f-3

Σύστημα δεξαμενών σε σειρά χωρίς αλληλεπίδραση

$q(t) - q_1(t) = A_1 \frac{dh_1}{dt}$ και $q_1 = \frac{h_1}{R_1} \xRightarrow{\text{αντικατάσταση}} q(t) - \frac{h_1(t)}{R_1} = A_1 \frac{dh_1}{dt}$

$q_1(t) - q_2(t) = A_2 \frac{dh_2}{dt}$ και $q_2 = \frac{h_2}{R_2} \xRightarrow{\text{αντικατ.}} \frac{h_1(t)}{R_1} - \frac{h_2(t)}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt}$

Αποκλίσεις από μόνιμη κατάσταση : κεφαλαία

$$\left.\begin{aligned} Q(t) - \frac{H_1(t)}{R_1} &= A_1 \frac{dH_1}{dt} \\ \frac{H_1(t)}{R_1} - \frac{H_2(t)}{R_2} &= A_2 \frac{dH_2}{dt} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Laplace}} \begin{aligned} Q(s) - \frac{H_1(s)}{R_1} &= A_1 s H_1(s) \quad (1) \\ \frac{H_1(s)}{R_1} - \frac{H_2(s)}{R_2} &= A_2 \cdot s H_2(s) \quad (2) \end{aligned}$$

$(1) \Rightarrow H_1(s) = Q(s) \frac{1}{A_1 s + 1/R_1} = Q(s) \frac{R_1}{A_1 R_1 s + 1} \quad (3) \qquad \tau_1 = A_1 R_1$

$(2) \Rightarrow H_2(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \frac{R_2}{A_2 R_2 s + 1} \xRightarrow{(3)} H_2(s) = \frac{Q(s) R_1}{R_1 (A_1 R_1 s + 1)} \frac{R_2}{(A_2 R_2 s + 1)}$

$\Rightarrow H_2(s) = \frac{Q(s) R_2}{(A_1 R_1 s + 1)(A_2 R_2 s + 1)} \Rightarrow H_2(s) = \frac{Q(s) R_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \Rightarrow$

$\tau_1 = A_1 R_1, \ \tau_2 = A_2 R_2 \qquad \Rightarrow \frac{H_2(s)}{R_2 Q(s)} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + 1}$

παρανομαστής συστήματος δεύτερης τάξης

$\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + 1 \rightarrow \tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1$

$\tau^2 = \tau_1 \cdot \tau_2$ και $2\zeta \tau = \tau_1 + \tau_2 \Rightarrow 2\zeta \sqrt{\tau_1 \tau_2} = \tau_1 + \tau_2 \Rightarrow$

$\zeta = 1 \Rightarrow 2\sqrt{\tau_1 \tau_2} = \tau_1 + \tau_2 \Rightarrow 4 \tau_1 \tau_2 = (\tau_1 + \tau_2)^2 \Rightarrow 4\tau_1 \tau_2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + 2\tau_1 \tau_2$

κρίσιμη απόσβεση

$\Rightarrow \tau_1^2 + \tau_2^2 - 2\tau_1 \tau_2 = 0 \Rightarrow (\tau_1 - \tau_2)^2 = 0 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow A_1 R_1 = A_2 R_2 \\ &\text{όμως } A_1 = 2A_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2A_2 R_1 = A_2 R_2 \Rightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}}$$

SKAG

Λύση συστήματος 2ης τάξης για βηματική διαταραχή (μεγέθους 1) και κρίσιμη απόσβεση $\quad Q(s) = 1/s$

$$\boxed{y(t) = 1 - (1 + t/\tau)\, e^{-t/\tau}} \quad (A)$$

όπου $y(t) = \dfrac{H_2(t)}{R_2}$ και $\tau = \sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2} = A_1 R_1 = A_2 R_2$

Συνολική μεταβολή στη στάθμη $\rightarrow H_2(t \to \infty) \xrightarrow{(A)} \boxed{\dfrac{H_2(\infty)}{R_2} = 1}$ (B)

