# Κεφάλαιο 12

(12-4)

Σελ 150 σχέσεις (6.5) και (6.6)

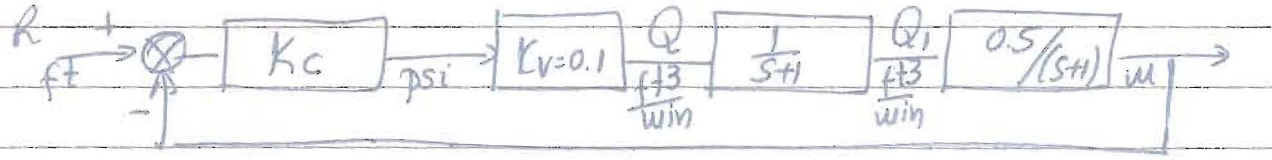
$Q_1(s) = \frac{1}{T_1 s+1} Q(s)$  $T_1 = A_1 \cdot R_1$, $A_1 = 2ft^2$, $R_1 = \frac{h}{q} = \frac{dh}{dq} = \frac{1}{2}\frac{min}{ft^2}$ $\Rightarrow T_1 = 1\ min$

$Q_1(s) = \frac{1}{s+1} Q(s)$

$H_2(s) = \frac{R_2}{T_2 \cdot s+1} Q_1(s) \Rightarrow$ Ομοίως $T_2 = A_2 \cdot R_2$, $A_2 = 2ft^2$, $R_2 = \frac{1}{2}\frac{min}{ft^2}$ $\Rightarrow T_2 = 1 min$

$H_2(s) = \frac{0.5}{s+1} Q_1(s)$

(a)




(β) $\frac{H_2}{R} = \frac{K_c \cdot K_v \frac{1}{s+1} \cdot 0.5/(s+1)}{1 + K_c K_v \frac{1}{s+1} \frac{0.5}{s+1}} = \frac{K_c \cdot 0.1 \cdot 0.5/(s+1)^2}{1 + K_c \cdot 0.1 \cdot 0.5/(s+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{H_2}{R} = \frac{K_c \cdot 0.05}{(s+1)^2 + K_c \cdot 0.05} = \frac{K_c \cdot 0.05}{s^2+2s+1+K_c \cdot 0.05}$

Είναι δεύτερης τάξης της μορφής $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}$ (σχ. 7.12) σελ 168

Θα φέρω την παραπάνω σε αυτή τη μορφή
(διαιρώ με το $1+K_c \cdot 0.05$ ώστε να εμφανιστεί το "1" στο δεξί μέλος του παρανομαστή

$$\frac{H_2}{R} = \frac{0.05K_c/(1+0.05K_c)}{\frac{1}{1+0.05K_c}s^2 + \frac{2}{1+0.05K_c}s + 1}$$

Από σύγκριση του παρανομαστή με την $\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$

προκύπτει $\tau = \sqrt{\frac{1}{1+0.05K_c}}$ (σταθερά χρόνου συστήματος 2ης τάξης)

και $\zeta = \frac{2/(1+0.05K_c)}{2\cdot\tau} = \frac{1/(1+0.05K_c)}{1/\sqrt{1+0.05K_c}} = \frac{1}{\sqrt{1+0.05K_c}}$

Για $\zeta=1$ έχω απόκριση με κρίσιμη απόσβεση (σελ 171)

$\zeta=1 \Rightarrow \sqrt{1+0.05K_c} = 1 \Rightarrow K_c=0$ δηλ. δεν πρέπει να έχω ρύθμιση

Άρα στην περίπτωση αναλογικού ρυθμιστή δεν μπορεί να γίνει κρίσιμη απόσβεση

(γ) Σχέση (6.24) σελ 156

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1+\tau_2+A_1R_2)s + 1} = \frac{0.5}{1\cdot 1\cdot s^2 + (1+1+2\cdot 0.5)s + 1}$$

$$= \frac{0.5}{s^2+3s+1}$$

Για το σύστημα κλειστού βρόχου

$$\frac{H_2}{R} = \frac{K_c\cdot 0.1\cdot 0.5/(s^2+3s+1)}{1+K_c\cdot 0.1\cdot 0.5/(s^2+3s+1)} = \frac{0.05K_c}{s^2+3s+1+0.05K_c} =$$

$$= \frac{0.05K_c/(1+0.05K_c)}{\frac{1}{1+0.05K_c} s^2 + \frac{3}{1+0.05K_c} s + 1}$$

