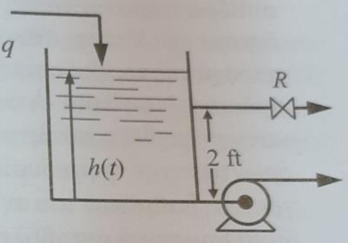
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5.1. Να εξάγετε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)/Q(s)$ για το σύστημα στάθμης υγρού του Σχ. Π5–1 όταν
(α) Η διεργασία λειτουργεί γύρω από τη μόνιμη κατάσταση $h_s = 1$ ft.
(β) Η διεργασία λειτουργεί γύρω από τη μόνιμη κατάσταση $h_s = 3$ ft.
Η αντλία απομακρύνει υγρό με σταθερή παροχή 10 cfm (ft^3/min). Το εμβαδόν της επιφάνειας διατομής του δοχείου είναι 1 ft^2 και η αντίσταση στη ροή R είναι 0.5 ft/cfm.



ΣΧΗΜΑ Π5-1

5.2. Σύστημα στάθμης υγρού, όπως το σύστημα του Σχ. 5–1, έχει εμβαδόν επιφάνειας διατομής 3 ft^2. Η χαρακτηριστική της βάνας είναι $q=8h^{1/2}$ όπου q είναι η ογκομετρική παροχή

Chapter 5

5.1 $q_o = \frac{h}{R}$ → κεφαλή (head)
R → αντίσταση (βαλβίδα, σωλήνας, weir : υδατοφράκτης)
↳ παροχή

$$q(t) - q_o(t) = A\frac{dh}{dt} \qquad A = 1\,ft^2 \quad R = 0.5\,ft/cfm$$

cubic feet/min

$$q(t) - \frac{h(t)}{R} = A\frac{dh}{dt} \quad \text{(χωρίς αντλία)}$$

$$q(t) - q_o(t) = A\frac{dh}{dt} \quad \text{(με αντλία)}$$

(α) Μόνο με αντλία

$$q(t) - q_o(t) = A\frac{dh}{dt} \Rightarrow q(t) - 10 = A\frac{dh}{dt} \quad \text{και } h_s = 1\,ft \text{ (ενεργώνεται)}$$

Σε μόνιμη κατάσταση

$$q_s - 10 = 0 \Rightarrow q_s = 10\,ft^3/min$$

Απoκλίσεις $Q(t) = A\frac{dH}{dt}$ $\quad Q = q(t) - q_s = q(t) - 10$
$\quad H = h - h_s = h - 1$

$$\Downarrow$$

$$Q(s) = AsH(s) \Rightarrow \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{A\cdot s} = \frac{1}{s}$$

$A = 1$

(b) Στο ύψος $h_s = 3$ ft λειτουργεί και το εξάρτημα που δίνει την αντίσταση

$$q(t) - \frac{h(t)-2}{R} - q_o(t) = A\frac{dh}{dt} \Rightarrow q(t) - \frac{h(t)-2}{R} - 10 = A\frac{dh}{dt}$$

Σε μόνιμη κατάσταση $\quad q_s - \frac{h_s - 2}{R} - 10 = 0 \Rightarrow q_s = 10 + \frac{3-2}{1} = 11$

Απόκλιση $\quad Q(t) - \frac{H(t)}{R} = A\frac{dH}{dt}$ $\quad Q(t) = q(t) - q_s$
$\quad H(t) = h(t) - h_s$

$$\Downarrow$$

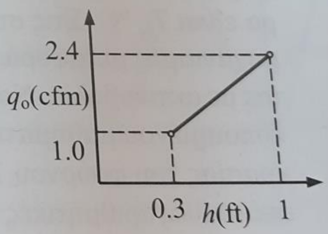
$$Q(s) - \frac{H(s)}{R} = A\cdot s\,H(s) \Rightarrow Q(s) = \left(As + \frac{1}{R}\right)H(s) \Rightarrow$$

$$Q(s) = \frac{A \cdot R \cdot s + 1}{R} \cdot H(s) \Rightarrow \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{\overset{\to 0.5}{R}}{\underbrace{\underset{\downarrow 1}{A}R}_{\tau} \cdot s + 1} = \frac{R}{\tau \cdot s + 1} = \frac{0.5}{0.5 \cdot s + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{0H(s)}{Q(s)} = \frac{0.5}{0.5 \cdot s + 1}$$

σε cfm και h το ύψος της στάθμης του υγρού στο δοχείο σε ft. Να υπολογιστεί η σταθερά χρόνου του συστήματος εάν το ύψος της στάθμης του υγρού είναι (α) 3 ft, και (b) 9 ft.