Άρα σε χρόνο $t_{1/2} = 1$ min πλήρωση η στάθμης $H_2(t_{1/2}) = 1/2\, H(\infty) \xrightarrow{(B)} H_2(t_{1/2}) = 0.5 R_2$

$$\xrightarrow{(A)} \frac{H_2(t_{1/2})}{R_2} = 0.5 = 1 - (1 + t_{1/2}/\tau)\, e^{-t_{1/2}/\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 = 1 - (1 + 1/\tau)\, e^{-1/\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + 1/\tau)\, e^{-1/\tau} = 1 - 0.5 = 0.5 \Rightarrow e^{-1/\tau} = \frac{0.5}{1 + 1/\tau} \quad (*)$$

Λύνουμε με δοκιμή και σφάλμα

Για $\tau = 1$

$e^{-1/\tau} = \dfrac{0.5}{1 + 1/\tau} = 0.25$

$-1/\tau = \ln(0.25) = -1.386$

$\tau = 0.721$

$\tau = 0.721$

$e^{-1/\tau} = \dfrac{0.5}{1 + 1/0.721} = 0.209$

$-1/\tau = \ln(0.209) = -1.563$

$\tau = 0.639$

$\tau = 0.639$

$e^{-1/\tau} = \dfrac{0.5}{1 + 1/0.639} = 0.195$

$-1/\tau = \ln(0.195) = -1.635$

$\tau = 0.611$

$\tau = 0.611$

$e^{-1/\tau} = \dfrac{0.5}{1 + 1/0.611} = 0.190$

$-1/\tau = \ln(0.190) = -1.661$

$\tau = 0.60$

$\tau = 0.60$

$e^{-1/\tau} = \dfrac{0.5}{1 + 1/0.6} = 0.187$

$-1/\tau = \ln(0.187) = -1.674$

$\boxed{\tau = 0.597 \text{ min}}$

Η απόκριση της 1ης δεξαμενής αντιστοιχεί σε σύστημα 1ης τάξης
Ακολουθώντας τη διαδικασία του κεφ. 5 για βηματική μοναδιαία μεταβολή στο $Q(t)$

$\Rightarrow Q(s) = 1/s \quad \dfrac{H_1(t)}{R_1} = 1 - e^{-t/\tau}$ όπου $\tau = 0.597$ min

$$\frac{0.9 R_1}{R_1} = 1 - e^{-t/0.597} \Rightarrow \frac{t}{0.597} = -\ln(0.1) = 2.303 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 1.375 \text{ min}}$$

(*) : μεταβολή από μόνιμη κατάσταση
(**) : μετασχηματισμός Laplace

7-11

tank 1 : $q^{(t)} - q^{(t)} = A_1 \frac{dh_1}{dt} \Rightarrow q^{(t)} - \frac{h_1(t)}{R_1} = A_1 \frac{dh_1}{dt} \xRightarrow{(*)} Q(t) - \frac{H_1(t)}{R_1} = A_1 \frac{dH_1}{dt} \xRightarrow{(**)}$

$\Rightarrow Q(s) - \frac{H_1(s)}{R_1} = A_1 \cdot s H_1(s) \Rightarrow \frac{H_1(s)}{Q(s)} = \frac{R_1}{A_1 R_1 \cdot s+1} = \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot s+1} = \frac{1}{s+1}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{H_1(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s+1}}$ (A)

tank 2 : $q_1(t) - q_2(t) = A_2 \frac{dh_2}{dt} \Rightarrow q_1(t) - \frac{h_2(t)}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \xRightarrow{(*)}$

$\Rightarrow Q_1(t) - \frac{H_2(t)}{R_2} = A_2 \frac{dH_2}{dt} \xRightarrow{(**)} Q_1(s) - \frac{H_2(s)}{R_2} = A_2 \cdot s H_2(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{R_2}{A_2 R_2 \cdot s+1} = \frac{1.5}{2 \cdot 1.5\, s+1} = \frac{1.5}{3s+1}$ Όμως $Q_1(s) = H_1(s)/R_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{H_2(s)}{[H_1(s)/R_1]} = \frac{1.5}{3s+1} \Rightarrow H_2(s) = \frac{H_1(s)}{1} \frac{1.5}{s+1} \xRightarrow{(A)} \frac{Q(s) \cdot 1.5}{(s+1)(3s+1)} \Rightarrow$