Συγκρίνω τον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς με αυτόν ενός συστήματος 2ης τάξης $\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1$

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{1+0.05K_c}} \quad \text{και} \quad \zeta = \frac{3/(1+0.05K_c)}{2\tau} = \frac{3/(1+0.05K_c)}{2/\sqrt{1+0.05K_c}} =$$

$$= 3/2 \frac{1}{\sqrt{1+0.05K_c}}$$

Για $\zeta = 1 \Rightarrow \sqrt{1+0.05K_c} = 3/2 \Rightarrow 1 + 0.05K_c = (3/2)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K_c = \frac{(3/2)^2 - 1}{0.05} = 25 \text{ psi/ft}$$ (από το διάγραμμα βαθμίδων)

(δ) $K_c = 1.5 \times 25 = 37.5$

$$\frac{H_2(s)}{R(s)} = \frac{0.05K_c}{s^2+3s+1+0.05K_c} = \frac{1.875}{s^2+3s+(1+1.875)} = \frac{1.875/2.875}{\frac{1}{2.875}s^2 + \frac{3}{2.875}s + 1} =$$

$$= \frac{0.652}{0.348 s^2 + 1.043 \cdot s + 1} = \frac{0.652}{(\underbrace{\sqrt{0.348}}_{0.59})^2 s^2 + \underbrace{2 \cdot \zeta \cdot 0.59}_{\Rightarrow 0.884} s + 1}$$

δηλ. $\tau = 0.59$ και $\zeta = 0.884$

Για μοναδιαία βηματική μεταβολή του R $\Rightarrow R(s) = 1/s$

Άρα $H_2(s) = \frac{0.652}{0.348s^2 + 1.043 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s}$

κι εφαρμόζεται η εξ.18 σελ 170 με αντικατάσταση

$$H_2(t) = 0.652\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/\tau} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right]$$

$$= 0.652\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-0.884^2}} e^{-\frac{0.884}{0.59} \cdot t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-0.884^2}}{0.59}\, t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-0.884^2}}{0.884}\right)\right]$$

$$= 0.652\left[1 - \frac{1}{0.467} e^{-1.498 \cdot t} \cdot \sin\left(0.79\, t + 0.486\right)\right]$$

12-5

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_C(1+\tau_D \cdot s)\left(1/(1+\tau_I s)\right)}{1+K_C(1+\tau_D \cdot s)\left(\frac{1}{1+\tau_I \cdot s}\right)\left(\frac{1}{1+\tau_M \cdot s}\right)} = \frac{K_C(1+\tau_D \cdot s)(1+\tau_M \cdot s)}{(1+\tau_I \cdot s)(1+\tau_M \cdot s)+K_C(1+\tau_D \cdot s)}$$

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_C(1+\tau_D \cdot s)(1+\tau_M \cdot s)}{1+(\tau_I+\tau_M)\cdot s+\tau_I \cdot \tau_M \cdot s^2+K_C+K_C \cdot \tau_D \cdot s}$$

$$= \frac{K_C(1+\tau_D \cdot s)(1+\tau_M \cdot s)}{\tau_I \tau_M \cdot s^2+(\tau_I+\tau_M+K_C\tau_D)\cdot s+(1+K_C)}$$

$$= K_C/(1+K_C)\ \frac{(1+\tau_D \cdot s)(1+\tau_M \cdot s)}{\underbrace{\frac{\tau_I\tau_M}{1+K_C}}_{\tau^2} \cdot s^2+\underbrace{\frac{(\tau_I+\tau_M+K_C\tau_D)}{1+K_C}}_{2\tau\zeta}\cdot s+1}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_I\tau_M}{1+K_C}}, \quad 2\zeta\tau = \frac{\tau_I+\tau_M+K_C\tau_D}{1+K_C} \Rightarrow 2\cdot\zeta\sqrt{\frac{\tau_I\tau_M}{1+K_C}} = \frac{\tau_I+\tau_M+K_C\tau_D}{1+K_C}$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{1+K_C}}{1+K_C}\ \frac{\tau_I+\tau_M+K_C\tau_D}{\sqrt{\tau_I\tau_M}} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{1+K_C}}\ \frac{\tau_I+\tau_M+K_C\tau_D}{\sqrt{\tau_I\tau_M}}$$

