ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ Χ. ΣΧΟΙΝΑΣ

ΞΑΝΘΗ 2001

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ Χ. ΣΧΟΙΝΑΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ: ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ
ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΣ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ
ΘΡΑΚΗΣ

Εκδόσεις: Εταιρεία Αξιοποίησης και
Διαχείρησης περιουσίας
Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου
Θράκης
Τσιμισκή 58 τηλ. (0541) 26940
671 00 ΞΑΝΘΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1.1. Εισαγωγή

Οι διαφορικές εξισώσεις αποτέλεσαν τα βασικότερα μοντέλα ερμηνείας των φυσικών φαινομένων από την εποχή του Νεύτωνα. Αλλά και σήμερα προβλήματα, στα οποία οι διάφορες μεταβλητές ποσότητες που τα προσδιορίζουν συνδέονται με τις ποσοστιαίες μεταβολές τους, περιγράφονται με Δ.Ε.

Σ' αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα δώσουμε μόνο τις γενικές μεθόδους λύσεων συγκεκριμένων μορφών Δ.Ε, με έμφαση στις εφαρμογές σε γνωστά κλασικά προβλήματα, και δε θα ασχοληθούμε με θέματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων, που είναι πιο απαραίτητα σε όσους ασχολούνται περισσότερο με τη μαθηματική θεμελίωση.

1.2. Ορισμοί

Διαφορική εξίσωση (Δ.Ε) είναι μια εξίσωση που συνδέει την ανεξάρτητη μεταβλητή, μία άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της διαφόρων τάξεων. Αν η συνάρτηση εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή, η Δ.Ε λέγεται **συνήθης**, αλλιώς **Δ.Ε με μερικές παραγώγους**. Π.χ. οι

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega = \text{σταθ.}), \qquad y''+3y'+2y = 0$$

είναι συνήθεις Δ.Ε, ενώ οι:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

είναι Δ.Ε με μερικές παραγώγους.

Οι Δ.Ε μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια των διανυσματικών πεδίων. Έστω το επίπεδο διανυσματικό πεδίο

$$\underline{F}(x, y) = f(x, y)\,\underline{i} + g(x, y)\,\underline{j} \qquad (\alpha)$$

Τότε, σε κάθε σημείο (x, y) του επιπέδου, αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $(f(x, y), g(x, y))$ με συντελεστή διεύθυνσης $g(x, y)/f(x, y)$. Συνεπώς, αν $g(x, y)/f(x, y) = \varphi(x, y)$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης y' κάθε διανύσματος του διανυσματικού πεδίου δίνεται από τη Δ.Ε

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad \text{ή} \quad g(x, y)\,dx - f(x, y)\,dy = 0 \qquad (\beta)$$

Αλλά και αντιστρόφως. Έστω η Δ.Ε (β). Γράφουμε τη συνάρτηση $\varphi(x, y)$ στη μορφή $g(x, y)/f(x, y)$, οπότε το διανυσματικό πεδίο (α) είναι αυτό που αντιστοιχεί σ' αυτή.

Λύση μιας Δ.Ε της μορφής (β) λέγεται η εύρεση μιας οικογένειας των καμπύλων $\Phi(x, y, c) = 0$, c αυθαίρετη σταθερή, έτσι ώστε, αν λύσουμε αυτή ως προς y και την αντικαταστήσουμε στη (β), να την επαληθεύει. Διαφορετικά λύση της Δ.Ε (β) λέγεται η εύρεση των γραμμών ροής της Δ.Ε, δηλαδή η εύρεση μιας κατάλληλης οικογένειας καμπύλων τέτοιας, ώστε η κάθε καμπύλη της να εφάπτεται στο σημείο (x, y) των διανυσμάτων $\underline{F}(x, y)$.

Αν δε $\underline{F}$ είναι διανυσματικό πεδίο δυνάμεων στο επίπεδο $0xy$, τότε τα υλικά σημεία θα κινηθούν κατά μήκος των καμπύλων της οικογένειας λύσεων των γραμμών ροής υπό την επίδραση του διανυσματικού πεδίου. Όταν δε το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x, y)$ είναι συντηρητικό, τότε υπάρχει δυναμικό $U(x, y)$ τέτοιο, ώστε $\underline{F} = \underline{\nabla} U$ και, ως γνωστό, το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}$ είναι κάθετο στις ισοσταθμικές γραμμές.

Παράδειγμα 1.2.1: Ποιά είναι η Δ.Ε που αντιστοιχεί στο επίπεδο κεντρικό διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x, y) = -k\dfrac{m}{|\underline{r}|^3}\underline{r}$;

Λύση: Το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x, y)$ γράφεται

$$\underline{F}(x, y) = -km\frac{x}{|\underline{r}|^3}\underline{i} - km\frac{y}{|\underline{r}|^3}\underline{j}$$

Επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα,

$$f(x,\ y) = -km\ \frac{x}{|\underline{r}|^3}, \quad g(x,\ y) = -km\ \frac{y}{|\underline{r}|^3}$$

και άρα η αντίστοιχη Δ.Ε είναι η

$$y' = \frac{g(x,\ y)}{f(x,\ y)} = \frac{y}{x},$$

που είναι η ζητούμενη. Όπως θα δούμε παρακάτω, η εξίσωση αυτή έχει λύση $y = cx$, δηλαδή μία κεντρική δέσμη ευθειών που είναι η οικογένεια των γραμμών ροής του πεδίου. Επειδή δε το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x,\ y)$ είναι συντηρητικό με δυναμικό $U = k\ \dfrac{m}{|\underline{r}|}$, οι ισοδυναμικές γραμμές $U(x,\ y) = c_1$ είναι οι ομόκεντροι κύκλοι $|\underline{r}| = k\dfrac{m_1}{c_1}$, που είναι κάθετοι στις γραμμές ροής $y = cx$.

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με συνήθεις Δ.Ε.

Τάξη της Δ.Ε είναι η μεγαλύτερη τάξη της παραγώγου που εμφανίζεται στη Δ.Ε. Οι δύο πρώτες Δ.Ε στην αρχή της παραγράφου είναι δεύτερης τάξης. **Βαθμός** μιας Δ.Ε είναι ο βαθμός της μεγαλύτερης τάξης παραγώγου που περιέχεται σ' αυτή, π.χ. η συνήθης Δ.Ε $(y''')^2 - 3y'y'' + (y'')^2 = 0$ είναι τρίτης τάξης και δευτέρου βαθμού. Οι πιο απλές, αλλά και οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες Δ.Ε είναι οι γραμμικές. Μία Δ.Ε λέγεται **γραμμική**, όταν είναι γραμμική ως προς τις παραγώγους και τη συνάρτηση με συντελεστές συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής. Π.χ. οι Δ.Ε

$$\alpha_1(x)\,y' + \alpha_0(x)\,y = f(x), \qquad \alpha_2(x)\,y'' + \alpha_1(x)\,y' + \alpha_0(x)\,y = g(x),$$

είναι γραμμικές πρώτης και δεύτερης τάξης, αντίστοιχα.

Λύση μιας Δ.Ε είναι κάθε συνάρτηση $y = y(x)$ που την επαληθεύει. Π.χ. η συνάρτηση $y = \eta\mu\,2x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + 4y = 0$. Μία Δ.Ε δεν έχει ποτέ μία λύση. Το σύνολο των λύσεων μιας Δ.Ε λέγεται **γενική λύση**, π.χ θα αποδείξουμε παρακάτω ότι η προηγούμενη Δ.Ε έχει γενική λύση $y = c_1\,\eta\mu\,2x + c_2\,\sigma\upsilon\nu\,2x$. Θέτοντας ορισμένες συνθήκες είναι δυνατό να προσδιορίσουμε από τη γενική λύση μια συγκεκριμένη λύση που λέγεται **μερική λύση**, π.χ η Δ.Ε $y' = y$ έχει γενική λύση την $y = ce^x$. Ποιά είναι η λύση $y(x)$ αυτής που πληροί τη συνθήκη $y(0) = 1$; Έχουμε $y(0) = ce^0 = c = 1$. Συνεπώς η $y = e^x$ είναι μερική λύση. Αν μία Δ.Ε θεωρηθεί στο διάστημα $(x_0,\ x_1)$, τότε μπορούμε να έχουμε γενικά δύο τύπους συνθηκών. Αν οι τιμές της λύσης και των παραγώγων της προσδιορίζονται για $x = x_0$ μόνο, τότε οι συνθήκες λέγονται **αρχικές συνθήκες**, ή λέμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα **αρχικών τιμών**. Αν οι τιμές της λύσης προσδιορίζονται και για $x = x_1$, τότε οι συνθήκες λέγονται **συνοριακές συνθήκες**, ή λέμε ότι έχουμε **πρόβλημα συνοριακών τιμών**.

Παράδειγμα 1.2.2: Η γενική λύση της Δ.Ε $y''+4y = 0$ είναι η $y = c_1 \,\eta\mu 2x + c_2 \,\sigma\upsilon\nu 2x$. Ποιά είναι η λύση που περνά από το σημείο (0, 1) με συντελεστή διεύθυνσης 2;

Λύση: Δηλαδή ζητάμε τη λύση $y(x)$ που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$ και $y'(0)=2$. Συνεπώς επειδή, $y=c_1\,\eta\mu 2x+c_2\,\sigma\upsilon\nu 2x$ και $y'(x) = 2c_1\,\sigma\upsilon\nu 2x-2c_2\,\eta\mu 2x$, έχουμε $0\cdot c_1+c_2 = 1$ και $2c_1-2c_2\cdot 0 = 2$. Δηλαδή, $c_2 = 1$ και $c_1 = 1$. Συνεπώς, η λύση που ζητάμε είναι η $y(x) = \eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x$.

1.3. Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Η γενική μορφή μιας Δ.Ε πρώτης τάξης είναι η $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ή $dy = f(x, y)\,dx$, και αν

$$f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

τότε

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{1.3.1}$$

π.χ. οι Δ.Ε: $y'=\frac{x}{y}$, $dy = \frac{x}{y}\,dx$, $x dx-y\,dy = 0$ παριστάνουν την αυτή Δ.Ε.

Οι Δ.Ε της μορφής (1.3.1) μπορούν εύκολα να λυθούν στην περίπτωση που $f(x, y) = \frac{\varphi(x)}{g(y)}$, οπότε

$$y'= \frac{\varphi(x)}{g(y)} \quad \text{ή} \quad g(y)\,dy = \varphi(x)\,dx \tag{1.3.2}$$

Οι Δ.Ε της μορφής (1.3.2) λέγονται **χωριζόμενων μεταβλητών** και όπως θα δούμε η γενική τους λύση προκύπτει αμέσως με ολοκλήρωση αμφότερων των μελών τους. Δηλαδή

$$\boxed{\int g(y)\,dy = \int \varphi(x)\,dx + c\,.} \qquad (1.3.3)$$

Παράδειγμα 1.3.1: Να λυθεί η Δ.Ε $y' = \dfrac{x(y+1)}{y}$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$\frac{y}{y+1}\,dy = x\,dx \quad \text{ή} \quad \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = x\,dx\,.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη έχουμε

$$\int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int x\,dx \quad \text{ή} \quad y - \ln(y+1) = \frac{1}{2}x^2 + c\,.$$

Αυτή είναι μια μορφή της γενικής λύσης.

Παράδειγμα 1.3.2: Να λυθούν οι Δ.Ε.: (α) $x dy - y\,dx = 0$

(β) $x^{1/2}\,dy + dx = 0$.

Λύση: (α) Η Δ.Ε (α) γράφεται $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0) \Rightarrow$

$\ln|y| = \ln|x| + c$ (c = αυθαίρετη σταθερά) $\Rightarrow \ln|y| - \ln|x| = c \Rightarrow$

$\ln|y/x| = c \Rightarrow |y/x| = e^c \Rightarrow y = \pm e^c x \Rightarrow y = m\,x\ (m = \pm e^c)$

Για $x = 0$ και $y = 0$, η αρχική Δ.Ε γίνεται

$$(0)\,dy - y\,d(0) = 0 - 0 = 0$$

$$x\,d(0) - 0 \cdot dx = 0 - 0 = 0\,.$$

Δηλαδή οι τιμές αυτές αποτελούν τις ιδιάζουσες λύσεις της Δ.Ε.

Επίσης, η Δ.Ε (β) γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{1/2}} \Rightarrow dy = -\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow y = -2x^{1/2} + c \Rightarrow y + 2x^{1/2} = c\,.$$

Παράδειγμα 1.3.3: Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών

$$2x(y+1)\,dx - y\,dy = 0,$$

όπου $x = 0$ και $y = -2$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{y+1}{y} \Rightarrow \frac{y}{y+1}\,dy = 2x\,dx \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = 2x\,dx \Rightarrow$$

$$y - \ln|y+1| = x^2 + c_1 \quad \text{ή} \quad x^2 = y - \ln|y+1| + c \bullet$$

Για $y(0) = -2$, έχουμε

$$0 = -2 \ln|-| + c \;\Rightarrow\; c = 2.$$

Συνεπώς, η λύση αρχικών τιμών είναι $x^2 = y - \ln|y+1| + 2$.

Παράδειγμα 1.3.4. Να λυθούν οι Δ.Ε

(α) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 y$

(β) $(xy^2 - x) + (x^2 y + y)\, dy = 0$

(γ) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 y^3$

(δ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \ln x \quad (x \geq 0) \bullet$

Λύση. (α) $\Rightarrow x^2\, dx - \dfrac{1}{y}\, dy = 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\int x^2\, dx - \int \frac{1}{y}\, dy = c \;\Rightarrow$

$\dfrac{x^3}{3} - \ln|y| = c \;\Rightarrow \dfrac{x^3}{3} + \ln|y^{-1}| = c \;\Rightarrow\; \left|\dfrac{1}{y}\right| = e^{c-(x^3/3)} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow |y| = e^{(x^3/3)-c} \;\Rightarrow\; |y| = e^{-c}\cdot e^{x^3/3} \;\Rightarrow\; y = \pm e^{-c}\cdot e^{x^3/3} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow y = m\, e^{x^3/3} \quad (m = \pm e^{-c})$.

(β) $\Rightarrow x(y^2-1)\, dx + y(x^2+1)\, dy = 0 \;\Rightarrow \dfrac{x\, dx}{x^2+1} + \dfrac{y\, dy}{y^2-1} = 0 \;\Rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^2+1} + \int \frac{y\, dy}{y^2+1} = k \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}(y^2+1) = k \;\Rightarrow$

$\ln\left[(x^2+1)(y^2+1)\right] = \ln c \quad \left(k = \dfrac{1}{2} \ln c\right)$ ή

$(x^2+1)(y^2-1) = c$.

(γ) $\Rightarrow \dfrac{dy}{y^3} = x^2\, dx \;\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\, dx + c$ ή $-\dfrac{1}{2y^2} = \dfrac{x^3}{3} + c$ ή

$2y^2 x^2 + cy^2 + 3 = 0$.

(δ) $\Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x \ln x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x \ln x} + c_1 \Rightarrow \ln y = \ln(\ln x) + c_1$ ή

$\ln y = \ln(\ln x) + \ln c \quad (c_1 = \ln c)$ ή $\ln y - \ln c = \ln(\ln x)$ ή

$\ln(y/c) = \ln(\ln x)$ ή $y/c = \ln x$ ή $y = c \ln x$

Παράδειγμα 1.3.5: Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών

(α) $x \cos x \, dx + (1-6y^5)\, dy = 0, \ y(\pi) = 0$

(β) $y' \sin x = y(y-1), \ y(\pi/2) = 2$

Λύση: (α) Η εξίσωση (α) γράφεται

$$(1-6y^5)\, dy = -x \cos x \, dx,$$

οπότε δι' ολοκληρώσεως έχουμε

$$\int (1-6y^5)\, dy = -\int x \cos x \, dx + c \quad ή \quad y - y^6 = -x \sin x - \cos x + c$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(\pi) = 0$, λύνουμε ως προς c την ισότητα $0-0 = \pi \cdot 0 - (-1) + c \Rightarrow c = -1$. Επομένως, η ζητούμενη λύση είναι η

$$y - y^6 + x \sin x + \cos x = -1$$

(β) Η εξίσωση (β) γράφεται

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{\sin x} \quad \text{για } y \neq 0,\ y \neq 1,\ x \neq 0,\ x \neq \pi,$$

οπότε με ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{\sin x} + c_1,\ c_1 \in R \ ή$$

$$\ln\left(\frac{y-1}{y}\right) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \ln c,\ c > 0 \ ή$$

$$\frac{y-1}{y} = c \tan\frac{x}{2}, \quad c > 0$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(\pi/2) = 2$, λύνουμε ως προς c την ισότητα

$$\frac{2-1}{2} = c \tan\frac{\pi}{4}, \quad \text{οπότε } c = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, η ζητούμενη λύση είναι η

$$\frac{y-1}{y} = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Η συνάρτηση $y = 1$ και $y = 0$ είναι ιδιάζουσες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, αφού $y(y-1) = 0$, $y = 1$ μπορεί να συμπεριληφθεί στη γενική λύση

$$\frac{y-1}{y} = c \tan\frac{x}{2}, \quad c \geq 0.$$

Παράδειγμα 1.3.6: Είναι γνωστο ότι, σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα χωρίς πυκνωτή, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος i (t), που διαρρέει το κύκλωμα πηνίου - ωμικής αντίστασης (R) με σταθερή ηλεκτρεγετρική δύναμη $E > 0$, ικανοποιεί τη Δ.Ε, $E = L\dfrac{di}{dt} + iR$ (α). Ζητείται να θρεθεί η ένταση i (t).

Λύση: Η Δ.Ε (α) γράφεται

$$\frac{di}{dt} = \frac{E-iR}{E} \quad ή \quad \frac{di}{E-iR} = \frac{1}{L}\,dt \quad (\beta) \quad με \quad E-iR \neq 0$$

δηλαδή η Δ.Ε (α) είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

Από τις τελευταίες συνθήκες προκύπτει

$$I_t = [0, +\infty) \quad και \quad I_i = \left(-\infty, \frac{E}{R}\right) \quad ή \quad I_i = \left(\frac{E}{R}, +\infty\right).$$

Από την Δ.Ε (β) έχουμε:

$$\int \frac{di}{E-Ri} = \frac{1}{L}\int dt + c_1 \quad (c_1 \in R)$$

ή

$$-\frac{1}{R}\ln(E-iR) = \frac{1}{L}t + c_1 \quad (c_1 \in R)$$

ή

$$\ln|E-iR| = \ln e^{-(R/L)t} + \ln c_2 \quad (c_2 > 0)$$

ή

$$|E-iR| = c_2 e^{-(R/L)t}, \quad (c_2 > 0)$$

ή

$$i = \frac{E}{R} + \frac{c}{R}e^{-(R/L)t} \quad c \in R - \{0\}$$

Η ιδιάζουσα λύση της εξίσωσης $i = \dfrac{E}{R}$, για την οποία είναι $E-iR = 0$, μπορεί να συμπεριληφθεί στη γενική λύση

$$i = \frac{E}{R} + \frac{C}{R}e^{-(R/L)t}, \quad c \in R$$

Για $i(0) = 0$, προκύπτει $c = -E$, οπότε η μερική λύση της Δ.Ε είναι η

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-(R/L)t}).$$

Δηλαδή, με το κλείσιμο του διακόπτη, λόγω της αυτεπαγωγής του πηνίου, η ένταση του ρεύματος δεν είναι ίση μ' αυτή που καθορίζεται από το νομο του Ohm ($i = E/R$). Αυτό, θεωρητικά μπορεί να συμβεί μετά παρέλευση απείρου χρόνου.

Παράδειγμα 1.3.7. Να λυθεί η Δ.Ε. $xy\,(1+x^2)\,dy = (1+y^2)\,dx$.

Λύση: Η Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών, καθόσον γράφεται

$$\frac{y\,dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

Δι' ολοκληρώσεως της τελευταίας σχέσεως έχουμε:

$$\int \frac{y\,dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}\ln(1+y)^2 = \int \frac{A_1\,dx}{x} + \int \frac{A_2x+A_3}{x^2+1}\,dx$$

ή

$$\ln(1+y^2) = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

[$A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$ που είναι αποτέλεσμα της ανάλυσης του κλάσματος $1/x\,(1+x^2)$ σ' άλλα απλά κλάσματα] ή

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln c_1 \quad \text{ή}$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2) = 2\ln c_1 x \quad \text{ή} \quad (1+x^2)(1+y^2) = x^2c \quad (c = c_1{}^2).$$

Παράδειγμα 1.3.8: Να λυθεί η Δ.Ε : $\theta(1+\rho^2)\,d\theta/d\rho = -\rho(1+\theta^2)$.

