεσμού υδρατμών δίνεται από τη σχέση:

$$e = 4.596 e^{\frac{17.27T}{273.3+T}}$$

Για τον υπολογισμό του e_s χρησιμοποιούμε τη θερμοκρασία της επιφάνειας του νερού, ενώ για τον υπολογισμό του e_{air} χρησιμοποιούμε τη θερμοκρασία δρόσου (dew point temperature) του αέρα.

Βιβλιογραφία

- Ångström, A. (1920).** *Applications of Heat Radiation Measurements to the Problems of the Evaporation from Lakes and the Heat Convection at Their Surfaces.* Geografiska Annaler, 2, 237.
<http://dx.doi.org/10.2307/519528>
- Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C., Imberger, J., & Brooks, N. H. (1979).** *Mixing in Inland and Coastal Waters.* Academic Press.
- Martin, J. L., & McCutcheon, S. C. (1998).** *Hydrodynamics and transport for water quality modeling:* CRC Press.
- Schreiber, P. (1904).** *Über die Beziehungen zwischen dem Niederschlag und der Wasserführung der Flüsse in Mitteleuropa.* Z. Meteorol, 21(10), 441-452.
- Wetzel, R. G. (2001).** *Limnology: lake and river ecosystems:* Gulf Professional Publishing.

Κεφάλαιο 9

Μείξη Ρύπων σε Ποταμοεκβολές

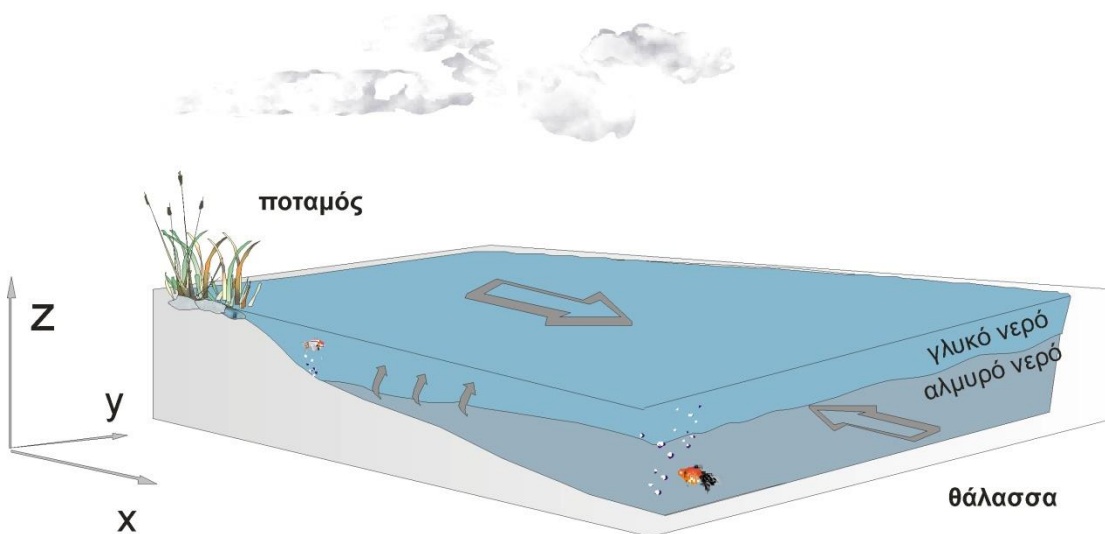
Σύνοψη

Εξηγείται η έννοια της ποταμοεκβολής και η ταξινόμησή της ως προς τις συνθήκες κυκλοφορίας - μείξης. Εξηγούνται οι παράγοντες μείξης στις ποταμοεκβολές, οι έννοιες της διατμητικής τάσης και της διαμήκους και κατακόρυφης διασποράς. Δίνονται οι εξισώσεις προσδιορισμού των συντελεστών διαμήκους και κατακόρυφης τρβώδους διάχυσης ρύπων. Παρουσιάζεται και αναλύεται το μαθηματικό ομοίωμα πλευρικά ολοκληρωμένης ροής και διασποράς ρύπων και η εφαρμογή του σε ποταμοεκβολές. Εξηγείται η διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου ροής, τα αριθμητικά οχήματα επίλυσης, οι αρχικές και οριακές συνθήκες. Παρουσιάζεται αναλυτικά η διαδικασία βαθμονόμησης και πιστοποίησης του ομοιώματος με δεδομένα πεδίου. Παρουσιάζονται σενάρια περιβαλλοντικής διαχείρισης ποταμοεκβολών.

9.1. Ορισμός Ποταμοεκβολής

Ως **ποταμοεκβολή** (estuary) ορίζεται «έναν ημι-έγκλειστος παράκτιος όγκος νερού, ο οποίος έχει ελεύθερη επικοινωνία με την ανοικτή θάλασσα και εντός του οποίου το θαλασσινό νερό υφίσταται σημαντική αραίωση με το γλυκό που προέρχεται από τις επιφανειακές απορροές» (Pritchard, 1967). Ο παραπάνω ορισμός δεν περιλαμβάνει τις ποταμοεκβολές, όπου η ελεύθερη επικοινωνία με την ανοικτή θάλασσα δεν είναι σταθερή στον χρόνο, και τις εκβολές ισχυρής στρωμάτωσης στις οποίες η μείξη του γλυκού και του θαλασσινού νερού είναι ασθενής. Επιπλέον, ο Pritchard στον ορισμό του δεν κάνει αναφορά στη δράση της παλίρροιας.

Σύμφωνα με τον Fairbridge (1980), ως ποταμοεκβολή θεωρείται «μια εσοχή της θάλασσας που εκτείνεται εντός της κοιλάδας ποταμού μέχρι το όριο στο οποίο η παλίρροια προκαλεί ανύψωση της επιφάνειας του νερού και η οποία συνήθως χωρίζεται σε τρία τμήματα: α) το θαλάσσιο τμήμα ή κάτω τμήμα της εκβολής, όπου υπάρχει ελεύθερη επικοινωνία με την ανοικτή θάλασσα β) το ενδιάμεσο τμήμα της εκβολής, όπου η μείξη του γλυκού και του αλμυρού νερού είναι έντονη και γ) το ποτάμιο ή άνω τμήμα της εκβολής, όπου κυριαρχεί το γλυκό νερό, αλλά υπόκειται σε έντονη παλιρροιακή δράση (Εικόνα 9.1). Τα όρια μεταξύ των τμημάτων είναι μεταβαλλόμενα και εξαρτώνται από τις συνεχείς αλλαγές της ποτάμιας παροχής και της παλιρροιακής επίδρασης».



Εικόνα 9.1 Τυπικό σκαρίφημα ποταμοεκβολής.

Η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο ορισμών είναι η θεώρηση του άνω ορίου της εκβολής. Σύμφωνα με τον Pritchard ως άνω όριο της εκβολής θεωρείται το όριο της εισόδου άλατος, ενώ, σύμφωνα με τον Fairbridge,

το όριο επηρεασμού της παλίρροιας. Στο κεφάλαιο αυτό υιοθετήθηκε ο ορισμός που δόθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση μέσω της οδηγίας 91/271 για την επεξεργασία των αστικών λυμάτων (European Economical Union 1991), καθώς αποτελεί μια γενική διατύπωση της έννοιας της ποταμοεκβολής που δεν αποκλείει τις ισχυρά στρωματομενές ποταμοεκβολές. Σύμφωνα με την οδηγία, «ως ποταμοεκβολή ορίζεται η μεταβατική ζώνη στο στόμιο ενός ποταμού, μεταξύ γλυκών και παράκτιων υδάτων».

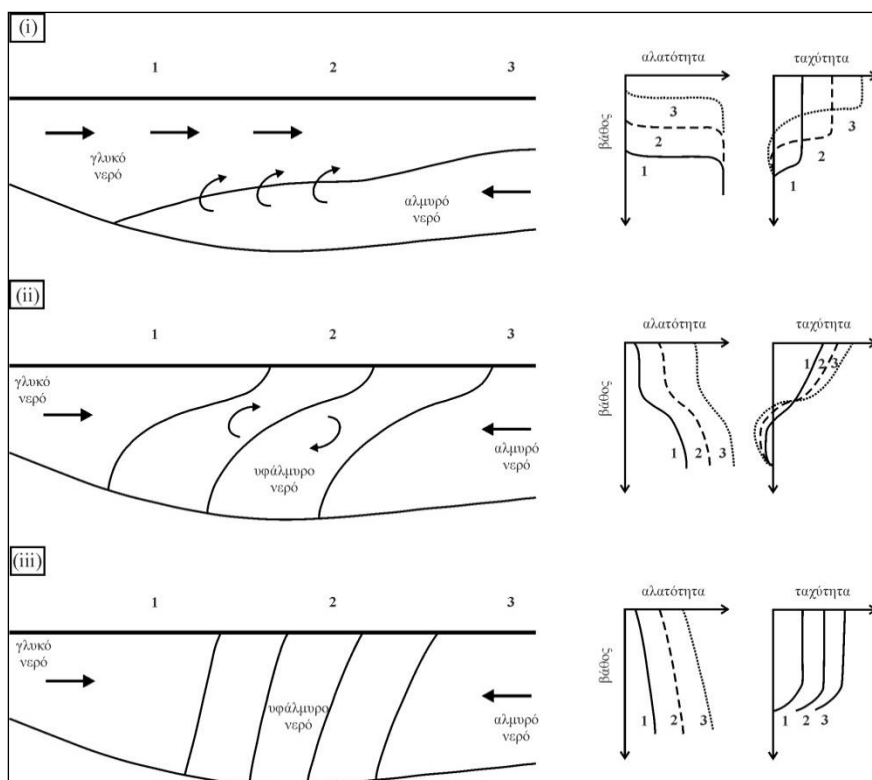
9.2. Ταξινόμηση ποταμοεκβολών σύμφωνα με τις συνθήκες κυκλοφορίας και μείξης

Η κυκλοφορία και η μείξη στο εσωτερικό τους εξαρτάται από το λόγο παλιρροιακού πρίσματος, P, προς τη ποτάμια παροχή, R. Οι ποταμοεκβολές συνήθως ταξινομούνται ανάλογα με τη γεωμορφολογία τους και την κατανομή αλατότητας ή ισοδύναμα τις υδροδυναμικές συνθήκες που επικρατούν στο εσωτερικό τους. Ανάλογα με την κατανομή αλατότητας, οι ποταμοεκβολές διαχωρίζονται στους ακόλουθους τύπους (UNESCO 1991):

- Ισχυρά στρωματοποιημένες ποταμοεκβολές.
Η αλατότητα του νερού μεταβάλλεται απότομα στον χώρο μεταξύ του επιφανειακού γλυκού νερού και του υποκείμενου αλμυρού και η στρωμάτωση είναι ισχυρή (Εικόνα 9.2, i).
- Μερικά αναμεμιγμένες ποταμοεκβολές.
Η αλατότητα αυξάνεται βαθμιαία από την επιφάνεια προς τον πυθμένα και η στρωμάτωση είναι ασθενής (Εικόνα 9.2, ii).
- Κατακόρυφα καλά αναμεμιγμένες ποταμοεκβολές.
Η αλατότητα του νερού αυξάνεται ελάχιστα από την επιφάνεια προς τον πυθμένα και δε διακρίνεται στρωμάτωση, παρά βαθμιαία μείωση της αλατότητας από το στόμιο προς την κορυφή των ποταμοεκβολών (Εικόνα 9.2, iii).

Οι κατακόρυφα καλά αναμεμιγμένες ποταμοεκβολές είναι αποτέλεσμα χαμηλής ποτάμιας παροχής και ισχυρής παλίρροιας. Αντίθετα, οι ισχυρά στρωματοποιημένες ποταμοεκβολές είναι αποτέλεσμα σχετικά υψηλής παροχής και ασθενούς παλίρροιας. Οι μερικά αναμεμιγμένες ποταμοεκβολές αποτελούν ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ των παραπάνω δύο ακραίων τύπων. Γίνεται κατανοητό ότι τα όρια μεταξύ των διαφορετικών τύπων ποταμοεκβολών δεν είναι στενά. Η ταξινόμησή τους συχνά βασίζεται στη χρήση παραμέτρων στρωμάτωσης (Simmons 1955, Hansen and Rattray 1966, Fischer 1972, Thatcher and Harleman 1972).

Ο τύπος της στάσιμης σφήνας αποτελεί κατηγορία των ισχυρά στρωματοποιημένων ποταμοεκβολών, με κύριο χαρακτηριστικό την απουσία κίνησης του στρώματος του αλμυρού νερού που βρίσκεται εντός της ποταμοεκβολής.



Εικόνα 9.2 Ταξινόμηση ποταμοεκβολών σύμφωνα με τις συνθήκες κυκλοφορίας και μείξης, (i) ισχυρά στρωματοποιημένες ποταμοεκβολές, τύπου στάσιμης σφήνας, (ii) μερικά αναμειγμένες ποταμοεκβολές και (iii) κατακόρυφα καλά αναμειγμένες ποταμοεκβολές (Dyer 1973, UNESCO 1991). Διακρίνουμε τη μεταβολή της αλατότητας και της ταχύτητας ανάλογα με το βάθος σε τρεις διατομές κατά μήκος της ποταμοεκβολής κάθε τύπου.

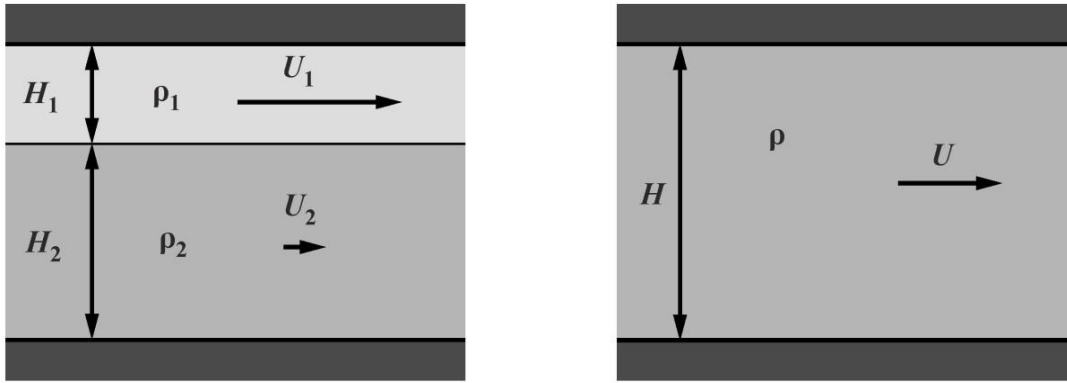
9.3. Παράγοντες Μείξης στις Ποταμοεκβολές

Η τοπογραφία, η ποτάμια παροχή και η παλιρροιακή επίδραση αποτελούν τους κύριους παράγοντες που επηρεάζουν το ρυθμό και την έκταση της μείξης του αλμυρού με του γλυκό νερό. Το αποτέλεσμα της μείξης φαίνεται στην κατανομή της πυκνότητας και την παρουσία στρωματοποίησης, η οποία μεταβάλλει τη ροή του νερού.

Η μείξη στις ποταμοεκβολές, όπως και στους ποταμούς, προκαλείται μέσω της συνδυασμένης δράσης της μικρής κλίμακας τυρβώδους διάχυσης και της μεγαλύτερης κλίμακας μεταβολής του μέσου πεδίου ροής. Ο κύριος ρόλος της τυρβώδους διάχυσης είναι η μεταφορά μάζας μεταξύ των ροϊκών καμπυλών, ενώ η διαμήκης διασπορά οφείλεται στην ανομοιομορφία της ροής κατά μήκος των ροϊκών καμπυλών. Συνεπώς, το πρώτο πρόβλημα είναι να διαφοροποιήσουμε τη διάχυση από τη διαμήκη διασπορά. Αν τοποθετήσουμε ένα ρευματογράφο σε ένα σημείο της ποταμοεκβολής για αρκετό χρονικό διάστημα, θα καταγράψουμε μικρομεταβολές με περίοδο μόλις μερικών λεπτών γύρω από τη μέση ροή. Οι μικρομεταβολές αυτές οφείλονται στην τύρβη και προκαλούν την *τυρβώδη διάχυση* (turbulent diffusion), ενώ η μέση ροή και η κατά μήκος διαφορές της προκαλούν τη *διαμήκη διασπορά* (longitudinal dispersion). Η μείξη στις ποταμοεκβολές προκαλείται από τρεις κύριους παράγοντες: την παλίρροια, τον άνεμος και την ποτάμια παροχή. Και οι τρεις αυτοί παράγοντες αναμιγνύουν την υδάτινη στήλη μέσω της εισαγωγής της *διατμητικής τάσης* (shear stress).

Η διατμητική τάση αποσταθεροποιεί την κατακόρυφη στρωματοποίηση της ποταμοεκβολής. Στην περίπτωση αυτή η κινητική ενέργεια που παρέχει η ροή καταναλώνεται μερικώς προκαλώντας αύξηση της δυναμικής ενέργειας η οποία απαιτείται για να υπερνικηθούν οι δυνάμεις άωσης και να ανέλθει το κέντρο βάρους του συστήματος. Αρχικά, λοιπόν, ασχολούμαστε με την κατανομή ενέργειας κατά τη μείξη.

Θεωρούμε ένα σύστημα με δύο ρευστά διαφορετικού πάχους H_1 και H_2 και με διαφορετικές πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 και ταχύτητες U_1 και U_2 . Κατόπιν θεωρούμε ότι η μείξη προκαλεί ομοιομορφη υδάτινη στήλη με πυκνότητα ρ και ταχύτητα ροής U σε όλο το πάχος της $H = H_1 + H_2$ (Εικόνα 9.3).



Εικόνα 9.3 Αρχική και τελική κατάσταση συστήματος.

Η διατήρηση της ορμής και της θερμότητας απαιτεί ότι η νέα ταχύτητα U θα είναι η μέση τιμή των ταχυτήτων U_1 , U_2 και η νέα πυκνότητα ρ θα είναι η μέση τιμή των πυκνοτήτων ρ_1 και ρ_2 , με κάποια στάθμιση.

$$U = \frac{H_1 U_1 + H_2 U_2}{H_1 + H_2} \quad (9.1)$$

$$\rho = \frac{H_1 \rho_1 + H_2 \rho_2}{H_1 + H_2} \quad (9.2)$$

Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα εμβαδού του συστήματος πριν τη μείξη είναι:

$$KE_{initial} = \int_0^H \frac{1}{2} \rho_0 u^2(z) dz = \frac{1}{2} \rho_0 U_2^2 H_2 + \frac{1}{2} \rho_0 U_1^2 H_1 = \frac{1}{2} \rho_0 (H_1 U_1^2 + H_2 U_2^2) \quad (9.3)$$

και μετά τη μείξη είναι:

$$KE_{final} = \frac{1}{2} \rho_0 U^2 H = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{(H_1 U_1 + H_2 U_2)^2}{H_1 + H_2} \quad (9.4)$$

Συνεπώς, υπάρχει μία μείωση στη κινητική ενέργεια:

$$\begin{aligned} KE_{drop} &= KE_{initial} - KE_{final} \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \frac{U_1^2 H_1 H_2 + U_2^2 H_1 H_2 - 2U_1 U_2 H_1 H_2}{(H_1 + H_2)} \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} (U_1 - U_2)^2 \end{aligned} \quad (9.5)$$

η οποία είναι πάντα θετική.

Αντίστοιχα, η δυναμική ενέργεια του συστήματος πριν τη μείξη είναι:

$$\begin{aligned}
PE_{initial} &= \int_0^H \rho(z)gz dz = \\
&= \int_0^{H_2} \rho_2gz dz + \int_{H_2}^{H_1+H_2} \rho_1gz dz \\
&= \frac{1}{2}\rho_2gH_2^2 + \frac{1}{2}\rho_1g(2H_1H_2 + H_1^2)
\end{aligned}
\tag{9.6}$$

και μετά τη μείξη:

$$\begin{aligned}
PE_{final} &= \int_0^H \rho gz dz = \rho g \frac{H^2}{2} = \\
&= \frac{1}{2}(\rho_1H_1 + \rho_2H_2)g(H_1 + H_2)
\end{aligned}
\tag{9.7}$$

Συνεπώς, υπάρχει μία αύξηση στη δυναμική ενέργεια:

$$PE_{gain} = PE_{final} - PE_{initial} = \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)gH_1H_2
\tag{9.8}$$

Από φυσική άποψη, η δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξήθηκε λόγω της ανοδικής κίνησης ψυχρού νερού και της καθοδικής κίνησης θερμού νερού, κατά τη μείξη. Η κατακόρυφες αυτές κινήσεις έγιναν ενάντια στη βαρύτητα, οπότε η κινητική ενέργεια μειώθηκε. Αν, λοιπόν, η μείωση της κινητικής ενέργειας υπερβαίνει την άνοδο της δυναμικής ενέργειας, τότε λαμβάνει χώρα αυτόματη ανάμειξη, η οποία παριστάνεται ως:

$$\rho_0(U_1 - U_2)^2 > gH(\rho_2 - \rho_1)
\tag{9.9}$$

Εργαστηριακά πειράματα έδειξαν ότι αυτή η υπέρβαση είναι της τάξης του 30%, οπότε:

$$0.3\rho_0(U_1 - U_2)^2 > gH(\rho_2 - \rho_1)
\tag{9.10}$$

ή αλλιώς

$$\frac{gH\Delta\rho}{\rho_0\Delta U^2} < 0.3
\tag{9.11}$$

όπου $\Delta U = |U_1 - U_2|$ είναι η απόλυτη διαφορά ταχύτητας και $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ είναι η διαφορά πυκνότητας. Αν θεωρήσουμε ότι η διαφορά πυκνότητας οφείλεται στη διαφορά θερμοκρασίας, τότε $\Delta\rho = \alpha\rho_0\Delta T$ οπότε:

$$\frac{\alpha g H \Delta T}{\Delta U^2} < 0.3 \quad (9.12)$$

Συνεπώς, η μείξη λαμβάνει χώρα όταν η υδάτινη στήλη είναι επαρκώς ρηχή, για τις δεδομένες διαφορές πυκνότητας και ταχύτητας, ή όταν η διατμητική τάση είναι επαρκώς υψηλή ή η διαφορά πυκνότητας επαρκώς ασθενής (Haralambidou et al., 2010).

