**Παράδειγμα 2.1 (σελ. 18)** Εκτός ύλης

**Παράδειγμα 2.2 (σελ. 18)**

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης x(t), η οποία ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^{3}x(t)}{dt^{3}}+4\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}}+5\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=2$$

και τους περιορισμούς (τις οριακές συνθήκες): $x\left(0\right)=\frac{dx(0)}{dt}=\frac{d^{2}x(0)}{dt^{2}}=0$

(δηλαδή, οι τιμές της συνάρτησης, της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης για t = 0, είναι 0)

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{d^{3}x}{dt^{3}}$ είναι (σύμφωνα με τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace παραγώγων):

**L** $\left\{\frac{d^{3}x(t)}{dt^{3}}\right\}$ = s3\*x(s) – s2\*x(0) – s1\*x’(0) – s0\*x’’(0) = **s3\*x(s)**

αφού:

 x(0) = 0

x’(0) $=\frac{dx(0)}{dt}$ = 0 (το x’(t) και το $=\frac{dx(t)}{dt}$ είναι δύο διαφορετικοί συμβολισμοί για την πρώτη παράγωγο, και η τιμή της πρώτης παραγώγου για t= 0 δίνεται ίση με μηδέν)

x’’(0) $=\frac{dx^{2}(0)}{dt^{2}}$ = 0 (το x’’(t) και το $=\frac{dx^{2}(0)}{dt^{2}}$ είναι δύο διαφορετικοί συμβολισμοί για την δεύτερη παράγωγο, και η τιμή της δεύτερης παραγώγου για t= 0 δίνεται ίση με μηδέν)

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{d^{2}x}{dt^{2}}$ είναι:

**L** $\left\{\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}}\right\}$ = s2\*x(s) – s1\*x(0) – s0\*x’(0) = **s2\*x(s)**

αφού x(0) = 0 και x’(0) = 0.

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{dx}{dt}$ είναι:

**L** $\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}$ = s1\*x(s) – s0\*x(0) = **s\*x(s)**

αφού x(0) = 0.

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου **x(t)** είναι **x(s).**

Το ανάπτυγμα (ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου **2** είναι **2/s** (σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1).

Η αρχική διαφορική είναι γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους όρων της, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της αρχικής διαφορικής θα είναι ο ίδιος γραμμικός συνδυασμός των μετασχηματισμών Laplace του κάθε όρου, οπότε:

**s3\*x(s)** + 4\***s2\*x(s)** + 5\***s\*x(s)** + 2\***x(s)** = **2/s** ⬄ x(s)\*(s3 + 4s2 + 5s + 2) = 2/s ⬄ **x(s) =** $\frac{2}{s(s^{3} + 4s^{2} + 5s +2)}$

**Παράδειγμα 2.2 (σελ. 18)**

Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τα δυναμικά ισοζύγια μάζας και ενέργειας του δοχείου ανάμιξης της θεωρίας.

**Ισοζύγιο μάζας:** $τ\frac{dCa(t)}{dt}+Ca(t)=Ca3$

Όπου: Ca3 = 2 g/L είναι η συγκέντρωση στην παροχή εισόδου του δοχείου ανάμιξης, μετά τη

διαταραχή (μετά το λάθος του χειριστή). Γενικά, το παραπάνω δυναμικό ισοζύγιο (η παραπάνω διαφορική εξίσωση) αφορά τους χρόνους t μετά τη διαταραχή.

 Ca(0) = 3 g/L Η συγκέντρωση Ca στην έξοδο, ακριβώς στο χρόνο 0 min της διαταραχής είναι ίση

 με τη Ca στην προηγούμενη μόνιμη κατάσταση, πριν τη διαταραχή.

 τ = 150/30 = 5 min είναι ο υδραυλικός χρόνος παραμονής, που έχει υπολογιστεί

Οπότε το ισοζύγιο μάζας γίνεται: $5\frac{dCa(t)}{dt}+Ca(t)=2$

Ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{dCa(t)}{dt}$ είναι:

**L** $\left\{\frac{dCa(t)}{dt}\right\}$ = s\*Ca(s) – Ca(0) = **s\*Ca(s) – 3** αφού Ca(0) = 3 g/L.

O μετασχηματισμός Laplace του όρου **Ca(t)** είναι **Ca(s)** και ο μετασχηματισμός Laplace του **2** είναι **2/s** (σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1). Οπότε, ο μετασχηματισμός Laplace του ισοζυγίου μάζας είναι:

5\*(sCa(s) – 3) + Ca(s) = 2/s ⬄ 5sCa(s) – 15 + Ca(s) = 2/s ⬄ Ca(s)\*(5s + 1) = 2/s + 15 ⬄

**Ca(s) =** $\frac{2}{s(5s +1)}+ \frac{15}{(5s +1)} $

**Ισοζύγιο ενέργειας:** $τ\frac{dΤ(t)}{dt}+T\left(t\right)=T3+ \left(\frac{1}{ρv3Cp}\right)Q$

Όπου: T3 = 35 oC είναι η θερμοκρασία στην παροχή εισόδου του δοχείου ανάμιξης, μετά τη

διαταραχή.

 Τ(0) = 80 οC Η θερμοκρασία T(t) στην έξοδο, ακριβώς στο χρόνο 0 min της διαταραχής είναι ίση

 με τη T στην προηγούμενη μόνιμη κατάσταση, πριν τη διαταραχή.

 τ = 150/30 = 5 min είναι ο υδραυλικός χρόνος παραμονής, που έχει υπολογιστεί

 Q/ρ\*v3\*Cp = 1.050.000/30.000 = 35 oC

Οπότε το ισοζύγιο ενέργειας γίνεται: $5\frac{dΤ(t)}{dt}+Τ(t)=70$

Ο μετασχηματισμός) Laplace του όρου $\frac{dΤ(t)}{dt}$ είναι:

**L** $\left\{\frac{dT(t)}{dt}\right\}$ = s\*T(s) – T(0) = **s\*T(s) – 80** αφού T(0) = 80 οC

O μετασχηματισμός Laplace του όρου **T(t)** είναι **T(s)** και ο μετασχηματισμός Laplace του **70** είναι **70/s** (σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1). Οπότε, ο μετασχηματισμός Laplace του ισοζυγίου ενέργειας είναι:

5\*(sΤ(s) – 80) + Τ(s) = 70/s ⬄ 5sΤ(s) – 400 + Τ(s) = 70/s ⬄ Τ(s)\*(5s + 1) = 70/s + 400 ⬄

**Τ(s) =** $\frac{70}{s(5s +1)}+ \frac{400}{(5s +1)} $