12-1

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{5}{(s+1)(2s+1)} \cdot K}{1 + \frac{5}{(s+1)(2s+1)} \cdot K} = \frac{5K}{(s+1)(2s+1) + 5K} =$$

$$= \frac{5K}{2s^2 + 3s + 1 + 5K}$$ Θέλω ο παρονομαστής να 'ναι της μορφής $T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1$

Άρα διαιρώ με $1+5K$

$$\frac{C}{R} = \frac{5K/(1+5K)}{\frac{2}{(1+5K)} s^2 + \frac{3}{(1+5K)} \cdot s + 1}$$

Θέτω $T^2 = \frac{2}{1+5K} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2}{1+5K}} = \sqrt{\frac{2}{1+5 \cdot 1.6}} = 0.471$

και $2\zeta T = \frac{3}{1+5K} \Rightarrow 2 \cdot \zeta \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2}{1+5K}}}_{0.471} = \frac{3}{1+5K} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{2 \cdot 0.471} \cdot \frac{3}{1+5 \cdot 1.6} = 0.354$

Ο αριθμητής του $\frac{C}{R}$ δίνει τη τελική ~~μέγιστη~~ τιμή για μοναδιαία βηματική μεταβολή

$$C = \frac{5K/(1+5K)}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \cdot R \xRightarrow{R=0.1/s} C = \frac{5 \cdot 1.6/(1+5 \cdot 1.6)}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \cdot \frac{0.1}{s}$$

$$\Rightarrow C = \frac{0.089/s}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

για $c(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot C(s) = \lim_{s \to 0} \left[\frac{0.089/s}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \cdot s \right] = 0.089$

(b) μόνιμη απόκλιση $R(\infty) - C(\infty) = 0.1 - 0.089 = 0.011$

Λύση της εξίσωσης από την 7-18 για ζ<1 και μοναδιαία βηματική απόκριση

πολλαπλασιάζουμε την 7.18 με τον αριθμητή μας $0.1 \cdot 0.89 = 0.089$

$$C(t) = 0.089\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-0.354^2}} e^{-0.354\, t/\tau} \sin\left(\sqrt{1-0.354^2}\,\frac{t}{\tau} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-0.354^2}}{0.354}\right)\right]$$

$$= 0.089\left[1 - 1.069\, e^{-0.354\, t/\tau} \sin(0.935\, t/\tau + 1.209)\right]$$

t/τ	$C(t)$
0.5	0.009721
1	0.03289
1.5	0.06070
2	0.086
2.5	0.104
3	0.114
3.5	0.11584
4	0.111

} με περισσότερη λεπτομέρεια

t/τ	$C(t)$
3.1	0.115
3.2	0.1157
3.3	0.11605
3.4	0.11608

μέγιστο σε χρόνο $\frac{t}{\tau} = 3.4 \Rightarrow t = 3.4 \cdot 0.471 = 1.60$

Τα ερωτήματα με τη συχνοτητα και την περίοδο δεν εξετάζονται.

12-2

(a) $$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1/(T_1 s+1)}{1+K(1+T_D s+1/T_I s)/(T_1 s+1)} = \frac{1/(T_1 s+1)\times(T_1 s+1)}{(T_1 s+1)+K(1+T_D s+\frac{1}{T_I s})}$$

$$= \frac{1\cdot T_I s}{(T_1 s+1)T_I s+K\cdot T_I s(1+T_D s+1/T_I s)}$$

$$= \frac{T_I s}{T_1 T_I s^2+T_I s+K T_I s+K T_I T_D s^2+K}$$

$$= \frac{T_I s}{(T_1 T_I+K T_I T_D)s^2+(T_I+K T_I)s+K}$$ διαιρώ με K

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{T_I/K\cdot s}{\left(\frac{T_I T_1}{K}+T_I T_D\right)s^2+(T_I/K+T_I)s+1} = \frac{A\cdot s}{\tau^2 s^2+2\tau\zeta s+1}$$

όπου $A = T_I/K$

$\tau^2 = T_I T_1/K+T_I T_D \Rightarrow \tau = \sqrt{T_I(T_1/K+T_D)}$

$2\zeta\tau = T_I/K+T_I \Rightarrow 2\zeta\cdot\sqrt{T_I(T_1/K+T_D)} = T_I/K+T_I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{T_I/K+T_I}{2\sqrt{T_I(T_1/K+T_D)}} = \frac{T_I(1/K+1)}{2\sqrt{T_I(T_1/K+T_D)}} = \frac{\sqrt{T_I}(1/K+1)}{2\sqrt{T_1/K+T_D}}$$

(β) Λύση από την έκφραση

$T_D = T_I = 1$ s $T_1 = 2$

τότε $A = 1/K$ και $\tau = \sqrt{1(2/K+1)}$ και $\zeta = \frac{\sqrt{1}(1/K+1)}{2\sqrt{2/K+1}}$

Για $K=0.5$ $\tau = 2.24$ s $\zeta = 0.67$

$K=2$ $\tau = 1.414$ s $\zeta = 0.530$

(γ) $\tau_{K\to\infty} = \lim_{K\to\infty}\sqrt{2/K+1} = 1$ και $\zeta_{K\to\infty} = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1/K+1}{\sqrt{2/K+1}}\right) = 0.5$