Ο αριθμός που περιγράψαμε παραπάνω καλείται *Richardson Number*, *Ri* και η τιμή του αποτελεί το κριτήριο του βαθμού μείξης της υδάτινης στήλης.

$$Ri = \frac{\alpha g H \Delta T}{\Delta U^2} \quad (9.13)$$

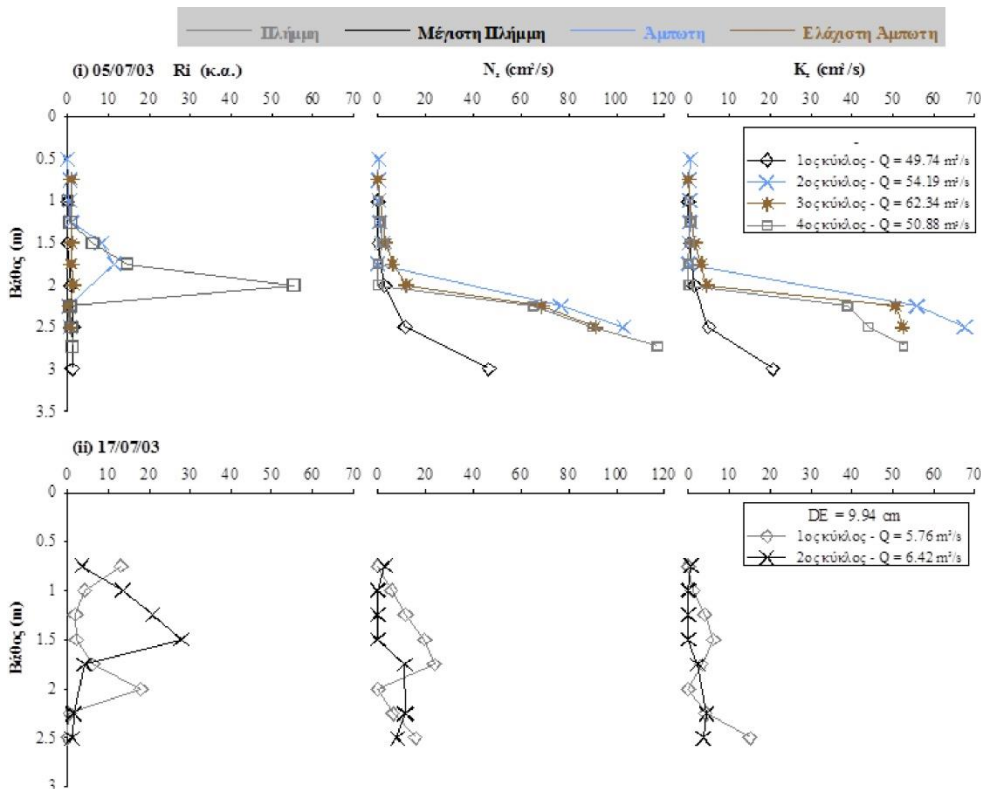
Αν $Ri < 0.3$, τότε λαμβάνει χώρα μείξη η οποία επηρεάζει ολόκληρη την υδάτινη στήλη.

Αν $Ri > 0.3$, τότε η μείξη δεν επηρεάζει ολόκληρη την υδάτινη στήλη, αλλά περιορίζεται σε ένα πάχος στήλης h . Προφίλ της κατανομής *Ri* στην ποταμοεκβολή του Στρυμόνα δίνονται στην Εικόνα 9.4.

Η κλίμακα χρόνου στην οποία συμβαίνει η μείξη είναι t_m :

$$t_m = O\left(\frac{\Delta U}{\alpha g \Delta T}\right) \quad (9.14)$$

η οποία είναι συνήθως πολύ γρήγορη.



Εικόνα 9.4 Κατακόρυφα προφίλ συντελεστή *Ri*, κατακόρυφου συντελεστή τυρβώδους ιξώδους *NZ* και κατακόρυφου συντελεστή τυρβώδους διάχυσης *KZ*.

Άλλη παράμετρος Στρωματοποίησης είναι ο *Πυκνομετρικός Αριθμός Froude* που ορίζεται:

$$F_m = \frac{U_f}{U_d} \quad (9.15)$$

όπου U_f είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα ποτάμιας εκροής

$$U_f = \frac{R}{A} \quad (9.16)$$

όπου R είναι η ποτάμια παροχή και A η διατομή. Τότε:

$$U_d = \frac{R}{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} gD}} \quad (9.17)$$

και U_d η πυκνομετρική ταχύτητα λόγω διαφορών πυκνότητας γλυκού – θαλασσινού νερού.

9.4. Προσδιορισμός Συντελεστή Διαμήκους Διασποράς σε Ποταμοεκβολές

Η ανάμειξη στις ποταμοεκβολές προκύπτει, όπως και στα ποτάμια, από ένα συνδυασμό της μικρής κλίμακας τυρβώδους διάχυσης και των μεταβολών μεγάλης κλίμακας του πεδίου ροής. Η φυσική βαθμίδα αλατότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του συντελεστή διάχυσης σε μία ποταμοεκβολή. Συνεπώς, γράφουμε τη μονοδιάστατη εξίσωση μεταφοράς – διάχυσης άλατος (Fischer, 1972):

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -U \frac{\partial S}{\partial x} + D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad (9.18)$$

Καθώς η αλατότητα δε μεταβάλλεται με τον χρόνο, δηλαδή το σύστημα είναι σε κατάσταση ισορροπίας:

$$0 = -U \frac{\partial S}{\partial x} + D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad (9.19)$$

Η αναλυτική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$\ln \frac{S}{S_o} = \frac{U}{D} x \quad (9.20)$$

Συνεπώς, η γνώση της διαμήκους κατανομής της αλατότητας σε μία ποταμοεκβολή θα πρέπει να μας οδηγήσει στην κατανομή του συντελεστή διάχυσης D .

Άσκηση 9.1

Μία ποταμοεκβολή έχει σταθερές διαστάσεις (πλάτος 100 μ και βάθος 6 μ), ενώ η παροχή ροής είναι 12 m³/sec. Αν μετρήσουμε την παρακάτω κατανομή άλατος, να προσδιορίσετε την τιμή του συντελεστή διάχυσης D.

(km)					2	5	8	1	4	7	0
	.4	.6	.8	.6	.2	1.4	9.6	3.7	9.1	2.8	5.2

9.5. Χρόνος Ανανέωσης Ποταμοεκβολής

Σε μία ποταμοεκβολή, ο χρόνος ανανέωσης, δηλαδή ο χρόνος αντικατάστασης όλου του υπάρχοντος γλυκού νερού με ρυθμό ίσο με αυτό της ποτάμιας παροχής, δίνεται με τον τύπο (Dyer, 1973):

$$t = \frac{V_f}{R} \quad (9.21)$$

όπου V_f είναι ο συνολικός όγκος γλυκού νερού και R η ποτάμια παροχή. Η σχετική αναλογία γλυκού νερού f σε μία οποιαδήποτε περιοχή της ποταμοεκβολής είναι:

$$f = \frac{S_{Ocean} - S}{S_{Ocean}} \quad (9.22)$$

με αποτέλεσμα ο συνολικός όγκος γλυκού νερού στην ποταμοεκβολή να είναι:

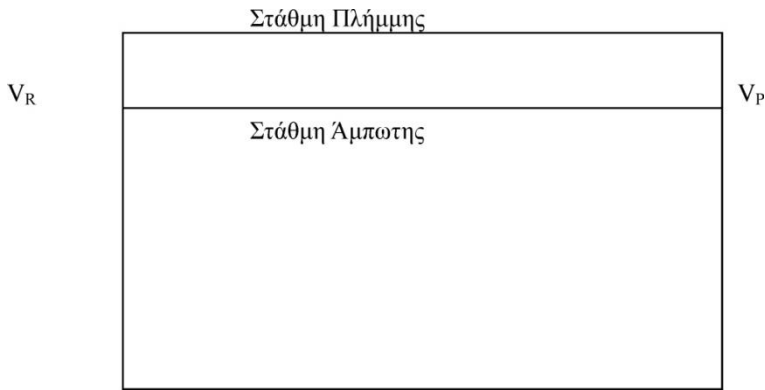
$$V_f = \int f dV = \bar{f} V \quad (9.23)$$

οπότε ο χρόνος ανανέωσης της ποταμοεκβολής είναι:

$$t = \frac{\bar{f} V}{R} \quad (9.24)$$

σχέση που συνδέει το συνολικό όγκο της ποταμοεκβολής, τη ποτάμια παροχή και τη μέση σχετική αναλογία γλυκού νερού (Dyer, 1973).

Μία άλλη θεώρηση εισάγει τον όρο του παλιρροιακού πρίσματος (tidal prism). Σύμφωνα με αυτό κατά την πλήμμη εισάγεται στη περιοχή ποσότητα θαλασσινού νερού V_P αλατότητας S_{Ocean} η οποία αναμιγνύεται πλήρως με την αντίστοιχη ποσότητα γλυκού νερού V_R μετρημένη κατά τη διάρκεια ενός πλήρους παλιρροιακού κύκλου. Επιπλέον, θεωρούμε ότι ολόκληρη αυτή η ποσότητα εξέρχεται πλήρως από τη ποταμοεκβολή κατά την άμπωτη και ότι η διαδικασία επαναλαμβάνεται κατά την επόμενη πλήμμη (Εικόνα 9.5).



Εικόνα 9.5 Μεταβολή όγκου ποταμοεκβολής λόγω παλιρροιακής επίδρασης.

Η μέση αλατότητα κατά την πλήμμη είναι:

$$(V_P + V_R) \bar{S} = V_P S_{Ocean} \Rightarrow \bar{S} = \frac{V_P}{V_P + V_R} S_{Ocean} \quad (9.25)$$

η μέση σχετική αναλογία γλυκού νερού είναι:

$$\bar{f} = 1 - \frac{\bar{S}}{S_{Ocean}} = \frac{V_R}{V_P + V_R} \quad (9.26)$$

και ο χρόνος παραμονής είναι:

$$t = \frac{\bar{f} V}{R} = \frac{V}{V_R / T} \frac{V_R}{V_R + V_P} = \frac{V}{P} T \quad (9.27)$$

όπου T η περίοδος της ημι-ημερήσιας παλίρροιας και P ο παρατηρούμενος όγκος παλιρροιακού πρίσματος ($P = V_P + V_R$).

Θεωρούμε ότι κάποιο μέρος του εξερχόμενου νερού θα επανέλθει στην περιοχή κατά την επόμενη πλήμμη, οπότε οι υπολογιζόμενοι χρόνοι ανανέωσης t_T είναι πάντα μικρότεροι από τους παρατηρούμενους χρόνους t .

Ο ρυθμός ανανέωσης F ορίζεται ως ο ρυθμός ανταλλαγής όλου του όγκου της περιοχής, οπότε:

$$F = \frac{V}{t} = \frac{R}{f} \quad (9.28)$$

και

$$F_T = \frac{V}{t_T} = \frac{P}{T} \quad (9.29)$$

όπου $F_T > F$.

Αν ελευθερώσουμε ένα ρύπο σε μία ποταμοεκβολή, με σταθερό ρυθμό D ο χρόνος παραμονής του ρύπου θα είναι:

$$t = \frac{\bar{C} \rho V}{D}$$

$$F = \frac{D}{\bar{C} \rho}$$
(9.30)

Αν διαιρέσουμε το συνολικό όγκο της ποταμοεκβολής σε διατομές εντός των οποίων συμβαίνει πλήρους ανάμιξη, δηλαδή σε τμήματα εντός των οποίων κινείται κάθε σωματίδιο στη διάρκεια ενός πλήρους παλιρροιακού κύκλου, τότε:

$$V_1 = V_0 + P_0$$

$$V_2 = V_1 + P_1 = V_0 + P_0 + P_1$$

$$V_3 = V_2 + P_2 = V_0 + P_0 + P_1 + P_2$$

....

$$V_n = V_0 + \sum_{n=0}^{n-1} P_n$$
(9.31)

οπότε ορίζουμε ένα λόγο ανταλλαγής r_n για κάθε τμήμα n:

$$r_n = \frac{P_n}{P_n + V_n}$$

$$t_n = \frac{T}{r_n}$$
(9.32)

και ο όγκος γλυκού νερού στο n-τμήμα είναι:

$$V_{fn} = t_n R = \frac{T}{r_n} \frac{V_R}{T} = \frac{V_R}{r_n}$$
(9.33)

Βιβλιογραφία

- Dyer, K. (1973).** *Estuaries: A physical introduction*. London: John Wiley.
- European Economical Union, (1991).** *Urban waste water treatment Directive 91/271/EEC*. Retrieved, from <http://ec.europa.eu/environment/water/water-urbanwaste/directiv.html>.
- Fairbridge R. W. (1980).** *The estuary: its definition and geochemical role*. Chemistry and Geochemistry of Estuaries: John Wiley, New York, pp. 1-35.
- Fischer, H. B. (1972).** *Mass transport mechanisms in partially stratified estuaries*. Journal of Fluid Mechanics, 53, pp. 672-687.
- Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C., Imberger, J., & Brooks, N. H. (1979).** *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press.
- Hansen, D. V., & Rattray, M. J. (1965).** *Gravitational circulation in estuaries*. Journal of Marine Research, 11, pp. 104-122.
- Haralambidou, K., Sylaios, G., & Tsihrintzis, V. A. (2010).** *Salt wedge propagation in a Mediterranean micro-tidal river mouth*. Estuarine, Coastal & Shelf Science(90), pp. 174-184.
- Ji, Z.-G. (2008).** *Hydrodynamics and water quality: modeling rivers, lakes, and estuaries*: John Wiley & Sons.
- Prandle, D. (2009).** *Estuaries: dynamics, mixing, sedimentation and morphology*: Cambridge University Press.
- Pritchard, D. W. (1967).** *What is an estuary: physical viewpoint*. Estuaries, 83, pp. 3-5.
- Simmons, H. B. (1955).** *Some effects of upland discharges on estuarine hydraulics*. Proceedings of American Society of Civil Engineers (A.S.C.E.), 81(792), pp. 1-20.
- Thatcher, M. L., & Harleman, D. R. (1972).** *A mathematical model for the prediction of unsteady salinity intrusion in estuaries*. Technical Report, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Civil Engineering, R.M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics.
- UNESCO, (1991).** *Guidelines on the study of seawater intrusion into rivers*. Studies and Reports in Hydrology 50, eds. van der Tuin H., Unesco, France, 138p.

Κεφάλαιο 10

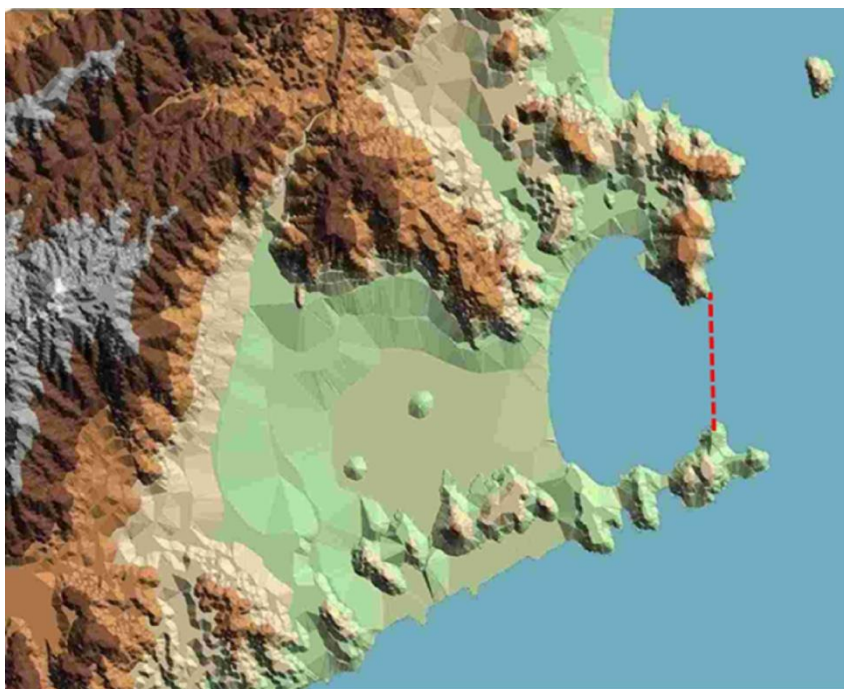
Υδροδυναμική και Διασπορά Ρύπων σε Παράκτιες Περιοχές

Σύνοψη

Ορίζονται τα χαρακτηριστικά ροής των παράκτιων περιοχών και οι κύριες παραδοχές κατάστροφης του μαθηματικού ομοιώματος υδροδυναμικής κυκλοφορίας και συναγωγής -διάχυσης ρύπων στο πεδίο ροής. Το υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιείται και παρουσιάζονται οι εξισώσεις του κατακόρυφα ολοκληρωμένου και του τρισδιάστατου μαθηματικού ομοιώματος. Δίνονται οι αρχικές και οριακές συνθήκες τέτοιων ομοιωμάτων. Δίνεται κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab για τη περιγραφή της δισδιάστατης παράκτιας κυκλοφορίας. Παρουσιάζεται το παλιρροιακό και το ανεμογενές μαθηματικό ομοίωμα καθώς και το συνδυασμένο παλιρροιακό και ανεμογενές ομοίωμα.

10.1. Παράκτια Κυκλοφορία και Εξισώσεις Ροής

Με τον όρο «**παράκτια κυκλοφορία**» ορίζουμε τη μη μόνιμη ροή που ευθύνεται για την ανάπτυξη του διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων και τη μεταβολή της στάθμης της θάλασσας σε μία παράκτια περιοχή. Το πεδίο μελέτης είναι γεωφυσικό με βάθος μερικών δεκάδων μέτρων και οριζόντιες διαστάσεις μερικών δεκάδων χιλιομέτρων πολύπλοκης βαθυμετρίας και γεωμετρίας ορίων ακτών. Το πεδίο αυτό επικοινωνεί με την υπόλοιπη θάλασσα με ένα νοητό, φυσικό όριο, το οποίο καλείται όριο ανοικτής θάλασσας. Παράλληλα δέχεται την επίδραση των φυσικών και ανθρώπινων δραστηριοτήτων που αναπτύσσονται στη χερσαία λεκάνη απορροής με την οποία γειτνιάζει (Hearn, 2008). Οι παράκτιες περιοχές περιλαμβάνουν το σύνολο των θαλάσσιων περιοχών, από τις ακτογραμμές ως το όριο της υφαλοκρηπίδας όπου επεκτείνονται και σχεδόν όλες τις σύγχρονες τεχνικές δραστηριότητες και τεχνικά έργα. Η Εικόνα 10.1 παρουσιάζει τον Όρμο Ελευθερών και την παρακείμενη λεκάνη απορροής. Η κόκκινη γραμμή αποτελεί το νοητό όριο ανοικτής θάλασσας.



Εικόνα 10.1 Ο Όρμος Ελευθερών και η παρακείμενη λεκάνη απορροής. Η κόκκινη γραμμή αποτελεί το νοητό όριο ανοικτής θάλασσας.

Η κυκλοφορία σε παρόμοιες περιοχές έχει διάφορα γενεσιουργά αίτια, από τα οποία τα κυριότερα είναι η παλίρροια, η επίδραση του ανέμου στην επιφάνεια, η διαφοροποίηση της ορμής από θέση σε θέση λόγω διάθλασης και ρηχότητας των ανεμογενών κυματισμών και οι οριζόντιες ή κατακόρυφες μεταβολές της πυκνότητας. Στο κεφάλαιο αυτό θα διερευνηθούν ξεχωριστά κατά κατηγορία τα μαθηματικά ομοιώματα κυκλοφορίας και οι αριθμητικές λύσεις τους ανάλογα με το γενεσιουργό αίτιο της κίνησης. Η διάκριση αυτή έχει περισσότερο μαθηματική σκοπιμότητα και όχι τόσο φυσική σημασία, μια και τα διάφορα αίτια κυκλοφορίας συνυπάρχουν συμβάλλοντας με διάφορες αναλογίες στο τελικό αποτέλεσμα. Η κατάστρωση του μαθηματικού ομοιώματος παράκτιας κυκλοφορίας που συντίθεται από τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και ισορροπίας των δυνάμεων. Γίνονται συνήθως οι εξής παραδοχές (Dyke, 2007):

1. Παραδοχή σχεδόν οριζόντιας ροής, που σημαίνει ότι οι οριζόντιες ταχύτητες u , v κατά τις διευθύνσεις x , y είναι κατά αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες της κατακόρυφης ταχύτητας w . Η παραδοχή αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι οι οριζόντιες διαστάσεις του πεδίου ροής είναι κατά πολύ μεγαλύτερες της κατακόρυφης διάστασης. Η παραδοχή της σχεδόν οριζόντιας κυκλοφορίας απλοποιεί σημαντικά τις εξισώσεις κίνησης, διότι διώχνει τους όρους με τους οποίους συμμετέχει η κατακόρυφη ταχύτητα w , αλλά κυρίως δείχνει ότι η κατακόρυφη κατανομή της πίεσης εξαρτάται μόνο από το ειδικό βάρος του νερού (υδροστατική κατανομή πιέσεων). Η παραδοχή αυτή εκφράζεται μαθηματικά ως:

$$w \approx 0, \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (10.1)$$

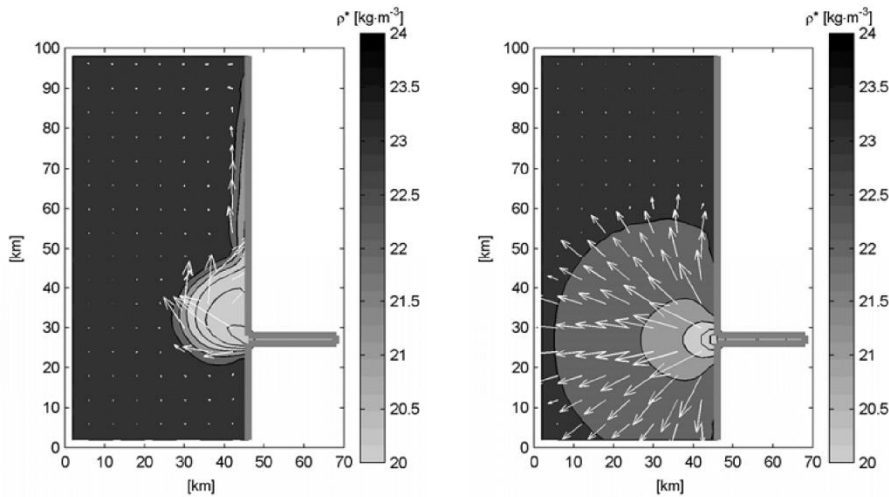
Ωστόσο, υπάρχουν παράκτιες περιοχές με έντονη κατακόρυφη ανοδική (upwelling) ή καθοδική (downwelling) κυκλοφορία στις οποίες η παραδοχή αυτή δεν ισχύει.