Λύση: Η Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών καθόσον γράφεται

$$\frac{\rho\,d\rho}{1+\rho^2} = -\frac{\theta\,d\theta}{1+\theta^2}$$

Η γενική λύση αυτής προκύπτει δι ολοκληρώσεως της τελευταίας μορφής, οπότε θα έχουμε

$$\int \frac{\rho\,d\rho}{1+\rho^2} = -\int \frac{\theta\,d\theta}{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln c \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+\theta^2) + \frac{1}{2}\ln c \quad \text{ή}$$

$$\ln(1+\rho^2) = \ln\frac{c}{\theta^2+1} \quad \text{ή} \quad \rho^2+1 = \frac{c}{\theta^2+1} \quad \text{ή} \quad (\rho^2+1)(\theta^2+1) = c$$

Παράδειγμα 1.3.9: Να λυθεί η Δ.Ε $(1+e^x)\,y\,dy = e^x\,dx$, $y(1) = 1$.

Λύση: Η ΔΕ γράφεται $y\,dy = \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx$ ή

$$\frac{y^2}{2} = \ln(e^x+1) + \ln c \quad ή \quad y^2 = 2\ln(e^x+1) + \ln c \quad ή \quad y^2 = \ln c\,(e^x+1)^2$$

Προς προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1)=1$, λύνουμε ως προς c την ισότητα $1 = \ln c(1+e)^2$, οπότε $c = \dfrac{1}{(1+e)^2}$.

Συνεπώς, η ζητούμενη λύση είναι η $y^2 = \ln\left[\dfrac{e^x+1}{1+e}\right]^2$.

Παράδειγμα 1.3.10: Να λυθεί η Δ.Ε $\sin x\,dy = y\ln y\,dx$, $y(\pi/2) = 1$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται: $\dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{dx}{\sin x}$ με $I_x = (0,\pi)$ και $I_y = (0,+\infty)$,

οπότε η γενική λύση προκύπτει δι' ολοκληρώσεως της τελευταίας σχέσης,

δηλαδή $\displaystyle\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$ ή $\displaystyle\int \frac{1}{\ln y}\,d\ln y = \int \frac{2d\omega}{1+\omega^2}\,\frac{1+\omega^2}{2\omega}$ ή

$$\ln\cdot\ln(y) = \ln\omega + \ln c \qquad \left(\tan\frac{x}{2} = \omega\right) \quad ή$$

$$\ln(\ln y) = \ln c\tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad ή \quad y = e^{c\tan(x/2)}$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης της Δ.Ε που πληροί την αρχική συνθήκη $y(\pi/2) = 1$, λύνουμε ως προς την ισότητα $1 = e^{c\tan(\pi/4)}$ ή $1 = e^c$ ή $c = 0$. Συνεπώς, η ζητούμενη λύση είναι η $y = 1$.

1.4. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Πολλές φορές το δεύτερο μέλος της Δ.Ε $y' = f(x,y)$ μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση του λόγου y/x. Δηλαδή

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε ως νέα μεταβλητή την $\upsilon = \dfrac{y}{x}$ ή $\boxed{y = \upsilon x,}$ οπότε $\boxed{y' = \upsilon' x + \upsilon.}$

Με αντικατάσταση η Δ.Ε γίνεται

$$\upsilon' x+\upsilon = \varphi(\upsilon) \quad \text{ή} \quad \upsilon' = \frac{\varphi(\upsilon)-\upsilon}{x}$$

που είναι μια Δ.Ε χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.4.1: Να λυθεί η Δ.Ε $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $y' = \dfrac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$.

Θέτουμε $\dfrac{y}{x} = \upsilon$ και $y' = \upsilon' x+\upsilon$, οπότε

$$\upsilon' x+\upsilon = \frac{1+\upsilon^2}{\upsilon} \quad \text{ή} \quad \upsilon' x = \frac{1}{\upsilon} \quad \text{ή} \quad \upsilon\, d\upsilon = \frac{dx}{x} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}\upsilon^2 = \ln x + c_1 = \ln cx \quad \text{ή} \quad y^2 = 2x^2 \ln cx .$$

Το επόμενο παράδειγμα είναι ένα τυπικό παράδειγμα Δ.Ε που για τη λύση χρειαζόμαστε δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς.

Παράδειγμα 1.4.2: Να λυθεί η Δ.Ε $(x^2-xy+y^2)\,dx - x\,y\,dy = 0$.

Λύση: Η ΔΕ γράφεται $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{xy} = \dfrac{1-(y/x)+(y/x)^2}{y/x}$

Θέτουμε $y=\upsilon x$ και $y' = \upsilon' x+\upsilon$,
οπότε η Δ.Ε γίνεται

$$\upsilon' x+\upsilon = \frac{1-\upsilon x+\upsilon^2}{\upsilon} \quad \text{ή} \quad \frac{d\upsilon}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1-\upsilon}{\upsilon}\right).$$

Η τελευταία Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών και γράφεται

$$\frac{\upsilon d\upsilon}{1-\upsilon} = \frac{dx}{x} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{x} + \left(1+\frac{1}{1-\upsilon}\right)d\upsilon = 0 \quad \text{ή}$$

$$\ln|x| + \upsilon + \ln|\upsilon-1| = \ln c \quad \text{ή} \quad x(\upsilon-1)\,e^{\upsilon} = c.$$

Τέλος, αντικαθιστώντας όπου $\upsilon = y/x$ έχουμε

$$x\left(\frac{y}{x}-1\right)e^{y/x}=c \quad ή \quad (y-x)\,e^{y/x}=c$$

Παράδειγμα 1.4.3: Να λυθεί η Δ.Ε

$$(x^2-2y^2)\,dx+(xy)\,dy=0 \tag{α}$$

Λύση: Η Δ.Ε (α) είναι ομογενής, καθόσον οι παραστάσεις x^2-2y^2 και xy είναι ομογενείς ως προς x και y βαθμού ομογενείας 2. Θέτουμε $y = x\,\upsilon(x)$, οπότε $dy = \upsilon\,dx + x\,d\upsilon$. Τότε, η Δ.Ε (α) γράφεται:

$$(x^2-2\upsilon^2x^2)\,dx+x(\upsilon x)(\upsilon dx+xd\upsilon)=0 \quad ή \quad (x^2-\upsilon^2x^2)\,dx+x^3\upsilon\,d\upsilon=0$$

ή

$$x^2\,[1-\upsilon^2)\,dx+(\chi\upsilon)\,d\upsilon]=0 \tag{β}$$

οπότε είτε

$$x=0 \tag{γ}$$

ή

$$(1-\upsilon^2)\,dx+(x\upsilon)\,dy=0 \tag{δ}$$

Η Δ.Ε (δ), με $1-\upsilon^2 \neq 0$, γράφεται

$$0=\frac{dx}{x}+\frac{\upsilon d\upsilon}{1-\upsilon^2} \quad ή \quad \frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\upsilon}-\frac{1}{1-\upsilon}\right)d\upsilon=0,$$

οπότε με ολοκλήρωση έχουμε

$$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+\upsilon|+\frac{1}{2}\ln|1-\upsilon|=c_1$$

ή

$$\ln\left(\frac{|x|}{|1-\upsilon^2|^{1/2}}\right)=c_1.$$

Με την αντικατάσταση του υ με y/x, η τετλευταία σχέση γίνεται

$$\frac{|x|}{|1-(y^2/x^2)|^{1/2}}=e^{c_1}>0 \quad ή \quad \frac{|x|^2}{|x^2-y^2|^{1/2}}=e^{c_1} \quad ή \quad \frac{x^2}{|x^2-y^2|^{1/2}}=e^{c_1} \quad ή$$

$$\frac{x^2}{|x^2-y^2|^{1/2}}=c \quad (ε)\text{, θέτοντας όπου } c=e^{c_1}$$

Η λύση (ε) ισχύει με την παραδοχή ότι $1-\upsilon^2 \neq 0$ ή $\upsilon \neq 1$ ή $y \neq \pm x$. Η σχέση $\upsilon \neq \pm 1$ συνεπάγεται ότι $x^2-y^2=(x-y)(x+y)\neq 0$, δηλαδή η πρώτη οικογένεια των λύσεων της (α) δίνεται από τη σχέση (β) με τις παραδοχές ότι $x^2-y^2 \neq 0$ και $x \neq 0$.

Για $1-\upsilon^2=0$ ή $y=\pm x$, συνεπάγεται και πάλι ότι η Δ.Ε (α) επαληθεύεται. Επίσης, η περίπτωση $x=0$ επαληθεύει τη Δ.Ε(α). Η τελευταία λύση έχει προφανώς παραληφθεί από τη γενική λύση που δίνεται από τη σχέση (β).

Παράδειγμα 1.4.4: Να λυθεί η ΔΕ

$$(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0 .$$

Λύση: Η Δ.Ε, που γράφεται $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, με την αντικατάσταση $y=\upsilon x$ $(y'=\upsilon' x+\upsilon)$ γίνεται

$$\upsilon' x+\upsilon=\frac{x\upsilon+\sqrt{x^2+x^2\upsilon^2}}{x} \quad \text{ή} \quad \upsilon+x\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{x\upsilon+x\sqrt{1+\upsilon^2}}{x}$$

ή

$$\upsilon+x\frac{d\upsilon}{dt}=\upsilon+\sqrt{1+\upsilon^2} \quad \text{ή} \quad x\frac{d\upsilon}{dx}=\sqrt{1+\upsilon^2} \quad \text{ή} \quad \frac{d\upsilon}{\sqrt{1+\upsilon^2}}=\frac{dx}{x}$$

μετά από ολοκλήρωση, έχουμε

$$\int\frac{d\upsilon}{\sqrt{1+\upsilon^2}}=\ln x+\ln c \quad \text{ή} \quad \ln(\upsilon+\sqrt{1+\upsilon^2})=\ln cx \quad \text{ή} \quad \upsilon+\sqrt{1+\upsilon^2}=cx.$$

Θέτοντας $\upsilon=\dfrac{y}{x}$, έχουμε τη γενική λύση της δοσμένης Δ.Ε που είναι

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2 .$$

Παράδειγμα 1.4.5: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y'=\frac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}} .$$

Λύση: Η δοθείσα Δ.Ε γράφεται

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}{2xy\,e^{(x/y)^2}} . \qquad (\alpha)$$

Θέτουμε $\upsilon=\dfrac{x}{y}$ ή $x=\upsilon y$ $\left(\dfrac{dx}{dy}=\upsilon+y\dfrac{d\upsilon}{dy}\right)$.

οπότε η Δ.Ε (α) γίνεται

$$\upsilon + y\frac{d\upsilon}{dy} = \frac{y^2+y^2e^{\upsilon^2}+2(\upsilon y)^2e^{\upsilon^2}}{2(\upsilon y)\,y\,e^{\upsilon^2}} \quad \text{ή}$$

$$y\frac{d\upsilon}{dy} = \frac{1+e^{\upsilon^2}}{2\upsilon e^{\upsilon^2}} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = \frac{2\upsilon\, e^{\upsilon^2}}{1+e^{\upsilon^2}}\,d\upsilon \quad \text{ή} \quad (\text{δ' ολοκληρώσεως})$$

$$\ln|y| = \ln|1+e^{\upsilon^2}| + c_1 \quad \text{ή} \quad y = |1+e^{\upsilon^2}|\,e^{c_1} \quad \text{ή} \quad y = (1+e^{(x/y)^2})\,e^{c_1} \quad \text{ή}$$

$$y = c\,[1+e^{(x/y)^2}] \quad \text{όπου } c = e^{c_1}.$$

Παράδειγμα 1.4.6: Να λυθεί η Δ.Ε $(y^2-3x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ και να βρεθεί η μερική λύση που πληροί τη σχέση $y(2) = 2$.

Λύση: Η ΔΕ, η οποία γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-y^2}{2xy} \qquad (\alpha)$$

είναι ομογενής. Θέτουμε $y = yx$ $(y' = \upsilon'x+\upsilon)$, οπότε η Δ.Ε (α) γράφεται

$$\upsilon + x\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{3x^2-x^2\upsilon^2}{2x^2\upsilon} \quad \text{ή} \quad \upsilon + x\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{3-\upsilon^2}{2\upsilon} \quad \text{ή}$$

$$x\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{3-3\upsilon^2}{2\upsilon} \quad \text{ή} \quad \frac{2\upsilon d\upsilon}{\upsilon^2-1} = -3\frac{dx}{x}\,\cdot$$

Μετά από ολοκλήρωση, έχουμε

$$\ln|\upsilon^2-1| = -3\ln|x| + \ln c \quad (c>0 \quad \text{ή} \quad \ln|\upsilon^2-1| = \ln\frac{c}{|x^3|} \quad \text{ή} \quad |\upsilon^2-1| = \frac{c}{|x^3|}$$

Θέτουμε, όπου $\upsilon = \dfrac{y}{x}$, και βρίσκουμε τη γενική λύση της δοσμένης ΔΕ. Η λύση αυτή είναι

$$\frac{|y^2-x^2|}{|x|^2} = \frac{c}{|x|^2} \quad \text{ή} \quad |x(y^2-x^2| = c.$$

Για την εύρεση της μερικής λύσης, θέτουμε στη γενική λύση τις τιμές των x και y(x=2, y=2) και βρίσκονται την τιμή της c. Είναι δε $c = 0$. Επομένως, η μερική λύση είναι

$$x\,(y^2-x^2) = 0 \quad \text{ή} \quad y^2 = x^2 \quad \text{ή} \quad y = \pm x.$$

Τα επόμενα παραδείγματα είναι τυπικά παραδείγματα Δ.Ε που για τη λύση χρειαζόμαστε δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς.

Παράδειγμα 1.4.7: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y' = \varphi\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}\right) \qquad (\alpha)$$

όπου α, β, γ, α_1, β_1 και γ_1 είναι σταθεροί αριθμοί.

Λύση: Οι Δ.Ε αυτής της μορφής μετασχηματίζονται σε ομογενείς, χρησιμοποιώντας συνήθως δύο μετασχηματισμούς. Μπορεί να χαρακτηρισθούν ως ψευδο-ομογενείς. Σ' αυτές τις Δ.Ε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν είναι $\gamma = \gamma_1 = 0$ τότε η Δ.Ε (α) παίρνει τη μορφή

$$y' = \varphi\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha_1 x+\beta_1 y}\right),$$

η οποία είναι προφανώς ομογενής πρώτης τάξης.

2. Αν είναι $\gamma^2+\gamma_1^2 \neq 0$ και $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$, τότε το σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \\ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (\beta)$$

έχει μια μοναδική λύση, έστω (x_0, y_0). Στην περίπτωση αυτή με το μετασχηματισμό

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0$$

η εξίσωση (α) γράφεται

$$\frac{d\Psi}{dX} = \frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{\alpha(X+x_0)+\beta(Y+y_0)+\gamma}{\alpha_1(X+x_0)+\beta(Y_1+y_0)+\gamma_1}\right),$$

που μας οδηγεί στην ομογενή Δ.Ε

$$\frac{d\Psi}{dX} = \varphi\left(\frac{\alpha X+\beta Y}{a_1 X+\beta_1 Y}\right) \qquad (\gamma),$$

καθόσον είναι $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$
$\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 = 0$
δεδομένου ότι (x_0, y_0) είναι λύση του συστήματος (β).

3. Αν είναι $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, τότε η Δ.Ε (α) έχει τη μορφή

$$y' = \varphi(Ax+By+\Gamma) \qquad (\delta)$$

που με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $u(x) = Ax+By+\Gamma$ η Δ.Ε (δ) παίρνει τη μορφή $u' = A+B\,\varphi(u)$. Η τελευταία Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

4. Αν είναι $\gamma^2+\gamma_1^2 \neq 0$ και $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta = 0$, τότε υπάρχει αριθμός λ τέτοιος, ώστε $\alpha_1 = \lambda\alpha$ και $\beta_1 = \lambda\beta$, οπότε η Δ.Ε (α) παίρνει τη μορφή

$$y' = \varphi\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\lambda(\alpha x+\beta y)+\gamma_1}\right). \tag{δ}$$

Η Δ.Ε (ε) με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $u(x) = \alpha x+\beta y$ παίρνει τη μορφή

$$u' = \alpha + \beta\,\varphi\left(\frac{u+\gamma}{\lambda u+\gamma_1}\right)$$

που είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.4.8: Να λυθεί η Δ.Ε $y' = \dfrac{2x+3y-4}{4x+y-3}$.

Λύση: Λύνουμε το σύστημα $2x+3y-4 = 0$, $4x+y-3 = 0$ και βρίσκουμε $x = 1/2$, $y = 1$. Θέτουμε

$$X = x - \frac{1}{2}, \quad \Psi = y - 1.$$

οπότε

$$2x+3y-4 = 2X+3\Psi \quad \text{και} \quad 4x+y-3 = 4X+\Psi.$$

Άρα

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dX}{d\Psi} = \frac{2X+3\Psi}{4X+\Psi} = \frac{2+3\dfrac{\Psi}{X}}{4+\dfrac{\Psi}{X}}.$$

Θέτουμε στη συνέχεια $u = \dfrac{\Psi}{X}$, $\Psi' = u'X+u$, οπότε

$$u'X + u = \frac{2+3u}{4+u} \quad ή \quad u'X = \frac{2-u-u^2}{4+u} \quad ή \quad \frac{4+u}{(u+2)(u-1)}\,du = -\frac{dX}{X} \quad ή$$

$$-\frac{2}{3}\frac{du}{u+2} + \frac{5}{3}\frac{du}{u-1} = -\frac{dX}{X} \quad ή \quad \ln X = A+\frac{2}{3}\ln(2+u) - \frac{5}{3}\ln(u-1) \quad ή$$

$$\ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = A + \frac{2}{3}\ln\frac{(2x+y-2)}{x-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}\ln\frac{y-x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}.$$

Παράδειγμα 1.4.9: Να λυθεί η Δ.Ε

$$(2x+3y+1)\,dx + (3x+4y+1)dy = 0.$$

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+3y+1}{3x+4y+1}$ (α).

Επειδή όμως είναι $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{3}{4}$, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 2x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{που έχει ως λύση } (x, y) = (1, -1).$$

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $X = x-1$ και $\Psi = y+1$ στη Δ.Ε (α), οπότε θα έχουμε

$$\frac{d\Psi}{dX} = -\frac{2X+3\Psi}{3X+4\Psi}. \qquad (\beta)$$

Η Δ.Ε (β) είναι ομογενής, οπότε θέτουμε $u = \dfrac{\Psi}{X}$ $(\Psi' = u + u'X)$ και συνεπώς η Δ.Ε (β) παίρνει τη μορφή $u+u'X = -\dfrac{2+3u}{3+4u}$ ή

$$X\frac{du}{dX} = -\frac{2+3u}{3+4u} - u \quad \text{ή} \quad X\frac{du}{dX} = -2\,\frac{1+3u+2u^2}{3+4u} \quad \text{ή}$$

$$2\frac{du}{u} = -\frac{(4u+3)\,du}{2u^2+3u+1}.$$

Από την τελευταία Δ.Ε, μετά από ολοκλήρωση, παίρνουμε τη σχέση

$$-2\ln X + \ln c = \ln(2u^2+3u+1) \quad \text{ή} \quad 2u^2+3u+1 = \frac{c}{X^2}.$$

Στη συνέχεια, θέτοντας όπου $u = \dfrac{\Psi}{X}$ παίρνουμε τη σχέση

$$2\Psi^2 + 3X\Psi + X^2 = c \quad \text{και τελικά} \quad x^2+2y^2+3xy + y = C,$$

αφού είναι $X = x-1$ και $\Psi = y+1$.