(δ) απόκλιση $R(\infty)-C(\infty) = 0-\lim_{s\to 0}(s\cdot C(s)) =$

μοναδιαία βηματική μεταβολή

$$C(s) = \frac{A\cdot s}{\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1}\cdot\frac{1}{s} = \frac{A}{\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1}$$

Άρα μόνιμη απόκλιση $-\lim_{s\to 0}\frac{A\cdot s}{\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1} = 0$

(ε) Σχεδιασμός → υπολογισμός τιμών από τη λύση

$$\frac{C(t)}{A} = \frac{1}{\tau}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/\tau} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau}\right)$$

Για $\tau = 2.24$ κ $K = 0.5$

t/τ	C
0.1	0.0834
0.2	0,1556
⋮	
0.9	0.4077
1	0,4161
1,1	0.4195
1,2	0.4185

C_{max}

$1,1 \times 2,24 = t_{max} \leftarrow 1,1$

Για $\tau = 1.414$ και $K = 2$

t/τ	C
1	0.116
1,1	0.1179
1.2	0.1185
1,3	0.1179

$1.2 \cdot 1.414 = 1.7$ $t_{max} \leftarrow 1.2$ $\quad C_{max}$

12-3

β) $\frac{C}{U_1} = \frac{\frac{2}{(2s+1)}\cdot\frac{1}{(2s+1)}}{1+5\frac{2}{(2s+1)(2s+1)}} = \frac{2/(2s+1)^2}{1+10/(2s+1)^2} = \frac{2}{4s^2+4s+1+10} = \frac{2}{4s^2+4s+11}$

$= \frac{2/11}{4/11\, s^2 + 4/11\, s+1}$

$T^2 = 4/11 \Rightarrow T = 0.602$

$2\zeta T = 4/11 \Rightarrow \zeta = 0.301$

μόνιμη απόκλιση σε μοναδιαία βηματική μεταβολή στο $U_1 =$
$= R(\infty) - C(\infty) = 0 - \lim_{s\to 0}\left[\left(\frac{2/11}{4/11 s^2 + 4/11\cdot s+1}\cdot\frac{1}{s}\right)\cdot s\right] = 0 - 2/11 = -2/11$

$\frac{C}{U_2} = \frac{1/(2s+1)}{1+10/(2s+1)^2} = \frac{(2s+1)^2/(2s+1)}{(2s+1)^2+10} = \frac{2s+1}{4s^2+4s+11} = \frac{1/11(2s+1)}{\frac{4}{11}s^2+\frac{4}{11}\cdot s+1}$

$T^2 = 4/11 \Rightarrow T = 0.602$

ς $\zeta = 0.301$ όπως πριν αφού η χαρακτηριστική εξίσωση
είναι ίδια

μόνιμη απόκλιση
$= R(\infty) - C(\infty) = 0 - \lim_{s\to 0}\left[\left(\frac{1/11(2s+1)}{4/11 s^2+4/11\cdot s+1}\cdot\frac{1}{s}\right)\cdot s\right] = -1/11$

γ) σχεδιασμός βηματικής απόκρισης

(βηματική) για $\zeta<1$

$Y(s) = \frac{1}{s}\,\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1} \leadsto Y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta t/T}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\, t/T + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$

(7.14) 7.18

(κρουστική) $\zeta<1$

$Y(s) = \frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1} \leadsto Y(t) = \frac{1}{T}\,\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta t/T}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\dots\right)$

7.31 (7.32)

SKAG

βηματική στο U_1 $\rightarrow$ $C(s) = \frac{2/11}{4/11 s^2 + 4/11 \cdot s + 1} \frac{1}{s}$ $\rightarrow$ $Y(s) = \frac{C(s)}{2/11} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}$

με $\tau = 0.602$ και $\zeta = 0.301$

Από Π.18

$$\frac{C(s)}{2/11} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-0.301^2}} e^{-0.301 t/0.602} \sin\left(\sqrt{1-0.301^2} \frac{t}{0.602} + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-0.301^2}}{0.301}\right)$$

βηματική στο U_2 $\rightarrow$ $C(s) = \frac{1/11 (2s+1)}{4/11 s^2 + 4/11 s + 1} \frac{1}{s}$ $\rightarrow$

$$= \frac{2/11}{4/11 s^2 + 4/11 s + 1} + \frac{1/11}{4/11 s^2 + 4/11 s + 1} \frac{1}{s}$$

$$= 2/11 \cdot Y_1(s) + 1/11 \, Y_2(s)$$

$\downarrow$ από Π.31 $\qquad$ $\downarrow$ από Π.18

Επιλέγω τις αντίστοιχες λύσεις

$$C(t) = \frac{2}{11} Y_1(t) + 1/11 \, Y_2(t)$$

$$Y_1(t) = \frac{1}{0.602} \frac{1}{\sqrt{1-0.301^2}} e^{-0.301 t/0.602} \sin\left(\sqrt{1-0.301^2} \frac{t}{0.602}\right)$$

και $Y_2(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-0.301^2}} e^{-0.301 t/0.602} \sin\left(\sqrt{1-0.301^2}\, t/0.602 + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-0.301^2}}{0.301}\right)$

SKAG