6.1

tank1: $q - q_1 = A_1 \frac{dh_1}{dt}$ $q_1 = \frac{h_1}{R_1} \Rightarrow h_1 = q_1 \cdot R_1$

$$\left.\begin{array}{l} q - q_1 = A_1 R_1 \frac{dq_1}{dt} \\ q_s - q_{1s} = 0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow Q - Q_1 = A_1 R_1 \frac{dQ_1}{dt} \overset{L}{\rightsquigarrow} Q(s) - Q_1(s) = A_1 R_1 s Q_1(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1(s)}{Q(s)} = \frac{1}{1 + A_1 R_1 s}$$

tank2 $q_1 - q_2 = A_2 \frac{dh_2}{dt}$ $q_2 = \frac{h_2}{R} \Rightarrow h_2 = q_2 \cdot R_2$

$$\left.\begin{array}{l} q_1 - q_2 = A_2 R_2 \frac{dq_2}{dt} \\ q_{1s} - q_{2s} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Q_1 - Q_2 = A_2 R_2 \frac{dQ_2}{dt}$$

Ομοίως $\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{1 + A_2 R_2 \cdot s}$

tank3 : $$\left.\begin{array}{l} q_2 - b = A_3 \frac{dh}{dt} \\ q_{2s} - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q_2 = A_3 \frac{dH}{dt} \rightsquigarrow Q_2(s) = A_3 \cdot s\, H(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{H(s)}{Q_2(s)} = \frac{1}{A_3 \cdot s}$$

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{H(s)}{Q_2(s)} \frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} \frac{Q_1(s)}{Q(s)} = \frac{1}{A_3 \cdot s} \frac{1}{1 + A_2 R_2 \cdot s} \frac{1}{1 + A_1 R_1 s}$$

6.5

$\tau = A \cdot R$

$$\frac{H_3(s)}{Q(s)} = \frac{R_3}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)} = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$Q(t) = Q \cdot \delta(t)$ όπου $\delta(t)$ η συνάρτηση της κρουστικής μεταβολής $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$

κρουστική μεταβολή μεγέθους 2 $\Rightarrow Q(s) = 2$

$$H_3(s) = \frac{2}{(s+1)^3} \rightsquigarrow H_3(t) = t^2 e^{-t}$$

$$q - q_1 = A_1 \frac{dh_1}{dt} \qquad q_1 = \frac{h_1}{R_1} \Rightarrow h_1 = q_1 \cdot R_1 \qquad q - q_1 = A_1 R_1 \frac{dq_1}{dt} \overset{\text{αποκλίσης}}{\rightsquigarrow} Q - Q_1 = A_1 R_1 \frac{dQ_1}{dt}$$

$$\rightsquigarrow Q(s) - Q_1(s) = A_1 R_1 \cdot s\, Q_1(s) \Rightarrow \frac{Q_1(s)}{Q(s)} = \frac{1}{A_1 R_1 \cdot s + 1} = \frac{1}{\tau_1 \cdot s + 1}$$

Ομοίως $\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{\tau_2 \cdot s + 1}$

και $\frac{Q_3(s)}{Q_2(s)} = \frac{1}{\tau_3 \cdot s + 1}$ $\quad H_3(s) = Q_3(s) R_3 \Big\} \Rightarrow \frac{H_3(s)}{Q_2(s)} = \frac{R_3}{\tau_3 \cdot s + 1}$

$$\frac{H_3(s)}{Q_2(s)} \cdot \frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} \cdot \frac{Q_1(s)}{Q(s)} = \frac{H_3(s)}{Q(s)} = \frac{R_3}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)}$$

6-4

tank1 $\quad q-q_1 = A_1\dfrac{dh_1}{dt}$, $\quad q_1=\dfrac{h_1-h_2}{R_1}$

σε μον. κατάσταση

$$q_s - q_{1s} = A_1\frac{dh_{1s}}{dt}=0, \quad q_{1s}=\frac{h_{1s}-h_{2s}}{R_1}$$

αποκλίσεις από μον. κατάσταση

$$Q-Q_1 = A_1\frac{dH_1}{dt}, \quad Q_1=\frac{H_1-H_2}{R_1}$$

↓ Laplace

$$\text{(I)}\ \boxed{Q(s)-Q_1(s)=A_1 s H_1(s)}, \quad \boxed{Q_1(s)=\frac{H_1(s)-H_2(s)}{R_1}}\ \text{[II]}$$

tank2 $\quad q_1-q_2 = A_2\dfrac{dh_2}{dt}$, $\quad q_2=h_2/R_2$

μον. κατ. $\quad q_{1s}-q_{2s} = A_2\dfrac{dh_{2s}}{dt}=0 \quad q_{2s}=h_{2s}/R_2$