Ql

$\Rightarrow \boxed{H_2(s) = Q(s) \frac{1.5}{(s+1)(3s+1)}}$ (B)

tank 3 : $q_2(t) - \underset{\text{σταθερό}}{q_3} = A_3 \frac{dh_3}{dt} \Rightarrow \frac{h_2(t)}{R_2} - q_3 = A_3 \frac{dh_3}{dt} \xRightarrow{(*)}$

$\Rightarrow \frac{H_2(t)}{R_2} = A_3 \frac{dH_3}{dt} \xRightarrow{(**)} \frac{H_2(s)}{R_2} = A_3 \cdot s H_3(s) \Rightarrow H_3(s) = \frac{H_2(s)}{\underset{1.5}{R_2}} \frac{1}{A_3 \cdot s} \Rightarrow$

→ το q_3 είναι σταθερό και παραμένει στη μόνιμη κατάσταση κι έτσι κατά την αφαίρεση απαλείφεται

$\xRightarrow{(B)} \boxed{H_3(s) = \frac{Q(s)}{\cancel{1.5}} \frac{\cancel{1.5}}{(s+1)(3s+1)} \frac{1}{2 \cdot s}}$ (Γ)

Για κρουστική μεταβολή στο $Q(t) = 5\,\delta(t) \Rightarrow Q(s) = 5$

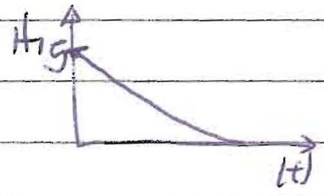
οι A, B, Γ είναι $H_1(s) = \frac{5}{s+1}$, $H_2(s) = \frac{1.5 \cdot 5}{(s+1)(3s+1)} = \frac{7.5}{(s+1)(3s+1)}$

και $H_3(s) = \frac{\cancel{5}\ 2.5}{(s+1)(3s+1)\cancel{2}s} = \frac{2.5}{(s+1)(3s+1)\cdot s}$

Το $H_1(t)$ είναι της μορφής $ae^{-\beta t}$

↳ αντιστροφή Laplace στο $H_1(s)$

και συγκεκριμένα είναι $\boxed{H_1(t) = 5e^{-t}}$



Το $H_2(t)$ είναι της μορφής $a_1e^{-\beta_1 t} - a_2e^{-\beta_2 t}$ και συγκεκριμένα $H_2(t) = 3.75(-e^{-t}+e^{-t/3})$

που έχει ένα μέγιστο

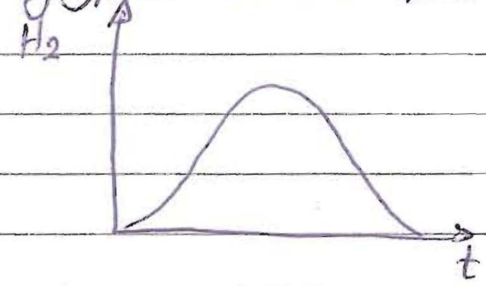
Επίσης από την αντιστροφή του $H_2(s)$ με Heaviside

προκύπτει $a_1 = a_2$ & επομένως για $t=0 \Rightarrow H_2(t) = a_1 - a_2 = 0$

Ομοίως για $t \to \infty \Rightarrow H_2(t) = 0 - 0 = 0$

Άρα η καμπύλη αρχίζει και τελειώνει στο 0 με ένα μέγιστο

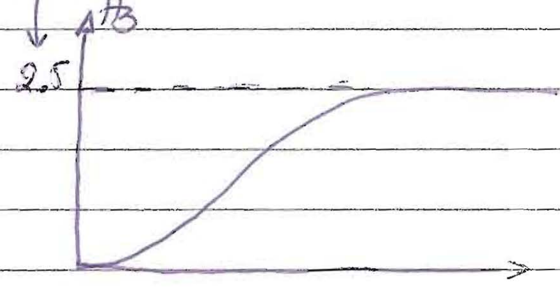
(κοίτα πρόγραμμα 7-2 για τον υπολογισμό του)