Παράδειγμα 1.4.10: Να λυθεί η Δ.Ε $(2x-6y+3)\,dx - (x-3y+1)\,dy = 0.$

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-6y+3}{x-3y+1} \quad \text{και επειδή είναι} \quad \frac{2}{1} = \frac{-6}{-3} \neq \frac{3}{1}$$

θέτουμε $x-3y=u$, οπότε

$$\frac{1}{3}(1-u')=\frac{2u+3}{u+1} \quad ή \quad u'=-\frac{5u+8}{u+1} \quad ή \quad \frac{u+1}{5u+8}du=-dx \quad ή$$

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\frac{1}{5u+8}\right)du=-dx \quad ή \text{ (δι' ολοκληρώσεως)}$$

$$\frac{u}{5}-\frac{3}{25}\ln|5u+8|=-x+c \quad ή$$

$$\frac{1}{5}(x-3y)-\frac{3}{25}\ln|5x-15y+8|+x=c \quad ή$$

$$\frac{6}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{3}{25}\ln|5x-15y+8|=c \quad ή$$

$$10x-5y-\ln|5x-15y+8|=\frac{25c}{3} \quad ή \quad 5(2x-y)-\ln|5x-15y+8|=c_1$$

$$\left(c_1=\frac{25c}{3}\right)$$

1.5. Διαφορικές εξισώσεις τέλειων διαφορικών

Αν το πρώτο μέλος της Δ.Ε

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \qquad (1.5.1)$$

είναι τέλειο διαφορικό της συνάρτησης u, δηλαδή αν

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=du,$$

τότε η γενική λύση της (1.5.1) είναι η οικογένεια των καμπύλων

$$u(x,y)=c$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή. Επειδή δε

$$du=u_x dx+u_y dy \qquad (1.5.2)$$

από τις (1.5.1) και (1.5.2) έπεται ότι

$$u_x=P, \qquad u_y=Q.$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις αυτές ως προς y και x αντίστοιχα, έχουμε

$$u_{xy} = P_y, \qquad u_{yx} = Q_x$$

και συνεπώς

$$\boxed{P_y = Q_x}$$

που είναι η αναγκαία συνθήκη, για να είναι η Δ.Ε τέλειο διαφορικό. Το αντίστροφο ισχύει επίσης. Δηλαδή, αν $P_y = Q_x$, τότε η παράσταση $P\,dx + Q\,dy$ είναι τέλειο διαφορικό, οπότε υπάρχει συνάρτηση u τέτοια, ώστε $u_x = P$ και $u_y = Q$.

Συνεπώς «ικανή και αναγκαία συνθήκη, για να είναι τέλειο διαφορικό το πρώτο μέλος της (1.5.1), είναι $P_y = Q_x$. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ τέτοια, ώστε $u_x = P$ και $u_y = Q$».

Παράδειγμα 1.5.1: Να λυθεί η Δ.Ε. $(2xy+x^2)\,dx + x^2 dy = 0$.

Λύση: Ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy+3x^2) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ζητούμε συνάρτηση u τέτοια ώστε:

$$u_x = 2xy + 3x^2 \qquad (\alpha)$$

$$u_y = x^2 \quad , \qquad (\beta)$$

οπότε, από την

$$(\alpha) \Rightarrow u = \int (2xy+3x^2)\,\partial x = x^2y + x^3 + \varphi(y)\,. \qquad (\gamma)$$

Από τις

$$(\alpha), (\beta) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + x^3 + \varphi(y)\right) \equiv x^2 + \varphi'(y) \equiv x^2 \quad \text{ή}$$

$$\varphi'(y) = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi(y) = c \quad \text{ή} \quad u(x, y) = x^2y + x^3 + c\,,$$

που είναι η ζητούμενη λύση.

Παράδειγμα 1.5.2. Να λυθεί η Δ.Ε: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^y}{x\,e^y + 2y}$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $e^y\,dx + (x\,e^y + 2y)\,dy = 0$.

Στην περίπτωσή μας είναι $P(x, y) = e^y$

$$Q(x, y) = x e^y + 2y$$

Ισχύει $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial e^y}{\partial y} = e^y = \dfrac{\partial}{\partial x}(x e^y + 2y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, δηλαδή $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

και συνεπώς η δοθείσα Δ.Ε είναι τέλειο διαφορικό.

Ζητούμε συνάρτηση $U(x, y)$ τέτοια ώστε

$$U_x = e^y \qquad (\alpha)$$

$$U_y = x e^y + 2y \qquad (\beta)$$

Από τη σχέση (α) $\Rightarrow$

$$U = \int e^y \, \partial x = x e^y + \varphi(y) \qquad (\gamma)$$

Από τις (γ) και (β) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y}[x e^y + \varphi(y)] \equiv x e^y + \varphi'(y) \equiv x e^y + 2y \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = 2y \quad \text{ή} \quad \varphi(y) = y^2 + c_1 \quad \text{ή}$$

$$U(x, y) = xe^y + y^2 + c_1 = c_2 \Rightarrow x e^y + y^2 = c$$

είναι η ζητούμενη λύση.

Παράδειγμα 1.5.3: Να λυθεί η Δ.Ε

$$3x(xy-2)\,dx + (x^3+2y)\,dy = 0.$$

Λύση: Στη Δ.Ε είναι $P(x, y) = 3x(xy-2)$

$$Q(x, y) = x^3 + 2y.$$

Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^3+2y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ δηλαδή η δοθείσα Δ.Ε είναι τέλειο διαφορικό.

Ζητούμε να βρούμε συνάρτηση $U(x, y)$ τέτοια ώστε

$$U_x = 3x(xy-2) \qquad (\alpha)$$

$$U_y = x^3 + 2y \qquad (\beta)$$

οπότε η λύση της Δ.Ε είναι η $U(x, y) = c$.

Από τη σχέση (α) $\Rightarrow$

$$U(x, y) = \int 3x(xy-2)\,\partial x = x^3 y - 3x^2 + \varphi(y). \qquad (\gamma)$$

Από τις σχέσεις (γ), (β) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^3y-3x^2+\varphi(y)\right] \equiv x^3+\varphi'(y) \equiv x^3+2y \Rightarrow$$

$$\varphi'(y)=2y \quad \text{ή} \quad \varphi(y)=y^2+c_1,$$

οπότε

$$U(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2 + c_1 = c_2 \quad \text{ή} \quad x^3y-3x^2+y^2=c \quad (c=c_2-c_1)$$

είναι η ζητούμενη λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα 1.5.4. Να λυθεί η Δ.Ε

$$\left[x+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right]dx+\left[1-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right]dy=0 .$$

Λύση: Στη δοσμένη Δ.Ε έχουμε

$$P(x,y) = x+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}, \quad Q(x,y)=1-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} .$$

Ισχύει $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{y}{(y^2-x^2)^{3/2}} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, οπότε η Δ.Ε είναι τέλειο διαφορικό.

Αναζητούμε συνάρτηση $U(x,y)$ τέτοια ώστε

$$U_x = x+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} \qquad (\alpha)$$

$$U_y = 1-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} . \qquad (\beta) .$$

Από τη σχέση (α) $\Rightarrow U(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\sin^{-1}\dfrac{x}{y}+\varphi(y)$ (γ),

οπότε από τις (γ) και (β) $\Rightarrow -\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\varphi'(y)=1-\dfrac{x}{y(y^2-x^2)^{3/2}} \Rightarrow$

$$\varphi'(y)=1 \quad \text{ή} \quad \varphi(y)=y+c.$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$U(x,y)=\frac{x^2}{2}+\sin^{-1}\frac{y}{x}+y=c.$$

Παράδειγμα 1.5.5: Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών συνθηκών

$$y' = -\frac{(2x\cos y+3x^2y)}{x^3-x^2\sin y-y}, \quad y(0)=2 .$$

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$(2x\cos y + 3x^2y)\,dx + (x^3 - x^2\sin y - y)\,dy = 0 \,.$$

Θέτοντας $P(x, \varphi) = 2x\cos y + 3x^2y$

$Q(x, y) = x^3 - x^2\sin y - y$

Έχουμε $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x\cos y + 3x^2y) = -2x\sin y + 3x^2 =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - x^2\sin y - y) = \frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

δηλαδή η Δ.Ε είναι τέλειο διαφορικό.

Αναζητούμε συνάρτηση $U(x, y)$ τέτοια ώστε

$$U_x = 2x\cos y + 3x^2y \quad (\alpha)$$
$$U_y = x^3 - x^2\sin y - y. \quad (\beta)$$

Εκ της (α) $\Rightarrow U(x, y) = \int (2x\cos y + 3x^2y)\,\partial x = x^2\cos y + x^3y + \varphi(y) \quad (\gamma),$

ενώ εκ των (γ), (β) $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}[x^2\cos y + x^3y + \varphi(y)] \equiv$

$$-x^2\sin y + x^3 + \varphi'(y) \equiv x^3 - x^2\sin y - y \quad ή$$

$$\varphi'(y) = -y \quad ή \quad \varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + c$$

Άρα η γενική λύση της δοσμένης Δ.Ε είναι

$$x^2\cos y + x^3y - \frac{y^2}{2} = c\,.$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$, λύνουμε ως προς c την ισότητα $0 - 0 - \dfrac{4}{2} = c \Rightarrow c = -2.$

Επομένως, η ζητούμενη λύση είναι $x^2\cos y + x^3y - \dfrac{y^2}{2} = -2\,.$

1.6. Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η συνθήκη $P_x = Q_y$ για τη Δ.Ε $P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy = 0$. Τότε, κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί, μήπως υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $R(x, y)$ τέτοια, ώστε η Δ.Ε

$$R(x, y) P(x, y)\,dx + R(x,y) Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (1.6.1)$$

να είναι τέλειο διαφορικό; Αποδεικνύεται ότι σε μερικές περιπτώσεις υπάρχει πράγματι μια τέτοια συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή, τότε, καλείται **ολοκληρωτικός παράγοντας** της Δ.Ε.

Έστω, λοιπόν, ότι η Δ.Ε (1.6.1) είναι διαφορική εξίσωση τέλειου διαφορικού. Τότε,

$$\frac{\partial}{\partial y}(RP) = \frac{\partial}{\partial x}(P \cdot Q) \quad \text{ή} \quad P_y R + P R_y = Q_x R + Q R_x$$

ή

$$\boxed{P R_y - Q R_x = R\,(Q_x - P_y).} \qquad (1.6.2)$$

Άρα, η συνάρτηση που ζητάμε πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη (1.6.2) που είναι μια Δ.Ε με μερικές παραγώγους. Η γενική λύση της (1.6.2) συνήθως, βρίσκεται δύσκολα. Ωστόσο, εδώ δε ζητούμε τη γενική λύση της, αλλά μια οποιαδήποτε μερική λύση που μερικές φορές, όπως στις παρακάτω περιπτώσεις, βρίσκεται εύκολα.

Α. Ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $R = R(x)$ **ή** $R = R(y)$

Στην περίπτωση που ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι συνάρτηση μόνο του x ή μόνο του y, θα είναι $R_y = 0$ ή $R_x = 0$, αντίστοιχα, οπότε, από την (1.6.2), θα έχουμε

$$\boxed{-\frac{R_x}{R} = \frac{Q_x - P_y}{Q} = \varphi(x)}, \qquad \text{συνάρτηση μόνο του } x$$

ή

$$\boxed{\frac{R_y}{R} = \frac{Q_x - P_y}{P} = \sigma(y)}, \qquad \text{συνάρτηση μόνο του } y$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι

$$R(x) = \exp\Big(-\int \varphi(x)\,dx\Big) \quad \text{ή} \quad R(y) = \exp\Big(\int \sigma(y)\,dy\Big),$$

αντίστοιχα.

Β. Ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής, $R = R(x+y)$ **ή** $R = R(x-y)$

Αν $R = R(x+y) = R(z)$, οπότε $R_z = R_x = R_y$, από την (1.6.2) έχουμε ότι

$$\boxed{-\frac{R_x}{R} = \frac{Q_x - P_y}{Q - P} = \varphi(z)} \quad \text{ή} \quad R(z) = \exp\Big(-\int \varphi(z)\,dz\Big).$$

Αν $R = R(x-y) = R(z)$, οπότε $R_z = R_x = -R_y$, από τη (1.6.2), έχουμε ότι

$$\boxed{-\frac{R_y}{R} = \frac{Q_x - P_y}{Q+P} = \sigma(z)} \quad \text{ή} \quad R(z) = \exp\left(-\int \sigma(z)\, dz\right)$$

Εκτός από τις περιπτώσεις ολοκληρωτικού παράγοντα συνάρτηση μόνο του x ή μόνο του y ή μόνο του $x+y$ ή $x-y$, μπορούν να εξετασθούν ολοκληρωτικοί παράγοντες του γινομένου xy ή και άλλων παραστάσεων. Επίσης, πολλές φορές, όταν κανείς είναι εξοικειωμένος με τα ολικά διαφορικά, βρίσκει ολοκληρωτικούς παράγοντες με απλή παρατήρηση. Π.χ , φαίνεται αμέσως ότι

$$x\, dx + y\, dy = \frac{1}{2}\, d(x^2+y^2)$$

$$y\, dx + x\, dy = d(xy)$$

$$\frac{y\, dx - x\, dy}{x^2} = -\, d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y\, dx - x\, dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{κ.λπ.}$$

Με κατάλληλη αναδιάταξη των όρων και κατάλληλες πράξεις η Δ.Ε γίνεται ολικό διαφορικό συνάρτησης, οπότε ευρίσκεται αμέσως η γενική λύση, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.6.1. Να λυθεί η Δ.Ε $y\, dx + (3+3x-y)\, dy = 0$.

Λύση: Έχουμε $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = 3+3x-y$, οπότε $P_y = 1 \neq Q_x = 3$. Συνεπώς, δεν είναι Δ.Ε τέλειου διαφορικού. Παρατηρούμε ότι $\frac{Q_x - P_y}{Q} = $
$= \frac{3-1}{3+3x-y}$ δεν είναι συνάρτηση μόνο του x, ενώ $\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{3-1}{y} = \frac{2}{y}$ είναι συνάρτηση μόνο του y και ο ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι ο $R(y) = \exp\left(\int \frac{2}{y}\, dy\right) = y^2$. Πολλαπλασιάζοντας τη Δ.Ε με y^2, βρίσκουμε

$$y^3 dx + (3y^2+3xy^2-y^3)\, dy = d(xy^3) + dy^3 - \frac{1}{4}\, dy^4 = 0\,,$$

οπότε

$$xy^3+y^3-\frac{1}{4}y^4=c,$$

είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα 1.6.2: Να λυθεί η Δ.Ε. $(y^3-x^2y)\,dx+(x^3-xy^2)\,dy=0$.

Λύση

$$\frac{Q_x-P_y}{Q-P}=\frac{3x^2-y^2-3y^2+x^2}{x^3-xy^2-y^3+x^2y}=\frac{4}{x+y}.$$

Άρα

$$R\,(x+y)=R\,(z)=\exp\Big(-\int\frac{4}{z}\,dz\Big)=(x+y)^{-4}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη Δ.Ε με $(x+y)^{-4}$, έχουμε

$$\frac{(x^3-x^2y)\,dx+(x^3-xy^2)\,dy}{(x+y)^4}=d\,\frac{xy}{(x+y)^2}=0 \quad \text{ή} \quad \frac{xy}{(x+y)^2}=c,$$

που είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα 1.6.3: Να λυθούν οι Δ.Ε:

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+y}{x}$ b) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2+4xy}{2x^2+3y^2}$ d) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2y+8xy^2}{x^3+8xy+12y^2}$.

Λύση: Προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε τις Δ.Ε σε ολικά διαφορικά.

a) $$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+y}{x}\Rightarrow (y^2+y)\,dx-x\,dy=0\Rightarrow y\,dx-x\,dy+y^2dx=0\Rightarrow$$

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+dx=0\Rightarrow d\Big(\frac{x}{y}\Big)+dx=0\Rightarrow \frac{x}{y}+x=c.$$

b) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy}{x^2+y^2}\Rightarrow 2xy\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0\Rightarrow$$

$$2xy\,dx+x^2dy+y^2dy=0\Rightarrow d\,(x^2y)+y^2dy=0\Rightarrow x^2y+\frac{1}{3}y^3=c.$$

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2+4xy}{2x^2+3y^2} \Rightarrow (3x^2+4xy)\,dx+(2x^2+3y^2)\,dy = 0 \Rightarrow$

$3x^2dx+(4xy\,dx+2x^2dy)+3y^2dy = 0 \Rightarrow$

$d\,(x^3)+d\,(2x^2y)+3y^2dy = 0 \Rightarrow x^3+2x^2y+y^3 = c.$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y+8xy^2}{x^3+8x^2y+13y^2} \Rightarrow (3x^2y+8xy^2)\,dx+(x^3+8x^2y+12y^2)\,dy=0 \Rightarrow$

$(3x^2y\,dx+x^3dy)+(8xy^2dx+8xy^2dy)+12y^2dy = 0 \Rightarrow$

$d\,(x^3y)+d\,(4x^2y^2)+d\,(4y^3) = 0 \Rightarrow x^2y+4x^2y^2+4y^3 = c\,.$

1.7. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Η τυπική μορφή των γραμμικών Δ.Ε 1ης τάξης είναι η

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p\,(x)\,y = f\,(x)} \tag{1.7.1}$$

πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (1.7.1) με τον παράγοντα $e^{P(x)\,dx}$, οπότε

$$y'e^{\int p\,(x)\,dx} + p\,(x)\,ye^{\int p\,(x)\,dx} = f\,(x)\,e^{\int p\,(x)\,dx}$$

ή

$$\left[y\,e^{\int p\,(x)\,dx}\right]' = f\,(x)\,e^{\int p\,(x)\,dx} \tag{1.7.2}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (1.7.2) έχουμε

$$ye^{\int p\,(x)\,dx} = \int f\,(x)\,e^{\int p\,(x)\,dx}\,dx + c$$

ή

$$\boxed{y = e^{-\int p\,(x)\,dx}\left[c + \int f\,(x)\,e^{\int p\,(x)\,dx}dx\right]} \tag{1.7.3}$$

που είναι η γενική λύση της (1.7.1).

Παράδειγμα 1.7.1: Να λυθεί η Δ.Ε. $y'+5y = 50$.

Λύση: Εφαρμόζοντας τον τύπο (1.7.3) με $p\,(x)=5$ και $f\,(x)=50$, έχουμε

$$y = e^{-5dx}\left[c + \int 50e^{\int 5dx}dx\right] = e^{-5x}\left[c + \int 50e^{5x}\,dx\right] =$$
$$= ce^{-5x} + 10e^{-5x}\int e^{5x}d\,(5x) = ce^{-5x} + 10\,.$$

Παράδειγμα 1.7.2: Να λυθεί η Δ.Ε $xy'+2y = x^2$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται, $y'+\frac{2}{x}y = x$, οπότε για $p(x) = \frac{2}{x}$ και $f(x) = x$, ο τύπος (1.7.3) δίνει:

$$y = e^{-\int(2/x)\,dx}\left[c + \int x e^{\int(2/x)\,dx}dx\right] = e^{-2\ln x}\left[c + \int xe^{2\ln x}dx\right] =$$

$$= \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int x^3 dx = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^4}{4} = \frac{c}{x^2} + \frac{x^2}{4}.$$

Παράδειγμα 1.7.3: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y'\cos x + y\sin x + \cos^2 x = 0\,.$$

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{\cos x}y = -\cos x \quad (\text{αν } \cos x \neq 0)\,,$$

οπότε

$$p(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{και} \quad f(x) = -\cos x.$$

Δια εφαρμογής του τύπου (1.7.3) έχουμε

$$y = e^{-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}\left[c + \int(-\cos x)\,e^{\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}dx\right] =$$

$$= e^{\ln(\cos x)}\left[c - \int\cos x\, e^{-\ln(\cos x)}dx\right]$$

$$= \cos x\left[c - \int\cos x\,\frac{1}{\cos x}\,dx\right] = \cos x\left[c - \int dx\right] = (c-x)\cos x\,.$$

Παράδειγμα 1.7.4: Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} - 4xy = x\,, \quad y(2) = 3\,.$$

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $\frac{dy}{dx} - \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{x}{x+1}$, οπότε για

$$p(x) = -\frac{4x}{x^2+1} \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}\text{, ο τύπος 1.7.3 δίνει}$$

$$y = e^{\int(4x/x^2+1)}\left[c - \int\frac{x}{x^2+1}\cdot e^{-\int(\frac{4x}{x^2+1})dx}dx\right] \quad ή$$

$$y = e^{2\ln(x^2+1)}\left[c - \int \frac{x}{x^2+1}\, e^{-2\ln(x^2+1)}dx\right] \quad ή$$

$$y = e^{\ln(x^2+1)^2}\left[c - \int \frac{x}{x^2+1}\, e^{-\ln(x^2+1)^2}dx\right] \quad ή$$

$$y = (x^2+1)^2\left[c - \int \frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\right] \quad ή$$

$$y = (x^2+1)^2\left[c - \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}\right] \quad ή \quad y = (x^2+1)^2\left[c + \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] \quad ή$$

$$y = c(x^2+1)^2+1 .$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(2)=3$, λύνουμε ως προς c την ισότητα $3 = c(1+2^2)^2+1$ ή $3=25c+1$ ή $c=2/25$.