2. Συμμετοχή δυνάμεων Coriolis στις εξισώσεις κίνησης, καθώς οι χρονικές και χωρικές κλίμακες εξέλιξης των φαινομένων στην παράκτια κυκλοφορία είναι μεγάλες (πολλές φορές της τάξης μερικών ημερών). Οι δυνάμεις Coriolis που εκφράζονται από το εξωτερικό γινόμενο $2 \Omega \times V$, όπου Ω το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας της Γης ($|\Omega| = 2\pi/86400$ rad/sec) και V το διάνυσμα ταχύτητας κίνησης της μάζας νερού. Η συμμετοχή των όρων Coriolis στις εξισώσεις προσομοίωσης της παράκτιας κυκλοφορίας εξαρτάται από την τιμή του λόγου μετασχηματισμού Rossby:

$$Ro = \frac{U}{fL} \quad (10.2)$$

όπου U και L αντιπροσωπεύουν τις τυπικές τάξεις μεγέθους της ταχύτητας και του μήκους επίδρασης της ροής, ενώ η παράμετρος f καλείται *παράμετρος Coriolis* και ισούται με $f = 2 \Omega \sin \phi$, όπου ϕ το γεωγραφικό πλάτος της περιοχής μελέτης. Μικρός αριθμός Rossby ($Ro \ll 1$) σημαίνει ότι το σύστημα επηρεάζεται από τις δυνάμεις Coriolis, οι οποίες θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στην παράκτια κυκλοφορία. Μεγάλος αριθμός Rossby ($Ro \gg 1$) σημαίνει είτε ότι στο σύστημα κυριαρχούν οι δυνάμεις αδράνειας είτε ότι η κλίμακα κίνησης είναι πολύ μικρή, οπότε οι δυνάμεις Coriolis θεωρούνται μη σημαντικές και παραλείπονται.

Η επίδραση της δύναμης Coriolis στη προσομοίωση παράκτιου συστήματος γίνεται κατανοητή στην Εικόνα 10.2. Με την επίδραση της δύναμης Coriolis η ροή κινείται δεξιόστροφα της κίνησής της στο Βόρειο Ημισφαίριο και αριστερόστροφα στο Νότιο. Έτσι, το νερό του ποταμού που εκβάλλει σε παράκτια περιοχή κινείται προς τα δεξιά του στομίου του ποταμού, δηλαδή βόρεια. Χωρίς την επίδραση της δύναμης Coriolis η ροή εκβάλλει συμμετρικά και ακτινωτά από το στόμιο.



Εικόνα 10.2 Εκβολή ποταμού υπό την επίδραση της δύναμης Coriolis (αριστερά) και χωρίς την επίδρασή της (δεξιά).

3. Η ροή στον ωκεανό είναι τυρβώδης. Οι μεγάλες γραμμικές διαστάσεις του πεδίου ροής, ακόμα και για τις πιο μικρές ταχύτητες συνεπάγονται μεγάλους αριθμούς Reynolds ($0[Re] > 10^4$), άρα η ροή στη θάλασσα είναι τυρβώδης. Για την περιγραφή της ροής αυτής απαιτούνται οι συντελεστές τυρβώδους ιξώδους, οι οποίοι αναπτύσσονται ανισότροπα προς τις διάφορες διευθύνσεις και η τιμή τους εξαρτάται από την κατάσταση τύρβης σε τοπικό επίπεδο. Για το κατά το δυνατόν απλούστερο «κλείσιμο» της τύρβης γίνονται οι εξής παραδοχές: α) η διάκριση των συντελεστών τυρβώδους ιξώδους κατά την κατακόρυφη A_z και οριζόντια (A_x, A_y) διεύθυνση και β) η υιοθέτηση σταθερών τιμών των συντελεστών αυτών στον χώρο και τον χρόνο.

Με τις παραπάνω τρεις γενικές παραδοχές η γενική μορφή του μαθηματικού ομοιώματος είναι:

1. Εξισώσεις κίνησης:

x-διεύθυνση

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + a_x + \frac{\partial}{\partial x} (A_x \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (10.3)$$

y-διεύθυνση

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + a_y + \frac{\partial}{\partial x} (A_x \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \frac{\partial v}{\partial z}) \quad (10.4)$$

όπου $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$ οι συνιστώσες ταχύτητας κατά τις x , y διευθύνσεις αντίστοιχα; $p(x,y,z,t)$ η πίεση, $\rho(x,y,z,t)$ η πυκνότητα και A_x, A_y, A_z οι συνιστώσες των κινηματικών συντελεστών τυρβώδους ιξώδους.

2. Η εξίσωση της συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10.5)$$

Η κατά το βάθος ολοκληρωμένη εξίσωση της συνέχειας:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v dz + w|_{\zeta} - w|_{-h} = 0 \quad (10.6)$$

όπου $\zeta(x,y,t)$ η μεταβολή της ελεύθερης στάθμης της θάλασσας μετρημένη από τη μέση στάθμη ηρεμίας. Εφόσον $w|_{-h} = 0$ και $w|_{\zeta} \sim \partial \zeta / \partial t$ (η οποία γραμμικοποιεί την κινηματική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας). Τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int v dz = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Uh) + \frac{\partial}{\partial y} (Vh) = q \quad (10.7)$$

όπου $U(x,y,z,t)$, $V(x,y,z,t)$ οι ολοκληρωμένες κατά το βάθος οριζόντιες συνιστώσες ταχύτητας και $q(x,y,t)$ η ειδική παροχή πηγής ή εκβάλλοντος ποταμού στο παράκτιο πεδίο ροής.

Οι εξισώσεις x-, y-κίνησης, και η ολοκληρωμένη κατά το βάθος εξίσωση της συνέχειας, αποτελούν σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους (U , V , ζ), τις οποίες επιλύουμε για να καταλάβουμε τα χαρακτηριστικά της παράκτιας κυκλοφορίας.

10.2. Διακριτοποίηση Περιοχής Μελέτης

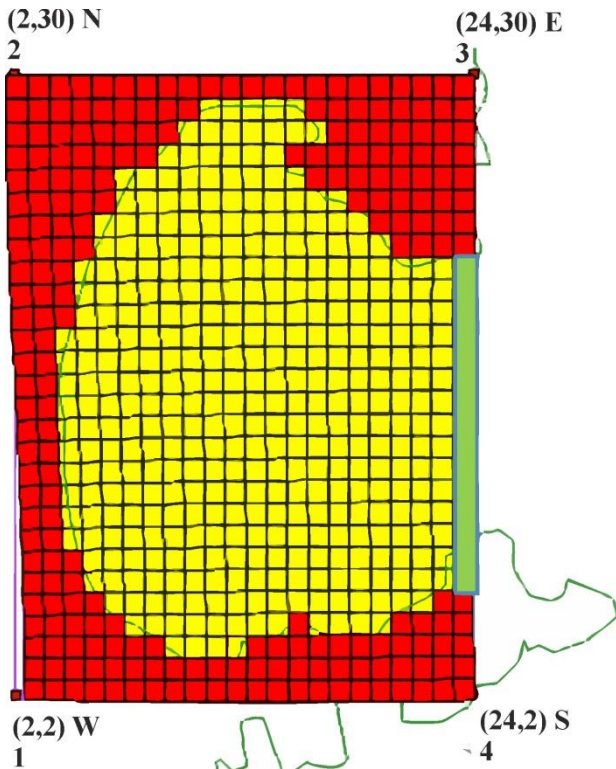
Η διακριτοποίηση της περιοχής μελέτης είναι μία βασική διαδικασία της μαθηματικής προσομοίωσης που ο μελετητής αναλαμβάνει για να διαχωρίσει την περιοχή μελέτης σε επιμέρους στοιχειώδεις όγκους (Martin & McCutcheon, 1998). Εντός του καθενός από αυτούς θα επιλυθούν οι κύριες εξισώσεις της προσομοίωσης. Ο κάθε στοιχειώδης όγκος αποτελεί ένα *κελί* (cell), και το σύνολο των κελιών συνθέτει τον *υπολογιστικό κানাβο* (computational grid) του μαθηματικού ομοιώματος.

Κατά τη διακριτοποίηση ο μελετητής αποφασίζει για τις διαστάσεις των κελιών του υπολογιστικού κανάβου, δηλαδή τα χωρικά βήματα της προσομοίωσης ΔX , ΔY κατά τις x, y-διευθύνσεις αντίστοιχα. Οι διαστάσεις του κελιού μπορεί να είναι ίσες μεταξύ τους (το πλέον σύνηθες, όπου $\Delta X = \Delta Y$ και ο κানাβος καλείται ορθογωνικός). Επίσης, μπορεί οι διαστάσεις να είναι σταθερές και ομοιόμορφες σε όλον τον υπολογιστικό κানাβο ή να μεταβάλλονται εντός του κανάβου, εφόσον ο μελετητής ενδιαφέρεται για τα χαρακτηριστικά της ροής σε επιλεγμένες θέσεις της υπό μελέτη περιοχής.

Η Εικόνα 10.3 παρουσιάζει τον υπολογιστικό κানাβο του Όρμου Ελευθερών με ίσα μεταξύ τους ΔX και ΔY σε όλη την υπό μελέτη περιοχή. Με κόκκινο χρώμα διακρίνονται τα κελιά που αντιστοιχούν στον χερσαίο τμήμα, με κίτρινο χρώμα τα κελιά που αντιστοιχούν στο θαλάσσιο τμήμα της υπό μελέτη περιοχής και με πράσινο χρώμα τα κελιά που αντιστοιχούν στο ανοικτό θαλάσσιο όριο επικοινωνίας της παράκτιας περιοχής με την ανοικτή θάλασσα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα κελιά στο όριο χερσαίας – θαλάσσιας περιοχής για τα οποία ο μελετητής αποφασίζει αν θα τα εντάξει στη χερσαία περιοχή (κόκκινο χρώμα) ή στη θαλάσσια περιοχή (κίτρινο χρώμα). Δεν υπάρχει καθορισμένη μεθοδολογία κατάταξης των κελιών αυτών στη μία ή την άλλη κατηγορία.

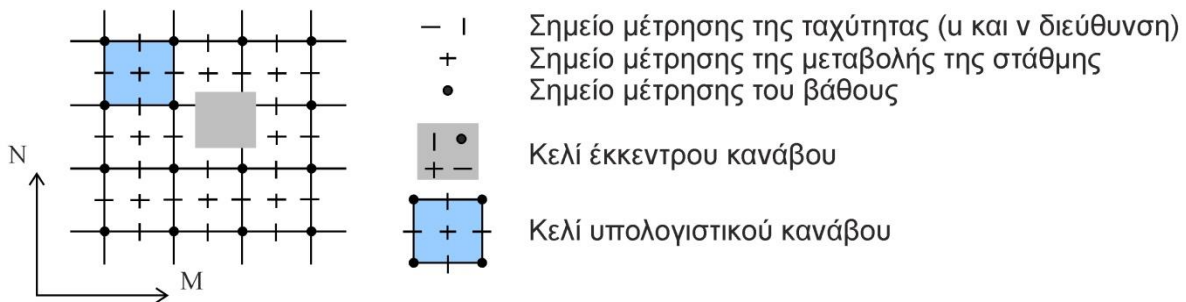
Για κάθε κελί δημιουργείται πίνακας με το μέσο βάθος που αντιστοιχεί στην περιοχή του κελιού. Ο πίνακας περιέχει και τα χερσαία κελιά, τα οποία συνήθως συμβολίζονται με ένα πολύ μεγάλο ή ειδικό αριθμό, π.χ. 9999. Τα θαλάσσια κελιά περιέχουν το βάθος σε μέτρα, συνήθως με αρνητικό πρόσημο, π.χ. -70, καθώς ο κατακόρυφος άξονας είναι τοποθετημένος στη μέση στάθμη θάλασσας με φορά προς τα πάνω.



Εικόνα 10.3 Διακριτοποίηση Όρμου Ελευθερών. Με κόκκινο χρώμα τα κελιά που αντιστοιχούν στο χερσαίο τμήμα της υπό μελέτης περιοχής, με κίτρινο χρώμα τα κελιά που αντιστοιχούν στο θαλάσσιο τμήμα της υπό μελέτης περιοχής και με πράσινο χρώμα τα κελιά του νοητού ανοικτού ορίου.

Οι άγνωστες συναρτήσεις του παραπάνω συστήματος εξισώσεων είναι οι U , V , ζ , οι οποίες υπολογίζονται σε σημεία του κανάβου που δεν ταυτίζονται. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται με τον όρο *έκκεντρος κανάβος* (staggered grid).

Ο πιο κοινός κανάβος είναι ο Arakawa C grid, στον οποίο τα κελιά είναι ορθογωνικά, και στο κέντρο τους υπολογίζεται η μεταβολή της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας ζ , ενώ στα κέντρα των ανατολικών – δυτικών εδρών οι ολοκληρωμένες με το βάθος οριζόντιες ταχύτητες ροής U και στα κέντρα των βόρειων – νότιων εδρών οι ολοκληρωμένες με το βάθος οριζόντιες ταχύτητες ροής V (Εικόνα 10.4).



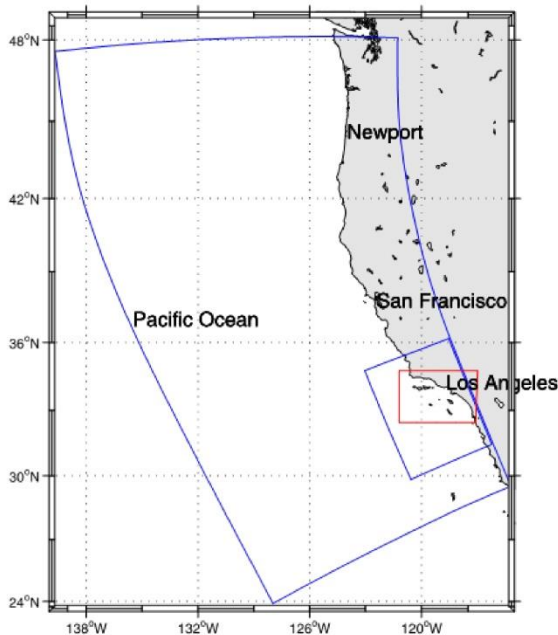
Εικόνα 10.4 Έκκεντρος υπολογιστικός κανάβος, όπου στα σημεία με σταυρό γίνεται ο υπολογισμός της μεταβολής της ελεύθερης στάθμης και στα σημεία με γραμμή (οριζόντια ή κάθετη), ο υπολογισμός των U , V ταχυτήτων.

Οι διάφορες τιμές των άγνωστων συναρτήσεων U , V , ζ χαρακτηρίζονται με δείκτες που αντιστοιχούν στις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών x , y , t .

10.3. Οριακές Συνθήκες Παράκτιου Ομοιώματος

Οι εξισώσεις του γενικού μαθηματικού ομοιώματος παράκτιας κυκλοφορίας συμπληρώνονται από τις κατάλληλες οριακές συνθήκες, οι οποίες από φυσική άποψη διακρίνονται σε (Nielsen, 2009):

1. *Συνθήκη περιμετρικού ορίου ακτών*: Σύμφωνα με τη συνθήκη αυτή το μέγεθος της ταχύτητας που είναι εγκάρσια στα περιμετρικά όρια των ακτών της υπό μελέτη περιοχής μηδενίζεται. Μία τέτοια συνθήκη δεν επιτρέπει τη διαβροχή των χερσαίων περιοχών πέρα από την αρχική ακτογραμμή.
2. *Συνθήκη ορίου ανοικτής θάλασσας*: Η συνθήκη αυτή αποτελεί τη πιο βασική οριακή συνθήκη του ομοιώματος παράκτιας κυκλοφορίας, διότι στο όριο ανοικτής θάλασσας (νοητή γραμμή επικοινωνίας της υπό μελέτη παράκτιας περιοχής με την παρακείμενη ανοικτή θάλασσα) θα πρέπει να καθορισθούν από τον μελετητή οι τιμές της ταχύτητας ή της μεταβολής της ελεύθερης στάθμης της θάλασσας. Η τοποθέτηση του ανοικτού ορίου εξαρτάται από την κατανόηση των φυσικών διεργασιών μεταφοράς μάζας και αλατότητας από και προς τη παράκτια περιοχή και από τη μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στο όριο αυτό. Συνήθως χρησιμοποιούμε ως οριακή συνθήκη ανοικτού ορίου την περιγραφή της μεταβολής της ελεύθερης στάθμης της θάλασσας ($\zeta(t)$), όπως αυτή προκύπτει είτε από παρατηρήσεις πεδίου (σταθμηγράφος που καταγράφει τη μεταβολή της στάθμης της θάλασσας στον χρόνο), είτε από παραδοχές ως προς το κύριο γενεσιουργό αίτιο της μεταβολής αυτής (π.χ. παλιρροιακή μεταβολή). Υπάρχει, τέλος, η τεχνική επίλυσης του μαθηματικού ομοιώματος για την παρακείμενη θαλάσσια περιοχή και τη χρήση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν στην περιοχή κοντά στο ανοικτό όριο της υπό μελέτη περιοχής ως οριακή συνθήκη. Η μέθοδος αυτή καλείται μέθοδος *διασυνδεδεμένων υπολογιστικών κανάβων* (nested grid method) και δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα, διότι επιτυγχάνει οριακές συνθήκες σωστότερα περιγραφόμενες στο ανοικτό όριο διότι: α) έτσι η μεταβολή της ελεύθερης στάθμης της θάλασσας μεταβάλλεται και κατά μήκος του ανοικτού ορίου ($\zeta(y,t)$), και β) η μεταβολή της ελεύθερης στάθμης στο ανοικτό όριο της υπό μελέτη περιοχής δεν εφαρμόζεται από το μελετητή, αλλά προκύπτει ως αποτέλεσμα μαθηματικού ομοιώματος που εμπεριέχει τις φυσικές διεργασίες της ευρύτερης περιοχής (Εικόνα 10.5).



Εικόνα 10.5 Διασυνδεδεμένοι υπολογιστικοί κανάβοι σταδιακά αυξανόμενης χωρικής ανάλυσης, με στόχο να δημιουργηθούν οριακές συνθήκες για τον κανάβο κόκκινου χρώματος που προσομοιώνει την παράκτια κυκλοφορία.

3. *Συνθήκη ορίου επιφάνειας*: Σε μαθηματικά ομοιώματα παράκτιας κυκλοφορίας στα οποία θεωρούμε τη διατμητική δράση του ανέμου παρούσα, με συνιστώσες ταχύτητας W_x , W_y συμβατικά μετρημένες σε ύψος 10 μ από την επιφάνεια της θάλασσας, έτσι ώστε $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$, εφαρμόζεται διατμητική τάση που εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$\frac{\tau_{sx}}{\rho} = A_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = C_D W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (10.8)$$

$$\frac{\tau_{sy}}{\rho} = A_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = C_D W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (10.9)$$

όπου C_D ο συντελεστής σύρσεως (drag coefficient), η τιμή του οποίου εξαρτάται από την ταχύτητα του ανέμου W , τη σταθερότητα των κατώτερων ατμοσφαιρικών στρωμάτων και την κατάσταση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας. Ο αδιάστατος αυτός συντελεστής αποκτά τιμές που προκύπτουν από επιτόπιες παρατηρήσεις ή εμπειρικές σχέσεις, όπως:

$$C_D = 1.6 \times 10^{-3} \quad \text{όταν } W < 7 \text{ m/s} \quad (10.10)$$

$$C_D = 2.5 \times 10^{-3} \quad \text{όταν } W > 10 \text{ m/s} \quad (10.11)$$

4. Η οριζόντια συνιστώσα της ανεμογενούς τάσης κατά την x-, y- διεύθυνση εκφράζεται ως συνάρτηση της ταχύτητας του ανέμου ως:

$$\tau_s = C_D \rho_a W^2 \sin \psi \quad (10.12)$$

όπου ψ η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του ανέμου και του άξονα (x ή y) του κανάβου διακριτοποίησης της παράκτιας περιοχής.

5. *Συνθήκη ορίου πυθμένα*: Όπως προηγουμένως θα πρέπει να ορίσουμε το μέγεθος της πυθμιαίας διατμητικής τάσης με σκοπό να προσομοιώσουμε τη κατακόρυφη μεταφορά ορμής λόγω της παρουσίας του ορίου του πυθμένα. Μία συνηθισμένη προσέγγιση είναι με τη συσχέτιση της διατμητικής τάσης με το μέγεθος της ταχύτητας σε κάποια προκαθορισμένη απόσταση από το στερεό όριο πυθμένα. Έτσι γίνεται η παραδοχή της συνθήκη λογαριθμικής κατανομής της ταχύτητας της μόνιμης ομοιόμορφης ροής (τυρβώδης οριακή στοιβάδα) της μορφής:

$$u = \frac{u_\Delta}{k} \ln \frac{z+h}{z_0} \quad (10.13)$$

όπου $z_0 = k_s/30$, με k_s την απόλυτη τραχύτητα του πυθμένα. Προεκτείνοντας από την υδραυλική θεωρία της ροής σε ανοικτούς αγωγούς, η τριβή που ενεργεί σε παλιρροιακό ρεύμα λόγω της παρουσίας πυθμένα σε βάθος $z = -h$ δίνεται ως:

$$\tau_{bottom} = k |u_\Delta| u_\Delta \quad (10.14)$$

όπου u_{Δ} είναι η ταχύτητα 1 μ πάνω από το όριο του πυθμένα.

Ο αδιάστατος συντελεστής k εξαρτάται αρχικά από τη τραχύτητα του πυθμένα, και η τιμή του προκύπτει από εμπειρικές σχέσεις, όπως του Darcy-Weisbach, ως εξής:

$$k = f / s \quad (10.15)$$

όπου f ο συντελεστής τριβής Darcy – Weisbach και s η κλίση πυθμένα.

10.4. Κατάστρωση Παλιρροιακού Παράκτιου Ομοιώματος

Γενεσιουργό αίτιο στην περίπτωση αυτή είναι η διαταραχή της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας λόγω της διάδοσης μακρών (παλιρροιακών) κυματισμών με περίοδο $T \sim 12,42$ ώρες (παλιρροιακή συνιστώσα M_2). Η διαταραχή αυτή επιβάλλεται στην παράκτια περιοχή μελέτης μέσω του ανοικτού ορίου της.