Το $H_3(t)$ είναι της μορφής $A(1 + C_1e^{-\beta_1 t} - C_2e^{-\beta_2 t})$

και συγκεκριμένα

$H_3(t) = 2.5(1+0.5e^{-t} - 1.5e^{-t/3})$



για $t=0$, $H_3(t)=0$

& για $t \to \infty$ $H_3(t) \to 2.5$

P-13

Γράφουμε τα ισοζύγια μάζας για κάθε δεξαμενή

$q(t)-q_1(t)=A_1\frac{dh_1}{dt}$ $q_1(t)=\frac{h_1(t)-h_2(t)}{R_1}$ (A)

$q_1(t)-q_2(t)=A_2\frac{dh_2}{dt}$ $q_2(t)=\frac{h_2(t)}{R_2}$ (B)

(a) Στο (a) ερώτημα παίρνουμε τις (A) & (B), αφαιρούμε από τη μόνιμη κατάσταση και προκύπτουν οι μεταβλητές απόκλισης που τις συμβολίζουμε με κεφαλαία. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace

tank1

$Q(s)-Q_1(s)=A_1 s H_1(s)$ & $Q_1(s)=\frac{H_1(s)-H_2(s)}{R_1}$ ⇒

$\Rightarrow Q(s)-\frac{H_1(s)-H_2(s)}{R_1}=A_1 s H_1(s) \Rightarrow \boxed{Q(s)-\frac{H_1(s)}{R_1}+\frac{H_2(s)}{R_1}=A_1 s H_1(s)}$ (1)

και tank2

$Q_1(s)-Q_2(s)=A_2 s H_2(s)$ & $Q_2(s)=\frac{H_2(s)}{R_2}$ & $Q_1(s)=\frac{H_1(s)-H_2(s)}{R_1}$ ⇒

$\Rightarrow \boxed{\frac{H_1(s)}{R_1}-\frac{H_2(s)}{R_1}-\frac{H_2(s)}{R_2}=A_2 s H_2(s)}$ (2)

Εφόσον έχω τιμές για τα A_1, A_2, R_1, R_2 τις αντικαθιστώ στις παραπάνω σχέσεις

(1) ⇒ $Q(s)-\frac{H_1(s)}{1}+\frac{H_2(s)}{1}=1\cdot s\cdot H_1(s) \Rightarrow \boxed{H_1(s)=\frac{Q(s)+H_2(s)}{s+1}}$ (1)'

Αντικαθιστώ στη (2)

(2) $\xrightarrow{(1)'}$ $\frac{Q(s)+H_2(s)}{s+1}-H_2(s)-\frac{H_2(s)}{0.8}=1.25\, s H_2(s)$ ⇒

$\Rightarrow \frac{\cancel{Q(s)}\ Q(s)+H_2(s)}{s+1}=\left(1+\frac{1}{0.8}+1.25s\right)H_2(s)=(2.25+1.25s)H_2(s)$

$Q(s)=[(2.25+1.25s)(s+1)-1]H_2(s)=(1.25s^2+3.5s+2.25-1)H_2(s)$

$\Rightarrow H_2(s)=\cancel{Q(s)}\ \frac{1}{\cancel{(s+1)(2.25+1.25s)}}=\frac{Q(s)}{1.25s^2+3.5s+1.25}$

SKAG

Διαιρώ με 1.25

$$H_2(s) = Q(s)\,\frac{1/1.25}{s^2 + \frac{3.5}{1.25}s + 1} = \frac{0.8}{s^2+2.8s+1}\,Q(s) \Rightarrow$$

αυτό θέλουμε να είναι 1, γι' αυτό διαιρέσαμε με 1.25

για $\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{0.8}{s^2+2.8s+1}$

είναι 2ης τάξης με τον παρονομαστή να έχει τη μορφή
$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$

όπου $\tau^2 = 1$, & $2\zeta\tau = 2.8 \Rightarrow \zeta = \frac{2.8}{2\cdot 1} = 1.4 > 1$