Άρα η ζητούμενη λύση είναι η $y = \frac{2}{25}(1+x^2)^2+1$.

Παράδειγμα 1.7.5. Να λυθεί η ΔΕ

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x} .$$

Λύση: Δι' εφαρμογής του τύπου 1.7.3, με $P(x) = \frac{2x+1}{x}$ και $f(x) = e^{-2x}$, έχουμε

$$y = e^{-\int \frac{2x+1}{x}dx}\left[c + \int e^{-2x} e^{\int \frac{2x+1}{x}dx}\right] \quad ή$$

$$y = e^{-(2x+\ln|x|)}\left[c + \int e^{-2x}\, e^{(2x+\ln|x|}dx\right] \quad ή$$

$$y = e^{-\ln(xe^{2x})}\left[c + \int e^{-2x}\cdot e^{\ln(xe^{2x})}dx\right] \quad ή$$

$$y = \frac{1}{xe^{2x}}\left[c + \int e^{-2x}\, xe^{2x}\,dx\right] \quad ή$$

$$y = \frac{1}{xe^{2x}}\left[c + \int x\,dx\right] \quad ή$$

$$y = \frac{1}{xe^{2x}}\left(c + \frac{x^2}{2}\right)$$

Παράδειγμα 1.7.6. Να λυθεί η ΔΕ

$$y' + P(x)y = f(x)y^{\nu} \quad (\alpha),$$

με $\nu \neq 0,1$ (Δ.Ε Bernoulli).

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (α), με $y^{-\nu}$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$y^{-\nu}\frac{dy}{dx} + P(x)(y^{1-\nu} = f(x) \quad (\beta)$$

Θέτουμε $y^{1-\nu} = \omega$ (γ) όπου $\omega = \omega(x)$. Εκ της (γ) $\Rightarrow$

$$(1-\nu)y^{-\nu}y' = \omega' \quad \text{ή} \quad y^{-\nu}y' = \frac{\omega'}{1-\nu}$$

Εκ των (β) και (δ) $\Rightarrow \dfrac{\omega'}{1-\nu} + P(x)\,\omega = f(x)$ ή

$$\frac{d\omega}{dx} + (1-n)\,P(x)\,\omega = (1-\nu)\,f(x). \quad (\varepsilon)$$

Η (ε) είναι γραμμική (με εξηρτημένη την ω) και συνεπώς μπορεί να λυθεί. Στη γενική λύση της (ε) θέτοντας την τιμή της ω εκ της (γ), λαμβάνουμε την γενική λύση της (α). Για $\nu = 0$, η δοσμένη ΔΕ είναι γραμμική, ενώ για $\nu = 1$ η ΔΕ είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.7.7: Να λυθεί η Δ.Ε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{xy + x^2y^3}$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $\dfrac{dx}{dy} - xy = x^2y^3$ (1). Πολλαπλασιάζουμε με x^{-2}, οπότε θα έχουμε

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} - yx^{-1} = y^3 \quad (2).$$

Θέτοντας $x^{-1} = \omega$ $(\omega_y = -x^{-2}\,x_y')$, η Δ.Ε (2) γράφεται

$$-\frac{d\omega}{dy} - y\omega = y^3 \quad \text{ή} \quad \frac{d\omega}{dy} + y\omega = -y^3. \quad (3)$$

Η Δ.Ε (3) είναι γραμμική, οπότε η γενική λύση της είναι

$$\omega\, e^{y^2/2} = e^{y^2/2}(2-y^2) - c_1 \quad \text{ή} \quad \omega = (2-y^2) - c_1\, e^{-y^2/2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{x} = (2-y^2) - c_1\, e^{-y^2/2}.$$

Παράδειγμα 1.7.8: Να λυθεί η Δ.Ε $y' - \dfrac{3}{x}y = x^4y^{1/3}$ (1)

Λύση: Η Δ.Ε (1) είναι τύπου Bernoulli, με $\nu = \frac{1}{3}$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με $y^{-1/3}$ και τα δύο μέλη της, θα έχουμε

$$y^{-1/3}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y^{2/3} = x^4. \tag{2}$$

Θέτοντας $\omega = y^{2/3}$ και $\frac{d\omega}{dx} = \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}$, η Δ.Ε (2) γίνεται

$$\frac{d\omega}{dx} - \left(\frac{2}{x}\right)\omega = \frac{2}{3}x^4. \tag{3}$$

Η ΔΕ (3) είναι γραμμική, οπότε δ' εφαρμογής του τύπου (1.7.3) βρίσκουμε $\frac{\omega}{x^2} = \frac{2}{9}x^3 + c$. Επανερχόμενοι και πάλι στο μετασχηματισμό $\omega = y^{2/3}$, θα έχουμε $y^{2/3} = cx^2 + \frac{2}{9}x^5$ ή $y = \left(cx^2 + \frac{2}{9}x^5\right)^{3/2}$.

Παράδειγμα 1.7.9: Να λυθεί η Δ.Ε

$$6y^2\,dx - x(2x^3 + y)\,dy = 0. \tag{1}$$

Λύση: Η ΔΕ (1) γράφεται

$$\frac{dx}{dy} - \left(\frac{1}{6y}\right)x = \left(\frac{1}{3y^2}\right)x^4. \tag{2}$$

Η Δ.Ε (2) είναι τύπου Bernoulli με $\nu = 4$. Πολαπλασιάζοντες και τα δύο μέλη της με x^{-4}, παίρνουμε

$$x^{-4}\frac{dx}{dy} - \left(\frac{1}{6y}\right)x^{-3} = \frac{1}{3y^2}. \tag{3}$$

Η Δ.Ε (3), θέτοντας $\omega = x^{-3}$ (οπότε $\omega_y' = x^{-4}x_y'$), γίνεται

$$\frac{d\omega}{dy} + \frac{1}{2y}\omega = -\frac{1}{y^2}.$$

Η τελευταία Δ.Ε είναι γραμμική 1ης τάξης, οπότε η γενική λύση της

$$y^{1/2}\omega = 2y^{-(1/2)} + c'$$

ή, επειδή $\omega = x^{-3}$,

$y = 2x^3 + c'y^{1/2}x^3$ ή $(y-2x^3)^2 = (c')^2\,y\,x^6$ ή $(y-2x^3)^2 = cx^6y$ $(c = (c')^2)$.

Παράδειγμα 1.7.10: Να λυθεί η Δ.Ε $y' - \frac{1}{3x} y = \frac{1}{3} xy^{-1}$.

Λύση: Η δοθείσα Δ.Ε που γράφεται $y' - \frac{1}{3x} y = \frac{1}{3} xy^{-1}$ είναι τύπου Bernoulli. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη αυτής με y, έχουμε

$$yy' - \frac{1}{3x} y^2 = \frac{1}{3} x \quad (1).$$

Θέτουμε $\quad y^2 = \omega \quad (2),$

όπου $\omega = \omega(x)$. Παραγωγίζουμε την (2) ως προς x, οπότε έχουμε

$$2yy' = \omega' \quad \text{ή} \quad yy' = \frac{\omega'}{2} \quad (3)$$

Εκ των (2), (3) $\Rightarrow$

$$\frac{\omega'}{2} - \frac{1}{3x} \omega = \frac{1}{3} x \quad \text{ή} \quad \frac{d\omega}{dx} - \frac{2}{3x} \omega = \frac{2x}{3} \quad (4)$$

Η Δ.Ε (4) είναι γραμμική, οπότε θα έχουμε

$$\omega = e^{\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x}} \left[c + \int \frac{2x}{3} e^{-\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x}} dx \right] = e^{2/3 \ln x} \left[c + \int \frac{2x}{3} e^{-\frac{2}{3} \ln x} dx \right] =$$

$$= e^{\ln x^{2/3}} \left[c + \frac{2}{3} \int x\, e^{-\ln x^{2/3}} dx \right] = x^{2/3} \left[c + \frac{2}{3} \int x \cdot \frac{1}{x^{2/3}} dx \right] =$$

$$= x^{2/3} \left[c + \frac{2}{3} \int x^{1/3} dx \right] = x^{2/3} \left[c + \frac{1}{2} x^{4/3} \right].$$

Τελικά, θέτοντας την τιμή του ω εκ της (2), έχουμε τη γενική λύση της δοθείσης Δ.Ε

$$y^2 = x^{2/3} \left[c + \frac{1}{2} x^{4/3} \right].$$

1.8. Διαφορικές εξισώσεις του Riccati

Μια Δ.Ε της μορφής

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\, y^2 + q(x)\, y + r(x) = 0} \quad (1.8.1)$$

λέγεται **Δ.Ε του Riccati.** Η Δ.Ε του Riccati έχει διάφορες εφαρμογές σε μια προχωρημένη θεώρηση των **διαφορικών εξισώσεων**.

Για να βρούμε τη γενική λύση της, πρέπει να γνωρίζουμε μια μερική λύση της, έστω $y_1 = y_1(x)$. Οπότε, θέτοντας

$$\boxed{y = y_1 + \frac{1}{u}} \qquad \boxed{y' = y_1' - \frac{1}{u^2}u'}$$

η Δ.Ε (1.8.1) μετασχηματίζεται πάντοτε σε γραμμική Δ.Ε 1ης τάξης, όπως φαίνεται και στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.8.1: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε:

$$y' + \frac{1-x}{2x^2}y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{x-1}{2} = 0,$$

που έχει μια μερική λύση την $y_1 = x$.

Λύση: Θέτουμε $y = x + \frac{1}{u}$, $\quad y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$, οπότε

$$1 - \frac{u'}{u^2} + \frac{1-x}{2x^2}\left(x^2 + \frac{2}{u}x + \frac{1}{u^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{u^2}u' + \frac{1-x}{x}\frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2}\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{u} = 0 \Rightarrow$$

$$-2x^2u' + 2xu - 2x^2u + 1 - x - 2xu = 0 \Rightarrow 2x^2(u'+u) + x - 1 = 0$$

ή

$$u' + u = \frac{1-x}{2x^2}.$$

Η τελευταία αυτή γραμμική Δ.Ε λύνεται εύκολα, οπότε

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{2x}{cxe^{-x} - 1} = x\,\frac{cx + e^x}{cx - e^x}.$$

Παράδειγμα 1.8.2: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2$$

που έχει μία μερική λύση την $y_1 = -\frac{1}{2}e^x$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $y' - y^2 - \left(1 + \frac{5}{2} e^x\right) y - e^{2x} = 0$ (1)

Η Δ.Ε (1) είναι Riccati και προς εύρεση της γενικής λύσης της θέτουμε

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad (2), \text{ οπότε } y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} \quad (3).$$

Εκ των (1), (2) (3) $\Rightarrow$ $u' + \left(\frac{3}{2} e^x + 1\right) u = -1$ (4)

Η Δ.Ε (4) είναι γραμμική, οπότε ακολουθώντας τη γνωστή μέθοδο εύρεσης της λύσης της, βρίσκουμε $u = \dfrac{2/3 + c\, e^{-3e^x/2}}{e^x}$. Θέτοντας την τιμή της u στην (2), έχουμε τη γενική λύση της Δ.Ε (1), δηλαδή

$$y = -\frac{1}{2} e^x + \frac{e^x}{2/3 + c\, e^{-3e^x/2}}.$$

Παράδειγμα 1.8.3: Να λυθεί η Δ.Ε $2x^2y' - (x-1)(y^2 - x^2) = 2xy$ της οποίας μία μερική λύση είναι η $y_1 = x$.

Λύση: Η δοθείσα Δ.Ε γράφεται

$$y' - \frac{x-1}{2x^2} y^2 - \frac{1}{\chi} y + \frac{x-1}{2} = 0 \quad (1)$$

Η Δ.Ε (1) είναι Riccati και προς εύρεση της γενικής λύσης αυτής, θέτουμε

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad (2), \text{ οπότε } y' = y_1 - \frac{u'}{u^2} \quad (3).$$

Εκ των (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $u' - u = \frac{x-1}{2x^2} u^2$ (4)

λαμβάνοντας υπόψη ότι η y_1 είναι λύση της (1) και συνεπώς αυτή θα επαληθεύεται δηλαδή $y_1' - \frac{x-1}{2x^2} y_1^2 - \frac{1}{x} y_1 + \frac{x-1}{2} = 0$

Η Δ.Ε (4) είναι Bernoulli και ακολουθώντας τη γνωστή μέθοδο εύρεσης της λύσης αυτής, βρίσκουμε $u = \dfrac{2x}{2xce^{-x} - 1}$. Θέτουμε την τιμή του u στην $y = y_1 + u$, έχουμε τη γενική λύση της Δ.Ε (1), δηλαδή

$$y = x + \frac{2x}{2xce^{-x} - 1} = x\frac{cx + e^x}{cx - e^x} \bullet$$

Παράδειγμα 1.8.4: Να λυθεί η Δ.Ε

$$x^2 y' = x^2y^2 + xy + 1,$$

αν αυτή έχει μία μερική λύση την $y_1 = -1/x$.

Λύση: Η δοθείσα Δ.Ε γράφεται $y' - y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2} = 0$ (1)

Αυτή είναι εξίσωση του Riccati, προς εύρεση της γενικής λύσης της (1), θέτουμε $y = y_1 + \frac{1}{u}$ (2), οπότε $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ (3).

Εκ των (1), (2), (3) $\Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = -1$ (4), λαμβάνοντας υπόψη ότι και

$$y_1' - y_1^2 - \frac{1}{x}y_1 - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Η γραμμική Δ.Ε (4) έχει γενική λύση

$$u = e^{-\int dx/x}\left[c - \int e^{-\int dx/x} dx\right] = e^{-\ln x}\left[c - \int e^{\ln x} dx\right] =$$

$$\frac{1}{x}\left[c - \int x\, dx\right] = \frac{1}{x}\left[c - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{c - x^2}{2x}, \text{ δηλαδή}$$

$$u = \frac{c - x^2}{2x},$$

οπότε η γενική λύση της (1) είναι

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{c - x^2} \quad \text{ή} \quad y = \frac{3x^2 - c}{x(c - x^2)} \bullet$$

1.9. Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης που ανάγονται σε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Μερικές Δ.Ε τάξης ανώτερης της 1ης μπορούν να λυθούν εύκολα με αναγωγή τους σε Δ.Ε 1ης τάξης. Οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιήσουμε δίνονται με τα παρακάτω αντιπροσωπευτικά παραδείγματα

Α) Διαφορικές εξισώσεις της μορφής $y^{(n)} = f(x)$.

Παράδειγμα 1.9.1: Να λυθεί η Δ.Ε $y^{(iv)} = x$.

Λύση: Ολοκληρώνουμε διαδοχικά και έχουμε

$$\int y^{(iv)}\,dy = \int x\,dx \quad \text{ή} \quad y''' = \frac{1}{2}x^2 + c_1 ,$$

$$\int y'''dy = \int\left(\frac{1}{2}x^2 + c_1\right)dx \quad \text{ή} \quad y'' = \frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2 ,$$

$$\int y''dy = \int\left(\frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2\right)dx \quad \text{ή} \quad y' = \frac{1}{24}x^4 + c_1x^2 + c_2x + c_3 ,$$

$$\int y'dy = \int\left(\frac{1}{24}x^4 + c_1x^2 + c_2x + c_3\right)dx ,$$

$$y = \frac{1}{120}x^5 + \alpha x^3 + \beta x^2 + cx + d \qquad \alpha,\ \beta,\ c,\ d \ \text{σταθερές}$$

Β) Διαφορικές εξισώσεις στις οποίες λείπει το y, δηλαδή της μορφής $\varphi(x, y') = 0$

Παράδειγμα 1.9.2: Να λυθεί η Δ.Ε $xy'' + y' = 4x$

Λύση: Θέτουμε $y' = \upsilon$, οπότε $y'' = \upsilon'$. Άρα

$$x\upsilon' + \upsilon = 4x \quad \text{ή} \quad (x\upsilon)' = 4x \quad \text{ή} \quad \int (x\upsilon)'dx = \int 4x\,dx \quad \text{ή}$$

$$x\upsilon = 2x^2 + c \quad \text{ή} \quad \upsilon = y' = \frac{2x^2+c}{x} = 2x + \frac{c}{x} \quad \text{ή} \quad y = x^2 + c\ln x + c_1 \bullet$$

Γ) Διαφορικές εξισώσεις στις οποίες λείπει το x, δηλαδή της μορφής $\varphi(y, y') = 0$

Παράδειγμα 1.9.3: Να λυθεί η Δ.Ε $y'' = y^2$, αν $\frac{dy}{dx} = 0$ όταν $y=0$, και $x=0$ όταν $y = \infty$.

Λύση: Θέτουμε $\frac{dy}{dx} = p$, οπότε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

ή

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy} \bullet$$

Συνεπώς

$$p\frac{dp}{dy}=y^2 \quad \acute{\eta} \quad p\cdot dp=y^2dy \quad \acute{\eta} \quad \int p\,dp=\int y^2dy \quad \acute{\eta}$$

$$\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{3}y^3+c_1 \quad \acute{\eta} \quad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}y^3+c}\,.$$

Αλλά από τις αρχικές συνθήκες, $c=0$. Άρα

$$dx=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,y^{-3/2}\,dy \quad \acute{\eta} \quad x=\pm\sqrt{6}\,y^{-1/2}+c_2\,.$$

Επειδή δε $x=0$ όταν $y=\infty$, έπεται ότι $c_2=0$, οπότε τελικά

$$x=\pm\sqrt{6}\,y^{-1/2}.$$

Δ) Διαφορικές εξισώσεις της μορφής $\varphi(x,y,y')=0$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

1η περίπτωση: Η $\varphi(x,y,y')=0$ έχει τη μορφή

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\nu}+\varphi_1(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\nu-1}+\varphi_2(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\nu-2}+\ldots+\varphi_\nu(x,y)=0.$$

Αν η αλγεβρική εξίσωση ως προς y' είναι επιλυτή με ρίζες αυτής τις $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $f_2(x,y),\ldots,f_\nu(x,y)$ δηλαδή έχουμε τις σχέσεις:

$$y'=f_1(x,y),\ y'=f_2(x,y),\ \ldots,\ y'=f_\nu(x,y)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις, μετά από τις σχετικές ολοκληρώσεις, παίρνουμε

$$\sigma_1(x,y,c)=0,\ \sigma_2(x,y,c)=0,\ldots,\ \sigma_\nu(x,y,c)=0,$$

οπότε η γενική λύση της δοθείσης Δ.Ε θα είναι

$$\sigma_1(x,y,c),\ \sigma_2(x,y,c)\ \ldots.\ \sigma_\nu(x,y,c)=0\,.$$

Παράδειγμα 1.9.4. Να λυθεί η Δ.Ε:

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2+xy+y^2)\frac{dy}{dx}+x^2+xy=0\,. \qquad (\alpha)$$

Λύση: Η Δ.Ε (α) επιλύεται ως προς την y', οπότε θα έχουμε:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x}\quad (1)\quad \kappa\alpha\iota\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}-1\,. \quad (2)$$

Η Δ.Ε (1) γράφεται $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = -1$ (γραμμική) και έχει γενική λύση την $x^2 + 2xy - c = 0$ (3), ενώ η Δ.Ε (2) είναι χωριζόμενων μεταβλητών και έχει γενική λύση την $y^2 + x^2 - c = 0$ (4). Επομένως η γενική λύση της Δ.Ε (α) προκύπτει από το γινόμενο των (3) και (4), δηλαδή είναι η

$$(x^2 + 2xy - c)\,(x^2 + y^2 - c) = 0.$$

Παράδειγμα 1.9.5: Να λυθεί η Δ.Ε

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - (x+2y+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (x+2y+2xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\,\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (\alpha)$$

Λύση: Οι ρίζες της αλγεβρικής εξίσωσης της (α) ως προς $\frac{dy}{dx}$ είναι

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad (1), \qquad \frac{dy}{dx} = x \quad (2), \qquad \frac{dy}{dx} = 2y \quad (3) \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dx} = 1. \ (4)$$

Από τις εξισώσεις (1), (2) (3) και (4) παίρνουμε τις

$$y = c, \quad y = \frac{x^2}{2} + c\,, \quad y = c\,e^{2x} \quad \text{και} \quad y = x + c, \text{ οπότε}$$

η γενική λύση της (α) θα είναι:

$$(y-c)\left(y - \frac{x^2}{2} - c\right)(y - c\,e^{2x})\,(y - x - c) = 0.$$

2η περίπτωση: Η Δ.Ε να μπορεί να λυθεί ως προς x, δηλαδή να παίρνει τη μορφή

$$x = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = f(y, p) \quad (1) \text{ όπου } p = \frac{dy}{dx}.$$

Η σχέση (1) παραγωγιζόμενη ως προς y γίνεται

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{p} = f_1\left[y, p, \frac{dp}{dy}\right]. \ (2)$$

Η Δ.Ε (2) είναι πρώτης τάξης και πρώτου βαθμού (θεωρώντας την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την p ως συνάρτηση της y) και έχει γενική λύση την $\varphi(y, p, c) = 0$ (3).