Το πλάτος της προσπίπτουσας διαταραχής θεωρείται γνωστό:

α) από συνεχείς μετρήσεις παλιρροιογράφων,

β) από μετρήσεις παλιρροιακών υψών μόνο μίας ημέρας, στις οποίες καταγράφηκε η μέγιστη και ελάχιστη παλιρροιακή μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας και γίνεται χρήση της σχέσης:

$$\zeta = \frac{1}{2} (\zeta_k + \zeta_{k+1}) \cos \frac{\pi(t - t_k)}{t_{k+1} - t_k} \quad (10.16)$$

με το k να μεταβάλλεται από 1-4, το ζ_k να είναι το μέγιστο ή ελάχιστο ύψος της παλιρροιακής μεταβολής και t_k η χρονική στιγμή σε ώρες όταν συμβαίνει αυτό. Στη διάρκεια μίας ημέρας η M_2 ημι-ημερήσια παλιρροιακή συνιστώσα θα παρουσιάσει 2 μέγιστα και 2 ελάχιστα και

γ) με χρήση της εξίσωσης μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας με τη μορφή ημιτονοειδούς κύματος:

$$\zeta = A_0 \cos (ct - \phi) \quad (10.17)$$

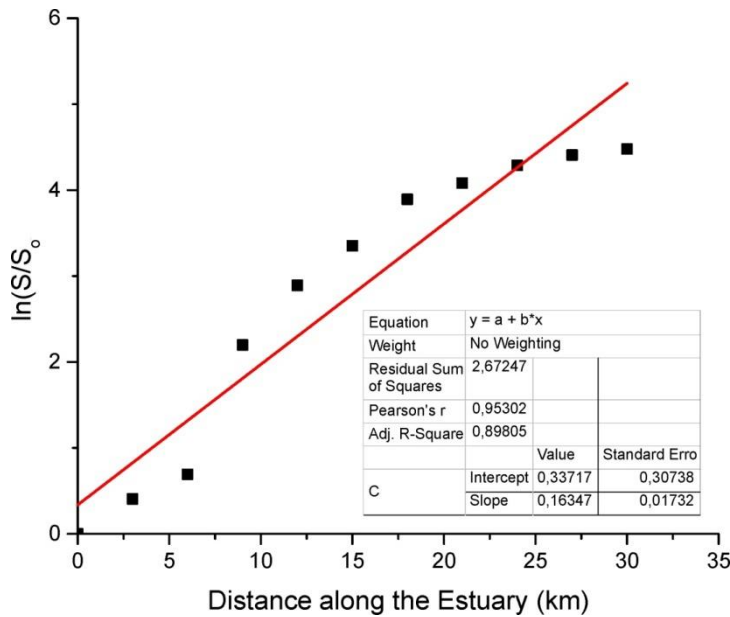
όπου A_0 , c , ϕ , το εύρος, η ταχύτητα διάδοσης και η φάση της M_2 παλιρροιακής συνιστώσας αντίστοιχα.

Λύση

Η ταχύτητα ροής προκύπτει από:

$$U = \frac{Q}{A_c} = \frac{12}{100 \times 6} = 0.02 \text{ m/s}$$

Δημιουργούμε ένα ημι-λογαριθμικό διάγραμμα απόστασης και $\ln(S/S_0)$, όπου S_0 η αλατότητα στο ποτάμιο όριο.



Από εδώ προκύπτει ότι η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία είναι 0.163 km^{-1} . Ο συντελεστής διάχυσης δίνεται:

$$D = \frac{U}{\text{slope}} = \frac{0.02 \text{ m/s}}{1.63 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}} = 122.7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Άσκηση 10.1

Δημιουργία παλιρροιακής οριακής συνθήκης σε ανοικτό όριο.

Σε φύλλο εργασίας Excel γράφουμε τις τιμές εύρους διακύμανσης της στάθμης και τις τιμές περιόδου ανά παλιρροιακή συνιστώσα.

	M2	S2	N2	K2	K1	O1	P1
amp	0.20	0.09	0.04	0.01	0.04	0.08	0.04
per	12.42	12.00	12.66	11.97	23.93	25.82	24.07

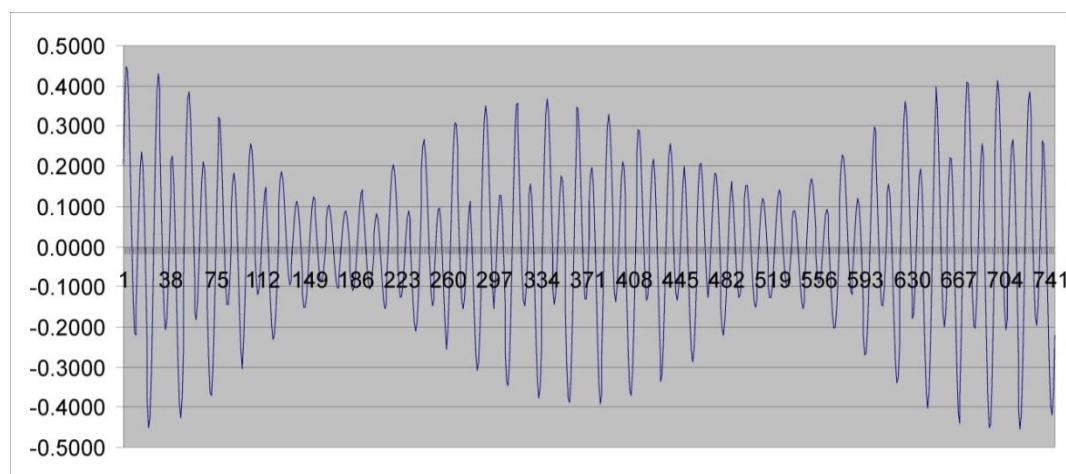
όπου amp είναι το εύρος διακύμανσης (σε μ) και per η περίοδος (σε ώρες). Σε μία στήλη δημιουργούμε αριθμοσειρά του χρόνου από το 0 έως 500 ώρες. Στις γειτονικές στήλες λύνουμε τη σχέση:

$$= \$Y\$2 * \text{SIN}(2 * \text{PI}() * A2 / \$Y\$3)$$

όπου \$Y\$2 είναι η θέση της τιμής του παλιρροιακού εύρους για τη συνιστώσα M2, A2 είναι η τιμή του χρόνου (σε ώρες) από την αριθμοσειρά και \$Y\$3 είναι η θέση της τιμής της περιόδου της παλιρροιακής συνιστώσας M2. Αντιγράφουμε κατακόρυφα και λύνουμε για όλες τις χρονικές στιγμές έως τις 500 ώρες. Κάνουμε το ίδιο και για τις υπόλοιπες παλιρροιακές συνιστώσες.

M2	S2	N2	K2	K1	O1	P1	TOTAL
0.0969	0.0465	0.0182	0.0040	0.0096	0.0200	0.0100	0.2053
0.1696	0.0806	0.0321	0.0070	0.0186	0.0388	0.0193	0.3658
0.1997	0.0930	0.0382	0.0080	0.0263	0.0554	0.0273	0.4478
0.1798	0.0806	0.0351	0.0069	0.0321	0.0686	0.0334	0.4366
0.1149	0.0465	0.0235	0.0040	0.0358	0.0779	0.0373	0.3399
0.0212	0.0000	0.0062	-0.0001	0.0370	0.0825	0.0386	0.1856
-0.0778	-0.0465	-0.0125	-0.0041	0.0357	0.0823	0.0374	0.0145
-0.1574	-0.0806	-0.0282	-0.0070	0.0320	0.0772	0.0336	-0.1304
-0.1975	-0.0930	-0.0372	-0.0080	0.0260	0.0676	0.0275	-0.2146
-0.1881	-0.0806	-0.0371	-0.0069	0.0183	0.0540	0.0196	-0.2209
-0.1316	-0.0465	-0.0281	-0.0039	0.0093	0.0372	0.0103	-0.1534
-0.0422	0.0000	-0.0123	0.0001	-0.0003	0.0182	0.0004	-0.0361
0.0578	0.0465	0.0064	0.0041	-0.0099	-0.0018	-0.0096	0.0935
0.1434	0.0806	0.0236	0.0070	-0.0189	-0.0218	-0.0190	0.1950
0.1930	0.0930	0.0351	0.0080	-0.0265	-0.0404	-0.0270	0.2353
0.1943	0.0806	0.0382	0.0069	-0.0323	-0.0567	-0.0332	0.1976
0.1469	0.0465	0.0320	0.0039	-0.0359	-0.0696	-0.0372	0.0865
0.0627	0.0000	0.0181	-0.0002	-0.0370	-0.0785	-0.0386	-0.0736
-0.0372	-0.0465	-0.0002	-0.0042	-0.0356	-0.0827	-0.0375	-0.2439
-0.1278	-0.0806	-0.0184	-0.0071	-0.0318	-0.0820	-0.0338	-0.3814

Στην τελευταία στήλη αθροίζουμε και παίρνουμε τη συνολική παλιρροιακή μεταβολή, αυτήν που καταγράφει ένας παλιρροιογράφος (Εικόνα 10.6).



Εικόνα 10.6 Παλιρροιακή μεταβολή στο ανοικτό όριο παράκτιας περιοχής, για την εφαρμογή οριακής συνθήκης μαθηματικού ομοιώματος.

Η εφαρμοσιμότητα της θεωρίας των μακρών κυματισμών εξασφαλίζεται από τη σύγκριση του μήκους κύματος λ και του βάθους h . Για βάθη της τάξης των $h = 100$ m η ταχύτητα διάδοσης $c = (gh)^{1/2} = 30$ m/sec και μήκος κύματος $\lambda = 1,3 \times 10^6$ m, οπότε ($\lambda \gg h$). Η ομοιόμορφη και σχεδόν σταθερή κατανομή των τιμών ταχύτητας στο μεγαλύτερο μέρος του βάθους ροής και η εμφάνιση ισχυρών διατμητικών τάσεων μόνο στο εσωτερικό του οριακού στρώματος που προκαλεί η παρουσία πυθμένα (όπου η κατανομή της ταχύτητας είναι λογαριθμική) επιτρέπει την απλοποίηση του μαθηματικού ομοιώματος με την ολοκλήρωση κατά το βάθος των εξισώσεων κίνησης και συνέχειας και τη λήψη των μέσων τιμών ταχύτητας:

$$U = \frac{1}{h} \int_{-z_0}^{\zeta} u dz \quad \text{και} \quad V = \frac{1}{h} \int_{-z_0}^{\zeta} v dz$$

Οι όροι των οριζόντιων βαθμίδων πίεσης στην περίπτωση ομογενούς ρευστού παίρνουν τη μορφή:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{και} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε ότι οι όροι Coriolis δεν είναι αμελητέοι και εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$f_{xC} = 2\Omega \sin f v \quad \text{και} \quad f_{yC} = -2\Omega \sin f u$$

τότε οι εξισώσεις κίνησης και η ολοκληρωμένη κατά το βάθος εξίσωση συνέχειας γράφονται:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + fV - \frac{gU}{hC^2} \sqrt{U^2 + V^2} + A_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (10.18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - fU - \frac{gV}{hC^2} \sqrt{U^2 + V^2} + A_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (10.19)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Uh) + \frac{\partial}{\partial y} (Vh) = q \quad (10.20)$$

Γενικά εφαρμόζονται οι συναρτησιακές σχέσεις:

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= f_1(U^n, V^n, \zeta^{n+1/2}, \dots) \\ V_{i,j}^{n+1} &= f_2(U^n, V^n, \zeta^{n+1/2}, \dots) \\ \zeta_{i,j}^{n+3/2} &= f_3(U^{n+1}, V^{n+1}, \zeta^{n+1/2}, \dots) \end{aligned} \quad (10.21)$$

Οι παραπάνω σχέσεις διευκολύνουν τους υπολογισμούς και τον προγραμματισμό των άγνωστων συναρτήσεων, εισάγουν όμως ένα ανώτατο όριο στην τιμή του χρησιμοποιούμενου Δt για την αποφυγή εμφάνισης αστάθειας στην αριθμητική λύση. Επειδή το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιούμε είναι ρητό, το μέγιστο Δt διέπεται από το κριτήριο Courant:

$$\frac{c\Delta t}{\sqrt{2}\Delta y} < 1, \quad \frac{c\Delta t}{\sqrt{2}\Delta x} < 1 \quad (10.22)$$

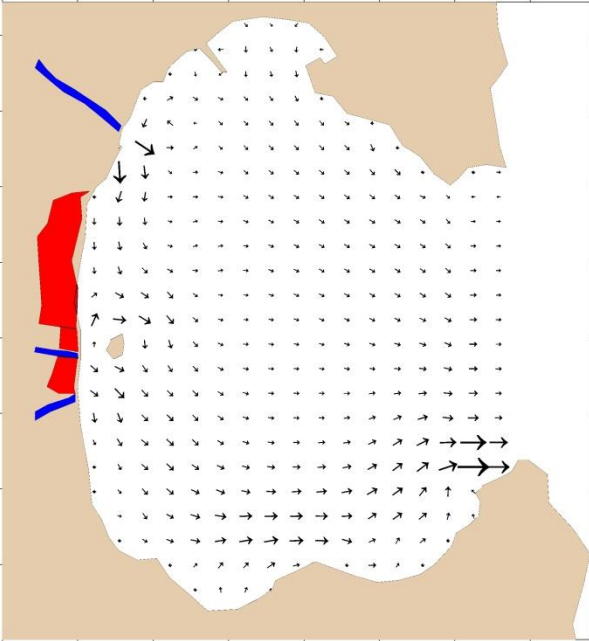
όπου $c = \sqrt{gh}$. Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι μεταξύ δύο διαδοχικών υπολογισμών δε θα πρέπει το χρονικό διάστημα Δt να είναι μεγαλύτερο από αυτό που χρειάζεται μία διαταραχή με δεδομένη ταχύτητα c για να διατρέξει την απόσταση Δx ή Δy , δηλαδή την απόσταση ενός βρόγχου του κανάβου. Αντίθετα, τα πεπλεγμένα σχήματα είναι ευσταθή για κάθε Δt , αλλά υπέρμετρη αύξηση του Δt συνεπάγεται απαγορευτικές αλλοιώσεις στην αριθμητική λύση. Για το λόγο αυτό προτείνεται η χρήση των ρητών σχημάτων με την υπόμνηση της διατήρησης του αριθμού Courant κοντά στη μονάδα. Η τελική μορφή των εξισώσεων κίνησης και της ολοκληρωμένης κατά το βάθος εξίσωσης της συνέχειας, προσεγγισμένων με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών είναι:

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{n+1} = & U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{8\Delta x} [(U_{i+1,j}^n + U_{i,j}^n)^2 - (U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n)^2] - \frac{\Delta t}{2\Delta y} V_{i,j}^n (U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n) - \\
& -g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i-1,j}^{n+1/2}) - \frac{2gU_{i,j}^n \sqrt{U_{i,j}^{n2} + V_{i,j}^{n2}}}{C^2(h_{i,j} + h_{i-1,j})} + fV_{i,j}^n
\end{aligned}
\tag{10.23}$$

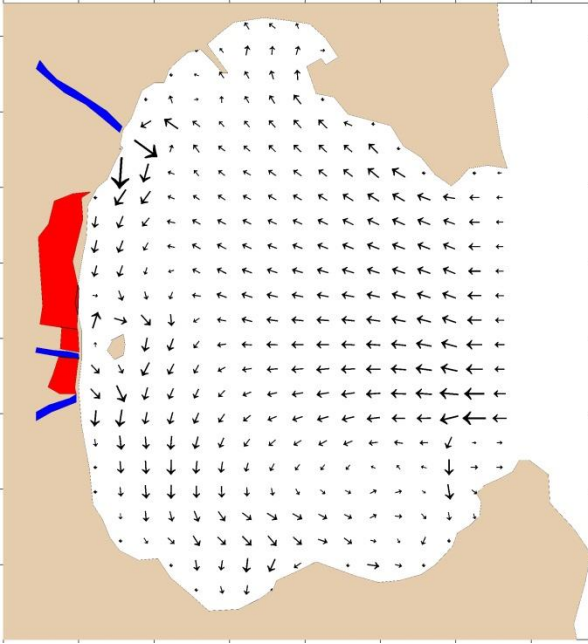
$$\begin{aligned}
V_{i,j}^{n+1} = & V_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{8\Delta y} [(V_{i,j+1}^n + V_{i,j}^n)^2 - (V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n)^2] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{i,j}^n (V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n) - \\
& -g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j-1}^{n+1/2}) - \frac{2gV_{i,j}^n \sqrt{U_{i,j}^{n2} + V_{i,j}^{n2}}}{C^2(h_{i,j} + h_{i,j-1})} - fU_{i,j}^n
\end{aligned}
\tag{10.24}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{i,j}^{n+3/2} = & \zeta_{i,j}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (U_{i+1,j}^n (h_{i+1,j} + h_{i,j}) - U_{i,j}^n (h_{i,j} + h_{i-1,j})) - \\
& - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (V_{i,j+1}^n (h_{i,j} + h_{i,j+1}) - V_{i,j}^n (h_{i,j} + h_{i,j-1})) + q_{i,j} \Delta t
\end{aligned}
\tag{10.25}$$

Μετά την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων, η παλιρροιακή κυκλοφορία στον Όρμο Ελευθερών κατά την παλιρροιακή φάση της άμπωτης δίνεται ενδεικτικά στην Εικόνα 10.7. Προκύπτει η κίνηση των ρευμάτων και η έξοδος του νερού από το νότιο τμήμα του κόλπου. Αντίστοιχα, κατά τη φάση της παλιρροιακής πλήμης, η κυκλοφορία δίνεται στην Εικόνα 10.8. Προκύπτει ότι το νερό εισέρχεται από το βόρειο και κεντρικό τμήμα του κόλπου, ακολουθεί την παράκτια μορφολογία και κινείται προς την έξοδο από το νότιο όριο, όπου λόγω τοπογραφίας αναπτύσσεται μία αντι-ωρολογιακή περιδίνηση (κυκλώνας).



Εικόνα 10.7 Παλιρροιακή παράκτια κυκλοφορία στον Όρμο Ελευθερών κατά τη φάση της άμπωτης.



Εικόνα 10.8 Παλιρροιακή παράκτια κυκλοφορία στον Όρμο Ελευθερών κατά τη φάση της πλήμμυης.

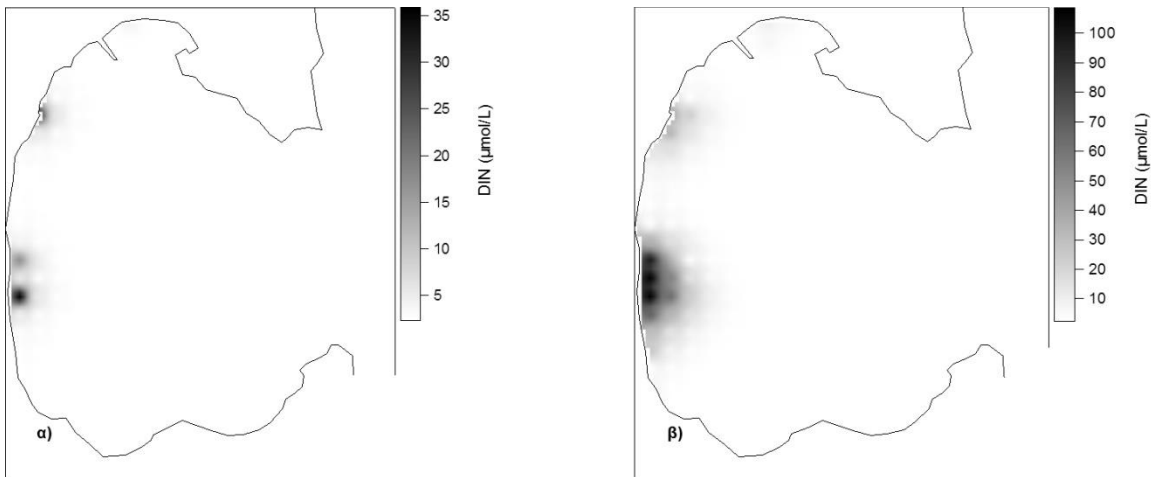
10.5. Μεταφορά και Διάχυση Ρύπου

Ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης του ρύπου σε κάθε σημείο της παράκτιας θάλασσας περιγράφεται από την εξίσωση μεταφοράς – διάχυσης (advection – diffusion equation):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + P - B \quad (10.26)$$

όπου K_x και K_y οι συντελεστές οριζόντιας τυρβώδους διάχυσης και K_z ο συντελεστής κατακόρυφης τυρβώδους διάχυσης. Ο πρώτος όρος της εξίσωσης είναι ο τοπικός όρος, οι επόμενοι δύο είναι οι όροι οριζόντιας συναγωγής μέσω της ολοκληρωμένης με το βάθος ταχύτητας ροής και οι τρεις πρώτοι όροι στο δεξί τμήμα είναι οι όροι τυρβώδους διάχυσης του ρύπου. Οι όροι P και B εκφράζουν την πιθανή παραγωγή ή απώλεια, αντίστοιχα του ρύπου λόγω βιογεωχημικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα στο πεδίο ροής. Εφαρμόζονται μόνο όταν ο ρύπος είναι μη-συντηρητικός (π.χ. θρεπτικά άλατα, βαρέα μέταλλα) και μηδενίζονται για συντηρητικούς ρύπους (π.χ. αλατότητα).

Η εφαρμογή της παραπάνω εξίσωσης στο μαθηματικό ομοίωμα του Όρμου Ελευθερών δίνει την κατανομή της συγκέντρωσης του ρύπου στο πεδίο ροής, όπως φαίνεται στην Εικόνα 10.9.



Εικόνα 10.9 Κατανομή συγκεντρώσεων ρύπου προερχόμενων από τα ρέματα που εκβάλλουν στο Όρμο Ελευθερών (αριστερά, έναρξη προσομοίωσης – δεξιά, τέλος προσομοίωσης).

Βιβλιογραφία

Dyke, P. (2007). *Modeling coastal and offshore processes*: World Scientific.

Hearn, C. J. (2008). *The dynamics of coastal models*: Cambridge University Press.

Martin, J. L., & McCutcheon, S. C. (1998). *Hydrodynamics and transport for water quality modeling*: CRC Press.

Nielsen, P. (2009). *Coastal and estuarine processes* (Vol. 29).