αποκλίσεις $\quad Q_1-Q_2 = A_2\dfrac{dH_2}{dt} \quad Q_2=H_2/R_2$

↓ Laplace

$$Q_1(s)-Q_2(s)=A_2\cdot s\cdot H_2(s) \quad Q_2(s)=H_2(s)/R_2$$

$$\boxed{Q_1(s)-\frac{H_2(s)}{R_2}=A_2\cdot s\cdot H_2(s)} \Rightarrow$$

Αντικαθιστώ το $Q_1(s)$ από την [II]

$$\Rightarrow \frac{H_1(s)-H_2(s)}{R_1}-\frac{H_2(s)}{R_2}=A_2\cdot s\, H_2(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{H_1(s)}{R_1}=\left(A_2\cdot s+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)H_2(s)}\ \text{[III]}$$

Η [I] αντικαθιστώντας το $Q_1(s)$ από την II γίνεται

$$Q(s)-\left[\frac{H_1(s)-H_2(s)}{R_1}\right]=A_1 s H_1(s) \Rightarrow Q(s)+\frac{H_2(s)}{R_1}=\left(A_1\cdot s+\frac{1}{R_1}\right)H_1(s)$$

$$\xrightarrow{\text{[III]}} Q(s)+\frac{H_2(s)}{R_1}=\left(A_1\cdot s+\frac{1}{R_1}\right)\left(A_2\cdot s+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)H_2(s)\cdot R_1$$

Αντικαθιστώ την $H_1(s)$ από την III

$$Q(s)+\frac{H_2(s)}{R_1}=(A_1\cdot R_1 s+1)\left(A_2\cdot s+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)H_2(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(s) = \left[(A_1 R_1 s + 1)\left(A_2 \cdot s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{R_1}\right] H_2(s)$$

αντικαθιστώ τις αριθμητικές τιμές

$$\Rightarrow Q(s) = \left[(1 \cdot 2 \cdot s + 1)\left(1 \cdot s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] H_2(s)$$

$$\Rightarrow Q(s) = \left[(2s+1)(s+1) - 1/2\right] H_2(s)$$

$$= \left[2s^2 + 2s + s + 1 - 1/2\right] H_2(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(s) = (2s^2 + 3s + 0.5) H_2(s) \Rightarrow \frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 0.5}$$

Θέλω αυτό να είναι =1 ->

γι' αυτό διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με 0.5

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{1/0.5}{4s^2 + 6s + 1} = \frac{2}{4s^2 + 6s + 1}$$

Επισημαίνεται ότι οποιαδήποτε σειρά στις αντικαταστάσεις μεταξύ των σχέσεων για την απαλοιφή του $H_1(s)$ είναι αποδεκτή.
Το $H_2(t)$ μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του κεφαλαίου 7 για κρουστική ή βηματική μεταβολή του $Q(s)$ εφόσον το σύστημα των δύο δεξαμενών με αλληλεπίδραση είναι σύστημα 2ης τάξης

tank 3 $\quad q_2 - q_3 = A_3 \frac{dh_3}{dt}, \quad q_3 = \frac{h_3}{R_3}$ και $q_2 = \frac{h_2}{R_2}$

Κατά τα γνωστά παίρνουμε αποκλίσεις από μόνιμη κατάσταση και εφαρμόζουμε μετ/σμό Laplace

$$Q_2(s) - Q_3(s) = A_3 s H_3(s), \quad Q_3(s) = H_3(s)/R_3, \quad Q_2 = H_2(s)/R_2$$

$$\Rightarrow \frac{H_2(s)}{R_2} - \frac{H_3(s)}{R_3} = A_3 \cdot s H_3(s) \Rightarrow \frac{H_2(s)}{R_2} = \left(\frac{1}{R_3} + A_3 s\right) H_3(s) \Rightarrow$$

Αντικαθιστώ τις τιμές $\Rightarrow \frac{H_2(s)}{2} = H_3(s)\left(\frac{1}{4} + 0.5s\right) \Rightarrow H_3(s) = \frac{1/2}{0.25 + 0.5 \cdot s} H_2(s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow H_3(s) = \frac{2}{(1+2s)} H_2(s)$$

↳ Αντικαθιστώ από τη σχέση που βρήκα παραπάνω

$$\Rightarrow \boxed{H_3(s) = \frac{2}{(2s+1)} \frac{2}{4s^2 + 6s + 1} Q(s)}$$

χρόνος

(β) $H_3(0) = 0$ αφού σε χρόνο 0 είμαστε στη μόνιμη κατάσταση, και η απόκλιση απο αυτήν είναι 0

Για $Q(s) = 1/s$ (μοναδιαία βηματική μεταβολή στο q)

$$H_3(\infty) = \lim_{s \to 0}\left[s H_3(s)\right] = \lim_{s \to 0}\left[\cancel{s} \cdot \frac{2}{2s+1} \frac{2}{4s^2+6s+1} \cdot \frac{1}{\cancel{s}}\right]$$

$$= \frac{4}{(0+1)(0+0+1)} = 4$$

Αυτη η ασκηση λυνεται ξανα με τη μεθοδολογια του κεφ 7

6-6

$$\left.\begin{aligned}\frac{Q}{V}(x-c_1)&=\frac{dc_1}{dt}\\ \frac{Q}{V}(c_1-c)&=\frac{dc}{dt}\end{aligned}\right\}\text{Αποκλίσεις από μ.κ.}\quad \begin{aligned}\frac{Q}{V}(X-C_1)&=\frac{dC_1}{dt}\\ \frac{Q}{V}(C_1-C)&=\frac{dC}{dt}\end{aligned}$$

μικρά — κεφαλαία

$\Downarrow$ Laplace

$$\frac{Q}{V}(X(s)-C_1(s))=s\,C_1(s)\quad [I]$$

$$\frac{Q}{V}(C_1(s)-C(s))=s\,C(s)\quad (II)$$

Η (I) $\Rightarrow \dfrac{C_1(s)}{X(s)}=\dfrac{Q/V}{s+Q/V}=\dfrac{1}{\frac{V}{Q}\cdot s+1}\xRightarrow{\tau=V/Q}\boxed{\dfrac{C_1(s)}{X(s)}=\dfrac{1}{\tau s+1}}$ (I)

Η (II) $\overset{III}{\Rightarrow}\dfrac{Q}{V}\left(\dfrac{1}{\tau s+1}X(s)-C(s)\right)=s\,C(s)\Rightarrow$

$\overset{1/\tau}{\Rightarrow}\dfrac{1}{\tau s+1}X(s)=(\tau s+1)\,C(s)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{C(s)}{X(s)}=\frac{1}{(\tau s+1)^2}=\frac{1}{\tau^2s^2+2\tau s+1}=\frac{1}{4s^2+4s+1}$$

$(\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1)$

$\tau=V/Q=2\ min$

Είναι σύστημα δεύτερης τάξης με $\tau=2$ και $\zeta=1$

Η λύση της $C(t)$ για μοναδιαία βηματική μεταβολή του $X(t)$ είναι $C(t)=Y(t)=1-(1+t/\tau)e^{-t/\tau}$ εφόσον $\zeta=1$

$$c(t)=1-(1+t/2)e^{-t/2}=1-e^{-0.5t}(0.5t+1)$$

$c(t)=0.6\Rightarrow t=?$

$$1-e^{-0.5t}(0.5t+1)=0.6\Rightarrow\boxed{e^{-0.5t}=\frac{0.4}{0.5t+1}}$$

Με αυτή τη μορφή η εξίσωση μπορεί να λυθεί με δοκιμή και σφάλμα πχ για $t=2$ (αντικαθιστω στο δεξί τέλος)

$$e^{-0.5t} = \frac{0.4}{0.5t+1}\Big|_{t=2} = 0.2 \Rightarrow t = \frac{-\ln(0.2)}{0.5} = 3.22$$

$$e^{-0.5t} = \frac{0.4}{0.5t+1}\Big|_{t=3.22} = 0.153 \Rightarrow t = \frac{-\ln(0.153)}{0.5} = 3.75$$

$$e^{-0.5t} = \frac{0.4}{0.5t+1}\Big|_{t=3.75} = 0.139 \Rightarrow t = \frac{-\ln(0.139)}{0.5} = 3.94$$

$$e^{-0.5t} = \frac{0.4}{0.5t+1}\Big|_{t=3.94} = 0.134 \Rightarrow t = \frac{-\ln(0.134)}{0.5} = 4$$

συγκλίνει σε αυτήν την τιμή

Άρα για $t = 4$ min, η C γίνεται $0.6\ lb/ft^3$

Γ-2 όπως παράδειγμα 6-1
ακολουθώντας τη διαδικασία

$q(t) - q_1(t) = A_1 \frac{dh_1}{dt}$, $q_1 = \frac{h_1}{R_1}$ $\leadsto$ $q(t) - \frac{h_1(t)}{R_1} = A_1 \frac{dh_1}{dt}$

$q_1(t) - q_2(t) = A_2 \frac{dh_2}{dt}$, $q_2 = h_2/R_2$ $\leadsto$ $\frac{h_1(t)}{R_1} - \frac{h_2(t)}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt}$

Παίρνουμε αποκλίσεις από μ.κ., εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και απαλοίφουμε το $H_1(s)$ συνδυάζοντας τις εξισώσεις, τελικά προκύπτει

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\tau_1 s+1} \frac{R_2}{\tau_2 s+1}$$

με $\tau_1 = A_1 \cdot R_1 = 10 \cdot 0.1 = 1\,min$
$\tau_2 = A_2 R_2 = 10 \cdot 0.35 = 3.5\,min$
$R_2 = 0.35\ ft/cfm$

Άρα $\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s+1} \frac{0.35}{3.5s+1}$

Επίσης $Q(s) = 10$ (κρουστική μεταβολή στο $Q(t)$ κατά $10\,ft^3$)

Άρα $H_2(s) = \frac{0.35}{(s+1)(3.5s+1)} \cdot 10 = \frac{3.5}{3.5s^2+4.5s+1}$

Βρίσκω τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $Y(s) = \frac{1}{3.5s^2+4.5s+1} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s+1}$

με $\tau^2 = 3.5 \Rightarrow \tau = 1.87$
και $2\zeta\tau = 4.5 \Rightarrow 2\zeta \cdot 1.87 = 4.5 \Rightarrow \zeta = 1.2$

Η λύση $Y(t)$ για κρουστική μεταβολή και $\zeta > 1$ είναι

$$Y(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\zeta t/\tau} \sinh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\ t/\tau\right)$$

$$= \frac{1}{1.87 \cdot 0.6633} e^{-1.2t/1.87} \sinh\left(\sqrt{1.2^2-1}\ t/1.87\right)$$

$$= 0.806\, e^{-0.64t} \sinh(0.35 \cdot t)$$

Άρα $H_2(t) = 3.5 \cdot Y(t) = 2.8\, e^{-0.64t} \sinh(0.35t)$

Για να βρω το χρόνο που μεγιστοποιείται το $H_2(t)$ παραγωγίζω το H_2 ως προς t και θέτω $=0$

$$\frac{dH_2}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{-0.64t}(\sinh(0.35t))\right]=0$$

όμως $\sinh(0.35t)=\dfrac{e^{0.35t}-e^{-0.35t}}{2}$

και $H_2(t)=\dfrac{2.8}{2}e^{-0.64}\left(e^{0.35t}-e^{-0.35t}\right)$

$$=1.4\left(e^{(-0.64+0.35)t}-e^{(-0.64-0.35)t}\right)$$

$$=1.4\left(e^{-0.29t}-e^{-0.99t}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-0.29t}-e^{-0.99t}\right)=0 \Rightarrow -0.29e^{-0.29t}+0.99e^{-0.99t}=0$$

$$\Rightarrow 0.29e^{-0.29t}=0.99e^{-0.99t}$$

$$\Rightarrow \frac{0.29}{0.99}=\frac{e^{-0.99t}}{e^{-0.29t}}=e^{(-0.99+0.29)t}=e^{-0.7t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.29=e^{-0.7t}\Rightarrow t=\frac{-\ln(0.29)}{0.7}=1.76\,min$$

$$H_2(1.76)=1.4\left(e^{-0.29\cdot 1.76}-e^{-0.99\cdot 1.76}\right)=0.60\,ft$$

μέγιστο

Το μέγιστο στη δεξαμενή 1 εμφανίζεται σε χρόνο 0

Από την 1η εξίσωση στη δεξαμενή 1

$$Q(s)-\frac{H_1(s)}{R_1}=A_1 s H_1(s)\Rightarrow \frac{H_1(s)}{Q(s)}=\frac{R_1}{A_1R_1s+1}=\frac{R_1}{\tau_1 s+1}=\frac{0.1}{s+1}$$

Όμως $Q(s)=10$

Άρα $H_1(s)=\dfrac{0.1\cdot 10}{s+1}=\dfrac{1}{s+1}\xrightarrow{L^{-1}} H_1(t)=e^{-t}$

Άρα στο $t=0 \Rightarrow H_1(0)=1\,ft$ που είναι η μέγιστη τιμή