Εκ των (1) και (3), δια απαλοιφής της παραμέτρου p, παίρνουμε τη γενική λύση της ζητούμενης εξίσωσης.

Αν $y = \varphi_1(p, c)$ (α) είναι η τιμή της y εκ της (3), τότε εκ της (1) θα έχουμε $x = f[\varphi_1(p, c)] = 0$ (β).

Οι σχέσεις (α) και (β) αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της γενικής λύσης της ζητούμενης Δ.Ε.

Παράδειγμα 1.9.6: Να λυθεί η Δ.Ε

$$6y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3x\frac{dy}{dx} - y = 0 \,. \qquad (1)$$

Λύση: Λύνοντας τη δοθείσα Δ.Ε ως προς x, παίρνουμε

$$x = \frac{y - 6y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{3\frac{dy}{dx}} = \frac{y}{3p} - 2y^2p \quad (\alpha), \qquad \text{όπου } \frac{dy}{dx} = p$$

Παραγωγίζοντας την (α) ως προς y, έχουμε

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p - y\frac{dp}{dy}}{3p^2} - 4yp - 2y^2\frac{dp}{dy} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{p - y\frac{dp}{dy}}{3p^2} - 4yp - 2y^2\frac{dp}{dy} \quad \text{ή}$$

$$\left[2p + y\frac{dp}{dy}\right][1 + 6yp^2] = 0 \,. \quad (\beta)$$

Η γενική λύση της Δ.Ε (1) βρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης

$$2p + y\frac{dp}{dy} = 0 \ \text{ή} \ \frac{dp}{p} = -2\frac{dy}{y} \ \text{ή} \ \ln p = -2\ln y + \ln c \ \text{ή} \ p = \frac{c}{y^2} \quad (\gamma)$$

Με την απαλοιφή της παραμέτρου p μεταξύ των (α) και (γ) προκύπτει η ζητούμενη λύση της (1) που είναι $x = \frac{y^3}{3c} - 2c$ ή $3cx = y^3 - c^2$.

Στην περίπτωση που είναι $1 + 6yp^2 = 0$ (εκ της β) έχουμε την ιδιάζουσα λύση που είναι $y^3 = -3/8\, x^2$, λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (1).

Οι παραμετρικές εξισώσεις της γενικής λύσης είναι

$$y^2 = \frac{c}{p} \qquad \text{και} \qquad x = \frac{\sqrt{c}}{3p\sqrt{p}} - 2c .$$

3η περίπτωση. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατό η Δ.Ε να λυθεί ως y, δηλαδή να τεθεί υπό τη μορφή

$$y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = f(x, p) \qquad (\alpha) \qquad \text{όπου είναι} \quad p = \frac{dy}{dx} .$$

Παραγωγίζοντας την (α) ως προς x, έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \quad \text{ή} \quad p = f_1\left[x, p, \frac{dp}{dx}\right] \quad (\beta).$$

Η προκύπτουσα Δ.Ε (β), θεωρώντας την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την p ως συνάρτηση του x, είναι α΄ τάξης και 1ου βαθμού, έχει γενική λύση της μορφής

$$\sigma(x, p, c) = 0 . \qquad (\gamma)$$

Δι' απαλοιφής της παραμέτρου p μεταξή των σχέσεων (α) και (β), βρίσκουμε τη γενική λύση της δοθείσης εξισώσεως.

Αν $x = \sigma_1(p, c)$ (δ) είναι η τιμή της x (εκ της σχέσεως (γ)), τότε η σχέση (α) γίνεται

$$y = f\left[\sigma_1(p, c), p\right] . \qquad (\varepsilon)$$

Οι εξισώσεις (δ) και (ε) είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της γενικής λύσης.

Παράδειγμα 1.9.7: Να λυθεί η Δ.Ε

$$3x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} - y = 0 . \qquad (\alpha)$$

Λύση: Λύνοντας την (α) ως προς y έχουμε:

$$y = 3x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} = 3x^4p^2 - xp \quad (1), \text{όπου } p = \frac{dy}{dx} .$$

Δια παραγωγίσεως της σχέσης (1), ως προς x, έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3p^2 + 6x^4p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} \quad \text{ή}$$

$$p = 12x^3p^2 + 6x^4p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} \quad \text{ή}$$

$$2p + x\frac{dp}{dx} - 12x^3p^2 - 6x^4p\frac{dp}{dx} = 0 \quad ή$$

$$2p + x\frac{dp}{dx} - 6x^3p\left[2p + x\frac{dp}{dx}\right] = 0 \quad ή \quad \left(2p + x\frac{dp}{dx}\right)\left(1 - 6x^3p\right) = 0.$$

Η γενική λύση θρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης

$$2p + x\frac{dp}{dx} = 0 \quad ή \quad \frac{dp}{p} = -2\frac{dx}{x} \quad ή \quad \ln p = -2\ln x + \ln c \quad ή \quad p = \frac{c}{x^2} \cdot \qquad (2)$$

Απαλείφοντας μεταξύ των (1) και (2) την παράμετρο p, παίρνουμε τη γενική λύση της εξίσωσης, που είναι

$$y = 3c^2 - \frac{c}{x} \quad ή \quad xy = c(3cx - 1).$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της γενικής λύσης είναι

$$x^2 = \frac{c}{p}, \quad y = 3c^2 - \sqrt{pc}.$$

Από τη σχέση $1 - 6x^3p = 0$ έχουμε την ιδιάζουσα λύση $12x^2y - 1 = 0$.

Παράδειγμα 1.9.8: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y = xy' + \psi(y') \quad (\text{Δ.Ε Clairout}) \qquad (1)$$

όπου η $\psi(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα I.

Λύση: Η επίλυση της δοθείσης Δ.Ε ακολουθεί τη γενική μέθοδο και χρησιμοποιείται στην παραπάνω 3η περίπτωση.

Θέτουμε $y' = p$ και παραγωγίζουμε την

$$y = xp + \psi(p) \qquad (2)$$

ως προς x, οπότε παίρνουμε τη Δ.Ε

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0 \cdot \qquad (3)$$

Οι λύσεις της (3) είναι λύσεις της Δ.Ε $\frac{dp}{dx} = 0$ και οι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης

$$x + \psi'(p) = 0.$$

Η πρώτη έχει τη λύση $p = c$, όπου όταν τεθεί στην (1) δίνει τη γενική λύση

$$y = cx + \psi(c).\tag{4}$$

Η δεύτερη, δηλαδή η $x = -\psi'(p)$, δίνει τη λύση

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\,\psi'(p) + \psi(p), \end{cases} \quad p \in I, \tag{5}$$

σε παραμετρική μορφή, η οποία είναι ιδιάζουσα λύση της (1)

Παράδειγμα 1.9.9: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y = xy' + y' - y'^2. \tag{1}$$

Λύση: Είναι εξίσωση του Clairaut με $\psi(y') = y' - y'^2$, επομένως έχει γενική λύση την

$$y = xc + c - c^2. \tag{2}$$

Δέχεται και ιδιάζουσα λύση. Παραγωγίζουμε την (2) ως προς c και έχουμε

$$0 = x + 1 - 2c. \tag{3}$$

Δι' απαλοιφής της c μεταξύ των (2) και (3) προκύπτει η ιδιάζουσα λύση που είναι $4y = (x+1)^2$.

Παράδειγμα 1.9.10: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y') \quad (\Delta.\text{E Lagrange}) \tag{1}$$

όπου οι συναρτήσεις φ και ψ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα I και η φ δεν είναι ταυτοτική στο I.

Λύση: Ακολουθώντας το γενικό τρόπο επίλυσης της Δ.Ε της 3ης περίπτωσης, από την Δ.Ε (1) βρίσκουμε

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}. \tag{2}$$

Αν σε κάποιο υποδιάστημα I_1 του I ισχύει $\varphi(p \neq p$, $p \in I_1$, τότε από την (2) προκύπτει ότι

$$\frac{dp}{dx} \neq 0.$$

Επομένως, η Δ.Ε (2) γράφεται

$$\left(p - \varphi(p)\right)\frac{dx}{dp} - \varphi'(p)\,x = \psi'(p) \tag{3}$$

που είναι γραμμική ως προς την $x(p)$.

Αν η γενική λύση της (3) είναι $x = g(p, c)$, τότε η γενική λύση της (1), σε παραμετρική μορφή, είναι

$$\left.\begin{aligned} x &= g(p, c) \\ y &= g(p, c)\varphi(p) + \psi(p) \end{aligned}\right\} \quad P \in I_1$$

Αν για κάποιο σημείο $P_0 \in I$ ισχύει $\varphi(p_0) = p_0$, τότε διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση

$$y = x\,\varphi(p_0) + \psi(p_0)$$

είναι η ιδιάζουσα λύση της (1).

Παράδειγμα 1.9.11: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y = 2xy' + \frac{1}{y'} \qquad (1)$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι η δοθείσα Δ.Ε είναι εξίσωση Lagrange με $\varphi'(y) = 2y'$ και $\psi(y') = \dfrac{1}{y}$. Θέτουμε $y' = p$, οπότε η Δ.Ε (1) γίνεται

$$y = 2xp + \frac{1}{p} \qquad (2)$$

Παραγωγίζοντας την (2) ως προς x, παίρνουμε

$$y' = 2p + 2xp' - \frac{p'}{p^2} \quad \text{ή} \quad p = 2p + 2xp' - \frac{p'}{p^2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{p'}{p^2} - 2xp' - p = 0 \quad \text{ή} \quad p'(1-2xp^2) = p^3 \quad \text{ή}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p^3}{1-2xp^2} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{dp} = \frac{1-2xp^2}{p^3} \quad \text{ή}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^3} \qquad (3)$$

Η Δ.Ε (3) είναι γραμμική, ως προς x, οπότε η γενική λύση της είναι

$$x = e^{-2\int \frac{dp}{p}}\left[c + \int \frac{1}{p^3} e^{-2\int \frac{dp}{p}dp} dp\right] = e^{-2\ln p}\left[c + \int \frac{1}{p^3} e^{2\ln p}\, dp\right] =$$

$$= \frac{1}{p^2}\left[c + \int \frac{1}{p^3}p^2 dp\right] = \frac{1}{p^2}\left[c + \int \frac{dp}{p}\right] = \frac{1}{p^2}(c + \ln p)$$

δηλαδή

$$x = \frac{1}{p^2}(c + \ln p) \qquad (4)$$

Εκ των (2) και (4) $\Rightarrow$

$$y = \frac{1}{p}(2c + 1 + 2\ln p) \qquad (5)$$

Οι εξισώσεις (4) και (5) αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της γενικής λύσης της Δ.Ε (1).

1.10. Εφαρμογές

Η σπουδαιότητα των Δ.Ε έγκειται στο γεγονός ότι πολλά φυσικά, χημικά, οικονομικά, οικολογικά κ.ά. προβλήματα μπορούν να μελετηθούν με τη βοήθεια κατάλληλων Δ.Ε. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μερικά προβλήματα από τα προαναφερθέντα φαινόμενα.

I. Νόμος της ραδιενέργειας

Όταν τα φυσικά ραδιενεργά στοιχεία εκπέμπουν σωμάτια α ή β, μετατρέπονται σε στοιχεία με διαφορετικό ατομικό αριθμό. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t ο αριθμός των πυρήνων κάποιου ραδιενεργού στοιχείου είναι $x(t)$ και ότι σε χρόνο $t+\Delta t$ ο αριθμός των πυρήνων είναι $x(t+\Delta t)$. Το όριο του λόγου $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, όταν το Δt τείνει στο μηδέν παριστάνει τη στιγμιαία ταχύτητα διάσπασης των πυρήνων $\frac{dx}{dt}$, η οποία ακολουθεί τον εξής νόμο: «Η στιγμιαία ταχύτητα διάσπασης των πυρήνων σ' ένα ραδιενεργό στοιχείο είναι ανάλογη του αριθμού πυρήνων που υπάρχουν τη χρονική αυτή στιγμή». Δηλαδή, σε μαθηματική έκφραση,

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = -kx} \qquad (1.10.1)$$

όπου k είναι η σταθερά διάσπασης και το $-$ δηλώνει ότι ο αριθμός των αρχικών πυρήνων ελαττώνεται ($\Delta x < 0$).

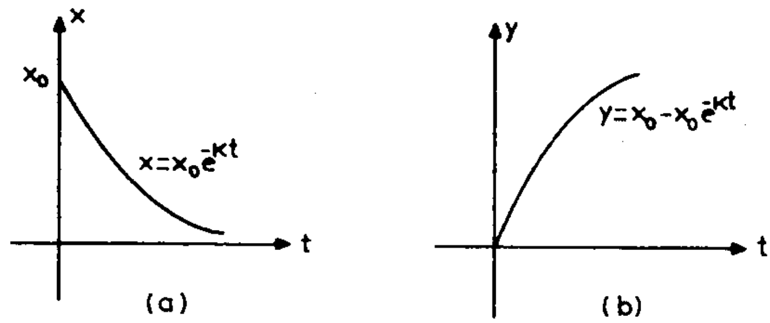
Η λύση της Δ.Ε (1), είναι, ως γνωστό, η

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-kt}} \qquad (1.10.2)$$

που δίνει τον αριθμό που δεν διασπάστηκαν ανά πάσα χρονική στιγμή, όπου x_0 αριθμός των πυρήνων τη χρονική στιγμή $t=0$ (βλέπε σχήμα 1.10.1α).

Ο χρόνος που η ουσία αυτή μειώνεται στο μισό της αρχικής, λέγεται **χρόνος μισής ζωής**.

Ας σημειωθεί ότι, μονολότι το φαινόμενο είναι ασυνεχές, αφού ο αριθμός των πυρήνων είναι ακέραιος αριθμός, λόγω του μεγάλου μεγέθους του αριθμού αυτού και της μικρής μεταβολής του με το χρόνο, θεωρείται συνεχής συνάρτηση του χρόνου.



Σχήμα 1.10.1

Από τη σχέση (1.10.2), παίρνουμε ότι ο αριθμός των πυρήνων, που διασπάστηκαν ανά πάση χρονική στιγμή, δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{y(t) = x_0 - x_0 e^{-kt}}$$

(βλέπε σχήμα 1.10.1b).

Εφαρμογή της φυσικής μεταστοιχείωσης γίνεται συχνά με μεγάλη επιτυχία στη χρονολόγηση ορισμένων πετρωμάτων.

Παράδειγμα 1.10.1: Η ζώσα ύλη περιέχει σε ίχνη ορισμένη αναλογία του ραδιενεργού άνθρακα C^{14}. Ο ραδιενεργός αυτός άνθρακας προέρχεται από το βομβαρδισμό του άνθρακα της άνω ατμόσφαιρας από κοσμικές ακτίνες και εισέρχεται στους ζώντες οργανισμούς με τη διαδικασία της ανταλλαγής. Η συγκέντρωσή του μέσα στους ζώντες οργανισμούς είναι προσεγγιστικά σταθερή. Μετά το θάνατο του οργανισμού η ανταλλαγή σταματά και ο ραδιενεργός άνθρακας ελαττώνεται με ρυθμό 1/8000 το έτος. Να βρεθεί η ποσότητα x (t) του ραδιενεργού άνθρακα σε ένα γραμμάριο μετά t έτη.

Λύση: Από τα προηγούμενα έχουμε ότι η ζητούμενη ποσότητα δίνεται από τη σχέση (1.10.2). Επειδή δε, εδώ, $k=1/8000$, σύμφωνα με την εκφώνηση, έχουμε

$$x(t) = x_0 e^{-t/8000}. \qquad (1.10.3)$$

Παράδειγμα 1.10.2: Στη λάβα του ηφαιστειου Grater Lake του Όρεγκον των Η.Π.Α βρέθηκαν ξυλάνθρακες δένδρου που περιείχαν 44.5% του C^{14} των δένδρων της περιοχής. Πότε έγινε η έκρηξη του ηφαιστείου;

Λύση: Επειδή $\frac{x}{x_0} = 0.455$, από την (1.10.3), έχουμε

$$e^{t/8000} = \frac{x_0}{x} \quad \text{ή} \quad t = 8000 \ln\frac{x_0}{x} = 8000 \ln\frac{1000}{445} \simeq 6500 \text{ έτη}.$$

Παράδειγμα 1.10.3: Να βρεθεί η ποσοστιαία μείωση, αν ο χρόνος μισής ζωής μιας ραδιενεργού ουσίας είναι 25 χρόνια.

Λύση: Από την εξίσωση $x(t) = x_0 e^{-kt}$, για $x(t) = \frac{x_0}{2}$ και $t=25$, θρίσκουμε

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-25k} \quad \text{ή} \quad k = \frac{\ln 2}{25} = \frac{0.693}{25} = 0.02$$

δηλαδή η ποσοστιαία μείωση είναι 2%.

II. Το επόμενο είναι ένα παράδειγμα από το κεφάλαιο της θερμότητας που αφορά τη ψύξη των σωμάτων (νόμος της ψύξης των σωμάτων του Νεύτωνα).

Παράδειγμα 1.10.4: Μια μεταλλική σφαίρα, που στην αρχή του χρόνου έχει θερμοκρασία 100^0, τοποθετείται σε νερό σταθερής θερμοκρασία 10^0. Αν στα 4 πρώτα λεπτά η θερμοκρασία της σφαίρας κατεβεί στους 60^0, πότε η θερμοκρασία της σφαίρας θα πέσει στους 20^0;

Λύση: Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, «η χρονική ποσοστιαία μεταβολή της θερμοκρασίας είναι ανάλογη της διαφοράς της θερμοκρασίας μεταξύ του σώματος και του νερού», δηλαδή

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T-10), \qquad T(0) = 100, \qquad T(4) = 60$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$\frac{dT}{T-10} = -k\cdot dt \quad \text{ή} \quad \int\frac{dT}{T-10} = -\int k\cdot dt \quad \text{ή} \quad \ln(T-10) = -kt+c_1 \quad \text{ή}$$

$$T-10 = e^{-kt+c_1} \quad \text{ή} \quad T = ce^{-kt}+10\,.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε

$$100 = c\cdot e^{-k\cdot 0} + 10 \quad \text{ή} \quad c=90 \quad \text{ή} \quad 60 = 90e^{-4k}+10 \quad \text{ή} \quad 5=9e^{-4k} \quad \text{ή}$$

$$e^{4k} = \frac{9}{5} \quad \text{ή} \quad k = \frac{1}{4}\ln\frac{9}{5} = \frac{1}{4}(2\cdot 1972-1\cdot 6094) = 0.467\,.$$

Επομένως,

$$T = 90e^{-0.467t} + 10\,.$$

Αν τώρα $T = 20^0$, τότε

$$20 = 90e^{-0.467t} + 10 \quad \text{ή} \quad t = \frac{\ln 9}{0.467} = \frac{2.1972}{0.467} = 4.7 \text{ πρώτα λεπτά.}$$

III. Ανατοκισμός

Παράδειγμα 1.10.5. Ένας τοκίζει ένα κεφάλαιο 1.000.000 δρχ. με συνεχή ανατοκισμό και με επιτόκιο ρ%.