επομένως παίρνω τον τύπο για μοναδιαία βηματική μεταβολή & $\zeta > 1$. Επίσης πολ/ζω με τον αριθμητή (0.8)

$$H_2(t) = 0.8\left[1 - e^{-\zeta t/\tau}\left(\cosh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\sinh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,\frac{t}{\tau}\right)\right)\right]$$

$$= 0.8\left[1 - e^{-1.4t/1}\left(\cosh\left(\sqrt{1.4^2-1}\,\frac{t}{1}\right) + \frac{1.4}{\sqrt{1.4^2-1}}\sinh\left(\sqrt{1.4^2-1}\,\frac{t}{1}\right)\right)\right]$$

$$= 0.8\left[1 - e^{-1.4t}\left(\cosh(0.98t) + 1.43\sinh(0.98t)\right)\right]$$

(β) Υπολογίζω χωριστά τα cosh & sinh

$$\cosh(0.98t) = \frac{e^{0.98t} + e^{-0.98t}}{2} \quad \text{και} \quad \sinh(0.98t) = \frac{e^{0.98t} - e^{-0.98t}}{2}$$

$H_2(1) = 0.8\,[1 - 0.25(1.52 + 1.43\cdot 1.14)] = 0.177\,ft$

$H_2(4) = 0.8\,(1 - 0.0037(25.21 + 1.43\cdot 25.19)) = 0.62\,ft$

$$H_2(\infty) = \lim_{s\to 0}[s\,H_2(s)] = \lim_{s\to 0}\left(\cancel{s}\cdot\frac{0.8}{s^2+2.8\cdot s+1}\,\frac{1}{\cancel{s}}\right) = 0.8$$

(γ) Υπολογίζω τις τιμές των h_1 ς' h_2 στη μόνιμη κατάσταση από τις (A) και (B)

$$q_s - \frac{(h_{1s} - h_{2s})}{R_1} = 0 \quad (S1)$$

και $\frac{h_{1s}-h_{2s}}{R_1} - \frac{h_{2,s}}{R_2} = 0 \quad (S2) \xrightarrow{(S1)} q_s - \frac{h_{2s}}{R_2} = 0 \Rightarrow 10 - \frac{h_{2s}}{0.8} \Rightarrow$

$\overset{\parallel}{q_s}$ (από την S1)

$$h_{2s} = 0.8 \cdot 10 = 8\,ft$$

Αντικαθιστώ στην (S1) $\Rightarrow 10 - \frac{h_{1s} - 8}{1} = 0 \Rightarrow h_{1s} = 10 + 8 = 18\,ft$

(δ) Για να βρω την $H_1(s)$ πρέπει να απαλείψω την $H_2(s)$ από τις σχέσεις (1) ς' (2)

$$(2) \Rightarrow \frac{H_1(s)}{R_1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + A_2 s\right) H_2(s) \xrightarrow{\text{αντικαθιστώ τις τιμές}} \frac{H_1(s)}{1} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{0.8} + 1.25\,s\right) H_2(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{H_1(s) = 2.25 + 1.25\,s\,H_2(s)} \Rightarrow \boxed{H_2(s) = \frac{1}{2.25 + 1.25\,s} H_1(s)} \quad (2)$$

Αντικαθιστώ στην (1)

$$Q(s) - \frac{H_1(s)}{1} + \frac{H_1(s)}{(2.25 + 1.25 s) \cdot 1} = A_1 s H_1(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(s) = \left(1 - \frac{1}{2.25 + 1.25 \cdot s} + 1 \cdot s\right) H_1(s)$$

$$\Rightarrow Q(s) = \left(\frac{2.25 + 1.25 \cdot s - 1}{2.25 + 1.25 \cdot s} + s\right) H_1(s)$$

$$\Rightarrow Q(s) = \left[\frac{1.25 + 1.25 s + s(2.25 + 1.25 s)}{2.25 + 1.25 \cdot s}\right] H_1(s)$$

$$\Rightarrow Q(s) = \left[\frac{1.25 + 1.25 s + 2.25 s + 1.25 s^2}{2.25 + 1.25 \cdot s}\right] H_1(s) = \left[\frac{1.25 + 3.5 s + 1.25 s^2}{2.25 + 1.25 s}\right] H_1(s)$$

$$\Rightarrow H_1(s) = Q(s) \frac{(2.25 + 1.25 s)/1.25}{(1.25 s^2 + 3.5 s + 1.25)/1.25} = \frac{1.8 + s}{s^2 + 2.8 s + 1} Q(s)$$