5.3. Δοχείο με εμβαδόν επιφάνειας διατομής 2 ft^2 λειτουργεί σε μόνιμες συνθήκες με ογκομετρική παροχή τροφοδοσίας 2 cfm. Η χαρακτηριστική σχέση στάθμης–παροχής δίνεται στο Σχ. Π5–3.



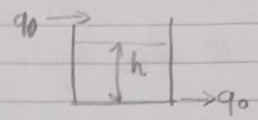
ΣΧΗΜΑ Π5-3

(α) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)/Q(s)$.

(β) Εάν η ογκομετρική παροχή της τροφοδοσίας αυξηθεί από 2 σε 2.2 cfm βηματικά να υπολογιστεί η στάθμη h, 2 min μετά την εφαρμογή της μεταβολής.

5.3 $\quad A = 2\,ft^2 \qquad q_i = 2\,ft^3/min = 2\,cfm$

$$q_i - q_o = A\frac{dh}{dt}$$



↳ συνάρτηση του head

Είναι της μορφής $q_o = a\cdot h + b$

κλίση ↳ τεταγμένη

κλίση $\dfrac{2.4-1.0}{1.0-0.3} = \dfrac{1.4}{0.7} = 2$

τεταγμένη: $q_o = 2\cdot h + b$ για μια οποιαδήποτε τιμή του q_o, π.χ. $q_o = 1$ για $h = 0.3$

Άρα $1 = 2\cdot 0.3 + b \Rightarrow 1 = 0.6 + b \Rightarrow b = 0.4$

Έτσι $q_o = 2\cdot h + 0.4$

$$q_i - (2h + 0.4) = A\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_s - (2h_s + 0.4) = 0 \\ q_s = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - 2h_s - 0.4 = 0 \Rightarrow h_s = \frac{2-0.4}{2} = \frac{1.6}{2} = 0.8$$

Σε μόνιμη κατάσταση

Αποκλίσεις $\quad Q(t) - (2H(t) + 0) = A\dfrac{dH}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q(t) - 2\cdot H(t) = 2\frac{dH}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(s) - 2H(s) = 2\cdot s\,H(s) \Rightarrow Q(s) = (2+2s)\,H(s)$$

$$\Rightarrow \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1/2}{\frac{2}{2} + \frac{2s}{2}} = \frac{0.5}{s+1}$$

(b) $\quad Q(t) = q_i - q_s = 2.2 - 2 = 0.2$ για $t \geq 0$

$Q(s) = 0.2/s$

$$H(s) = \frac{0.5}{s+1} \times \frac{0.2}{s} = \frac{0.1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \quad (*)$$

$\circledast \xrightarrow{\times S} \frac{0.1}{S+1} = A + \frac{B \cdot S}{S+1} \xrightarrow{S=0} 0.1 = A + 0 \Rightarrow A = 0.1$

$\circledast \xrightarrow{S+1} \frac{0.1}{S} = \frac{A}{S}(S+1) + B \xrightarrow{S=-1} \frac{0.1}{-1} = 0 + B \Rightarrow B = -0.1$

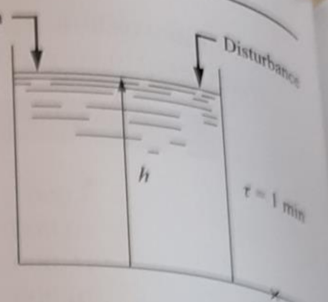
$H(s) = \frac{0.1}{S} - \frac{0.1}{S+1} \Rightarrow H(t) = 0.1 - 0.1e^{-t} =$
$= 0.1(1 - e^{-t})$