Να βρεθεί πόσο θα γίνει το κεφάλαιο με τους τόκους μετά χρόνο t; Σε πόσο χρόνο θα διπλασιάσει τα χρήματά του κάποιος που τοκίζει με επιτόκιο 20%;

Λύση: Αν x το κεφάλαιο στο χρόνο t και Δx ο τόκος στο χρόνο Δt, τότε

$$\Delta x = \frac{x\rho\cdot\Delta t}{100} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\rho}{100}x\,.$$

Πηγαίνοντας στο όριο

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\rho}{100}x \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{x} = \frac{\rho}{100}dt \quad \text{ή} \quad \int\frac{dx}{x} = \int\frac{\rho}{100}dt \quad \text{ή} \quad x = ce^{\frac{\rho t}{100}}\,.$$

Για $t=0$, $x=1.000.000$, οπότε $c=1.000.000$. Άρα

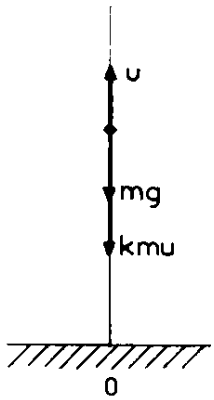
$$x(t) = 1.000.000\,e^{\frac{\rho t}{100}}\,.$$

Αν τώρα $x(t)=2.000.000$ και $\rho = 20\%$, έχουμε

$$2.000.000 = 1.000.000\, e^{0.2t} \quad \text{ή} \quad t = 5\ln 2 \; \bullet$$

IV. Το επόμενο παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό, γιατί μας δίνει τον τρόπο, με τον οποίο συνδέεται σε πολλά προβλήματα της κινητικής, η ταχύτητα κινητού με την απόσταση.

Παράδειγμα 1.10.6: Ένα βλήμα μάζας m βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Αν η αντίσταση του αέρα είναι $kmυ$, όπου k σταθερή και $υ$ η ταχύτητα του σώματος, να βρεθεί πώς συνδέονται α) η ταχύτητα με το χρόνο, β) η απόσταση με το χρόνο, γ) η ταχύτητα με την απόσταση.



Λύση: α) Η ολική δύναμη που επιδρά πάνω στο βλήμα (διπλανό σχήμα) είναι $kmυ+mg$ και σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής

$$m\ddot{x} = -(kmυ+mg)\,,$$

όπου x είναι η απόσταση που διάνυσε το βλήμα σε χρόνο t. Επειδή $γ=\ddot{x}=\dfrac{dυ}{dt}$, έχουμε

$$\frac{dυ}{dt} = -(kυ+g) \; \bullet \qquad (1)$$

Άρα

$$\int\frac{dυ}{kυ+g} = -\int dt \quad \text{ή} \quad \frac{1}{k}\ln(kυ+g) = -t+c \quad \text{ή}$$

επειδή $υ(0)=υ_0$, έχουμε $c=\dfrac{1}{k}\ln(kυ_0+g)$, οπότε

$$υ = \frac{1}{k}\left[(kυ_0+g)\,e^{-kt}-g\right] \; \bullet \qquad (1α)$$

β) Ισχύει $\dfrac{dυ}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ και η (1) γράφεται

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} - g\,. \qquad (2)$$

Από την (1α)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k}\left[(k\upsilon_0+g)\,e^{-kt}-g\right]$$

ή
$$x = \frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k}(k\upsilon_0+g)\,e^{-kt} - gt\right] + c$$

ή
$$x = \frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k}(k\upsilon_0+g)\,e^{-kt}-g\cdot t\right] + \frac{1}{k^2}(k\upsilon_0+g)\,. \qquad (2\alpha)$$

γ) Αλλάζουμε τώρα την ανεξάρτητη μεταβλητή t σύμφωνα με την προηγούμενη θεωρία (1.9.3)

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\cdot\upsilon$$

οπότε,

$$\upsilon\,\frac{d\upsilon}{dx} = -(k\upsilon+g) \qquad (3)$$

ή
$$\frac{\upsilon}{k\upsilon+g}\,d\upsilon = -dx \quad \text{ή} \quad \int\frac{1}{k}\left(1 - \frac{g}{k\upsilon+g}\right)d\upsilon = -\int dx$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{k}\left[\upsilon - \frac{g}{k}\ln(k\upsilon+g)\right] = -x+c\,.$$

Για $x=0$, $\upsilon=\upsilon_0$ οπότε

$$x = \frac{1}{k}\left[\frac{g}{k}\ln\frac{k\upsilon+g}{k\upsilon_0+g} - (\upsilon-\upsilon_0)\right]. \qquad (3\alpha)$$

Οι (1), (1α), (2), (2α), (3), (3α) είναι οι Δ.Ε και οι αντίστοιχες λύσεις σύμφωνα με την εκφώνηση του παραδείγματος.

V. Οι γραμμικές Δ.Ε είναι μοντέλα εξηγήσεως μερικών βασικών ηλεκτρικών συστημάτων. Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα ευρέσεως της έντασης του ρεύματος ανά πάσα χρονική στιγμή σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.

Έστω ένα RL κύκλωμα δηλαδή ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει αντίσταση R και αυτεπαγωγή L. Σύμφωνα με το νόμο του Kirchhoff «Το άθροισμα πτώσεων τάσεων κατά μήκος ηλεκτρικού κυκλώματος είναι μηδέν». Επομένως

$$\boxed{L\,\frac{di}{dt} + Li - E(t) = 0}$$

όπου $E(t)$ είναι η ηλεκτρεγερτική δύναμη. Ομοίως σε ένα RC κύκλωμα δηλαδή ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει μόνο αντίσταση R και χωρητικότητα C, θα έχουμε

$$Ri + \frac{Q}{C} = E(t) \quad \text{ή} \quad \boxed{R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)}$$

αφού $i = \dfrac{dQ}{dt}$.

Παράδειγμα 1.10.7: Σ' ένα RL κύκλωμα σταθερής ηλεκτρεγερτικής δύναμης E να βρεθεί η ένταση του ρεύματος ως συνάρτηση του χρόνου t αν $i(0) = I_0$.

Λύση: Η Δ.Ε του κυκλώματος είναι η

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

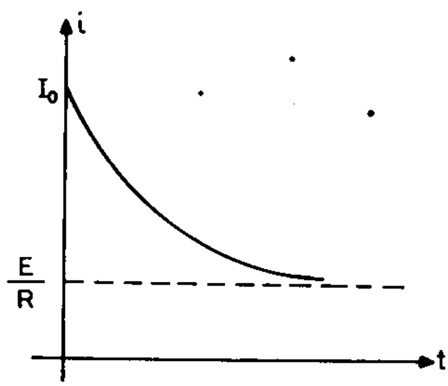
Οπότε,

$$i = e^{-(R/L)t}\left(c + \int \frac{E}{L}e^{(R/L)t}\,dt\right) = ce^{-(R/L)t} + \frac{E}{R}.$$

Αν $t=0$, τότε $i(0) = I_0 = \dfrac{E}{R} + c$, όπου $c = I_0 - \dfrac{E}{R}$. Συνεπώς

$$i = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-(R/L)t}$$

Η μεταβολή της εντάσεως i φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1.10.2.



Σχήμα 1.10.2

Αν, επιπλέον, υποθέσουμε στο παράδειγμά μας ότι η ένταση $I_0=0$ στην αρχή του χρόνου και η ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι η παρακάτω συνάρτηση του χρόνου

$$E(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{για } t > 1 \end{cases}$$

τότε

$$i(t) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} e^{-(R/L)t}, \qquad \text{για } 0 \leq t \leq 1 .$$

Για $t \geq 1$,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 .$$

και ολοκληρώνοντας

$$i(t) = c_1 e^{-(R/L)t} ,$$

αλλά επειδή

$$i(1) = \frac{1}{R} (1-e^{-R/L}) = c_1 e^{-R/L} ,$$

έπεται ότι

$$c_1 = \frac{1}{R} (e^{R/L} - 1)$$

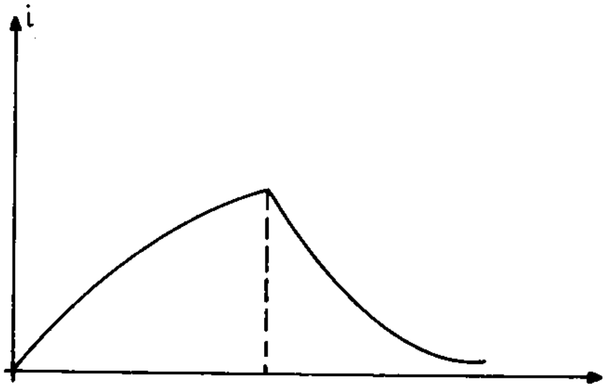
και άρα

$$i(t) = \frac{e^{-R/L} - 1}{R} e^{-(R/L)t} \qquad \text{για } t \geq 1$$

Τελικά

$$i(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{R} (1-e^{-(R/L)t}) & \text{για } 0 \leq t \leq 1 \\[2ex] \dfrac{e^{R/L} - 1}{R} \cdot e^{-(R/L)t} & \text{για } t \geq 1 . \end{cases}$$

Η ένταση αυτή φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 1.10.3.



Σχήμα 1.10.3

VI. Ένα οικολογικό πρόβλημα

Παράδειγμα 1.10.8: Πρόκειται για ένα παράδειγμα αύξησης πληθυσμού σε βιολογικά είδη. Θα θεωρήσοιυμε μοντέλα, στα οποία το ποσοστό μεταβολής του πληθυσμού ανά πάσα χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από τον πληθυσμό σ' αυτό το χρόνο. Δηλαδή

$$\frac{dN}{dt} = f(N),$$

όπου $N = N(t)$ είναι ο πληθυσμός τη χρονική στιγμή t. Γενικά, ένα τέτοιο μοντέλο αποκλείει επιδράσεις από μετανάστευση, από ανταγωνισμό με άλλα είδη, από το κλίμα, από τη μεταβολή του περιβάλλοντος κ.λπ., αλλά δέχεται επιδράσεις μόνο από αιτίες που προξενούνται από τον πληθυσμό καθεαυτό. Το απλούστερο μοντέλο είναι εκείνο που η στιγμιαία χρονική ποσοστιαία αύξηση είναι ανάλογη του πληθυσμού N, δηλαδή

$$f(N) = k \cdot N,$$

όπου k είναι θετική σταθερή. Συνεπώς

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

και έστω $N(0) = N_0$. Η Δ.Ε είναι απλή και η λύσης της είναι

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}.$$

Δηλαδή, ο πληθυσμός αυξάνεται εκθετικά. Ας σημειωθεί ότι εδώ το πραγματικό μας φαινόμενο είναι διακεκριμένο, δηλαδή η αύξηση δε γίνεται συνεχώς, αλλά κατά ακέραιες μονάδες. Εμείς, όμως, το προσεγγίζουμε με συνεχές μοντέλο, όπως είναι οι Δ.Ε. Αλλά και με διακεκριμένο μοντέλο να το προσεγγίσουμε το πρόβλημα δε θα είχαμε μεγάλη διαφορά. Πράγματι, αν $N(n)$ είναι ο πληθυσμός τη χρονική μονάδα n (n, λεπτό, ώρα, έτος κ.λπ.), τότε

$$N(n+1) = kN(n),$$

όπου k η σταθερή μεγαλύτερη της μονάδας, αφού έχουμε αύξηση. Η παραππάνω εξίσωση διαφορών τώρα δίνει

$$N(1) = kN(0),\ N(2) = N_0k^2,\ \ldots,\ N(n) = N_0k^n.$$

Συνεπώς, και πάλι έχουμε αύξηση εκθετική.

Ένα άλλο μοντέλο είναι εκείνο, για το οποίο υποθέτουμε ότι η αύξηση δεν ισχύει για αυθαίρετα μεγάλο χρονικό διάστημα, δηλαδή επ' άπειρο. Συνεπώς, θα υπάρξει μια στιγμή για την οποία η αύξηση γίνεται μηδέν. Άρα

$$\frac{dN}{dt} = kN(\alpha-N),$$

όπου k, α είναι θετικές σταθερές. Αν $N(0)=N_0$ και $N_0 < \alpha$, η $\frac{dN}{dt}$ είναι θετική μέχρι τη στιγμή που η N παραμένει μικρότερη του α. Μετά $N > \alpha$, οπότε $\frac{dN}{dt}$ θα είναι αρνητική και το N ελαττώνεται. Η παραπάνω Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών, οπότε

$$\frac{dN}{N(\alpha-N)} = k\cdot dt \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{\alpha-N}\right)dN = k\cdot dt \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{\alpha}\ln\frac{N}{N-\alpha} = kt+c \quad \text{ή} \quad c = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{N_0}{N_0-\alpha} \quad \text{ή}$$

$$\ln\frac{\frac{N}{N-\alpha}}{\frac{N_0}{N_0-\alpha}} = \alpha kt \quad \text{ή} \quad \frac{N}{N-\alpha} = \frac{\nu_0}{N_0-\alpha}e^{\alpha kt} \quad \text{ή} \quad N = \frac{\alpha}{1+\left(\frac{\alpha}{N_0}-1\right)e^{-\alpha kt}}.$$

Σημειώστε ότι, καθώς το t αυξάνει, το $N(t)$ τείνει στην οριακή τιμή α ανεξάρτητα από το N_0.

VII. Το παρακάτω παράδειγμα είναι από την οικονομική επιστήμη.

Παράδειγμα 1.10.9: Έστω ότι η στιγμιαία ποσοστιαία μεταβολή της τιμής προϊόντος $\frac{d\tau}{dt}$ είναι ανάλογη της διαφοράς $z-\pi$ της ζήτησης και της προσφοράς του προϊόντος. Δηλαδή

$$\frac{d\tau}{dt} = k\,(z-\pi),$$

όπου k θετική σταθερή. Αν $z-\pi > 0$, τότε η τ αυξάνεται και αν $z-\pi < 0$ η τ μειώνεται. Έστω ότι η προσφορά είναι περιοδική συνάρτηση της εποχής, δηλαδή

$$\pi(t) = c\,(1-\text{συν}\,\omega t) \geq 0,$$

όπου c, α θετικές σταθερές. (Στην πραγματικότητα η προσφορά εξαρτάται από την τιμή). Έστω ότι η ζήτηση εξαρτάται από την τιμή τ και είναι μία φθίνουσα γραμμική συνάρτηση της μορφής,

$$z = \alpha - \beta\tau$$

όπου α και β θετικές σταθερές. Επειδή $z > 0$ έπεται ότι $0 < \tau < \alpha/\beta$. Συνεπώς,

$$\frac{d\tau}{dt} = k\,[\alpha-\beta\tau-c\,(1-\text{συν}\,\omega t)],$$

που είναι μία γραμμική Δ.Ε. Χρησιμοποιώντας τον τύπο που δίνει τη λύση για γραμμικές Δ.Ε (μετά από πράξεις τις οποίες αφήνουμε για εξάσκηση στον αναγνώστη) βρίσκουμε

$$\tau(t) = \left[\tau(0) - \frac{\alpha-c}{\beta} - \frac{k^2\beta c}{k^2\beta^2+\alpha^2}\right] e^{-k\beta t} + \frac{\alpha-c}{\beta} + \frac{kc}{k^2\beta^2+\alpha^2}\,(k\beta\,\text{συν}\,\omega t + \omega\,\text{ημ}\,\omega t).$$

Αν t πολύ μεγάλο, τότε

$$\tau(t) = \frac{\alpha-c}{\beta} - \frac{kc}{(k^2\beta^2+\alpha^2)^{1/2}}\,\text{ημ}\,(\omega t+\theta),$$

όπου $\theta = \text{τοξ εφ}\,\frac{k\beta}{\alpha}$. Συνεπώς η τιμή ταλαντεύεται γύρω από τη σταθερή τιμή $\frac{\alpha - c}{\beta}$. **Ας σημειωθεί ότι η προσφορά $\pi(t)$** έχει ελάχιστο, όταν $t = \frac{2\pi}{\omega}k$, όπου k=ακέραιος. Όμως, η τιμή $\tau(t)$ δεν είναι μέγιστη σ' αυτές τις τιμές του χρόνου, αλλά έχει μέγιστο όταν

$$t = \frac{\left[2\pi k + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]}{\omega}.$$

VIII. Το επόμενο παράδειγμα είναι από τη μείξη ουσιών.

Παράδειγμα 1.10.10. Ένα δοχείο με 10 κιλά διάλυμα αλατιού περιέχει 10 γραμ. αλάτι. Διάλυμα που περιέχει 3 γραμ. αλάτι σε κάθε κιλό χύνεται μέσα στο δοχείο με ταχύτητα 2 κιλά ανά λεπτό και θεωρείται πως αμέσως γίνεται τέλεια ανάμειξη και συγχρόνως αποβάλλεται με την ίδια αναλογία (οπότε παραμένει στο δοχείο διάλυμα 10 κιλών πάντοτε). Να βρεθεί το ποσό του αλατιού σε κάθε χρονική στιγμή.

Λύση: Αν Q είναι η ποσότητα του αλατιού μετά t λεπτά, τότε η στιγμιαία χρονική μεταβολή αυτής,

$$\frac{dQ}{dt} = (\text{ποσοστιαία μεταβολή της εισερχόμενης}) - (\text{ποσοστιαία μεταβολή της εξερχόμενης})$$

Αλλά η εισερχόμενη ποσότητα είναι

$$\frac{2\ \text{κιλά}}{\text{λεπτό}} \cdot \frac{3\ \text{γραμ.}}{\text{κιλό}} = \frac{6\ \text{γραμ.}}{\text{λεπτό}}.$$

Η εξερχόμενη ποσότητα είναι

$$\frac{Q\ \text{γραμ.}}{10\ \text{κιλά}} \cdot \frac{2\ \text{κιλά}}{\text{λεπτά}} = \frac{Q}{5}\ \frac{\text{γραμ.}}{\text{λεπτό}}$$

Συνεπώς

$$\frac{dQ}{dt} = 6 - \frac{Q}{5}, \quad Q(0) = 5.$$

Ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$\frac{dQ}{6 - Q/5} = dt \quad \text{ή} \quad \int \frac{dQ}{6 - Q/5} = \int dt \quad \text{ή} \quad 5\ln\left(6 - \frac{Q}{5}\right) = t + c_1 \quad \text{ή}$$

$$6-\frac{Q}{5}=e^{-(t+c_1)5} \quad \text{ή} \quad 30-Q=5e^{-(t+c_1)5} \quad \text{ή} \quad Q=30-5ce^{-t5}$$

Αλλά $Q(0)=5$, οπότε $c=5$ και

$$Q=30-25e^{-t5}.$$

IX. Το παρακάτω παράδειγμα είναι από τη Χημεία. Στη Χημεία είναι γνωστός ο «νόμος δράσεως των μαζών» κατά τις χημικές αντιδράσεις. Δηλαδή «υπό σταθερή θερμοκρασία η ταχύτητα χημικής αντίδρασης είναι ανάλογη του γινομένου των συγκεντρώσεων των ουσιών που αντιδρούν».

Παράδειγμα 1.10.11: Έστω ότι κατά την αντίδραση $A+B \to \Gamma$ χρειάζονται 2 γραμ. της ουσίας A για κάθε ένα γραμμάριο της ουσίας B. Αν στην αρχή έχουμε 10 γραμ. της ουσίας A και 20 γραμ. της ουσίας B και αν 6 γραμ. της ουσίας Γ σχηματίζονται σε 20 λεπτά, να βρεθεί η ποσότητα της ουσίας Γ σ' οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Λύση: Έχουμε να λύσουμε τη Δ.Ε

$$\frac{dx}{dt}=K\left(10-\frac{2x}{3}\right)\left(20-\frac{x}{3}\right)$$

ή την

$$\frac{dx}{dt}=k\,(15-x)\,(60-x)\,,$$

όπου $k=\frac{2K}{3}$. Ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$\int\frac{dx}{(15-x)(60-x)}=\frac{1}{45}\int\left(\frac{1}{15-x}-\frac{1}{60-x}\right)dx=\frac{1}{45}\ln\frac{60-x}{15-x}=kt+c_1$$

ή

$$\frac{60-x}{15-x}=ce^{45kt}.$$

Για $t=0$, $x=0$, οπότε $c=4$. Για $t=\frac{1}{2}$ της ώρας $x=6$, οπότε

$$\frac{60-6}{15-6}=4\cdot e^{15k} \quad \text{ή} \quad e^{15k}=\frac{3}{2}.$$

Άρα

$$\frac{60-x}{15-x} = 4\,(e^{15k})^{3t} = 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3t} \quad \text{ή} \quad x = \frac{15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right]}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}\,.$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε μία γεωμετρική εφαρμογή.

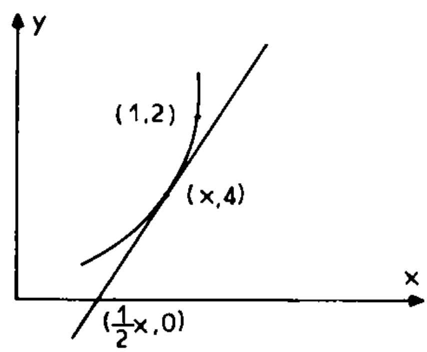
Παράδειγμα 1.10.12: Να βρεθεί η καμπύλη που περνά από το σημείο (1, 2) και της οποίας η εφαπτομένη στο τυχόν σημείο της (x, y) τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο $\left(\frac{1}{2}x,\, 0\right)$.