Κεφάλαιο 11

Μηχανική Φλεβών και Πλουμιών

Σύνοψη

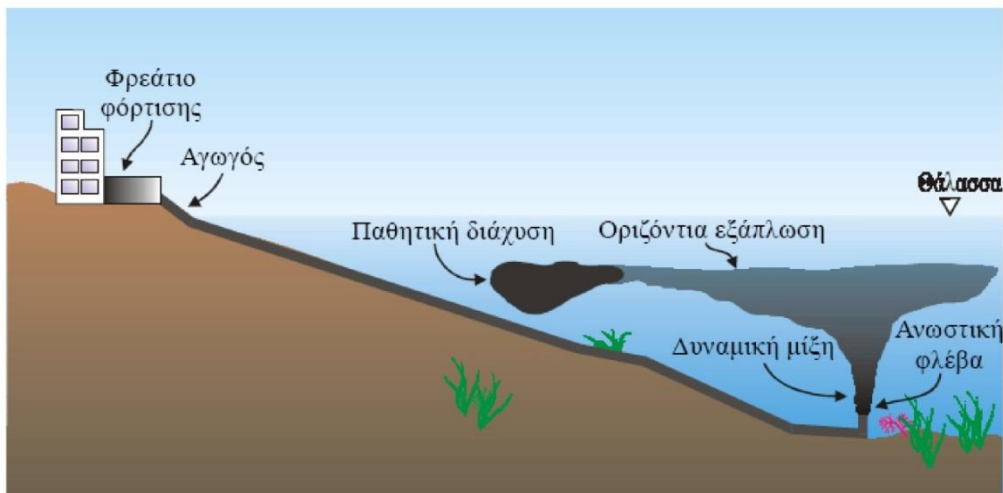
Διασύνδεση του παράκτιου υδροδυναμικού ομοιώματος με το ομοίωμα διασποράς ρύπων που εκρέουν από υποθαλάσσιο αγωγό. Εξηγούνται τα χαρακτηριστικά εκροής και ορίζεται η έννοια της φλέβας, του πλουμίου και της τυρβώδους ανωστικής φλέβας. Δίνονται οι εξισώσεις περιγραφής των χαρακτηριστικών της φλέβας (κυκλικής και επίπεδης) στο κοντινό και στο μακρινό πεδίο ροής. Δίνονται οι εξισώσεις περιγραφής της κατακόρυφης ταχύτητας και της κατανομής ρύπων εντός της φλέβας. Αντίστοιχα δίνονται οι εξισώσεις περιγραφής της κατανομής της κατακόρυφης ταχύτητας και της συγκέντρωσης ρύπων σε υποβρύχιο ανωστικό πλούμιο. Παρουσιάζεται κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab για την επίλυση των ομοιωμάτων διασποράς ρύπων από υποβρύχιες φλέβες και πλούμια.

11.1. Ορισμός υποβρύχιας φλέβας και πλουμίου

Πολλές παραθαλάσσιες πόλεις διοχετεύουν τα επεξεργασμένα ή ανεπεξέργαστα απόβλητά τους μέσω ενός υποβρύχιου αγωγού. Η μελέτη της μηχανικής διασποράς αστικών λυμάτων και βιομηχανικών αποβλήτων μέσα στη θάλασσα παρουσιάζει ενδιαφέρον, καθώς αποτελεί το αναγκαίο υπόβαθρο για το μελετητή μηχανικό που αναζητεί απάντηση στα παρακάτω ερωτήματα:

- Πόσο μακριά από την ακτή πρέπει να γίνεται η διοχέτευση των λυμάτων στη θάλασσα, ώστε οι ακτές να μη μολύνονται και να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κολύμβηση κ.λπ.
- Σε ποιο βάθος πρέπει να γίνει η εκροή των λυμάτων, και
- Ποιος είναι ο αναγκαίος βαθμός καθαρισμού των λυμάτων πριν τη διάθεσή τους στη θάλασσα.

Τα οικιακά λύματα και τα βιομηχανικά απόβλητα είναι συνήθως ελαφρύτερα του θαλασσινού νερού (το οποίο έχει πυκνότητα περίπου $1,025 \text{ gr/cm}^3$), γιατί η πυκνότητά τους είναι περίπου ίση με την πυκνότητα του γλυκού νερού (πυκνότητα περίπου $1,0 \text{ gr/cm}^3$), με αποτέλεσμα το λύμα να υφίσταται άνωση λόγω διαφοράς πυκνότητας από το θαλασσινό περιβάλλον του και να ανέρχεται στην επιφάνεια της θάλασσας. Η ροή που δημιουργείται ονομάζεται *φλέβα* (jet) όταν έχουμε εκροή ενός ρευστού από το στόμιο ενός διαχυτήρα σε έναν αποδέκτη παρόμοιου ρευστού ή *πλούμιο* (plume) όταν το εκρέον ρευστό διαθέτει θετική ή αρνητική άνωση σε σχέση με το περιβάλλον ρευστό (Εικόνα 11.1).



Εικόνα 11.1 Σχηματική παρουσίαση διεργασιών μείξης ανωστικής φλέβας λυμάτων.

Η συμπεριφορά μίας φλέβας ή ενός πλουμίου κατά την έξοδό τους από τον διαχυτήρα εξαρτάται από (Fischer et al., 1979):

- Τις παραμέτρους εκροής της φλέβας ή του πλουμίου,
- Τις επικρατούσες περιβαλλοντικές παραμέτρους και
- Τους σχεδιαστικούς γεωμετρικούς παράγοντες του διαχυτήρα.

Ειδικότερα,

A) Παράμετροι του εκρέοντος ρευστού:

- Πυκνότητα του εκρέοντος ρευστού ή $T, S \sim f(\rho)$
- Αρχική ταχύτητα εκρέοντος ρευστού
- Τυρβώδης διάχυση εκρέοντος ρευστού
- Αρχική συγκέντρωση ρύπων εκρέοντος ρευστού

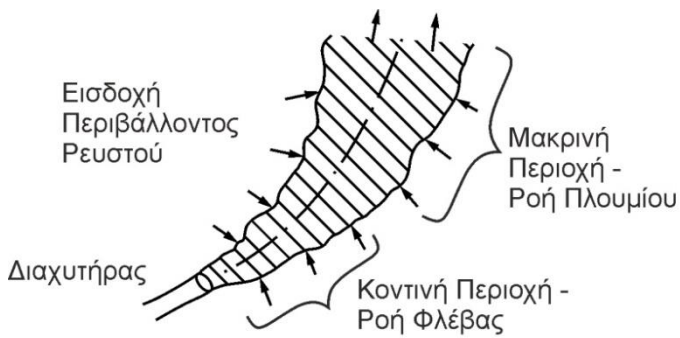
B) Παράμετροι περιβάλλοντος ρευστού:

- Ρεύματα θάλασσας ή λίμνης
- Στρωματοποίηση στήλης νερού θάλασσας ή λίμνης

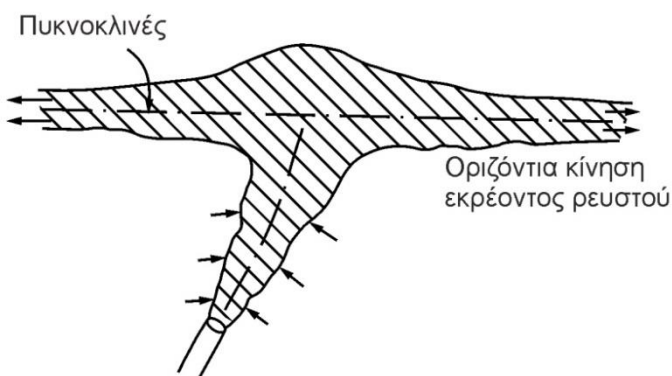
Γ) Γεωμετρικοί παράμετροι σχεδιασμού αγωγού:

- Σχήμα διαχυτήρα (Κυκλικό ή ορθογώνιο)
- Προσανατολισμός αγωγού ως προς τη διεύθυνση των θαλάσσιων ρευμάτων
- Εγγύτητα θαλασσιών ορίων

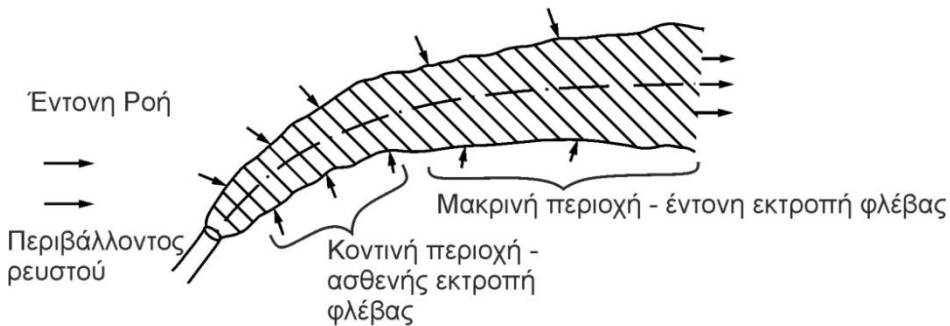
Η Εικόνα 11.2 παρουσιάζει τη συμπεριφορά μίας υποβρύχιας ανωστικής φλέβας (α) σε συνθήκες ομοιόμορφης κατανομής πυκνότητας του περιβάλλοντος ρευστού (συνήθως τον χειμώνα στην παράκτια θάλασσα ή στη λίμνη), (β) σε συνθήκες κατακόρυφα στρωματοποιημένης κατανομής πυκνότητας του περιβάλλοντος ρευστού (συνήθως το καλοκαίρι στην παράκτια θάλασσα ή στη λίμνη) και (γ) σε συνθήκες έντονης οριζόντιας ροής (έντονου παλιρροιακού ρεύματος σε παλίρροια υψηλού εύρους).



A) Ανωστική φλέβα σε ακίνητο ομοιόμορφο κατακόρυφα ρευστό



B) Ανωστική φλέβα σε στρωματοποιημένο κατακόρυφα περιβάλλον ρευστό



Γ) Ανωστική φλέβα σε ρευστό με κεντονο ρεύμα

Εικόνα 11.2 Ανωστική φλέβα υπό συνθήκες α) ομοιόμορφης πυκνότητας περιβάλλοντος ρευστού, β) στρωματοποιημένου περιβάλλοντος ρευστού και γ) σε ρευστό με έντονη οριζόντια ροή.

11.2. Βασικοί Ορισμοί

- Υποβρύχια Φλέβα (Jet)
Είναι η εκροή ρευστού από διαχυτήρα σε έναν αποδέκτη με ρευστό παρόμοιας πυκνότητας.

- Πλούμιο (Plume)
Είναι η εκροή ρευστού παρόμοια με της φλέβας, όμως το εκρέον ρευστό διαθέτει θετική ή αρνητική άνωση ως προς το περιβάλλον ρευστό. Στα πλούμια η αρχική ορμή, άρα και η αρχική ταχύτητα, θεωρούνται αμελητέες.
- Ανωστική Φλέβα (Buoyant Jet)
Είναι η εκροή ρευστού στην οποία υπάρχει διαφορά πυκνότητας μεταξύ του εκρέοντος και του περιβάλλοντος ρευστού και η αρχική ταχύτητα (ή ορμή) είναι σημαντική (Εικόνα 11.3).



Εικόνα 11.3 Ανωστική Φλέβα.

11.3. Χαρακτηριστικά Εκροής

Η παροχή του διατιθέμενου ρευστού χαρακτηρίζεται από τη *ροή ορμής* (momentum flux) και την *ανωστική ροή* (buoyancy flux).

Η ανωστική ροή οφείλεται στη διαφορά πυκνότητας μεταξύ του διατιθέμενου και του περιβάλλοντος ρευστού και αποτελεί ένα μέτρο της τάσης του για την άνοδο ή πτώση του.

Κατά την εκροή λυμάτων σε υδάτινο αποδέκτη, η διαδικασία ανάμειξης συμβαίνει σε δύο κύριες περιοχές (Lee & Chu, 2003):

1. στην «κοντινή» περιοχή (near-field area, NFA), όπου τα χαρακτηριστικά της ροής ορμής, της τυρβώδους ανωστικής ροής και της γεωμετρίας του αγωγού επηρεάζουν την «τροχιά» της ροής και τις διεργασίες μείξης. Ο κατάλληλος σχεδιασμός του διαχυτήρα επηρεάζει τη ροή και τη μείξη στην περιοχή αυτή.
2. στη «μακρινή» περιοχή (far-field area, FFA), όπου τα χαρακτηριστικά της ροής γίνονται λιγότερο σημαντικά και οι συνθήκες του περιβάλλοντος ρευστού επηρεάζουν τη ροή, την τροχιά κίνησης και την αραίωση.

Συνεπώς:

Near-field area → τυρβώδης ανάμειξη και ροή εκροής

Far-field area → παθητική άνωση και ροή άνωσης (Εικόνα 11.4).



Εικόνα 11.4 Φωτογραφία εκροής από διαχυτήρα όπου διακρίνονται η σταθερή NFA και η πιο δυναμικά μεταβαλλόμενη FFA.

Στην περιοχή NFA γίνεται η εκτόξευση του ρευστού από το διαχυτήρα, οπότε η ροή είναι έντονα τυρβώδης. Η τύρβη αυξάνει κατά μήκος του κύριου άξονα της ροής. Λόγω της τύρβης το περιβάλλον ρευστό εισέρχεται στη ροή και αυξάνει την ανάμειξη, προκαλώντας μείωση των συγκεντρώσεων των ρύπων μέσω της αραιώσης.

- Αν η εκροή είναι καθαρή υποβρύχια φλέβα, τότε προκύπτει υψηλή τυρβώδης ανάμειξη λόγω της υψηλής αρχικής ορμής, δηλαδή της υψηλής ταχύτητας εκροής.
- Αν η εκροή είναι πλούμιο, τότε προκύπτει υψηλή τυρβώδης ανάμειξη λόγω της αρχικής ανωστικής ορμής.
- Αν η εκροή είναι ανωστική φλέβα, τότε προκύπτει τυρβώδης ανάμειξης λόγω της υψηλής αρχικής ορμής και της ανωστικής ροής.

11.4. Φυσικά Μεγέθη Προσδιορισμού της Ροής

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση της Εικόνα 11.1, όπου από μια κυκλική οπή διαμέτρου D εκρέει συνεχώς ρευστό πυκνότητας ρ_0 με ομοιόμορφη ταχύτητα U_0 και συγκέντρωση ρυπαντών C_0 μέσα σε ένα σχεδόν ακίνητο περιβάλλον ρευστό πυκνότητας ρ_a (ή ρ_a , ambient density), που έχει ήδη συγκέντρωση ρυπαντών C_a .

Υποθέτουμε ότι $\rho_0 < \rho_a$, δηλαδή ότι το ρευστό εκροής είναι ελαφρύτερο του περιβάλλοντος ρευστού, άρα υφίσταται *άνωση* (buoyancy). Τότε (Turner, 1973):

[1] Η ροή μάζας της φλέβας, δηλαδή η ποσότητα μάζας που διέρχεται από μία διατομή της ανά μονάδα χρόνου ορίζεται ως:

$$\rho m = \int_A \rho w dA \quad (11.1)$$

[2] Η ροή ορμής της φλέβας, δηλαδή η ποσότητα της ορμής που διέρχεται από μία διατομή της ανά μονάδα χρόνου ορίζεται ως:

$$\rho m = \int_A \rho w^2 dA \quad (11.2)$$

[3] Η ροή άνωσης της φλέβας, δηλαδή το ανωστικό βάρος του ρευστού που διέρχεται από μία διατομή της ανά μονάδα χρόνου ορίζεται ως:

$$\rho\beta = \int_A g \Delta\rho w dA \quad (11.3)$$

όπου A το εμβαδόν της διατομής, w η κατακόρυφη ταχύτητα της φλέβας, μ ο συντελεστής ειδικής ροής μάζας ή ροής όγκου της φλέβας [L^4/T^2], m ο συντελεστής ειδικής ροής ορμής [L^3/T], $\Delta\rho$ η διαφορά πυκνότητας μεταξύ του ρευστού της φλέβας και του περιβάλλοντος ρευστού και β ο συντελεστής ειδικής ανωστικής ροής [L^4/T^3].

Προκύπτει ότι:

$$\mu = \int_A w dA \quad (11.4)$$

$$m = \int_A w^2 dA \quad (11.5)$$

$$\beta = \int_A g \frac{\Delta\rho}{\rho} w dA \quad (11.6)$$

Από τα παραπάνω έχουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

- Αν οι πυκνότητες του ρευστού εκροής και του περιβάλλοντος ρευστού είναι ίσες, δηλαδή ο συντελεστής ειδικής ανωστικής ροής $\beta = 0$, τότε έχουμε εκροή τύπου υποβρύχιας φλέβας.
- Αν ο συντελεστής ροής ορμής (m) είναι αμελητέος και υπάρχει σημαντική διαφορά πυκνότητας μεταξύ του εκρέοντος και του περιβάλλοντος ρευστού, δηλαδή ο συντελεστής β είναι σημαντικό, τότε έχουμε εκροή τύπου πλουμίου.
- Αν ο συντελεστής ροής ορμής (m) είναι σημαντικός και υπάρχει σημαντική διαφορά πυκνότητας μεταξύ του εκρέοντος και του περιβάλλοντος ρευστού, δηλαδή ο συντελεστής β είναι σημαντικός, τότε έχουμε εκροή τύπου ανωστικής φλέβας.

11.5. Πυκνομετρικοί Αριθμοί Froude και Richardson

Ορίζουμε τον αδιάστατο πυκνομετρικό αριθμό Froude ως

$$F_o = \frac{W_o}{\sqrt{\frac{\rho_a - \rho_o}{\rho_o} gD}} \quad (11.7)$$

όπου:

W_o είναι η αρχική ταχύτητα εκροής (στο στόμιο του διαχυτήρα),

ρ_o, ρ_a είναι οι πυκνότητες εκρέοντος και περιβάλλοντος ρευστού αντίστοιχα,

D είναι η διάμετρος της οπής του διαχυτήρα.

Ο πυκνομετρικός αριθμός Froude εκφράζει το πηλίκο των δυνάμεων αρχικής ορμής προς τις υπάρχουσες ανωστικές δυνάμεις.

Όμοια ορίζουμε τον αριθμό Richardson ως:

$$R_o = \frac{\mu_o^2 \beta_o}{m_o^{5/2}} = \frac{(\rho_a - \rho_o) g D}{\rho_o W_o^2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/4} = \frac{0.866}{F_o^2} \quad (11.8)$$

Επομένως:

- Αν $\rho_a = \rho_o$ τότε η εκροή είναι υποβρύχια φλέβα, οπότε το $F_o \rightarrow \infty$ και $R_o = 0$.
- Αν $\rho_a - \rho_o \neq 0$ και W_o αμελητέα, τότε η εκροή είναι πλούμιο ($F_o < 15$).
- Αν $\rho_a - \rho_o \neq 0$ και W_o σημαντική, τότε η εκροή είναι ανωστική φλέβα ($F_o \rightarrow \infty$ και $R_o = 15$).

11.6. Η Απλή Κυκλική Φλέβα

Παρακάτω θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα Q, M και B για να ορίσουμε τις αρχικές τιμές της ροής όγκου, της ειδικής ροής ορμής και της ειδικής ανωστικής ροής, αντίστοιχα. Για μία απλή κυκλική φλέβα:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4} \pi D^2 W \\ M &= \frac{1}{4} \pi D^2 W^2 = QW \\ B &= g \left(\frac{\Delta \rho_o}{\rho} \right) Q = g'_o Q \end{aligned} \quad (11.9)$$

όπου D είναι η διάμετρος της φλέβας και W η μέση ταχύτητα εκροής θεωρούμενη ως σταθερή σε ολόκληρη την πορεία της φλέβας και g'_o είναι η αρχική φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας.

Οι διαστάσεις των τριών παραπάνω παραμέτρων είναι:

$$[Q] = L^3 / T, \quad [M] = L^4 / T^2, \quad [B] = L^4 / T^3$$

όπου L το μήκος και T ο χρόνος.

Η απλούστερη περίπτωση που μπορούμε να θεωρήσουμε είναι αυτή της εκροής ρευστού από ένα στρογγυλό στόμιο σε ένα ρευστό όμοιας πυκνότητας. Άρα έχουμε την εκροή μίας υποβρύχιας φλέβας. Η συγκέντρωση του εκρέοντος ρύπου ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gauss) (Εικόνα 11.5), η οποία ορίζεται ως:

$$C = C_m \exp[-k(x/z)^2] \quad (11.10)$$

όπου το m αναφέρεται στην τιμή του C κατά μήκος του άξονα της φλέβας, z η απόσταση κατά μήκος του άξονα και x η ακτινική απόσταση εγκάρσια στον άξονα της φλέβας.

Οι κύριες ιδιότητες μίας τυρβώδους φλέβας δίνονται στον Πίνακα 1.

Παράμετρος	Κυκλική Φλέβα	Επίπεδη Φλέβα
Αρχική Ροή Όγκου, Q	Διαστάσεις [L ³ T ⁻¹]	Διαστάσεις [L ² T ⁻¹]
Αρχική Ροή Ορμής, M	Διαστάσεις [L ⁴ T ⁻²]	Διαστάσεις [L ³ T ⁻²]
Χαρακτηριστικό Μήκος, l _Q	= Q/M ^{1/2}	= Q ² /M
Μέγιστη κατακόρυφη ταχύτητα, w _m	$w_m \frac{Q}{M} = (7.0 \pm 0.1) l_Q / z$	$w_m \frac{Q}{M} = (2.41 \pm 0.04) \left(\frac{l_Q}{z} \right)^{1/2}$
Μέγιστη συγκέντρωση ρύπου, C _m	$\frac{C_m}{C_o} = (5.6 \pm 0.1) \left(\frac{l_Q}{z} \right)$	$\frac{C_m}{C_o} = (2.38 \pm 0.04) \left(\frac{l_Q}{z} \right)^{1/2}$
Μέση διάλυση, μ/Q	$\frac{\mu}{Q} = (0.25 \pm 0.01) \left(\frac{z}{l_Q} \right)$	$\frac{\mu}{Q} = (0.50 \pm 0.02) \left(\frac{z}{l_Q} \right)^{1/2}$
Μέση ταχύτητα κατά μήκος του άξονα w _m (z)	= 2.41 $\sqrt{\frac{M}{z}}$	= $\frac{7}{z} \sqrt{M}$

Πίνακας 11.1 Κύριες Ιδιότητες Τυρβωδών Φλεβών.

Άσκηση 11.1

Έστω τυρβώδης φλέβα παροχής 1 m³/s με ταχύτητα εκροής 3 m/s σε ρευστό με όμοια πυκνότητα. Να βρεθεί εντός της φλέβας η μέγιστη ταχύτητα ροής, η μέγιστη συγκέντρωση του ρύπου και η μέση διάλυση σε απόσταση 60 μ από την οπή εκροής. Η αρχική συγκέντρωση του ρύπου είναι 1 kg/m³.

Λύση

Έστω ότι, Q = 1 m³/s, M = 3 m⁴/s² και l_Q = Q/M^{1/2} = 0.58 m.

Άρα, σε απόσταση 60 μ ο λόγος z/l_Q = 60/0.58 = 103.4

Η μέγιστη κατακόρυφη ταχύτητα είναι:

$$w_m \frac{Q}{M} = (7.0 \pm 0.1) l_Q / z \Rightarrow w_m = \frac{7}{103.4} \frac{M}{Q} = 0.20 \text{ m/s}$$

Επίσης, η μέγιστη συγκέντρωση ρύπου:

$$\frac{C_m}{C_o} = (5.6 \pm 0.1) \left(\frac{l_Q}{z} \right) \Rightarrow C_m = C_o \frac{5.6}{103.4} = 10^3 \times 0.054 = 5.4 \text{ ppm}$$

Τέλος, η μέση διάλυση είναι:

$$\frac{\mu}{Q} = (0.25 \pm 0.01) \left(\frac{z}{l_Q} \right) = 0.25 \times 103.4 = 25.85$$

11.7. Το Απλό Πλούμιο

Στο απλό πλούμιο η ανάλυση είναι ευκολότερη από αυτήν της φλέβας, καθώς δεν υπάρχει αρχική ροή όγκου ή ορμής, παρά μόνο η ανωστική ροή B. Η κατακόρυφη ταχύτητα στο εσωτερικό του πλουμίου εξαρτάται από:

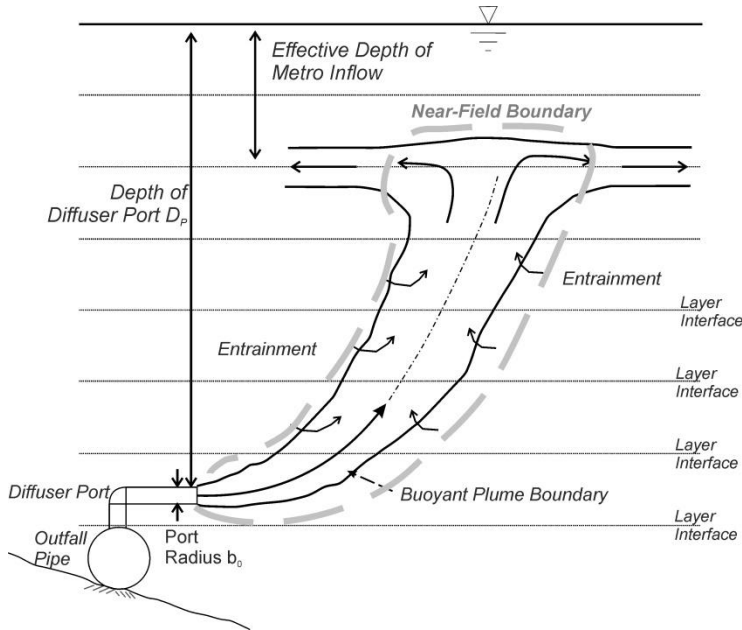
- Τη ροή άνωσης B,

- Την κατακόρυφη απόσταση από το στόμιο της εκροής z και
- Το ιξώδες του ρευστού ν .

Συνεπώς,

$$w_m = f(B, z, \nu)$$

(11.16)



Εικόνα 11.6 Εκροή τύπου ανωστικού πλουμίου που εξισορροπείται σε συγκεκριμένη απόσταση από το διαχυτήρα, καθώς οι πυκνότητα εκροής και η πυκνότητα περιβάλλοντος ρευστού εξισώνονται.

Για τα κυκλικής διατομής πλούμια, οι παραπάνω παράμετροι συνδυάζονται και ισχύει ότι:

$$w_m (z / B)^{1/3} = f(B^{1/3} z^{2/3} / \nu)$$

(12.17)

Όπου η συνάρτηση στο δεξί μέλος αποτελεί μία μορφή του Reynolds number.

Παράμετρος	Κυκλικό Πλούμιο	Επίπεδο Πλούμιο
Αρχική Ροή Άνωσης, B	Διαστάσεις [$L^4 T^{-3}$]	Διαστάσεις [$L^3 T^{-3}$]
Μέγιστη κατακόρυφη ταχύτητα, w_m	$w_m = (4.7 \pm 0.2) B^{1/3} z^{-1/3}$	$w_m = 1.66 B^{1/3}$
Μέγιστη συγκέντρωση ρύπου, C_m	$C_m = (9.1 \pm 0.5) Y B^{-1/3} z^{-5/3}$	$C_m = 2.38 Y B^{-1/3} z^{-1}$
Ροή Όγκου, μ	$\mu = (0.15 \pm 0.015) B^{1/3} z^{5/3}$	$\mu = 0.34 B^{1/3} z$

Πίνακας 11.2 Κύριες Ιδιότητες Πλουμίου.

Όπου Y η ροή μάζας του ρύπου συγκέντρωσης C .

Άσκηση 11.2

Κυκλική εκροή γλυκού νερού παροχής $1 \text{ m}^3/\text{s}$ θα τοποθετηθεί σε βάθος 70 m στη παράκτια θάλασσα. Η εκροή έχει θερμοκρασία 17.8°C και η θάλασσα θεωρείται καλά αναμεμιγμένη με $T = 11.1^\circ\text{C}$ και $S = 32.5 \text{ psu}$. Να βρεθούν: Α) η μέγιστη συγκέντρωση ρύπου και Β) η διάλυση του ρύπου 10 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας αν η αρχική συγκέντρωση του ρύπου είναι $1 \text{ kg}/\text{m}^3$ ή 10^3 ppm .

Λύση

Η πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού για τις συγκεκριμένες συνθήκες θερμοκρασίας και αλατότητας είναι:

$$\rho_w(T = 11,1^\circ\text{C} \ \& \ S = 32,5 \text{ psu}) = 1024,8 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Η πυκνότητα του εκρεόμενου ρευστού για τη συγκεκριμένη θερμοκρασία είναι:

$$\rho_{\text{eff}}(T = 17,8^\circ\text{C}) = 998,6 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Η διαφορά πυκνότητας εκρεόμενου ρευστού και περιβάλλοντος είναι:

$$\Delta\rho_o = 26,2 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Η φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω άνωσης είναι:

$$g'_o = g \frac{\Delta\rho_o}{\rho} = 9.81 \frac{26.1}{998.6} = 0.257 \text{ m} / \text{s}^2$$

Η ροή άνωσης του εκρεόμενου ρευστού είναι:

$$B = g'_o Q = 0.257 \text{ m}^4 / \text{s}^3$$

Η ροή μάζας του ρύπου είναι:

$$Y = Q C_o = 1 \text{ kg} / \text{s}$$

Τέλος η συγκέντρωση του ρύπου σε απόσταση 10 m από την επιφάνεια της θάλασσας, δηλ. 60 m από τον διαχυτήρα είναι:

$$\begin{aligned} C_m &= (9.1 \pm 0.5) Y B^{-1/3} z^{-5/3} = 9.1 \times 1 \text{ kg} / \text{s} \times (0.257 \text{ m}^4 / \text{s}^3)^{-1/3} (60 \text{ m})^{-5/3} = \\ &= 0.0156 \text{ kg} / \text{m}^3 = 16 \text{ ppm} \end{aligned}$$

Η ροή όγκου του πλουμίου είναι:

$$\mu = (0.15 \pm 0.015) B^{1/3} z^{5/3} = 87.7 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Και η μέση διάλυση μ/Q είναι

$$\mu / Q = 87.7$$

Βιβλιογραφία

- Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C., Imberger, J., & Brooks, N. H. (1979).** *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press.
- Lee, J. H.-w., & Chu, V. H. (2003).** *Turbulent Jets and Plumes: A Lagrangian Approach* (Vol. 1): Springer Science & Business Media.
- Turner, J. (1973).** *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.

Κεφάλαιο 12

Εφαρμογές Υπόγειας Υδραυλικής

Σύνοψη

Θα παρουσιαστούν προβλήματα προσομοίωσης και διαχείρισης υδατικών πόρων, όπως η περίπτωση της διαχείρισης του υδροφορέα Ειδομενής - Ευζώνων για την περίπτωση χρήσης επιφανειακών αντλιών. Θα δοθούν παραδείγματα προσδιορισμού ζωνών προστασίας υδρογεωτρήσεων.

12.1. Γενικότητες – η σημασία των μοντέλων υπόγειας υδραυλικής

Θα παρουσιάσουμε έναν αριθμό από παραδείγματα εφαρμογών των μεθόδων της υπολογιστικής υδραυλικής σε προβλήματα υπόγειων ροών. Έτσι, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα τα οποία μπορούν να επιτευχθούν με τη μεθοδολογία που έχουμε παρουσιάσει στο βιβλίο αυτό, αλλά και οι προσεγγίσεις που ακολουθούνται στην πράξη, όσον αφορά τεχνικά ζητήματα, όπως η διακριτοποίηση (η επιλογή κανάβου - υπολογιστικού πλέγματος), η επιλογή των οριακών συνθηκών, οι μέθοδοι επίλυσης των συστημάτων επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων κ.λπ. Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα που παρουσιάζουμε, σε μεγάλο αριθμό περιπτώσεων χρησιμοποιείται το πρόγραμμα MODFLOW, το οποίο είναι καλά τεκμηριωμένο, εύκολο στη χρήση και αποδεδειγμένα αξιόπιστο. Το κεφάλαιο αυτό εστιάζει κυρίως στην παρουσίαση εφαρμογών. Παρουσιάζεται σύντομα η θεωρία για ειδικά ζητήματα, εκτός από τη θεωρία του απευθείας προσδιορισμού των ζωνών υδρογεωτρήσεων, η οποία παρουσιάζει ιδιαιτερότητες και δεν έχει παρουσιαστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο.

12.2. Διαχείριση υπόγειων υδατικών πόρων – μεγιστοποίηση των παροχών άντλησης σε παραθαλάσσιους υδροφορείς ή υδροφορείς κοντά σε ευαίσθητα υδατικά σώματα

12.2.1. Διαχείριση υδατικών πόρων – μεγιστοποίηση των παροχών άντλησης σε παράκτιους υδροφορείς

12.2.1.1. Προσομοίωση και διαχείριση υδροφορέα στην περιοχή της πεδιάδας της Ισμαρίδας

Η προσομοίωση και διαχείριση του υδροφορέα της πεδιάδας της Ισμαρίδας στην βορειοανατολική Ελλάδα μελετήθηκε από τους Pisinaras et al. (2007). Ο υδροφορέας αυτός συνδέεται υδραυλικά με τη λίμνη Ισμαρίδα και τον ποταμό Βοσβόζη και έχει έκταση 46,75 km². Η περιοχή έρευνας περιλαμβάνει και ευαίσθητα οικοσυστήματα, όπως είναι η λίμνη Ισμαρίδα και οι παράκτιες περιοχές γύρω από τον ποταμό Βοσβόζη που προστατεύονται από τη συνθήκη Ramsar. Το μέσο ετήσιο ύψος βροχής για την περίοδο 1966-1999 είναι 507 mm, παρουσιάζεται όμως μία πτωτική τάση, πιθανόν λόγω των κλιματικών αλλαγών. Οι χρήσεις γης της εξεταζόμενης περιοχής είναι κυρίως γεωργικές, αφού σύμφωνα με την Εθνική Στατιστική Υπηρεσία καλλιεργείται το 83.3% της συνολικής έκτασης. Οι αρδευτικές ανάγκες της αγροτικής αυτής περιοχής καλύπτονται με αντλήσεις από τον ημιπερατό υδροφορέα. Τα υδρογεωλογικά χαρακτηριστικά αυτού του υδροφορέα προσδιορίστηκαν με 10 δοκιμαστικές αντλήσεις. Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα ο υδροφορέας παρουσιάζει χαρακτηριστική ετερογένεια. Οι τιμές της μεταβιβατικότητας (transmissivity) κυμαίνονται μεταξύ 200 και 1704 m²/d, οι τιμές του συντελεστή οριζόντιας υδραυλικής αγωγιμότητας (hydraulic conductivity) μεταξύ 2,5 και 21m/d, ενώ οι τιμές του συντελεστή αποθήκευσης (storage coefficient) μεταξύ 0.9 10⁻⁴ και 30,8 10⁻³.

Για την προσομοίωση της υπόγειας ροής στον υδροφορέα αυτό έγινε η υπόθεση της οριζόντιας νταρσιανής ροής. Χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα MODFLOW (McDonald and Harbaugh, 1988) και η διακριτοποίηση της περιοχής με τη χρήση ενός ομοιόμορφου κανάβου με 34 σειρές (columns) και 64 στήλες (rows). Τα κελιά ήταν τετραγωνικής μορφής με μήκος πλευρών 125m. Χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 2176 κελιά, από

τα οποία 1438 ήταν ενεργά και 738 ανενεργά. Οι οριακές συνθήκες στο νότο είχαν υπολογιστεί με την υπορουτίνα General-Head Boundaries (GHB) του προγράμματος MODFLOW (McDonald and Harbaugh, 1988). Η υπορουτίνα αυτή προσομοιώνει την υδραυλική σύνδεση του εξεταζόμενου υδροφορέα με ένα υδροφορέα ο οποίος βρίσκεται εκτός των ορίων της μελετώμενης περιοχής. Ο εξωτερικός αυτός υδροφορέας δρα ως πηγή ή καταβόθρα ανάλογα με την διαφορά του πιεζομετρικού φορτίου του από το πιεζομετρικό φορτίο του εξεταζόμενου υδροφορέα και αντίστοιχα παίρνει ή δίνει νερό στα κελιά τα οποία βρίσκονται κοντά σε αυτόν σε αναλογία με την προαναφερθείσα διαφορά πιεζομετρικού φορτίου (McDonald and Harbaugh, 1988). Προφανώς η ποσότητα ανταλλαγής νερού μεταξύ των δύο συστημάτων (του εξεταζόμενου υδροφορέα και του εξωτερικού υδρογεωλογικού συστήματος, το οποίο δρα ως πηγή/καταβόθρα) δεν εξαρτάται μόνο από την διαφορά πιεζομετρικού φορτίου, αλλά και από την οριζόντια υδραυλική αγωγιμότητα στην ενδιάμεση περιοχή, την απόσταση μεταξύ τους και την ισοδύναμη επιφάνεια σε μία κάθετη τομή. Τα τρία τελευταία αυτά χαρακτηριστικά προσομοιώνονται στο πρόγραμμα MODFLOW με έναν ενιαίο συντελεστή με διαστάσεις m^2/d , ο οποίος ονομάζεται conductance. Ο προσδιορισμός του συντελεστή αυτού (της conductance) παρουσίασε τις μεγαλύτερες δυσκολίες κατά τη διαδικασία της ρύθμισης του μοντέλου. Τα βόρεια και τα δυτικά όρια του υδροφορέα είναι αδιαπέρατα, ενώ στα ανατολικά όρια βρίσκεται ο ποταμός Βοσβόζης. Λόγω των αποθέσεων στην κοίτη του ποταμού για την προσομοίωση της συγκεκριμένης οριακής συνθήκης χρησιμοποιήθηκε η υπορουτίνα RIVER package. Αντίστοιχα με την υπορουτίνα General-Head Boundaries, η υπορουτίνα RIVER package χρησιμοποιεί έναν συντελεστή για την προσομοίωση της αντίστασης του προαναφερθέντος στρώματος αποθέσεων, η οποία έχει την ονομασία streambed conductance. Ο συντελεστής αυτός εξαρτάται από την αγωγιμότητα των αποθέσεων, το μέσο πάχος των αποθέσεων και το μήκος και το πλάτος του ποταμού σε κάθε κελί. Σύμφωνα με τους McDonald and Harbaugh (1988), οι τιμές του συντελεστή αυτού κυμαίνονται από 0 έως $500 m^2/day$.

Το υπολογιστικό μοντέλο που παρουσιάστηκε παραπάνω χρησιμοποιήθηκε για να αξιολογηθούν κυρίως τρία σενάρια σε οριζόντια εικοσαετίας. Στο πρώτο συνεχίζεται με τους ίδιους ρυθμούς η άντληση από τον υδροφορέα. Στο δεύτερο διερευνάται κατά πόσο θα πρέπει να μειωθούν οι αντλήσεις για να διατηρηθεί η στάθμη των υπόγειων υδάτων στα ίδια επίπεδα με τα σημερινά. Στο τρίτο εξετάστηκε κατά πόσο θα πρέπει να μειωθούν οι αντλήσεις για να επιτευχθεί άνοδος του πιεζομετρικού φορτίου κατά ένα μέτρο. Τέλος, εξετάστηκε και ένα τέταρτο σενάριο το οποίο όμως αφορούσε τον έλεγχο της αξιοπιστίας των υποθέσεων του μοντέλου και όχι κάποιο συγκεκριμένο σενάριο διαχείρισης.

Για την αξιολόγηση του πρώτου σεναρίου έγινε η υπόθεση ότι οι μέσες ετήσιες απολήψεις είναι $5.75 \times 10^6 m^3$. Από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης προέκυψε ότι οι εκροές από τον υδροφορέα ήταν κατά 35.6% μεγαλύτερες από τις εισροές. Αυτό το έλλειμμα στο ισοζύγιο είχε ως αποτέλεσμα σοβαρή ταπείνωση της στάθμης των υπόγειων υδάτων, κυρίως στα βόρεια και τα ανατολικά του υδροφορέα. Η νότια περιοχή έμεινε πρακτικά ανεπηρέαστη λόγω των εισροών από τον υδροφορέα, ο οποίος βρίσκεται στο νότο και, όπως ήδη αναφέρθηκε, η επίδρασή του προσομοιώθηκε με την υπορουτίνα General-Head Boundaries.

Όσον αφορά το δεύτερο σενάριο, προέκυψε ότι για να διατηρηθεί η στάθμη των υπογείων υδάτων στην υφιστάμενη κατάσταση, πρέπει να μειωθούν οι αντλήσεις κατά 33.45%. Η μείωση αυτή πρέπει να είναι πιο σημαντική στο βορρά (>50%) και στα ανατολικά (25-50%), παρά στα δυτικά και στα νότια (περιοχές στις οποίες η ελάττωση πρέπει να είναι μικρότερη από 25%).

Αντίστοιχα αποτελέσματα με το δεύτερο σενάριο προέκυψαν και για το τρίτο. Για να επιτευχθεί όμως αύξηση της στάθμης των υπογείων υδάτων κατά ένα μέτρο, πρέπει η μείωση των αντλούμενων παροχών να είναι πιο δραστική απ' ό,τι στο δεύτερο σενάριο (41.32% αντί 33.45%).

12.2.1.2. Προσομοίωση και διαχείριση υδροφορέα στην βορειανατολική Ελλάδα, στην περιοχή Ξάνθης – λίμνης Βιστωνίδας

Οι Pisinaras et al. (2013), μελέτησαν την υδραυλική συμπεριφορά ενός υδροφορέα στην περιφέρεια Ανατολικής Μακεδονίας – Θράκης, ανατολικά της πόλης της Ξάνθης και δυτικά της λίμνης Βιστωνίδας. Ο υδροφορέας αυτός διασχίζεται από τον ποταμό Κόσυνθο, ο οποίος αποτελεί και εν μέρει όριο του. Η εκμετάλλευση των υδατικών πόρων γίνεται κυρίως για άρδευση. Για την προσομοίωση της υδραυλικής συμπεριφοράς του υδροφορέα έγινε η υπόθεση της νταρσιανής οριζόντιας ροής. Για την εκτίμηση των υδρογεωλογικών χαρακτηριστικών του παραπάνω υδροφορέα χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από 22 δοκιμαστικές αντλήσεις από τους Διαμαντή (1985) και Πλιάκα (1998), καθώς και δεδομένα από επτά νεότερες δοκιμαστικές αντλήσεις. Προέκυψε ότι οι τιμές της μεταβιβαστικότητας (transmissivity) κυμαίνονται μεταξύ 25,9 και $2,930 m^2/d$, οι

τιμές του συντελεστή οριζόντιας υδραυλικής αγωγιμότητας (hydraulic conductivity) μεταξύ 0.9 και 139m/d., ενώ οι τιμές του συντελεστή αποθήκευσης (storage coefficient) μεταξύ $5.4 \cdot 10^{-5}$ και $1.8 \cdot 10^{-2}$. Για τον υπολογισμό του ρυθμού της βαθιάς διήθησης (δηλαδή της βροχοπτώσης που εμπλουτίζει τον υδροφόρο) χρησιμοποιήθηκε το υδρολογικό πρόγραμμα SWAT.

Προέκυψε ότι το ποσοστό του ετήσιου ύψους βροχής που καταλήγει στον υδροφόρο ήταν 10.27% για το έτος 2007 και 13.33% για το έτος 2006. Τα ποσοστά αυτά είναι παρόμοια με εκείνα τα οποία έχουν προκύψει (κυρίως με την χρήση λυσιμέτρων) για άλλους υδροφόρους του ελλαδικού χώρου με παρόμοια υδρογεωλογικά και κλιματολογικά χαρακτηριστικά. Για την προσομοίωση των υπόγειων ροών χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα MODFLOW (Harbaugh and McDonald 1996, Waterloo Hydrogeologic 2006).

Εξετάστηκε μία έκταση 77,43 km², για τη διακριτοποίηση της οποίας χρησιμοποιήθηκε ένας ομοιόμορφος κάναβος με 1 στρώμα (layer), 77 σειρές (rows) και 146 στήλες (columns). Χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 7743 κελιά σχήματος τετραγώνου με μήκος πλευράς 100 m. Από μελέτες προέκυψε ότι δεν υπάρχει άμεση υδραυλική επικοινωνία μεταξύ του ποταμού Κόσυνθου ή της λίμνης Βιστωνίδα και του υδροφόρου. Για αυτόν το λόγο οι Pisinaras et al. (2012), χρησιμοποίησαν συνθήκη αδιαπέρατου ορίου στο μεγαλύτερο μέρος των ορίων του υδροφόρου ενώ ο υπολογισμός των οριακών συνθηκών σε μικρό μέρος των ορίων από τα οποία υπάρχουν πλευρικές εισροές έγινε με την υπορουτίνα General Head Boundary (GHB) του προγράμματος MODFLOW (βλ Σχήμα 6 της δημοσίευσης).

