Παράδειγμα 3.1

$$\frac{1}{\mathrm{s}(\mathrm{s}+1)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{s}+1}$$

Για τον υπολογισμό του Α:

1. Θέτω τον παρονομαστή του Α ίσο με το μηδέν: s = 0

2. Στο αριστερό μέρος της Εξίσωσης, το $\frac{1}{s(s+1)}$, απαλείφω το s (δηλαδή τον παρονομαστή του Α και στο υπόλοιπο, αντικαθιστώ το s = 0:

$$A = \frac{1}{\mathrm{s}+1} = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 \leftrightarrow A = 1$$

Για τον υπολογισμό του Β:

2. Θέτω τον παρονομαστή του Β ίσο με το μηδέν: s + 1 = 0 ⇔ s = -1

2. Στο αριστερό μέρος της Εξίσωσης, το $\frac{1}{s(s+1)}$, απαλείφω το s + 1 (δηλαδή τον παρονομαστή του Β και στο υπόλοιπο, αντικαθιστώ το s = -1:

$$B = \frac{1}{\mathrm{s}} = \frac{1}{-1} = -1 \leftrightarrow B = -1$$

Παράδειγμα 3.2

Διαφορική του ισοζυγίου μάζας:

$$\frac{2}{s(5s+1)} = \frac{0{,}4}{s(s+0{,}2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0{,}2}$$

Για τον υπολογισμό του A:

3. Θέτω τον παρονομαστή του A ίσο με το μηδέν: s = 0

2. Στο αριστερό μέρος της Εξίσωσης, το $\frac{0{,}4}{s(s+0{,}2)}$, απαλείφω το s (δηλαδή τον παρονομαστή του A και στο υπόλοιπο, αντικαθιστώ το s = 0:

$$A = \frac{0{,}4}{s+0{,}2} = \frac{0{,}4}{0+0{,}2} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2 \leftrightarrow A = 2$$

Για τον υπολογισμό του B:

4. Θέτω τον παρονομαστή του B ίσο με το μηδέν: s + 0,2 = 0 ⇔ s = -0,2

2. Στο αριστερό μέρος της Εξίσωσης, το $\frac{0{,}4}{s(s+0{,}2)}$, απαλείφω το s + 0,2 (δηλαδή τον παρονομαστή του B και στο υπόλοιπο, αντικαθιστώ το s = -0,2:

$$B = \frac{0{,}4}{s} = \frac{0{,}4}{-0{,}2} = -2 \leftrightarrow B = -2$$

Διαφορική του ισοζυγίου ενέργειας:

$$\frac{70}{s(5s+1)} = \frac{14}{s(s+0{,}2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0{,}2}$$

Για τον υπολογισμό του A:

5. Θέτω τον παρονομαστή του A ίσο με το μηδέν: s = 0

2. Στο αριστερό μέρος της Εξίσωσης, το $\frac{0{,}4}{s(s+0{,}2)}$, απαλείφω το s (δηλαδή τον παρονομαστή του A και στο υπόλοιπο, αντικαθιστώ το s = 0:

$$A = \frac{14}{s+0{,}2} = \frac{14}{0+0{,}2} = \frac{14}{0{,}2} = 70 \leftrightarrow A = 70$$

Για τον υπολογισμό του Β:

6. Θέτω τον παρονομαστή του Β ίσο με το μηδέν: s + 0,2 = 0 ⇔ s = -0,2

2. Στο αριστερό μέρος της Εξίσωσης, το $\frac{0{,}4}{s(s+0{,}2)}$, απαλείφω το s + 0,2 (δηλαδή τον παρονομαστή του Β και στο υπόλοιπο, αντικαθιστώ το s = -0,2:

$$B = \frac{14}{s} = \frac{14}{-0{,}2} = -70 \leftrightarrow B = -70$$

Παράδειγμα 3.3

Ο μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής είναι:

$[s^3*x(s) – s^2*x(0) – s*x'(0) – x''(0)] + 2[s^2*x(s) – s*x(0) – x'(0)] – [s*x(s) – x(0)] – 2*x(s) =$

$= 4/s + 1/(s – 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [s^3*x(s) – s^2*1 – s*0 – (-1)] + 2[s^2*x(s) – s*1 – 0] – [s*x(s) – 1] – 2*x(s) = 4/s + 1/(s – 2)$