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της (x, y) είναι η

$$Y-y = y'(X-x)\,.$$

Για να βρούμε που η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα Ox (διπλανό σχήμα), θέτουμε Y=0, οπότε σύμφωνα με την εκφώνηση

$$X = \frac{1}{2}x$$



Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης δίνει

$$-y = y'\left(\frac{1}{2}x-x\right) \quad \text{ή} \quad \frac{y}{y'} = \frac{1}{2}x \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \quad \text{ή}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x} \quad ή \quad \ln y = 2\ln x + c_1 \quad ή$$

$$\ln y = \ln cx^2 \quad ή \quad y = cx^2 .$$

Επειδή, όμως η καμπύλη διέρχεται από το σημείο (1, 2), έπεται ότι $y(1)=2$ ή $c=2$, οπότε $y = 2x^2$ είναι η ζητούμενη καμπύλη, δηλαδή μια παραβολή.

XI. Κίνηση ομαλά μεταβαλλόμενη

Παράδειγμα 1.10.13: Σώμα, που βρίσκεται στην αρχή σε ηρεμία, κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση γ και αρχική ταχύτητα υ_0. Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης.

Λύση: Ισχύει $\ddot{x} = \gamma$ οπότε,

$$\int \ddot{x}\, dx = \int \gamma\, dt \quad ή \quad \dot{x} = \gamma t + c .$$

Αλλά $x(0) = \upsilon_0 = c$, οπότε $\dot{x} = \gamma t + \upsilon_0$. Δηλαδή

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 + \gamma t} \qquad (1)$$

που είναι ο πρώτος τύπος της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

Ομοίως,

$$\int \dot{x}\, dx = \int (\gamma t + \upsilon_0)\, dt \quad ή \quad x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + \upsilon_0 t + c_1 .$$

Αλλά, $x(0) = 0$, οπότε $c_1 = 0$ και τελικά

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 . \qquad (2)$$

Οι τύποι (1) και (2) στην κατακόρυφη προς τα πάνω ρίψη σώματος, όπου $\gamma = -g$, παίρνουν τη μορφή

$$\upsilon = \upsilon_0 - gt, \quad x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

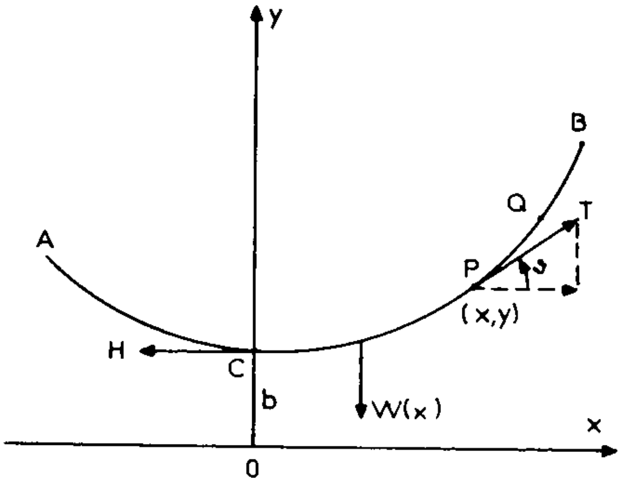
Το μέγιστο ύψος επιτυγχάνεται όταν $\upsilon=0$, δηλαδή

$$t = \frac{\upsilon_0}{g} \quad οπότε \quad x = \frac{\upsilon_0^2}{2g} .$$

XII. Ένα παράδειγμα Μηχανικής

Το παρακάτω παράδειγμα αφορά τη μελέτη του σχήματος που παίρνει μια αλυσίδα κρεμασμένη από τα άκρα της. Ανάλογη μελέτη κάνουν οι μηχανικοί στην κατασκευή των μοντέρνων κρεμαστών γεφυρών.

Παράδειγμα 1.10.14. Έστω (παρακάτω σχήμα) αλυσίδα σε ισορροπία η οποία κρέμεται από τα σημεία Α και Β που βρίσκονται (όχι υποχρεωτικά) στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Έστω C το κατώτερο σημείο αυτής.



Θεωρούμε άξονες Οx, Οy έτσι ώστε η Οy να περνάει από το C και ο Οx και είναι οριζόντιος. Έστω σημείο P με συντεταγμένες (x, y). Πάνω στο τμήμα CP της αλυσίδας επιδρούν οι τρεις δυνάμεις: Οι τάσεις H, T και το βάρος W (x) που εξαρτάται από την τετμημένη x. Από τη γνωστή συνθήκη ισορροπίας «Το αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών στους άξονες Οx και Οy είναι μηδέν», έχουμε

$$T\,\eta\mu\theta - w = 0, \qquad T\,\sigma\upsilon\nu\theta - H = 0$$

Οπότε,

$$\varepsilon\varphi\,\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{W(x)}{H},$$

όπου η H είναι σταθερή. Με παραγώγιση βρίσκουμε

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\,\frac{dw}{dx}}$$

όπου $\frac{dw}{dx}$ είναι η κατά μήκος ποσοστιαία μεταβολή του βάρους.

Α. Έστω ότι το βάρος w της αλυσίδας είναι ανάλογα κατανεμημένο ως προς τον άξονα Ox.

Δηλαδή έστω ότι

$$\frac{dw}{dx} = \omega = \text{σταθερή} .$$

Δηλαδή $y(0) = \beta$, $y'(0) = 0$, η Δ.Ε δίνει

$$y'' = \frac{1}{H}\omega \quad \text{ή} \quad y' = \frac{\omega}{H}x + c .$$

Από τη δεύτερη αρχική συνθήκη βρίσκουμε $c=0$. Συνεπώς

$$y' = \frac{\omega}{H}x \quad \text{ή} \quad y = \frac{\omega}{2H}x^2 + c_1 .$$

Από την πρώτη αρχική συνθήκη βρίσκουμε $c_1 = \beta$, οπότε

$$y = \frac{\omega}{2H}x^2 + \beta$$

Επομένως, το σχήμα που παίρνει σ' αυτήν την περίπτωση η αλυσίδα είναι μια παραβολή.

Β. Έστω ότι η αλυσίδα έχει σταθερή πυκνότητα ανά μονάδα μήκους.

Δηλαδή, έστω το βάρος της αλυσίδας είναι ανάλογα κατανεμημένο ως προς το μήκος της αλυσίδας, οπότε $\frac{dw}{ds} = \omega = \text{σταθ.}$, s το μήκος της αλυσίδας. Αλλά

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dx} = \omega\frac{ds}{dx} = \omega\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

και η Δ.Ε γίνεται

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad y(0)=\beta, \; y'(0) = 0 .$$

Επειδή λείπει το y, θέτουμε $p = \frac{dy}{dx}$, οπότε

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\omega}{H}\sqrt{1+p^2} \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\omega}{H}\,dx \quad \text{ή}$$

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \frac{\omega}{H}x + c_1 \quad \text{ή} \quad p+\sqrt{1+p^2} = c_2 e^{(\omega/H)x}$$

Από τη δεύτερη αρχική συνθήκη βρίσκουμε $c_2 = 0$, οπότε

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{(\omega/H)x}.$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την παράσταση

$$\sqrt{1+p^2} - p,$$

οπότε

$$\sqrt{1+p^2} - p = e^{-(\omega/H)x}.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{(\omega/H)x} - e^{-(\omega/H)x}\right)$$

ή

$$\int dy = \int \frac{1}{2}\left(e^{(\omega/H)x} - e^{-(\omega/H)x}\right)dx$$

ή

$$y = \frac{H}{2\omega}\left(e^{(\omega/H)x} + e^{-(\omega/H)x}\right) + c_3.$$

Επειδή $y(0) = b$, έπεται ότι $c_3 = b - \frac{H}{\omega}$. Αν εκλέξουμε το b έτσι, ώστε $b = \frac{H}{\omega}$, τότε $c_3=0$. Συνεπώς,

$$\boxed{y = \frac{H}{2\omega}\left(e^{(\omega/H)x} + e^{-(\omega/H)x}\right) = \frac{H}{\omega}\cosh\frac{\omega}{H}x} \bullet$$

Το σχήμα που παίρνει σ' αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι η γνωστή **αλυσοειδής καμπύλη**.

1.11. Ασκήσεις

1. Επαληθεύστε ότι οι συναρτήσεις e^{2x}, $5e^{2x}$, $-e^{2x}$ είναι λύσεις της Δ.Ε $y'-2y=0$.

2. Επαληθεύστε ότι οι e^{x}, e^{2x}, $2e^{x}+3e^{2x}$ είναι λύσεις της Δ.Ε $y''-3y'+2y=0$. ;

3. Δείξτε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων συν x και ημ x επαληθεύει τη Δ.Ε $y''+y=0$.

4. Να λύσετε τις Δ.Ε χωριζόμενων μεταβλητών:
α) $y'=-2y$, θ) $y'=e^{x-y}$, γ) $(1-y^2)\,dx-(1-x^2)\,dy=0$.
(Απ. α) $y=ce^{-2x}$, β) $y=\ln(e^{x}+c)$, γ) $(1+y)(1-x)=c\,(1+x)(1-y)$.

5. Να λυθεί η Δ.Ε $L\dfrac{di}{dt}+Ri=0$, όπου L, R είναι σταθερές.

(Απ. $i=ce^{-(R/L)t}$)

6. Να βρείτε τη μερική λύση κάθε Δ.Ε με την αντίστοιχη αρχική συνθήκη
α) $y'-2y=0$ $y(1)=2$, β) $y'=x^2$, $y(0)=2$, γ) $y'+(\text{ημ}\,x)\,y=0$, $\varphi(\pi)=3$

(Απ. α) $y=2e^{2(x-1)}$, β) $y=\dfrac{1}{3}x^3+2$, γ) $y=3e^{\text{συν}x+1}$)

7. Οι παραστάσεις $(y')^2$ και $(y^2)'$ δεν είναι γενικά ίσες. Ποιές όμως συναρτήσεις θα μπορούσαν να τις κάνουν ίσες;
(Απ. $y=c$, $y=ce^{2x}$)

8. Να λυθεί η Δ.Ε $y'=\dfrac{x-y}{x+y}$.

(Απ. $x^2-2xy-y^2=c$)

9. Να λυθεί η Δ.Ε $y'=\dfrac{y}{x}\left(e^{y/x}-1\right)$

(Απ. $\displaystyle\int\frac{e^{-\upsilon}d\upsilon}{\upsilon}=\ln c+c$, όπου $\upsilon=\dfrac{y}{x}$. Δεν δίνεται η λύση σε κλειστή μορφή)

10. Να λυθούν οι Δ.Ε.

α) $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ b) $y' = \dfrac{2x+y}{x-2y}$ c) $y' = \dfrac{x^2-y^2}{xy}$ •

(Απ. α) $\ln y = \dfrac{x^2}{2y^2} + c$ b) $\ln x = \dfrac{1}{2}$ τοξεφ $\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y^2+x^2}{x^2} + c$

c) $x^2(x^2-2y^2) = c$)

11. Να λυθούν οι Δ.Ε

α) $y' = \dfrac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$ β) $y' = \dfrac{-x+y+1}{x+4y-1}$ •

(Απ. α) $(4y-x-3)(y+2x-3)^2 = c$ β) $\ln[4y^2+(x-1)^2] +$ τοξεφ $\dfrac{2y}{x-1} = c$)

12. Να βρείτε ποιές από τις επόμενες Δ.Ε είναι τέλεια διαφορικά και να τις λύσετε

α) $(x^2+y^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$ b) $(y^2-x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

c) $(2x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$ d) $(2x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$

e) $(ye^x-2x)\,dx + e^x\,dy = 0$.

(Απ. α) $x^2y + \dfrac{y^3}{3} = c$ b) $xy^2 - \dfrac{x^3}{3} = c$ c) όχι τέλειο διαφορικό

d) $x^2+xy-\dfrac{1}{2}y^2 = c$ e) $ye^x - x^2 = c$)

13. Να λυθούν οι Δ.Ε

a) $(y+1)\,dx - x\,dy = 0$ b) $y\,dx + (1-x)\,dy = 0$

c) $2xy\,dx + y^2\,dy = 0$ d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2y}{x^3+2y^4}$

e) $2xy\,dx + (x^2 + \text{συν}\,y)\,dy = 0$ f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2-1}{1-x^2y}$ •

(Απ. a) $y = cx-1$ b) $cy = x-1$ c) $y^2+2x^2 = c$ d) $x^3y^{-1} = \dfrac{2}{3}y^3 + c$

e) $x^2y + \text{ημ}\,y = c$, f) $\dfrac{1}{2}x^2y^2 - x - y = c$)

14. Να λυθούν οι γραμμικές Δ.Ε

α) $3y'+2y-x = 0$ b) $y'\sigma\upsilon\nu x - y\,\eta\mu x + e^x = 0$

c) $y'-4y = x-x^2$ d) $y'+y = \sigma\upsilon\nu\, x$ e) $y'+2y = e^{-2x}$ •

(Απ. α) $y = ce^{-(2/3)x} - \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ b) $y = -e^x \tau\varepsilon\mu x + c\,\tau\varepsilon\mu x$.

c) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} + ce^{4x}$ d) $y = \frac{1}{2}(\eta\mu\, x + \sigma\upsilon\nu\, x) + ce^{-x}$

e) $y = e^{-2x}(x+c)$)

15. Να δείξετε ότι η Δ.Ε $y'+Py = Qy^n$ λύνεται με την αντικατάσταση $\upsilon = y^{1-n}$, $n \neq 0, 1$, και βρείτε τη λύση (Δ.Ε Bernoulli).

16. Να λυθεί η Δ.Ε $y'-y = xy^2$ •

(Απ. $x^2-2xy = c$)

17. Να δειχθεί ότι η Δ.Ε Riccati με την αντικατάσταση $y = y_1 + \frac{1}{u}$ μετασχηματίζεται στη γραμμική Δ.Ε

$$u' + [2p(x)\,y_1 + q(x)]\,u + p(x) = 0 .$$

18. Να δειχθεί ότι αν $c\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ είναι η γενική λύση της γραμμικής Δ.Ε, στην οποία μετασχηματίζεται Δ.Ε του Riccati, τότε η γενική λύση αυτής είναι η

$$y = \frac{c\varphi_3(x)+\varphi_4(x)}{c\varphi_1(x)+\varphi_2(x)} ,$$

όπου $\varphi_3(x) = y_1\varphi_1(x)$ και $\varphi_4(x) = y_1\varphi_2(x)$.

19. Να λυθεί η Δ.Ε $y'+y^2+(1-2x^2)\,y+x\,(x^3-x-2) = 0$, αν $y_1 = x^2$ είναι μια μερική της λύση.

(Απ. $y = x^2 + \frac{1}{ce^x-1}$)

20. Να λυθεί η Δ.Ε $xy''-3y' = 4x^2$

(Απ. $y = c_1x^4 - \frac{4}{3}x^3 + c_2$)

21. Να λυθούν οι Δ.Ε και να βρεθεί η λύση που αντιστοιχεί στις παρακάτω συνθήκες

α) $y'' = 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

β) $y''' = 3\eta\mu\, x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$

γ) $I''(t) = t^2 + 1$, $I(0) = 2$, $I'(0) = 3$.

(Απ. α) $y = \frac{1}{3}x^3 + 10x$ β) $y = \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}x^2 - 2$,

γ) $I = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 3t + 2$)

22. Να λυθούν οι Δ.Ε

α) $(y''')^2 = (y'')^3$, β) $1 + (y')^2 + 4y'' = 0$.

(Απ. α) $y = -4\ln(x + c_1) + c_2x + c_3$, β) $(x + c_1)^2 + y^2 = c_2^2$)

23. Ποιός είναι ο χρόνος μισής ζωής μιας ραδιενεργού ουσίας, της οποίας το 20% αυτής εξαφανίζεται σε 100 χρόνια;

(Απ. 310.5 έτη)

24. Στον τάφο ενός Φαραώ της Αιγύπτου βρέθηκε ότι μια δοκός κυπαρισσιού περιέχει 55% του C^{14} από ό,τι περιέχεται σε ένα ζωντανό κλωνάρι κυπαρισσιού. Να βρεθεί πόσα χρόνια πέρασαν περίπου από τότε που έγινε ο τάφος του Φαραώ;

(Απ. 4800 έτη)

25. Ξυλάνθρακες από το σπήλαιο Lascaux της Γαλλίας (το σπήλαιο είναι γνωστό για την προϊστορική του ζωγραφική) βρέθηκε ότι περιέχουν 14.5% C^{14}. Να βρεθεί η ηλικία τους.

(Απ. 15.500 έτη)

26. Μία μεταλλική σφαίρα θερμαίνεται στη θερμοκρασία 80° και αμέσως τοποθετείται σε νερό σταθερής θερμοκρασίας 30°. Σε 3 λεπτά η θερμοκρασία της σφαίρας κατεβαίνει στους 55°. Σε πόσο χρόνο η θερμοκρασία της σφαίρας γίνεται 40°;

(Απ. 6.97 λεπτά)

27. Μιας πόλης ο πληθυσμός το 1980 ήταν —όπως έδειξε η στατιστική— 200.000 και αυξάνεται με ρυθμό 4%. Προβλέψτε πόσος θα είναι ο πληθυσμός το 2000;

(Απ. 445.100)

28. Ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω από το σημείο Ο μέσα σε ένα ρευστό που προβάλλει αντίσταση $\frac{k\upsilon^2}{\alpha+g}$ ανά μονάδα μάζας, όπου υ η ταχύτητα σε ένα ύψος h πάνω από το Ο και α και $k \neq -\frac{1}{2}$ είναι σταθερές Δείξτε ότι το σώμα φθάνει σε ισορροπία όταν $y = h$, όπου $(\alpha+h)^{2k+1} = \alpha^{2k+1}\left[1 + \frac{u^2(2k+1)}{2\alpha g}\right]$ και όπου u είναι η αρχική ταχύτητα του σώματος.

29. Θεωρούμε σώμα που κινείται οριζόντια μέσα σε νερό, το οποίο προβάλλει αντίσταση $km\upsilon^2$. Αν υ_0 είναι η αρχική ταχύτητα και αν η αρχική ταχύτητα γίνει $\frac{1}{2}\upsilon_0$, αφού το σώμα κινηθεί σε οριζόντια απόσταση α, να βρεθεί η ταχύτητα ως συνάρτηση της απόστασης. Η δύναμη της βαρύτητας θεωρείται αμελητέα.
(Απ. $\upsilon = \upsilon_0 2^{-x/\alpha}$)

30. Βρείτε την ένταση σε ένα RL κύκλωμα που έχει στην αρχή του χρόνου ένταση 0, R=2 Ohms, E=4 Volts και αυτεπαγωγή $L(t)=5-t$ για $0 \leq t \leq 5$ και $L(t)=0$ για $t \geq 5$.

(Απ. $i(t) = \frac{2}{5} t \left(2 - \frac{t}{5}\right)$ Amp για $0 \leq t \leq 5$ και $i=2$ για $t \geq 5$)

31. Μία γεννήτρια ΗΕΔ 100 Volts συνδέεται σε κύκλωμα που περιέχει σε σειρά αντίσταση R=100 Ohms και L=2 Henries. Αν ο διακόπτης είναι κλειστός για t=0, να θρείτε την ένταση i (t)
(Απ. $i = 10(1-e^{-5t})$)

32. Στην προηγούμενη άσκηση έστω $E=20\,\sigma\upsilon\nu 5t$. Να θρείτε την i (t).
(Ap. $i = \sigma\upsilon\nu 5t + \eta\mu 5t - e^{-5t}$)

33. Έστω ότι πηγή δίνει τη φθίνουσα τάση $E=200e^{-5t}$ και συνδέεται σε σειρά με κύκλωμα αντιστάσεως 20 Ohms και πυκνωτή χωρητικότητας 0.01 Farads. Αν α=0 για t=0, να βρείτε το φορτίο Q (t) και να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του και το χρόνο που την παρουσιάζει

(Απ. $Q(t)=10te^{-5t}$, $Q_{max} = 2e^{-1}$, $t = \frac{1}{5}$ sec)

34. Βρείτε την ένταση σε ένα RL κύκλωμα αν $i(0)=0$ με α) $E=e^{-t}$.

b) $E = ημ\, t$, c) $E = t$.