B) $\tau_I = 60s$, $\tau_M = 10s$ $\zeta = 0.7$

- $\tau_D = 0$ $\Rightarrow 0.7 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{1+K_C}}\ \frac{60+10+K_C\cdot 0}{\sqrt{60\cdot 10}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0.7\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{1+K_C}}\ 2.857 \Rightarrow \sqrt{1+K_C} = \frac{2.857}{1.4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+K_C} = 2.041 \Rightarrow 1+K_C = 4.165 \Rightarrow K_C = 3.165$$

$\tau_D = 3s$ $\Rightarrow 0.7 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{1+K_C}}\ \frac{60+10+K_C\cdot 3}{\sqrt{60\cdot 10}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1.4\sqrt{1+K_C} = \frac{70+3K_C}{\sqrt{600}} \Rightarrow \sqrt{1+K_C} = \frac{70+3K_C}{1.4\sqrt{600}} \Rightarrow$$

$$1+K_c = \frac{(70+3K_c)^2}{1.4^2\cdot 600} \Rightarrow 1+K_c = \frac{4900+420K_c+9K_c^2}{1176} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+K_c = 4.17+0.36K_c+0.00765K_c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.00765K_c^2 - 0.64K_c + 3.17 = 0$$

$$D = (-0.64)^2 - 4\cdot 0.00765\cdot 3.17 = 0.3125$$

$$K_c = \frac{0.64 \pm \sqrt{0.3125}}{2\cdot 0.00765} = \frac{0.64 \pm 0.559}{0.0153} \begin{cases} + \rightarrow 78.36 \\ - \rightarrow 5.29 \end{cases}$$

$s.p. - C(\infty)$

μόνιμη απόκλιση

$$1 - \lim_{s\to 0}(s\cdot C(s)) = 1 - \lim_{s\to 0} s\left[\frac{K_c}{1+K_c}\cdot\frac{(1+\tau_D s)(1+\tau_M s)}{\frac{\tau_I\tau_M}{1+K_c}s^2+\frac{\tau_I+\tau_M+K_c\tau_D}{1+K_c}s+1}\cdot\frac{1}{s}\right]$$

$= 1 - \frac{K_c}{1+K_c} = 0.24$ για $\tau_D = 0$ $\quad K_c = 3.165$

$\qquad\qquad\quad 0.16 \qquad \tau_D = 3\,s \quad K_c = 5.29$

12.7

a) $\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1/s}{1 + K_c \cdot \frac{s+1}{0.25 \cdot s+1} \frac{1}{s}} = \frac{(0.25s+1)/s}{0.25 \cdot s+1 + K_c(s+1)\frac{1}{s}} = \frac{0.25 \cdot s+1}{0.25s^2+s+K_c(s+1)}$

$= \frac{0.25 \cdot s+1}{0.25 \cdot s^2 + (K_c+1) \cdot s + K_c} = \frac{(0.25 \cdot s+1)/K_c}{\frac{0.25}{K_c} \cdot s^2 + \frac{K_c+1}{K_c} \cdot s + 1}$

$\tau^2 = 0.25/K_c \Rightarrow \tau = 0.5/\sqrt{K_c}$

$2\zeta\tau = \frac{K_c+1}{K_c} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{K_c}}{0.5} \frac{K_c+1}{K_c} = \frac{K_c+1}{\sqrt{K_c}}$

β) $\zeta = 2.3 \Rightarrow K_c = ?$

$2.3 = \frac{K_c+1}{\sqrt{K_c}} \Rightarrow 2.3^2 K_c = (K_c+1)^2 \Rightarrow 5.29 K_c = K_c^2 + 2K_c + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow K_c^2 - 3.29 K_c + 1 = 0$

$\Delta = (3.29)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 6.8241$

$K_c = \frac{3.29 \pm \sqrt{6.8241}}{2} = \frac{3.29 \pm 2.61}{2}$ $\begin{cases} \rightarrow 0.34 \\ + \rightarrow 2.95 \end{cases}$

γ) $U(s) = 1/s$ και $K_c = 4$

$C(\infty) = \lim_{s \to 0} (s\, C(s)) = \lim_{s \to 0} \left( s \frac{(0.25s+1)/K_c}{\frac{0.25}{K_c} \cdot s^2 + \frac{K_c+1}{K_c} \cdot s + 1} \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{K_c}$

Άρα $R(\infty) - C(\infty)$

$= 0 - \frac{1}{K_c} = 0 - \frac{1}{4} = -0.25$

SKAG