$\Leftrightarrow [s^3*x(s) – s^2 + 1] + 2[s^2*x(s) – s] – [s*x(s) – 1] – 2*x(s) = 4/s + 1/(s – 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(s)*(s^3 +2s^2 – s – 2) – s^2 – 2s + 2 = 4/s + 1/(s – 2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(s)*(s^3 +2s^2 – s – 2) = \frac{4(s-2)+s+s(s-2)s^2+s(s-2)2s-2s(s-2)}{s(s-2)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(s) = \frac{4(s-2)+s+s^3(s-2)+2s^2(s-2)-2s(s-2)}{s(s+2)(s^3+2s^2-s-2)}$$

Το σημείο αυτό, που δεν θα προκύπτει συχνά, είναι και το πιο δύσκολο. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης 3ου βαθμού στον παρονομαστή. Όταν κάτι τέτοιο συμβαίνει, με πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου από 2, τότε οι ρίζες θα είναι απλοί αριθμοί (π.χ. 1, -1, 2, -2). Στο συγκεκριμένο πολυώνυμο βλέπουμε ότι το 1, είναι ρίζα, αφού 1 + 2 – 1 – 2 = 0. Και το -1 είναι ρίζα, αφού -1 + 2 + 1 – 2 = 0. Αλλά και το -2 είναι ρίζα, αφού -8 + 8 + 2 – 2 = 0. Οπότε το τριβάθμιο πολυώνυμο του παρονομαστή γίνεται (s + 1)(s + 2)(s – 1).

Και ο αριθμητής γίνεται:

$4s – 8 + s + s^4 – 2s^3 + 2s^3 – 4s^2 – 2s^2 + 4s = s^4 – 6s^2 +9s – 8$

Από τη στιγμή που έχουν βρεθεί οι ρίζες του παρονομαστή, ο παρονομαστής μπορεί να αναλυθεί στα πρωτοβάθμια πολυώνυμα των ριζών του και εφαρμοστεί η τεχνική HEAVYSIDE:

$$x(s) = \frac{s^4-6s^2+9s-8}{s(s+2)(s-2)(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s-1}$$

Για τον υπολογισμό του Α, λύνω τον παρονομαστή του Α (s = 0), απαλείφω τον παρονομαστή του Α από το αριστερό σκέλος και θέτω, στο αριστερό σκέλος, όπου s το 0:

$$A = \frac{s^4-6s^2+9s-8}{(s+2)(s-2)(s+1)(s-1)} = \frac{0^4-6*0^2+9*0-8}{(0+2)(0-2)(0+1)(0-1)} = \frac{-8}{(2)(-2)(1)(-1)} = -2$$

Για τον υπολογισμό του Β, λύνω τον παρονομαστή του Β (s = 2), απαλείφω τον παρονομαστή του Β από το αριστερό σκέλος και θέτω, στο αριστερό σκέλος, όπου s το 2:

$$B = \frac{s^4-6s^2+9s-8}{s(s+2)(s+1)(s-1)} = \frac{2^4-6*2^2+9*2-8}{2(2+2)(2+1)(2-1)} = \frac{16-24+18-8}{(2)(4)(3)(1)} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Για τον υπολογισμό του C, λύνω τον παρονομαστή του C (s = -1), απαλείφω τον παρονομαστή του C από το αριστερό σκέλος και θέτω, στο αριστερό σκέλος, όπου s το -1:

$$B = \frac{s^4-6s^2+9s-8}{s(s-2)(s+2)(s-1)} = \frac{(-1)^4-6*(-1)^2+9*(-1)-8}{(-1)(-1-2)(-1+2)(-1-1)} = \frac{1-6-9-8}{(-1)(-3)(1)(-2)} = \frac{-22}{-6} = \frac{11}{3}$$

Κ.Ο.Κ

Και η διαφορική γίνεται:

$$\mathbf{x(s)} = \; = \frac{-2}{s} + \frac{1/12}{s-2} + \frac{11/3}{s+1} - \frac{17/12}{s+2} + \frac{2/3}{s-1}$$

η οποία είναι εύκολο να μετασχηματιστεί πίσω στο πεδίο των χρόνων t (ο αντίστροφος μετασχηματισμός φαίνεται στο βιβλίο).

Παράδειγμα 3.4

Ο μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής είναι: