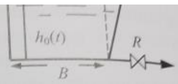
5.5. Θεωρήστε τον καλώς αναδευόμενο αντιδραστήρα ο οποίος παρουσιάζεται στο Σχ. Π5–5. Η αντίδραση που λαμβάνει χώρα είναι η

$$A \rightarrow B$$

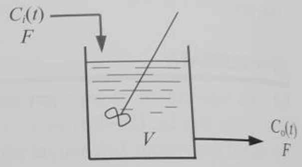
και ο ρυθμός της αντίδρασης r είναι

$$r = kC_o$$

όπου r δίνεται σε mol A που αντιδρούν ανά μονάδα όγκου και χρόνου, k είναι η σταθερά της αντίδρασης, $C_o(t)$ είναι η συγκέντρωση του αντιδρώντος A στον αντιδραστήρα (μονάδες: mol A/μονάδα όγκου) και V είναι ο όγκος του αντιδραστήρα. Επίσης, F είναι η ογκομετρική παροχή της τροφοδοσίας και $C_i(t)$ η συγκέντρωση του αντιδρώντος στην τροφοδοσία. Να γίνουν οι παραδοχές σταθερής πυκνότητας και σταθερού όγκου και να εξαχθεί η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της συγκέντρωσης του αντιδρώντος στην τροφοδοσία και στον αντιδραστήρα. Να κατασκευαστεί το διάγραμμα βαθμίδων του αντιδραστήρα και να σχεδιαστεί η απόκριση σε μοναδιαία βηματική μεταβολή στην $C_i(t)$.

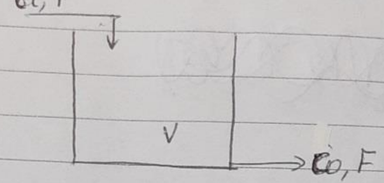


ΣΧΗΜΑ Π5-4



ΣΧΗΜΑ Π5-5

S.S



$$F \cdot c_i - F \cdot c_o + r_A V = V \frac{dc_o}{dt}$$

$r_A = -k_1 \cdot c_o$ (1ης τάξης) $A \to B$

Άρα $F c_i - F \cdot c_o - k_1 \cdot c_o \cdot V = V \frac{dc_o}{dt}$ γικεά c

Σε μόνιμη κατάσταση

$$F c_{i,s} - F \cdot c_{o,s} - k_1 \cdot c_{o,s} \cdot V = 0$$

Αποκλίσεις $F C_i - F \cdot C_o - k_1 \cdot C_o \cdot V = V \frac{dC_o}{dt}$

όπου $C_i = c_i - c_{i,s}$ και $C_o = c_o - c_{o,s}$

Laplace $F C_i(s) - F C_o(s) - k_1 C_o(s) \cdot V = V \cdot s\, C_o(s)$

$$F C_i(s) = C_o(s)\,(F + k_1 V + V \cdot s)$$

$$\Rightarrow \frac{C_o(s)}{C_i(s)} = \frac{F}{(F + k_1 V) + V \cdot s} = \frac{F/(F + k_1 V)}{1 + \underbrace{\frac{V}{F + k_1 V}}_{\tau} \cdot s}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{σταθερά} \\ \text{χρόνου}}}{\tau} = \frac{V}{F + k_1 \cdot V} = \frac{1}{\underbrace{\frac{F}{V}}_{\text{ρυθμός αραίωσης}} + k_1}$$

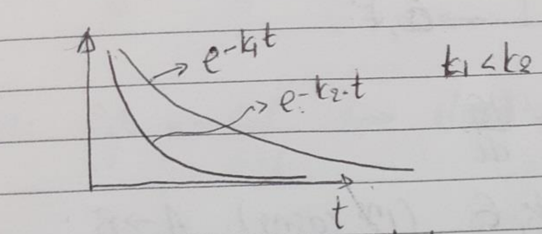
αριθμητής $\frac{F/V}{F/V + k_1}$

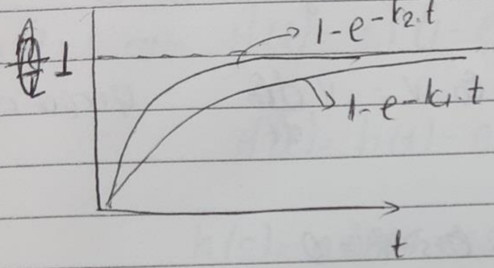
Μοναδιαία μεταβολή $C_i(t) = 1 \Rightarrow C_i(s) = 1/s$