Για τη ρύθμιση του μοντέλου σε συνθήκες μη μόνιμης ροής χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από 32 πιεζόμετρα και συνολικά 352 παρατηρήσεις.

Επειδή στον εξεταζόμενο υδροφόρο λειτουργούν περισσότερες από 506 γεωτρήσεις, σε ορισμένα κελιά τοποθετήθηκαν περισσότερες από μία γεωτρήσεις. Κατά συνέπεια δεν προσδιορίστηκαν οι παροχές σε συγκεκριμένες γεωτρήσεις, αλλά οι παροχές σε ευρύτερες περιοχές.

Για τον ορισμό του προβλήματος της βελτιστοποίησης χρησιμοποιήθηκε ως αντικειμενική συνάρτηση η μεγιστοποίηση του συνόλου των παροχών, ενώ ως περιορισμός (constraint) τέθηκε το γεγονός ότι η πιεζομετρία δε θα κατέβαινε πιο χαμηλά από το επίπεδο της θάλασσας στο τέλος του μήνα Αυγούστου στα προκαθορισμένα κελιά. Η τελευταία συνθήκη προσδιορίστηκε για να αποφευχθεί η εισροή αλμυρού νερού από τα νοτιοανατολικά.

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης λύθηκε με το πρόγραμμα MATLAB και τον αλγόριθμο Simplex.

Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης έδειξαν ότι η συνολική αντλούμενη παροχή πρέπει να ελαττωθεί κατά 28941m³/d κατά την αρδευτική περίοδο. Αυτή η ελάττωση πρέπει να γίνει κυρίως από τις γεωτρήσεις που βρίσκονται νοτιοανατολικά, κοντά δηλαδή στην πηγή ρύπανσης.

Μελετήθηκαν επίσης ένα σενάριο «ξηρού έτους» (“dry year” scenario) και ένα σενάριο «αποψίλωσης» (“Deforestation” scenario). Στο πρώτο εκτιμάται η επίδραση της μείωσης των βροχοπτώσεων λόγω των κλιματικών αλλαγών, ενώ στο δεύτερο η επίδραση από την αλλαγή των χρήσεων γης, οι οποίες εκτιμήθηκε ότι θα προκαλέσουν αύξηση της επιφανειακής απορροής και κατά συνέπεια μείωση του εμπλουτισμού των υπόγειων υδροφόρων. Προέκυψε ότι και στις δύο περιπτώσεις πρέπει να ελαττωθούν οι αντλούμενες ποσότητες νερού από τον υπόγειο υδροφόρο ώστε να μην υπάρξει πρόβλημα διεύδυσης.

12.2.2. Διαχείριση υδατικών πόρων μεγιστοποίηση των παροχών άντλησης σε υδροφόρους στην ενδοχώρα

12.2.2.1. Προσομοίωση υδροφόρου στη λεκάνη της Μυγδονίας

Η υδραυλική συμπεριφορά των υδροφόρων στην περιοχή της Λίμνης Κορώνειας, στα βόρεια του νομού Θεσσαλονίκης εξετάστηκε από τους Myloroulos et al. (2007). Σκοπός της ερευνητικής αυτής προσπάθειας ήταν η κατανόηση των υδραυλικών συνθηκών που συνέβαλαν στην ταπείνωση της στάθμης της λίμνης, η οποία προστατεύεται από τη συνθήκη Ramsar.

Στην περιοχή υπάρχουν πολλοί χειμάρροι, οι οποίοι τροφοδοτούν τη λίμνη με νερό. Η υδραυλική αγωγιμότητα του πυθμένα των χειμάρρων εκτιμάται στα 1×10^{-5} m/s, ενώ της λίμνης στα 1×10^{-9} m/s.

Σύμφωνα με τους συγγραφείς στην περιοχή υπάρχει ένας αβαθής φρεάτιος υδροφόρος, αλλά και περισσότεροι γεωλογικοί υδροφόροι σχηματισμοί σε μεγαλύτερο βάθος (μεταξύ 50 και 300m). Το υδρογεωλογικό αυτό σύστημα προσομοιώθηκε από δύο στρώματα (layers) που χωρίζονταν από ένα τρίτο, το οποίο θεωρείται ημιπερατό.

Για την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα MODFLOW. Για τη διακριτοποίηση της εξεταζόμενης περιοχής χρησιμοποιήθηκε ένας ομοιόμορφος κάναβος με 44 σειρές (rows), 67 στήλες (columns) και 3 στρώματα (vertical layers), τα οποία προσομοιώνουν την υδραυλική λειτουργία των προαναφερθέντων γεωλογικών σχηματισμών, του επιφανειακού, του ενδιάμεσου ημιπερατού και του συστήματος των βαθιών υδροφορέων. Χρησιμοποιήθηκαν κελιά τετραγωνικού σχήματος με μήκος πλευράς 500m.

Η ρύθμιση του μοντέλου έγινε χρησιμοποιώντας δεδομένα από 66 πιεζόμετρα για τις διακυμάνσεις του πιεζομετρικού φορτίου κατά τα έτη 1997, 2000 και 2001. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 9b της δημοσίευσης, τα αποτελέσματα της ρύθμισης ήταν ικανοποιητικά. Αποκλίσεις ανάμεσα στις μετρηθείσες τιμές της πιεζομετρίας και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρατηρούνται κυρίως βορειοδυτικά λόγω των μεγάλων υδραυλικών κλίσεων και θα ήταν ενδεχομένως χρήσιμο να χρησιμοποιηθεί ένας πιο πυκνός κάναβος στην περιοχή αυτή.

Οι προσομοιώσεις έδειξαν ότι το νερό που αντλείται από τις γεωτρήσεις προέρχεται κυρίως από τους χειμάρρους και όχι από τη λίμνη Κορώνεια. Η υπεράντληση έχει ως αποτέλεσμα να μην καταλήγει μεγάλο μέρος από αυτό το νερό στη λίμνη Κορώνεια και έτσι να μην ανανεώνεται το νερό το οποίο χάνεται λόγω της εξάτμισης. Αποτέλεσμα του αρνητικού υδατικού ισοζυγίου το οποίο προκύπτει με αυτόν τον τρόπο είναι να ταπεινώνεται η στάθμη στη λίμνη.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Myloropoulos et al. (2007) μία μείωση $7.5 \times 10^6 \text{ m}^3$ κατ' έτος θα σταθεροποιήσει την υπάρχουσα κατάσταση. Αντίθετα, μία μείωση των αντλήσεων κατά $15 \times 10^6 \text{ m}^3$ κατ' έτος θα αντιστρέψει την υπάρχουσα κατάσταση και θα επιτρέψει την ανύψωση της στάθμης των υδάτων τόσο στον υπόγειο υδροφόρο, όσο και στη λίμνη Κορώνεια.

12.3. Μοντέλα προσομοίωσης και διαχείρισης για εκμετάλλευση υπόγειων υδατικών πόρων με επιφανειακές αντλίες

Στην Ελλάδα, όπως και σε άλλες χώρες, σε περιοχές όπου η στάθμη του νερού στους υδροφορείς βρίσκεται σε μικρή απόσταση από την επιφάνεια του εδάφους, χρησιμοποιούνται επιφανειακές αντλίες για αρδευτικούς κυρίως σκοπούς. Οι αντλίες αυτές είναι εύχρηστες, η συντήρησή τους είναι εύκολη και η λειτουργία τους είναι οικονομική. Η χρήση τους, όμως, περιορίζεται από το ύψος αναρρόφησης, το οποίο είναι λίγα μέτρα. Αν η απόσταση ανάμεσα στον άξονα της αντλίας και την επιφάνεια του νερού στον υδροφόρο στο σημείο της γεώτρησης ξεπεράσει το ύψος της αναρρόφησης οι αντλίες αυτές δεν μπορούν να λειτουργήσουν.

Μία τέτοια περίπτωση σε έναν υδροφόρο στο Πακιστάν περιγράφεται από τους Basharat and Tariq (2013). Εκτός από την τεχνική και οικονομική διάσταση του θέματος παρουσιάζεται και η κοινωνική: οι αγρότες, οι οποίοι χρησιμοποιούν τις επιφανειακές αντλίες, ανήκουν στις πιο ευπαθείς ομάδες της κοινωνίας και η δυνατότητα χρήσης των επιφανειακών αυτών αντλιών συνδέεται συχνά με την επιβίωσή τους.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μεθόδους προσομοίωσης και διαχείρισης υπόγειων υδατικών πόρων κατά τη χρήση επιφανειακών αντλιών, όπως είχαν παρουσιαστεί από τους Moutsopoulos et al. (2012). Αν και η εργασία αυτή εστιάζεται στον υδροφόρο Ειδομένης – Ευζώνων, η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε και παρουσιάζεται εδώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε άλλες περιπτώσεις.

Ο φρεάτιος υδροφόρος Ειδομένης – Ευζώνων βρίσκεται στη Βόρεια Ελλάδα, στο Νομό Κιλκίς και συνορεύει με τη FYROM. Στη μέση περίπου του υδροφόρου ρέει ο ποταμός Αξιός, οποίος είναι ο δεύτερος μεγαλύτερος ελληνικός ποταμός. Στα βόρεια του υδροφόρου βρίσκονται οι πόλεις της Ειδομένης και των Ευζώνων. Οι περισσότερες υδρογεωτρήσεις είναι αρδευτικές και λειτουργούν από το Μάιο ως τον Οκτώβριο. Αναλυτική περιγραφή των υδρογεωλογικών χαρακτηριστικών του δίνεται από τους Psilonikos (1996), Psilonikos (1999) και Psilonikos and Tzimonopoulos (2004). Εδώ θα περιγράψουμε ορισμένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του. Η έκταση του υδροφόρου είναι $10,84 \text{ km}^2$. Το μέσο πάχος του υδροφόρου είναι περίπου 18 m, ενώ οι τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας κυμαίνονται από 28 m/d έως 128 m/d.

Θα παρουσιάσουμε τη βέλτιστη διαχείριση 5 επιφανειακών αντλιών στα νοτιοδυτικά του υδροφόρου, όπως αυτή είχε παρουσιαστεί από τους Moutsopoulos et al. (2012). Οι συμβολισμοί των γεωτρήσεων αυτών είναι E28, G2459, G2460, G2461 και G2538.

Θεωρήσαμε ότι σκοπός του προβλήματος διαχείρισης που εξετάζουμε ήταν η μεγιστοποίηση του συνόλου της αντλούμενης παροχής από τις διαχειριζόμενες γεωτρήσεις, κατά συνέπεια η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$\sum_{i=1}^m (Q_w)_i \rightarrow Max \quad (12.1)$$

όπου m ο αριθμός των αντλούμενων γεωτρήσεων και $(Q_w)_i$ η αντλούμενη παροχή από τη γεώτρηση i .

Όπως ήδη αναφέραμε για την περίπτωση χρήσης επιφανειακών αντλιών, η ελάχιστη τιμή της στάθμης του νερού μέσα στη γεώτρηση $(h_w)_i$ εξαρτάται τόσο από το υψόμετρο του εδάφους στην θέση αυτή, όσο και από την τιμή του ύψους αναρρόφησης της συγκεκριμένης αντλίας h_s . Οι περιορισμοί αυτοί μπορούν να εκφραστούν με τις παρακάτω σχέσεις:

$$(h_w)_i \geq (h_{\min})_i, \text{ για } i=1, \dots, m, \quad (12.2)$$

όπου:

$$(h_{\min})_i = (h_{\text{ground}})_i - h_s$$

Η μεταβλητή $(h_{\text{ground}})_i$ αντιστοιχεί στο γεωδαιτικό ύψος του εδάφους στο σημείο της γεώτρησης i , ενώ h_s είναι το ύψος αναρρόφησης. Έγινε η υπόθεση ότι το υψόμετρο του άξονα της αντλίας είναι το ίδιο με το υψόμετρο του εδάφους, ενώ το ύψος αναρρόφησης είναι ίσο με $h_s=7\text{m}$.

Οι Moutsopoulos et al. (2012) έλυσαν το πρόβλημα αυτό θεωρώντας ότι η ροή είναι μόνιμη, καθώς η μέγιστη πτώση της στάθμης του νερού στον φρεάτιο υδροφορέα λαμβάνει χώρα στο τέλος της αρδευτικής περιόδου, όταν ενδεχομένως έχει επιτευχθεί μία περίπου μόνιμη κατάσταση (quasi steady state). Η επίλυση του υδραυλικού προβλήματος έγινε με το πρόγραμμα Visual MODFLOW 4.2, το οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (Harbaugh and McDonald 1996, Waterloo Hydrogeologic 2006).

Όσον αφορά την επιλογή του κανάβου για την επίλυση του υδραυλικού προβλήματος, πρέπει το κελί που αντιστοιχεί σε κάθε γεώτρηση να έχει παρόμοιο μέγεθος με το σωλήνα της γεώτρησης αυτής. Επιλογή κελιών μεγαλύτερου μεγέθους υποεκτιμούν την πτώση στάθμης εξαιτίας της αντλητικής διαδικασίας και κατά συνέπεια υπερεκτιμούν τη μέγιστη αντλούμενη παροχή. Για την προσομοίωση του συγκεκριμένου υδροφορέα, για τα κελιά που αντιστοιχούν στις γεωτρήσεις επιλέχθηκε ένα μέγεθος $0.30\text{m} \times 0.30\text{m}$, ενώ το μέγιστο μέγεθος των κελιών ήταν $66.67\text{m} \times 66.67\text{m}$. Για να είναι τα αποτελέσματα ρεαλιστικά πρέπει η μετάβαση ανάμεσα στο ελάχιστο και μέγιστο μέγεθος να γίνει με κελιά ενδιάμεσου μεγέθους.

Για την επίλυση του συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων που προέκυψε από την διακριτοποίηση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους κρίθηκε σκόπιμη η επιλογή του Solver PCG2 (Preconditioned Conjugate Gradient Package) (βλ. Harbaugh and McDonald (1996), Waterloo Hydrogeologic (2006)) μια και η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους η οποία επιλύθηκε, η εξίσωση Boussinesq, είναι μη γραμμική. Η επίλυση της εξίσωσης Boussinesq είναι αναγκαία, επειδή ο συγκεκριμένος υδροφορέας είναι φρεάτιος, το μέσο βάθος ροής είναι μικρό, κατά συνέπεια οι μεταβολές της στάθμης (π.χ. αυτές που προκύπτουν κοντά στις γεωτρήσεις) δεν είναι αμελητέες. Αντίθετα, δεν ενδείκνυται η χρήση του Solver SIP5 (Strongly Implicit Procedure Package), ο οποίος είναι κατάλληλος για συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων που έχουν προκύψει από τη διακριτοποίηση γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Για τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των γενετικών αλγορίθμων. Η μέθοδος των γενετικών αλγορίθμων «μιμείται» βιολογικές διαδικασίες, όπως η αναπαραγωγή, η μετάλλαξη και η επιβίωση των πιο προσαρμοσμένων στο περιβάλλον οργανισμών. Η μέθοδος αυτή έχει προσαρμοστεί σε προβλήματα διαχείρισης υπόγειων υδατικών πόρων στο λογισμικό MGO (Modular Groundwater Optimizer) algorithm (Waterloo Hydrogeologic 2006), το οποίο αναπτύχθηκε από τους Zheng and Wang (2003).

Η εύρεση της βέλτιστης λύσης για το πρόβλημα που εξετάζουμε εδώ (βλ Πίνακας 12.1), επιτεύχθηκε μετά από 70 γενιές (ή 7000 εκτελέσεις του MODFLOW). Η συνολική παροχή άντλησης είναι ίση με $4560.9 \text{ m}^3/\text{d}$. Λάβαμε υπόψη μας τη διήθηση λόγω βροχοπτώσεων και το γεγονός ότι οι οριακές συνθήκες στο νότιο όριο ήταν τύπου Dirichlet. Η μέγιστη δυνατή παροχή άντλησης αντιστοιχεί την γεώτρηση E28, η οποία βρίσκεται πολύ κοντά στον ποταμό Αξιό.

Γεώτρηση	Περιορισμός: Ελάχιστη τιμή του υψόμετρου του νερού μέσα στη γεώτρηση h_{\min} [m]	Μέγιστη τιμή της παροχής της αντλητι- κής γεώτρη- σης [m ³ /d]	Βέλτιστη τιμή της αντλούμενης πα- ροχής [m ³ /d]	Υψόμετρο του νερού στο εσωτε- ρικό της γεώτρη- σης για την περι- πτωση της βέλτι- στης διαχείρισης $(h_w)_i$ [m]
E28	35.66	1100	1100	37.09
G2459	37.00	1600	412.9	37.15
G2460	36.09	1600	1084	36.20
G2461	36.50	1600	722	36.64
G2538	35.78	3500	1242	35.91

Πίνακας 12.1 Περιορισμοί, μέγιστες δυνατές αντλούμενες παροχές, και βέλτιστα αποτελέσματα για το εξεταζόμενο πρό-βλημα.

Στη συνέχεια και με τη βοήθεια του αλγόριθμου βελτιστοποίησης έγινε μία ανάλυση ευαισθησίας. Στο σενάριο B έγινε η υπόθεση ότι δεν υφίσταται εμπλουτισμός λόγω βροχόπτωσης, ενώ στο σενάριο C ότι το όριο στο νότο είναι αδιαπέρατο. Τα αποτελέσματα είναι παρεμφερή με αυτά που παρουσιάζονται στον Πίνακας 12.1 και οι συνολικές αντλούμενες παροχές αλλάζουν μόνο λίγο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο εμπλουτισμός του υδροφορέα, τουλάχιστον κατά την αρδευτική περίοδο, γίνεται από τον ποταμό Αξιό.

Γεώτρηση	Scenario B		Scenario C	
	Βέλτιστη τιμή της αντλούμενης πα- ροχής [m ³ /d]	Υψόμετρο του νερού στο εσωτε- ρικό της γεώτρη- σης για την περι- πτωση της βέλτι- στης διαχείρισης $(h_w)_i$ [m]	Βέλτιστη τιμή της αντλούμε- νης παροχής [m ³ /d]	Υψόμετρο του νερού στο εσωτε- ρικό της γεώτρη- σης για την περι- πτωση της βέλτι- στης διαχείρισης $(h_w)_i$ [m]
E28	1100	37.04	1100	37.09
G2459	361.3	37.13	412.9	37.16
G2460	1084	36.09	1032	36.34
G2461	567.7	36.93	774.2	36.51
G2538	1242	35.84	1242	35.92

Πίνακας 12.2 Αποτελέσματα από μία ανάλυση ευαισθησίας. Βέλτιστα αποτελέσματα για το σενάριο B (δεν υφίσταται εμπλουτισμός του υδροφορέα λόγω βροχόπτωσης) και για το σενάριο C (το όριο στο νότο θεωρείται αδιαπέρατο).

12.4. Προσδιορισμός ζωνών προστασίας υδρογεωτρήσεων

12.4.1. Απευθείας προσδιορισμός των ζωνών προστασίας υδρογεωτρήσεων

Στο κεφάλαιο για τις βιοχημικές αντιδράσεις είδαμε ότι υπό ορισμένες προϋποθέσεις η αποδόμηση ενός ρυπαντή σε έναν υπόγειο υδροφορέα μπορεί να περιγραφεί με την εξίσωση:

$$R \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\vec{u}) = \nabla \cdot (\vec{D} \cdot \nabla c) - R\lambda c \quad (12.3)$$

όπου η μεταβλητή c αντιστοιχεί στην συγκέντρωση του εξεταζόμενου ρύπου, t είναι ο χρόνος, R είναι ένας «συντελεστής καθυστέρησης» για την περίπτωση που ο ρυπαντής μπορεί να προσροφηθεί από το στερεό σκελετό ($R=1$ για την περίπτωση που δε λαμβάνει χώρα προσρόφηση) και λ είναι ο συντελεστής αποδόμησης για την περίπτωση που λαμβάνει χώρα μία βιοχημική αντίδραση πρώτου βαθμού. Τέλος \bar{u} είναι η μέση τιμή της ταχύτητας του νερού στους πόρους (η σχέση μεταξύ του διανύσματος αυτού και της ταχύτητας Darcy δίνεται από την εξίσωση $\bar{u} = \bar{q} / \varepsilon$, όπου ε είναι το πορώδες).

Στην περίπτωση διδιάστατου φαινομένου (δηλαδή εφόσον οι αλλαγές κατά την κατακόρυφο είναι δυνατόν να θεωρηθούν αμελητέες), μόνιμης ροής (περίπτωση που οι τιμές της ταχύτητας δε μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου) και αμελητέας επίδρασης του φαινομένου της διασποράς, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί με την εξής μορφή:

$$R \frac{\partial c}{\partial t} + u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} = -R\lambda c \quad (12.4)$$

Για να γράψουμε την εξίσωση μεταφοράς στην παραπάνω μορφή εξίσωση 12.4, πήραμε υπόψη μας ότι η εξίσωση της συνέχειας για την περίπτωση ασυμπίεστου ρευστού γράφεται (βλέπε π.χ. Κωτσοβίνος 2003):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (12.5)$$

Εάν δεν ισχύει η υπόθεση ότι ο υδροφορέας είναι στεγανός, πρέπει να προσθέσουμε στην εξίσωση μεταφοράς έναν όρο πηγή - καταβόθρας, για να λάβουμε υπόψη μας την επίδραση των μη σημειακών εισροών (βλέπε π.χ. Kinzelbach & Rausch 1995):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{u_x}{R} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{u_y}{R} \frac{\partial c}{\partial y} = -\lambda c + \frac{q_E}{nBR} (c_E - c) \quad (12.6)$$

όπου q_E ο ρυθμός εισροής νερού στον υδροφορέα (ή ρυθμός ανανέωσης του υπόγειου νερού), c_E η συγκέντρωση του εισρέοντος ρευστού όσον αφορά τον εξεταζόμενο ρυπαντή, n το πορώδες και B το πάχος του υδροφορέα. Ο επιπλέον όρος της εξίσωσης 12.6 αποτελεί όρο «πηγή», δηλαδή όρο που αυξάνει τη συγκέντρωση του ρυπαντή όταν $c_E > c$, ενώ αποτελεί όρο «καταβόθρα», (δηλαδή όρο ο οποίος συνεισφέρει στη μείωση της συγκέντρωσης του συγκεκριμένου ρυπαντή), εάν $c_E < c$.