Για $t = 2$ min $H(t) = 0.1(1 - e^{-2}) = 0.0865$ ft

$H(t) = h(t) - 0.8 \Rightarrow h(t) = H(t) + 0.8$

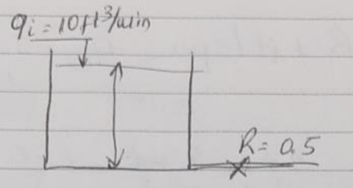
$h(2) = 0.0865 + 08 = 0.8865$

5.9. Η διεργασία στάθμης υγρού που παρουσιάζεται στο Σχ. Π5–9 λειτουργεί σε μόνιμες συνθήκες όταν η ακόλουθη διαταραχή λαμβάνει χώρα: σε χρόνο $t=0$, 1 ft^3 νερού προστίθεται ταχύτατα (μοναδιαία κρουστική) στο δοχείο και σε $t=1$ min, 2 ft^3 νερού προστίθενται ταχύτατα στο δοχείο. Να σχεδιάσετε την απόκριση της στάθμης του δοχείου και να υπολογίσετε τη στάθμη για $t=0.5$, 1 και 1.5 min.



ΣΧΗΜΑ Π5-9

5.9



Στο βιβλίο οι αποκλίσεις είναι με μικρά + ' δηλ q_i' (αντί για Q_i)

$q_i(t) - \frac{h(t)}{R} = A\frac{dh}{dt}$ $\qquad \tau = A\cdot R = 1$ min

$\Rightarrow A = 1/0.5 = 2$

Σε μόνιμη κατάσταση $q_{i,s} - \frac{h_s}{R} = 0 \Rightarrow q_{i,s} = \frac{h_s}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_s = R\cdot q_{i,s} = 0.5\times 10 = 5\,ft$

Αποκλίσεις $Q_i(t) - \frac{H(t)}{R} = A\frac{dH}{dt} \Rightarrow R\,Q_i(t) - H(t) = AR\frac{dH}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0.5\,Q_i(t) - H(t) = 1\cdot\frac{dH}{dt}$ όπου $Q_i(t) = q_i(t) - q_{i,s}$ και $H(t) = h(t) - h_s$

$\Downarrow$

$0.5\,Q_i(s) - H(s) = s\cdot H(s) \Rightarrow \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{0.5}{s+1}$

a) Q_i: μοναδιαία κρουστική διαταραχή σε χρόνο $t=0$

$\int_{-\infty}^{\infty} Q_i(t)\,dt = 1 \rightsquigarrow Q_i(s) = \mathcal{L}\{\overset{1\cdot\delta(t)}{1\,u(t)} + \overset{2\cdot\delta(t)u(t-1)}{2\,u(t-1)}\} = 1 + 2e^{-s}$

Άρα $H(s) = \frac{0.5}{s+1}(1+2e^{-s})$

$H(t) = 0.5e^{-t}\cdot u(t) + \underbrace{2\cdot 0.5}_{1}e^{-(t-1)}u(t-1)$

$\Downarrow$

$h(t) - h_s = h(t) - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(t) = H(t) + 5 = 5 + 0.5e^{-t}u(t) + 1e^{-(t-1)}u(t-1)$

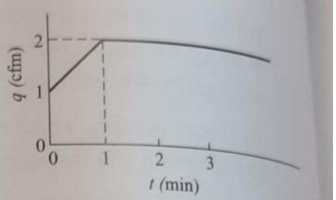
$t=0 \qquad h(t) = 5 + 0.5 = 5.5$

$=0.5 \qquad h(t) = 5 + 0.5e^{-0.5} = 5.03$

$=1 \qquad h(t) = 5 + 0.5e^{-1} + 1 = 6.18$

$=1.5 \qquad h(t) = 5 + 0.5e^{-1.5} + 1e^{(1.5-1)} = 5.72$

5.10. Δοχείο με εμβαδόν της επιφάνειας διατομής ίσο με 2 ft^2 και γραμμική αντίσταση στη ροή R=1 ft/cfm λειτουργεί σε μόνιμες συνθήκες με παροχή των ρευμάτων εισόδου και εξόδου ίση με 1 cfm. Σε t=0 η παροχή μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο Σχήμα Π5–10.
(α) Να υπολογιστούν τα $Q(t)$ και $Q(s)$ με συνδυασμό απλών συναρτήσεων. Σημειώστε ότι τα Q δηλώνουν μεταβλητές απόκλισης.
(β) Να υπολογιστεί η $H(t)$ όπου H είναι η μεταβλητή απόκλισης για την στάθμη.
(γ) Ποια η τιμή της H για t=2 και t=∞;