Τελική τιμή του $C_o \Rightarrow \lim_{s \to 0} s\, C_o(s) = s \cdot \frac{F/(F + k_1 \cdot V)}{1 + \tau \cdot s} \frac{1}{s}$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{F/(F + k_1 \cdot V)}{1 + \tau \cdot s} = \frac{F}{F + k_1 \cdot V}$$

SKAG





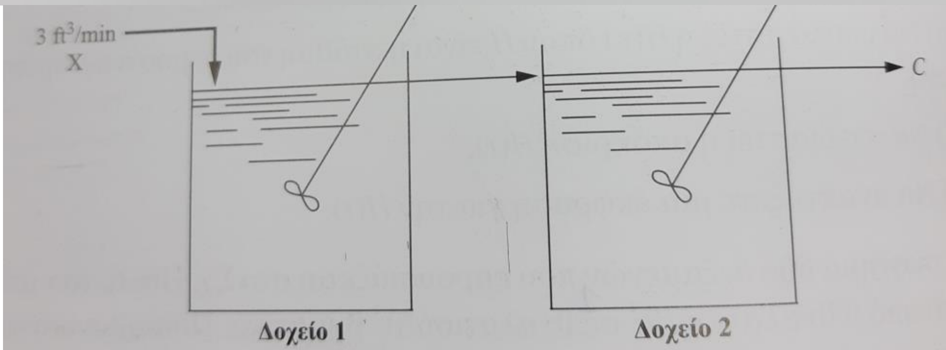
$C_i(s) = \frac{1}{s}$

$C_o(s) = \frac{F/(Vk_1+F)}{1+\tau s} \cdot \frac{1}{s} \rightsquigarrow C_o(t) = \frac{F}{Vk_1+F}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

$$C_i(s) \rightarrow \boxed{\frac{F/\tau}{1+\tau \cdot s}} \rightarrow C_o(s)$$

διάγραμμα βαθμίδων

6.6. Στο σύστημα δύο δεξαμενών που παρουσιάζεται στο Σχ. Π6–6, το x μεταβάλλεται από 0 lb αλατιού/ft^3 σε 1 lb αλατιού/ft^3 βηματικά. Ποιά χρονική στιγμή η συγκέντρωση του αλατιού στη δεύτερη δεξαμενή θα γίνει 0.6 lb αλατιού/ft^3; Ο όγκος του υγρού είναι 6 ft^3.



ΣΧΗΜΑ Π6-6

6-6

1º δοχείο

$$F\cdot x - F\cdot C_1 = V\frac{dC_1}{dt} \xrightarrow[\text{από ψ.κ.}]{\text{απόκλιση}} F\cdot X - F\cdot C_1 = V\frac{dC_1}{dt} \xrightarrow{\text{Laplace}}$$

$$F\cdot X(s) - F\cdot C_1(s) = V\cdot s\, C_1(s) \Rightarrow \frac{C_1(s)}{X(s)} = \frac{F}{V\cdot s+F} \Rightarrow \frac{C_1(s)}{X(s)} = \frac{1}{V/F\cdot s+1}$$

$\tau = \frac{V}{F}$ Άρα $\frac{C_1(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s+1}$

$\Rightarrow \tau = \frac{6ft^3}{3ft^3/min} = 2\,min$

$$\Rightarrow \frac{C_1(s)}{X(s)} = \frac{1}{2s+1} \quad (1)$$

2º δοχείο

$$F\cdot C_1 - F\cdot C_0 = V\frac{dC}{dt} \xrightarrow[\text{από ψ.κ.}]{\text{απόκλιση}} F\cdot C_1 - F\cdot C_0 = V\cdot\frac{dC}{dt} \xrightarrow{L}$$