Έως τώρα για την περιγραφή όλων των διεργασιών στους υπόγειους υδροφορείς χρησιμοποιήσαμε την περιγραφή κατά Euler (η οποία ονομάζεται και χωρική περιγραφή –spatial description). Όπως είναι γνωστό από τα εισαγωγικά μαθήματα της Ρευστομηχανικής, η περιγραφή αυτή βασίζεται στην υπόθεση ότι ένας παρατηρητής καταλαμβάνει μία θέση στον χώρο και παρακολουθεί όλα τα σωματίδια τα οποία κινούνται από την θέση αυτή.

Εάν υιοθετήσουμε μια περιγραφή του φαινομένου κατά Lagrange (σωματιδιακή ή υλική περιγραφή – material description), περιγραφή η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι ο ιδεατός παρατηρητής «ταξιδεύει» μαζί με ένα ιδεατό σωματίδιο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ολική παράγωγο (αντί της μερικής).

Η ολική παράγωγος της συγκέντρωσης στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ταυτόσημη με την αριστερή πλευρά της εξίσωσης 12.4:

$$\frac{Dc[x(t),y(t),t]}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} \quad (12.7a)$$

όπου $x(t)$ και $y(t)$ οι συντεταγμένες των τροχιών των ιδεατών σωματιδίων, οι οποίες ορίζονται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{u_x}{R} \quad (12.7\beta)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{u_y}{R} \quad (12.7\gamma)$$

Παίρνοντας υπόψη μας τις εξισώσεις 12.6 και 12.7α προκύπτει ότι:

$$\frac{dc}{dt} = -\lambda c + \frac{q_E}{nBR} (c_E - c) \quad (12.8)$$

Στην εξίσωση 12.8 χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο $d()/dt$ αντί του συμβόλου $D()/Dt$, εφόσον εμφανίζεται παράγωγος μόνο κατά τον χρόνο, δηλαδή η εξίσωση 12.8 είναι μία κανονική διαφορική εξίσωση.

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση κατά Lagrange μετατρέψαμε μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (εξίσωση 12.6) σε τρεις κανονικές διαφορικές εξισώσεις (εξισώσεις 12.7β, 12.7γ και 12.8).

Για την περίπτωση στην οποία $c_E = 0$ και τα μεγέθη λ , q_E , n , B είναι ανεξάρτητα του χώρου και του χρόνου, η λύση της εξίσωσης 12.6 δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$c(t) = c_0 \exp[-(\lambda + q_E / RB\varphi)(t - t_0)] \quad (12.9)$$

όπου c_0 είναι η συγκέντρωση του ρυπαντή το χρονικό σημείο t_0 (αρχικές συνθήκες του προβλήματος).

Εάν θεωρήσουμε τη συγκέντρωση των ρυπαντών κατά την είσοδο τους στον υδροφορέα ίση με c_0 , και την ανώτατη επιτρεπτή συγκέντρωση όσον αφορά τον εξεταζόμενο ρυπαντή ίση με $c_Y = c(t)$, ο ελάχιστος επιθυμητός χρόνος παραμονής του ρυπαντή T_L , πριν αυτός αντληθεί από τις υδρογεωτρήσεις, ισούται με:

$$T_L = t - t_0 = \frac{\ln(c_0 / c_Y)}{\lambda + q_E / (RB\varphi)} \quad (12.10)$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις αντί του χρόνου αποδόμησης του ρυπαντή θεωρούμε ελάχιστο απαιτούμενο χρόνο παραμονής του ρυπαντή στο γεωλογικό σχηματισμό τον χρόνο που απαιτείται για να ληφθούν μέτρα προστασίας του υδροφορέα. Μία τέτοια τιμή είναι οι πενήντα ημέρες που προβλέπονται από τους γερμανικούς κανονισμούς για τις ζώνες προστασίας.

Οι εξισώσεις (7a) και (7b) περιγράφουν την κίνηση των ιδεατών σωματιδίων στον υδροφορέα. Η επίλυσή τους μπορεί να επιτευχθεί με ολοκλήρωση, ανεξάρτητα από την επίλυση του πεδίου συγκέντρωσης, υπό την προϋπόθεση ότι το πεδίο ροής είναι γνωστό.

Έστω ότι ένα σωματίδιο βρίσκεται κατά το χρονικό σημείο t_0 στη θέση x_0 , y_0 . Η θέση του κατά το χρονικό σημείο t μπορεί να προσδιοριστεί από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \frac{1}{R} u_x(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau \quad (12.11\alpha)$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{T_z} \frac{1}{R} u_y(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau \quad (12.11\beta)$$

Η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού είναι δυνατόν να αντιστραφεί και να υπολογιστεί η αντίστροφη πορεία του σωματιδίου:

$$x_0 = x(t) - \int_{t_0}^T \frac{1}{R} u_x(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau \quad (12.12\alpha)$$

$$y_0 = y(t) - \int_{t_0}^t \frac{1}{R} u_y(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau \quad (12.12\beta)$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα πρέπει κατά κανόνα να επιλυθούν αριθμητικά. Η απλούστερη μορφή επίλυσης όσον αφορά την εξίσωση 12.12 είναι η εξής:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (u_x(x(t), y(t)) / R) \Delta t \quad (12.13\alpha)$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + (u_y(x(t), y(t)) / R) \Delta t \quad (12.13\beta)$$

ενώ η αντίστοιχη όσον αφορά την εξίσωση 12.12:

$$x(t) = x(t + \Delta t) - (u_x(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) / R) \Delta t \quad (12.14\alpha)$$

$$y(t) = y(t + \Delta t) - (u_y(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) / R) \Delta t \quad (12.14\beta)$$

Είναι προφανές ότι πρέπει να επιλεγεί αρκετά μικρό χρονικό βήμα ώστε η επιλεγμένη τιμή για το πεδίο ταχύτητας να είναι αντιπροσωπευτική για όλο το πεδίο ολοκλήρωσης. Στην πράξη χρησιμοποιείται συχνά επίσης η μέθοδος ολοκλήρωσης Runge-Kutta.

Οι υπολογισμοί απλουστεύονται αρκετά όταν είναι διαθέσιμες αναλυτικές εκφράσεις για το πεδίο ροής, σαν αυτές που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες παραδόσεις.

Σε πολλές περιπτώσεις βοηθάει στον υπολογισμό των ζωνών προστασίας ο σχεδιασμός ενός χάρτη των ισοχρόνων καμπυλών, ο οποίος προσδιορίζεται με την παρακάτω διαδικασία.

Τοποθετείται ένας αριθμός από ιδεατά σωματίδια στην περίμετρο της προς μελέτη υδρογεώτρησης. Με τη μέθοδο που είχαμε περιγράψει προηγουμένως υπολογίζεται η θέση του κάθε σωματιδίου πριν από μία ορισμένη χρονική περίοδο. Η καμπύλη που ενώνει όλα τα σωματίδια ονομάζεται ισόχρονη καμπύλη. Εάν από τους υπολογισμούς είχε προκύψει ότι ένας ρυπαντής πρέπει να μείνει στον υδροφορέα 18 μήνες για να είναι ικανοποιητική η αποδόμηση, τα όρια της ζώνης προστασίας είναι ταυτόσημα με την ισόχρονη καμπύλη των δεκαοκτώ μηνών. Στο εσωτερικό αυτής της ζώνης πρέπει να απαγορευτούν οι δραστηριότητες που μπορεί να ρυπάνουν την υδρογεώτρηση.

Παρά τις απλουστευτικές παραδοχές, η μέθοδος που περιγράψαμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι ιδιαίτερα εύχρηστη και εποπτική. Ορισμένες επιπλέον λεπτομέρειες της μεθόδου δίνονται στο βιβλίο των Kinzelbach & Rausch (1995).

12.4.2. Παραδείγματα προσδιορισμού των ορίων ζωνών προστασίας, παράδειγμα εφαρμογής το πεδίο γεωτρήσεων της πόλης της Κομοτηνής

Η ύδρευση της πόλης της Κομοτηνής η οποία έχει 70000 κατοίκους, την χειμερινή περίοδο εξυπηρετείται από τον ποταμό Βοσβόζη, ο οποίος ρέει σε απόσταση λίγων εκατοντάδων μέτρων από την πόλη, ενώ τους θερινούς μήνες από πεδίο γεωτρήσεων στις όχθες του ποταμού αυτού.

Ο προσδιορισμός των ζωνών προστασίας για την συγκεκριμένο πεδίο γεωτρήσεων (για την πόλη της Κομοτηνής) μελετήθηκε από τους Moutsopoulos et al. (2007).

Το πεδίο περιλαμβάνει 15 παραγωγικές γεωτρήσεις, των οποίων η παροχή κυμαίνεται μεταξύ 45 και 90 m³/h. Η συνολική αντλούμενη παροχή εκτιμάται σε 23000 m³/d.

Για τον προσδιορισμό της τιμής της μεταβιβαστικότητας δεν υπήρχαν διαθέσιμα στοιχεία, υπήρχαν όμως δεδομένα από δοκιμαστικές αντλήσεις για συνθήκες μόνιμης ροής. Για την αξιοποίηση των δεδομένων αυτών για κάθε γεώτρηση επιλύθηκε το παρακάτω αλγεβρικό σύστημα, το οποίο αποτελείται από δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους:

$$T = -\frac{Q}{2\pi s_w} \ln\left(\frac{r_w}{R_Y}\right) \quad (12.15)$$

όπου η υδραυλική ακτίνα R_Y μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω εμπειρική εξίσωση (βλ. και Bear 1979):

$$R_Y = 3000s_w (T/B)^{1/2} \quad (12.16)$$

Στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων (12.15) και (12.16) για κάθε δοκιμαστική άντληση ήταν γνωστές οι τιμές της πτώσης στάθμης στο εσωτερικό της κάθε γεώτρησης (s_w), η ακτίνα της γεώτρησης (r_w), η παροχή Q και το πάχος του υδροφόρου στρώματος (B), ενώ οι άγνωστοι του συστήματος ήταν η μεταβιβαστικότητα (T) και η υδραυλική ακτίνα R_Y .

Οι τιμές της μεταβιβαστικότητας οι οποίες προέκυψαν με αυτόν τον τρόπο κυμάνθηκαν μεταξύ $T=1,2$ 10–3 και 8,6 10–3 m²/s.

Η ακριβής κατανομή των υδρογεωλογικών χαρακτηριστικών στον χώρο προέκυψε από τη ρύθμιση του υδραυλικού μοντέλου με τη χρήση διαθέσιμων τιμών πιεζομετρίας.

Όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3 της παραπάνω δημοσίευσης, τα αποτελέσματα της ρύθμισης του μοντέλου υπόγειας ροής, όπως αυτές προκύπτουν από τη σύγκριση των τιμών της πιεζομετρίας του πεδίου με αυτές της προσομοίωσης είναι ικανοποιητική. Το ίδιο ισχύει και για το ισοζύγιο μάζας, όπως αυτό παρουσιάζεται στον Πίνακα 12.1. Μία παρουσίαση των τιμών των υδρογεωλογικών παραμέτρων του υδραυλικού μοντέλου σε διαφορετικές θέσεις του πεδίου γεωτρήσεων παρουσιάζεται στον πίνακα 2 της δημοσίευσης των Moutsopoulos et al. (2007).

Εκτός από τις παραπάνω τιμές, για τον προσδιορισμό των ζωνών προστασίας είναι απαραίτητη και η γνώση των τιμών του πορώδους. Η παράμετρος αυτή παρουσιάζει τη μεγαλύτερη αβεβαιότητα για το συγκεκριμένο υδροφορέα. Εκτιμήθηκε ότι η τιμή του πορώδους κυμαίνεται μεταξύ 0,2 και 0,4 και επιπλέον η πιθανότητα εμφάνισης είναι ισοκατανεμημένη.

Στην εργασία αυτή κάναμε την υπόθεση ότι η παραμονή των ρύπων στον υδροφορέα για ένα διάστημα 100 ημερών είναι αρκετή είτε για την αποδόμησή τους είτε για εφαρμογή ανθρωπογενών μέτρων για την απομάκρυνσή τους και καθαρισμό του υδροφορέα. Ο χρόνος αυτός είναι διπλάσιος από αυτόν που προβλέπουν οι γερμανικοί κανονισμοί.

Υπολογίστηκαν ζώνες προστασίας υδρογεωτρήσεων με διαστήματα εμπιστοσύνης 50, 90, 92, 95, 98 και 99%.

Διάστημα εμπιστοσύνης 99% σημαίνει ότι στο 99% των πραγματοποιήσεων το κάθε κελί του υδροφορέα είτε περιλαμβάνεται στη ζώνη προστασίας, οπότε δεν υπάρχει περίπτωση εισροής από την επιφάνεια ρυπαντών, οι οποίοι ενδεχομένως θα καταλήξουν από κάποια από τις γεωτρήσεις, είτε βρίσκεται αρκετά μα-

κρία, όποτε, ακόμα και στην περίπτωση διαρροής από την επιφάνεια και ρύπανσης του υδροφορέα, η ρύπανση θα έχει αποδομηθεί αρκετά, ώστε η ποιότητα του νερού να είναι ικανοποιητική (η συγκέντρωση του ρυπαντή θα είναι χαμηλότερη από τα μέγιστα επιτρεπτά όρια). Εναλλακτικά, μπορεί να θεωρηθεί ότι για τη δεύτερη περίπτωση θα υπάρχει αρκετός χρόνος για μία διοικητική παρέμβαση και απορρύπανση του συγκεκριμένου υδροφορέα.

Βιβλιογραφία

- Kinzelbach, W., & Rausch, R (1995).** *Grundwassermodellierung [in German]*. Gebrueder Borntraeger.
- McDonald, M. G., & Harbaugh, A. W. (1988).** *A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model*.
- Moutsopoulos, K.N., Gemtzi, A., & Tsihrintzis, V. A. (2007).** *Delineation of protection zones by the backward tracking method: theoretical background and a GIS based stochastic analysis of the Komotini (Greece) wellfield*. Environmental Geology, vol. 54(5), 1081-1090. doi 10.1007/s00254-007-0879-3.
- Pisinaras, V., Petalas, C., Gemtzi, A., & Tsihrintzis, V. A. (2007).** *Water quantity and quality monitoring of Kosynthos River. North-Eastern Greece*. Global NEST Journal, Vol.9, 259-268.
- Pisinaras, V., Petalas, C., Tsihrintzis, V., & Karatzas, G. (2013).** *Integrated modeling as a decision-aiding tool for groundwater management in a Mediterranean agricultural watershed*. Hydrological Processes, 27(14), 1973-1987.
- Psilovikos, A. A. (1996).** *Optimum Management in Aquifer Studies Using the Linear Programming (LP) method. An application to Eidomeni - Evzones area*, 155.
- Psilovikos, A. A. (1999).** *Optimization models in groundwater management, based on linear and mixed integer programming. An application to a Greek hydrogeological basin*. Physics and Chemistry of the Earth, Part B: Hydrology, Oceans and Atmosphere, Vol. 24(1-2), 139-144.
- Psilovikos, A., & Tzimopoulos, C. (2004).** *Comparison of quadratic and non-linear programming (QP and NLP) optimization models in groundwater management*. Journal of Hydroinformatics, Vol. 6(3), 175-185.
- Waterloo Hydrogeologic, Inc., (2006).** *Visual MODFLOW version 4.2 User's Manual*.
- Διαμαντής, Ι. (1985).** *Υδρογεωλογική μελέτη λεκάνης λίμνης Βιστωνίδας- Μελέτη υδροφόρων οριζόντων μέσα σ' ένα ευρύ ετερογενές πεδίο: Δ.Π.Θ., 265.*
- Πλιάκας, Φ. (1998).** *Έρευνα επί των καταλλήλων μεθόδων τεχνητού εμπλουτισμού σε ετερογενείς υδροφορείς αλλουβιακών σχηματισμών. Εφαρμογές σε υδροφορείς του πεδινού τμήματος Ξάνθης: Δ.Π.Θ., 29/1/1998, xx+290.*

Συντομογραφίες - Αρκτικόλεξα - Ακρωνύμια

ADI	Alternate Direction Implicite
DO	Dissolved Oxygen (Διαλυμένο Οξυγόνο)
FFA	Far-Field Area
FTBS	Forward in Time – Backward in Space
FTCS	Forward in Time – Central in Space
GHB	General Head Boundary
mg/lt	milligram per litre
N.S.	Navier-Stokes
NFA	Near-Field Area
PAR	Photosynthetically Active Radiation
ppm	parts per million
ppt	parts per thousand
TDMA	Tri-Diagonal Matrix Algorithmus
Α.Σ.Ο.	Αντιπροσωπευτικό Στοιχειώδη Όγκο
Ο.Σ.	Οριακές Συνθήκες

Απόδοση Ξενόγλωσσων Όρων

Απόδοση

Ανωση
Ανωστικές Δυνάμεις Και Ροές
Ανωστική Ροή
Ανωστική Φλέβα
Απερχόμενη
Αποδέκτη
Απόθεση Σωματιδίων
Αριθμητική Διάχυση
Αριθμός Διάχυσης
Αρχικές Συνθήκες
Ασταθή Ισορροπία
Δευτερογενής Παραγωγή
Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης
Διαδρομή
Διάλυση
Διαμήκη Διασπορά
Διασπορά
Διαστατική Ανάλυση
Διατμητική Τάση
Διάχυση
Εισδοχή Σωματιδίων
Εισερχόμενη
Έκκεντρος Κάναβος
Έκλυση Θερμότητας
Ένζυμα Χημικού Και Βιολογικού Πολέμου
Εξάτμιση
Εξίσωση Εκροής Των Dupuit-Forchheimer
Εξίσωση Μεταφοράς – Διάχυσης
Ευσταθή Ισορροπία
Θαλάσσιας Αύρα
Θερμικά Ισοζύγια
Θερμική Ανάμειξη
Θερμική Στρωμάτωση
Θερμοκρασία Δρόσου
Ιχνοστοιχεία
Κατακόρυφα Ρεύματα
Κατακόρυφη Ανοδική Κυκλοφορία
Κατακόρυφη Καθοδική Κυκλοφορία
Κατάσταση Ισορροπίας
Κελί
Κεντρική Γραμμή
Μέθοδος Διασυνδεδεμένων Υπολογιστικών Κανάβων
Μέθοδος Των Εικόνων/ Μέθοδος Των Ειδώλων
Μείξη
Μέση Ροή
Μέση Τιμή Ως Προς Τον χρόνο
Μέση Τιμή Ως Προς Τον χώρο
Μεταβιβαστικότητα
Μεταφορά
Μοριακή Διάχυση
Οργανικά Απόβλητα
Οριακές Συνθήκες
Ουδέτερη Ισορροπία
Παλιρροιακό Πρίσμα
Πεπερασμένες Διαφορές

Ξενόγλωσσος όρος

Buoyancy
Buoyancy Forces And Flows
Buoyancy Flux
Buoyant Jet
Outgoing
Receptor
Particle Settling
Numerical Diffusion
Diffusion Number
Initial Conditions
Unstable Stability
Secondary Production
Successive Overrelaxation
Pathway
Dilution
Longitudinal Dispersion
Dispersion
Dimensional Analysis
Shear Stress
Diffusion
Particle Entrainment
Incoming
Staggered Grid
Waste Heat
Chemical And Biological Warfare Agents
Evaporation
Dupuit-Forchheimer Discharge Formula
Advection – Diffusion Equation
Static Stability
Sea Breeze
Heat Budgets
Thermal Mixing
Thermal Stratification
Dew Point Temperature
Trace Metals
Convective Currents
Upwelling
Downwelling
Steady-State
Cell
Centerline
Nested Grid Method
Method Of Images
Mixing
Flux Average
Time Average
Spatial Average
Transmissivity
Advection
Molecular Diffusion
Organic Wastes
Boundary Conditions
Neutral Stability
Tidal Prism
Finite Differences

Πεπλεγμένο Αριθμητικό Σχήμα
Περιβαλλοντική Ρευστομηχανική
Περιορισμός
Περίπου Μόνιμη Κατάσταση
Πηγή
Πλέγμα Επίλυσης
Πλήρως Αναμεμιγμένη
Πλούμιο
Ποταμοεκβολή
Πρωτογενή Παραγωγικότητα
Ραδιενεργά Απόβλητα
Ρητό Σχήμα
Ροή
Ροή Διάχυσης
Ροή Ορμής
Σενάριο «Αποψίλωσης»
Σενάριο «Ξηρού Έτους»
Στρώμα
Στρωματοποίηση
Συναγωγή
Συναγωγή Διείδυσης
Συνάρτηση Σφάλματος
Σύνθετες Οργανικές Ενώσεις
Συντελεστής Αποθήκευσης
Συντελεστής Μοριακής Διάχυσης
Συντελεστής Σύρσεως
Συχνότητα Στρωματοποίησης
Σφάλμα Αποκοπής
Σφάλμα Στρογγυλοποίησης
Ταμιευτήρας
Τύρβη
Τυρβώδη Διάχυση
Τυρβώδης Διάχυση
Υδραυλική Αγωγιμότητα
Υλική Περιγραφή
Υπερχείλιση
Υποβρύχια Φλέβα
Υπολογιστικό Κάναβο
Φυσικά Ανόργανα Άλατα & Ιζήματα
Χαρακτηριστικές Γραμμές
Χρόνος Παραμονής
Χωρική Περιγραφή

Implicit Scheme
Environmental Fluid Mechanics
Constraint
Quasi Steady State
Source
Computational Grid
Fully Mixed
Plume
Estuary
Primary Production
Radioactive Materials
Explicit Scheme
Flux
Diffusive Flux
Momentum Flux
“Deforestation” Scenario
“Dry Year” Scenario
Layer
Stratification
Convection
Penetrative Convection
Error Function
Synthetic Organic Chemicals
Storage Coefficient
Molecular Diffusion Coefficient
Drag Coefficient
Stratification Frequency
Truncation Error
Rounding Error
Reservoir
Turbulence
Turbulent Diffusion
Turbulent Diffusion
Hydraulic Conductivity
Material Description
Overflow
Jet
Computational Grid
Natural Inorganic Salts And Sediments
Characteristic Lines
Residence Time
Spatial Description