ΣΧΗΜΑ Π5-10

5.10 $A = 2\,ft^2$ $R = 1\, ft/cfm$ $q_{i,s} = 1\, ft^3/min = 1\, cfm$

(α) $Q(t) = q_i - q_{i,s} = 1 + t - 1 = t \quad t \geq 0$

$= 1 + \underbrace{t}_{u(t)} - \underbrace{(t-1)}_{u(t-1)} - 1 = \quad t \geq 1$

$= 1$

$q_i = 1 + t \quad t \geq 0$

$\quad -(t-1) \quad t \geq 1$

t	q_i
0	1
0.5	1+0.5=1.5
1	1+1=2
1.5	1+1.5−0.5=2
2	1+2−1=2

$1 + t \cdot u(t)$ (for t = 0 to 1)

$(t-1)u(t-1)$ (for t = 1.5 to 2)

$q_i = 1 + t\,u(t) - (t-1)u(t-1)$

$Q_i(t) = 1 + t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - 1$
$= t\,u(t) - (t-1)u(t-1)$

$Q_i(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}$

$q_i(t) - \frac{h(t)}{R} = A\frac{dh}{dt}$ σε μόνιμη κατάσταση

$q_{i,s} - \frac{h_s}{R} = 0 \Rightarrow$

$1 - \frac{h_s}{1} = 0 \Rightarrow h_s = 1\,ft$

Αποκλίσεις

$Q_i(t) - \frac{H(t)}{R} = A\frac{dH}{dt} \Rightarrow Q_i(t) - H(t) = 2\frac{dH}{dt}$

$Q_i(t) = q_i(t) - q_s$ και $H(t) = h(t) - h_s$

Laplace $Q_i(s) - H(s) = 2sH(s) \Rightarrow Q_i(s) = H(s)(1+2s)$

$\Rightarrow \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{1+2s} \Rightarrow H(s) = \left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}\right)\frac{1}{1+2s}$

SKAG

$$H(s) = \frac{1}{s^2(1+2s)} - \frac{e^{-s}}{s^2(1+2s)}$$

Πρώτα $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(1+2s)}\right\}$ και μετά θέτουμε όπου $t = t-1$ για να πάρουμε και τον L^{-1} του δεύτερου όρου

$$\frac{1}{s^2(1+2s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{1+2s} \quad *$$

$$(*) \xrightarrow{\times s^2} \frac{1}{1+2s} = A\cdot s + B + \frac{\Gamma\cdot s^2}{1+2s} \xrightarrow{s=0} 1 = B$$

$$(*) \xrightarrow{\times(1+2s)} \frac{1}{s^2} = \frac{A(2s+1)}{s} + \frac{B(2s+1)}{s^2} + \Gamma \xrightarrow{s=-1/2} \frac{1}{(-1/2)^2} = 4 = \Gamma$$

$$(*) \Rightarrow \frac{1}{s^2(1+2s)} = \frac{A}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{4}{1+2s} = \frac{A\cdot s\cdot(1+2s)+(1+2s)+4s^2}{s^2(1+2s)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A\cdot s + 2As^2 + 1 + 2s + 4s^2 = (2A+4)s^2 + (A+2)\cdot s + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A+4 = 0 \Rightarrow A = -2$$

$$A+2 = 0 \Rightarrow A = -2$$

$$-\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{4/2}{1/2+s} \xrightarrow{L^{-1}} -2 + t + 2e^{-0.5t}$$

Άρα $H(t) = \left[t - 2(1-e^{-0.5t})\right]u(t) - \left[(t-1) - 2(1-e^{-0.5(t-1)})\right]u(t-1)$

Για $t = 2\,min$ $\quad H(2) = \underbrace{2-2(1-e^{-0.5\times 2})}_{=0.736} - \underbrace{(2-1)-2(1-e^{-0.5(2-1)})}_{=0.213}$

$= 0.523\,ft$