μικρά - απόλυτα τιμές   κεφαλαία - απόκλιση

$$F\, C_1(s) - F\, C_0(s) = V\cdot s\cdot C(s) \Rightarrow \frac{C(s)}{C_1(s)} = \frac{F}{V\cdot s+F} \Rightarrow \frac{C(s)}{C_1(s)} = \frac{1}{\tau\cdot s+1}$$

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{C_1(s)} = \frac{1}{2s+1} \xrightarrow{(1)} \frac{C(s)}{X(s)} = \frac{1}{(2s+1)^2}$$

αντικαθιστώ $C_1(s)$

$$x(t)\big|_{t=0} \text{ από } 0 \xrightarrow{\text{σε}} 1 \Rightarrow \underset{x(t)-x_s}{X(t)} = 1-0 = 1 \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{(2s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(2s+1)} + \frac{\Gamma}{(2s+1)^2} \quad (2)$$

(2) $\xrightarrow{\times(s)} \frac{1}{(2s+1)^2} = A + \frac{B\cdot s}{2s+1} + \frac{\Gamma\cdot s}{(2s+1)^2} \xrightarrow{s=0} 1 = A$

(2) $\xrightarrow{\times(2s+1)^2} \frac{1}{s} = \frac{A(2s+1)^2}{s} + B(2s+1) + \Gamma \xrightarrow{s=-0.5} \frac{-1}{0.5} = \Gamma \Rightarrow \Gamma = -2$

Αντικαθιστώ στη (2) $\Rightarrow \frac{1}{s(2s+1)^2} = \frac{1}{s} + \frac{B}{(2s+1)} + \frac{-2}{(2s+1)^2}$

SKAG

κάνω ομώνυμα και εξισώνω αριθμητές

$$1 = (2s+1)^2 + B \cdot s - 2 \cdot s$$

$$1 = (2s+1)^2 + B \cdot s(2s+1) - 2 \cdot s \Rightarrow \cancel{1} = 4s^2 + 4s + \cancel{1} + B \cdot 2s^2 + B \cdot s - 2s$$

$$\Rightarrow (4+2B)s^2 + (4-2+B)s = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 4+2B=0 \\ 2+B=0 \end{array}\right\} \Rightarrow B=-2$$

Άρα $C(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1} - \frac{2}{(2s+1)^2}$ ή $C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.5} \frac{-0.5}{(s+0.5)^2}$

$$C(t) = 1 - e^{-0.5t} - 0.5\,t e^{-0.5t}$$

$$C(t) = 0.6 - C_s = 0.6 - 0$$

↳ γιατί στη μόνιμη κατάσταση πριν τη διαταραχή η συγκέντρωση του αλατιού ήταν 0

$$\boxed{0.6 = 1 - e^{-0.5 \cdot t} - 0.5 t e^{-0.5t}}$$

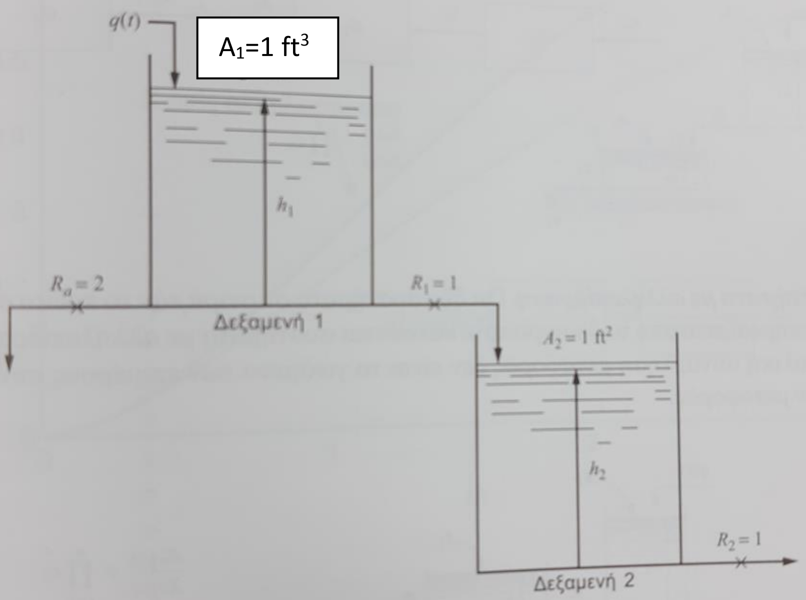
Λύση με δοκιμή και σφάλμα

$$\Rightarrow e^{-0.5 \cdot t}(1+0.5t) = 0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-0.5t} = \frac{0.4}{1+0.5t}$$

	δεξί μέλος $0.4/(1+0.5 \cdot t)$		t από λύση αριστερού
			$-\ln(0.2)/0.5$
$t=2 \rightarrow$	0.2	$\rightarrow$	3.22
	0.153	$\rightarrow$	$-\frac{\ln(0.153)}{0.5} = 3.94$
	0.134	$\rightarrow$	$-\frac{\ln(0.134)}{0.5} = 4$
	0.133	$\rightarrow$	$-\frac{\ln(0.133)}{0.5} = 4$

6.7. Ξεκινώντας από βασικές αρχές, να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H_1(s)/Q(s)$ και $H_2(s)/Q(s)$ για το σύστημα δύο δεξαμενών του Σχ. Π6–7. Οι αντιστάσεις είναι γραμμικές $R_1=R_2=1$. Σημειώστε ότι από την πρώτη δεξαμενή εξέρχονται δύο ρεύματα το ένα από τα οποία τροφοδοτείται στην δεύτερη δεξαμενή. Να δειχτεί λεπτομερώς η μεθοδολογία εξαγωγής της συναρτήσεως μεταφοράς και να υπολογιστούν οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων που εμφανίζονται στην συνάρτηση μεταφοράς.



ΣΧΗΜΑ Π6-7

6-7

1ο δοχείο

$$\left.\begin{array}{l} q - q_1 - q_a = A_1 \dfrac{dh_1}{dt} \\ q_1 = \dfrac{h_1}{R_1} = h_1 \quad \text{και} \quad q_a = \dfrac{h_1}{R_a} = 0.5 h_1 \end{array}\right\} \Rightarrow q - h_1 - 0.5 h_1 = A_1 \dfrac{dh_1}{dt} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{απο ψ.κ}]{\text{απόκλιση}} Q - 1.5 H_1 = A_1 \dfrac{dH_1}{dt} \xrightarrow{L} Q(s) = (A_1 \cdot s + 1.5) H_1(s)$$

$$\Rightarrow \frac{H_1(s)}{Q(s)} = \frac{1}{2s+1.5} \quad (1)$$

2ο δοχείο

$$\left.\begin{array}{l} q_1 - q_2 = A_2 \dfrac{dh_2}{dt} \\ q_2 = \dfrac{h_2}{R_2} = h_2 \end{array}\right\} \Rightarrow q_1 - h_2 = \underset{1}{A_2} \dfrac{dh_2}{dt} \xrightarrow[\text{απο ψ.κ}]{\text{απόκλιση}} Q_1 - H_2 = \dfrac{dH_2}{dt} \xrightarrow{L}$$

$$\rightarrow Q_1(s) - H_2(s) = s H_2(s) \Rightarrow Q_1(s) = (1+s) H_2(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{s+1} \quad (2)$$

Όμως εξαιτίας $Q_1(s) = \dfrac{H_1(s)}{R} = H_1(s)$ η $(2) \Rightarrow \dfrac{H_2(s)}{H_1(s)} = \dfrac{1}{s+1}$

Άρα απο την $(1) \Rightarrow \dfrac{H_2(s)}{Q(s)} = \dfrac{1}{2s+1.5} \cdot \dfrac{1}{s+1}$