(Απ. α) $i = \dfrac{e^{-t} - e^{(R/L)t}}{R-L}$ b) $i = (R\ ημt - L\ συνt + Le^{-Rt/L})\ \dfrac{1}{R^2+L^2}$

c) $i = \dfrac{L}{R^2}\,(e^{-Rt/L} - 1) + \dfrac{1}{R}\,t$)

35. Βρείτε την ένταση σε ένα RL κύκλωμα με $R=1$ Ohm, $L=1$ Henry και $E=1$ V για $0 \leq t \leq 1$, $E=2-t$ για $1 \leq t \leq 2$ και $E=0$ για $t \geq 2$.
(Απ. $i = 1-e^{-t}$ για $0 \leq t \leq 1$, $i=3-t-(e+1)\,e^{-t}$ για $1 \leq t \leq 2$,
$i = (e^2-e-1)\,e^{t}$ για $t \geq 2$)

36. Βρείτε την ένταση σε ηλεκτρικό κύκλωμα με $E=20$ V, $R=10$ Ohms, $L=5-t$ για $0 \leq t \leq 5$, $L=0$ για $t \geq 5$ και $i\,(0)=0$ Amp.
(Απ. $i = 2 - \dfrac{2}{5^{10}}\,(5-t)^{10}$ για $0 \leq t \leq 5$, $i=2$ για $t \geq 5$)

37. Επαναλάβετε την άσκηση 30 αν $i\,(0)=2$ Amp
(Απ. $i = 2$ Amp για όλα τα t)

38. Βρείτε την ένταση σε ένα RL κύκλωμα με $R=10$ Ohm, $L=1$ Henry και $i\,(0)=1$ Amp αν $E=1$ V για $0 \leq t \leq 1$, $E=-1$ για $1 \leq t \leq 2$ και $E=2$ για $t \geq 2$.
(Απ. $i=1$ για $0 \leq t \leq 1$, $i=1+2e^{-(t-1)}$ για $1 \leq t \leq 2$ και
$i = (2e-e^2)\,e^{-t}$ για $t \geq 2$)

39. Ο πληθυσμός κάποιου είδους ζώων είναι αρχικά 2.000. Μετά 2 ώρες είναι 2.500. Βρείτε τον πληθυσμό ως συνάρτηση του χρόνου, αν
$\dfrac{dN}{dt} = kN$.
(Απ. $N\,(t) = 2000\,\left(\dfrac{5}{4}\right)^{t/2}$).

40. α) Βρείτε τον τύπο που δίνει τον πληθυσμό $N\,(t)$, αν $N\,(0) = N_0$ και $\dfrac{dN}{dt} = kN^{\alpha}$, όπου α είναι θετική σταθερή $\alpha \neq 1$.

b) Αν $0 < \alpha < 1$ στην α), τί συμβαίνει, αν $t \to \infty$.
c) Αν $\alpha > 1$ στην α), δείξτε ότι ο πληθυσμός $N\,(t)$ γίνεται άπειρος σε πεπερασμένο χρόνο.

(Απ. α) $N\,(t) = [N_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\,kt\,]^{1/1-\alpha}$, b) $N\,(t) \to \infty$)

(Απ. α) $N(t) = [N_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)kt]^{1/1-\alpha}$, b) $N(t) \to \infty$)

41. Στην περίπτωση του οικονομικού παραδείγματος 1.10.9, έστω $\frac{d\tau}{dt} = k(z-\pi)$, $z = \alpha - b\tau$, αλλά η προσφορά π είναι αύξουσα συνάρτηση της τ, δηλαδή $\pi = c + d\tau$, όπου c και d θετικές σταθερές. Βρείτε την $\tau(t)$ και την τιμή της, καθώς $t \to \infty$.

$\left(\text{Απ.} \quad \tau(t) = \frac{\alpha-c}{b+d} + \left(\tau_0 - \frac{\alpha-c}{b+d}\right) e^{-k(b+d)t}\right)$

42. Έστω στην περίπτωση του παραδείγματος 1.10.9 η χρονική ποσοστιαία μεταβολή της προσφοράς π είναι ανάλογη της διαφοράς μεταξύ της ζήτησης και της προσφοράς, δηλαδή $\frac{d\pi}{dt} = k(z-\pi)$. Βρείτε τον τύπο για την $\pi(t)$ αν $z =$ σταθ.

(Απ. $\pi(t) = z + (\pi_0 - z)e^{-kt}$)

43. Ένα δοχείο περιέχει 100 κυβ. παλ. διαλύματος ζάχαρης σε νερό, στο οποίο διαλύθηκαν 5 κιλά ζάχαρη. Για να αυξήσουμε την περιεκτικότητα του διαλύματος σε ζάχαρη, 3 κυβ. παλάμες διαλύματος ζάχαρης που περιέχει 0.1 κιλ./κυβ. παλ. χώνονται μέσα στο δοχείο ανά λεπτό, ενώ 2 κυβ. παλάμες ομογενούς μίγματος αφαιρούνται από το δοχείο ανά λεπτό. Να βρεθεί η περιεκτικότητα σε κιλ/κυβ. παλ. σε ζάχαρη του διαλύματος σε κάθε επακόλουθη χρονική στιγμή.

$\left(\text{Απ.} \quad x = \frac{t+100}{10} - \frac{50.000}{(t+100)^2} \text{ κιλ/κυβ. παλ.}\right)$

44. Χημική ουσία C παράγεται από την αντίδραση των ουσιών A και B. Η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας της C είναι ανάλογη του γινομένου των στιγμιαίων ποσοτήτων των A και B. Έστω ότι η αντίδραση χρειάζεται 3 γραμ. της A για κάθε 2 γραμ. της B. Αν 60 γραμ. από κάθε ουσία A και B είναι στην αρχή της αντίδρασης και 15 γραμ. της C παράγονται σε 1 ώρα, να βρείτε την ποσότητα C ανά πάσα χρονική στιγμή.

$\left(\text{Απ.} \quad x = \frac{300\,((18/17)^t - 1)}{3\,(18/17)^t - 2}\right)$

45. Να βρείτε την καμπύλη που η κάθετή της σε κάθε σημείο της τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο (0, 2) και περνάει από το σημείο (3, 4).

(Απ. $x^2 + (y-2)^2 = 3^2$)

46. Να βρείτε την καμπύλη που η εφαπτομένη της σε τυχόν σημείο της τέμνει τον άξονα Oy σε ένα σημείο του οποίου η τεταγμένη ισούται με τον συντελεστή διευθύνσεως στο τυχόν σημείο.

(Απ. $y = \frac{1}{3}(x+1)$)

47. Να βρεθεί το σχήμα κρεμασμένης αλυσίδας, αν τα σημεία A (1, 2), B (−1, 2), από τα οποία κρέμεται, είναι στο αυτό ύψος και $\frac{dW}{dx} = 2+12x^2$.

(Απ. $y = x^2+x^4$)

48. Μια αλυσίδα έχει σταθερή πυκνότητα w gr/cm^3 και κρεμέται από τα άκρα της που βρίσκονται στο αυτό οριζόντιο επίπεδο και απέχουν απόσταση 2l cm. Αν η τάση στο κατώτερο άκρο της αλυσίδας είναι H gr, δείξτε ότι η τάση της αλυσίδας στα σημεία στήριξης είναι $H \cosh \frac{wl}{H}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **2**

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

2.1. Διανυσματικοί χώροι

Ένα σύνολο V, στο οποίο έχει οριστεί μία εσωτερική πράξη + και μία εξωτερική πράξη · με συντελεστές πραγματικούς, λέγεται πραγματικός **διανυσματικός** (ή **γραμμικός**) χώρος, όταν ως προς την πράξη + είναι αβελιανή ομάδα και όταν για όλα τα $\lambda, \mu \in R$ και όλα τα $u, \upsilon \in V$ ισχύουν τα αξιώματα

(i) $\lambda(u+\upsilon) = \lambda u+\lambda\upsilon$ (ii) $(\lambda+\mu)\cdot\upsilon = \lambda\upsilon+\mu\upsilon$.

(iii) $\lambda(\mu\cdot\upsilon) = (\lambda.\mu)\,\upsilon$ (iv) $1\cdot\upsilon = \upsilon$

Π.χ. το σύνολο V όλων των ελεύθερων διανυσμάτων του τρισδιάστατου χώρου R^3 αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο.

Τα διανύσματα $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in V$ λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα**, αν και μόνον αν

$$\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+ \ldots +\lambda_k\underline{v}_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Αν τα διανύσματα $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένα**.

Αν τα διανύσματα $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ είναι γραμμικώς ανέξάρτητα, κάθε διάνυσμα $\underline{v} \in V$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός αυτών, δηλαδή

$$\underline{v} = c_1\underline{v}_1+c_2\underline{v}_2+ \ldots +c_k\underline{v}_k\,,$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_k$ καθορισμένες σταθερές. Π.χ. τα διανύσματα $\underline{i}+\underline{j}$ και $\underline{i}-\underline{j}$ του R^2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα γιατί

$$\lambda_1(\underline{i}+\underline{j}) + \lambda_2(\underline{i}-\underline{j}) = (\lambda_1+\lambda_2)\,\underline{i} + (\lambda_1-\lambda_2)\,\underline{j} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\lambda_1+\lambda_2 = 0,\ \lambda_1-\lambda_2 = 0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0\,.$$

Διανυσματικοί χώροι υπάρχουν πολλοί, αλλά για τις Δ.Ε βασικό ρόλο παίζουν οι διανυσματικοί χώροι συναρτήσεων. Π.χ. οι συναρτήσεις e^x, e^{2x} μπορούν να θεωρηθούν δύο διανύσματα που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα γιατί

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Θεωρούμε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k$$

των k γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$. Όλοι οι συνδυασμοί αυτοί παράγουν ένα διανυσματικό χώρο V_k διάστασης k. Π.χ. όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ δίνουν ένα διανυσματικό χώρο συναρτήσεων, διάστασης 2.

Ένα υποσύνολο V_1 του διανυσματικού χώρου V λέγεται διανυσματικός υποχώρος του V, όταν το ίδιο σύνολο V_1 είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις του V. Συνήθως χρησιμοποιούμε το εξής κριτήριο για να δείξουμε ότι το σύνολο $V_1 \subseteq V$ είναι διανυσματικός υποχώρος: «Ο V_1 είναι διανυσματικός υποχώρος του V αν και μόνο αν για όλα τα $v_1, v_2 \in V_1$ και όλα τα $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ είναι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1$».

Επειδή όλοι οι χώροι συναρτήσεων που θεωρούμε είναι υποχώροι του διανυσματικού χώρου όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων, αρκεί να εφαρμόζουμε το παραπάνω κριτήριο στους χώρους διαφορίσιμων συναρτήσεων, για να βρίσκουμε ορισμένους υποχώρους αυτών.

2.2. Διαφορικοί τελεστές

Έστω η **γραμμική** Δ.Ε n τάξης

$$\alpha_n(x)\, y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_1(x)\, y'(x) + \alpha_0(x)\, y(x) = f(x), \quad (1)$$

όπου οι συντελεστές $\alpha_n(x), \alpha_{n-1}(x), \ldots, \alpha_0(x)$ και η $f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x.

Η $f(x)$ λέγεται **εισερχόμενη συνάρτηση** ή **εισερχόμενο σήμα**. Αν $f(x) = 0$, η Δ.Ε (1) λέγεται **ομογενής**, αλλιώς **μη ομογενής**.

Συνήθως η Δ.Ε (1) γράφεται

$$L(y) = f(x)$$

και η αντίστοιχη ομογενή της,

$$L\,(y) = 0\,,$$

όπου L είναι ο διαφορικός τελεστής,

$$\alpha_n\,(x)\,D^n + \alpha_{n-1}\,(x)\,D^{n-1} + \ldots + \alpha_1\,(x)\,D + \alpha_0\,(x)$$

και το σύμβολο D^i σημαίνει την i-οστή παραγώγιση.

Αν μία συνάρτηση $y = y_1\,(x)$ είναι τέτοια ώστε $L\,(y_1) = 0$, λέμε ότι ο διαφορικός τελεστής L **εκμηδενίζει** τη συνάρτηση y_1. Ο διαφορικός τελεστής L που ορίσαμε είναι γραμμικός. Πράγματι είναι φανερό ότι, αν c σταθερή τότε έχουμε

$$L\,(y_1+y_2) = L\,(y_1)+L\,(y_2),\quad L\,(cy) = cL\,(y)\,.$$

2.3. Ορίζουσα Wronski

Οι ομογενείς γραμμικές Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές $L\,(y) = 0$ έχουν μια κομψή θεωρία, γιατί οι λύσεις τους αποτελούν πάντα διανυσματικούς χώρους συναρτήσεων και έτσι χρησιμοποιείται η θεωρία της § 2.1.

Πρόταση 1: Το σύνολο των λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής Δ.Ε αποτελούν ένα διανυσματικό υποχώρο.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το κριτήριο §6.1, πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι αν y_1, y_2 είναι λύσεις της Δ.Ε $L\,(y) = 0$, δηλαδή αν $L\,(y_1) = 0$ και $L\,(y_2) = 0$, τότε και η $c_1y_1+c_2y_2$ είναι λύση της Δ.Ε $L\,(y) = 0$. Πράγματι,

$$L\,(c_1y_1+c_2y_2) = L\,(c_1y_1) + L\,(c_2y_2) = c_1L\,(y_1) + c_2L\,(y_2) = 0\,.$$

Πρόταση 2: Ο διανυσματικός χώρος των λύσεων μιας γραμμικής Δ.Ε τάξεως n έχει διάσταση n, δηλαδή αρκούν n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, για να τον καθορίσουν.

Συνεπώς, ο χώρος των λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής Δ.Ε είναι πλήρως ορισμένος, όταν δοθούν n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις y_1, y_2, $\ldots$, y_n. Τότε η τυχούσα λύση $y=y\,(x)$ θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός

$$\boxed{y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n}$$

και αυτή συνεπώς θα είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Ένα κριτήριο που συνήθως χρησιμοποιούμε, για να δείξουμε ότι οι λύσεις $y_1, y_2, \ldots, y_n$ **είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, είναι το κριτήριο της «ορίζουσας** Wronski**».**

«Αν η ορίζουσα

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_2^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

τότε οι λύσεις $y_1, y_2, \ldots, y_n$ της γραμμικής Δ.Ε $L(y) = 0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες».

Απόδειξη: Έστω

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 0$$

Τότε

$$\left\{\begin{array}{l} c_1y_1' + c_2y_2' + \ldots + c_ny_n' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_ny_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \ldots + c_ny_n^{(n-1)} = 0 \,. \end{array}\right. \qquad (\alpha)$$

Αλλά το γραμμικό ομογενές σύστημα (α) έχει λύση μόνο την $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, γιατί η ορίζουσα $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$. Επομένως οι λύσεις $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, σύμφωνα με τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας.

Παράδειγμα 2.3.1: Να βρεθούν τρεις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της Δ.Ε $y^{(3)} = 0$, και στη συνέχεια η γενική της λύση.

Λύση: Με διαδοχικές ολοκληρώσεις έχουμε

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

Αλλά οι συναρτήσεις $1, x, x^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, αφού

$$c_0+c_1x+c_2x^2 = 0 \Leftrightarrow c_0 = c_1 = c_2 = 0 \,.$$

Άρα η γενική λύση της Δ.Ε $y^{(3)} = 0$ είναι η

$$y = c_0+c_1x+c_2x^2 \,.$$

Παράδειγμα 2.3.2: Ομοίως για τη Δ.Ε $y''-3y'+2y = 0$.

Λύση: Θέτουμε $y = e^{\omega x}$ στη Δ.Ε και δοκιμάζουμε, αν υπάρχουν αριθμοί ω έτσι, ώστε οι συναρτήσεις $e^{\omega x}$ να την επαληθεύουν. Έχουμε $y' = \omega e^{\omega x}$, $y'' = \omega^2 e^{\omega x}$, οπότε

$$y''-3y'+2y = e^{\omega x}(\omega^2-3+2) = 0 .$$

Συνεπώς, αν οι αρθμοί ω ληφθούν ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\omega^2-3\omega+2 = 0$, τότε οι $e^{\omega x}$ θα γίνουν λύσεις της Δ.Ε. Άρα, οι $y_1 = e^{x}$ και $y_2 = e^{2x}$ είναι λύσεις της Δ.Ε. Είναι όμως και γραμμικώς ανεξάρτητες γιατί

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0 \quad \forall\, x \in R$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Παράδειγμα 2.3.3: Ομοίως για τη Δ.Ε $x^2y''+xy'-y = 0$.

Λύση: Δοκιμάζουμε τις συναρτήσεις $y = x^{\omega}$ για κατάλληλο ω, ώστε να γίνουν λύσεις της Δ.Ε. Έχουμε $y'=\omega x^{\omega-1}$, $y''= \omega(\omega-1)x^{\omega-2}$. Οπότε

$$x^{\omega}[\omega(\omega-1)+\omega-1] = x^{\omega}(\omega^2-1) = 0$$

Πρέπει: $\omega^2-1 = 0$ ή $\omega = \pm 1$. Άρα οι $y_1 = x$ και $y_2 = x^{-1}$ είναι λύσης της Δ.Ε. Έχουμε δε,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -\dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x} \neq 0 , \text{ στο } (0, \infty) .$$

Άρα, η γενική λύση της Δ.Ε είναι

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1} .$$

2.4. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Έστω η γραμμική Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές n-τάξης

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \tag{1}$$

Ας ζητήσουμε η συνάρτηση $y = e^{\omega x}$, $\omega \in \mathbb{C}$ να είναι λύση της (1). Επειδή

$$y' = \omega e^{\omega x},\ y'' = \omega^2 e^{\omega x}, \ldots, y^{(n)} = \omega^n e^{\omega x}$$

η $y = e^{\omega x}$ είναι λύση της Δ.Ε., τότε και μόνο τότε, αν

$$\omega^n e^{\omega x} + \alpha_{n-1} \omega^{n-1} e^{\omega x} + \ldots + \alpha_1 \omega e^{\omega x} + \alpha_0 e^{\omega x} = 0,$$

ή αν και μόνο αν,

$$P(\omega) = \omega^n + \alpha_{n-1} \omega^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \omega + \alpha_0 = 0. \qquad (2)$$

Επομένως η συνάρτηση $y = e^{\omega x}$ είναι λύση της Δ.Ε (1) αν και μόνο αν, ω είναι ρίζα της εξίσωσης (2). Η (2) λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** της Δ.Ε (1) και όπως θα δούμε η λύση της Δ.Ε (1) εξαρτάται πλήρως από τις ρίζες της (2).

Περίπτωση Ι. Πράγματι έστω ότι η χαρακτηριστική εξίσωση (2) έχει τις $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ **διακεκριμένες πραγματικές ρίζες** τότε, οι συναρτήσεις

$$y_1 = e^{\omega_1 x},\ y_2 = e^{\omega_2 x}, \ldots, y_n = e^{\omega_n x} \qquad (3)$$

είναι σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, μερικές λύσεις της Δ.Ε (1). Επιπλέον η ορίζουσα του Wronsky των μερικώς αυτών λύσεων,

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{\omega_1 x} & e^{\omega_2 x} & \ldots & e^{\omega_n x} \\ \omega_1 e^{\omega_1 x} & \omega_2 e^{\omega_2 x} & \ldots & \omega_n e^{\omega_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{n-1} e^{\omega_1 x} & \omega_2^{n-1} e^{\omega_2 x} & \ldots & \omega_n^{n-1} e^{\omega_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\omega_1 + \ldots + \omega_n) x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \ldots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

είναι $\neq 0$, αφού είναι γνωστό ότι η ορίζουσα Vardermond είναι $\neq 0$. Συνεπώς, οι λύσεις (3) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και η γενική λύση της Δ.Ε (1) είναι η

$$y = c_1 e^{\omega_1 x} + c_2 e^{\omega_2 x} + \ldots + c_n e^{\omega_n x}.$$

Περίπτωση ΙΙ. Την περίπτωση των πολλαπλών ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωση (2) θα την εξετάσουμε για την απλότητα στην περίπτωση κατά την οποία η Δ.Ε είναι δεύτερης τάξης. Δηλαδή, έστω η Δ.Ε

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_2 y = 0 \tag{4}$$

για την οποία υποθέτουμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωσή της

$$\omega^2 + \alpha_1\omega + \alpha_2 = 0$$

έχει διπλή ρίζα $\omega_{1,2} = \lambda$. Αυτό, ως γνωστό, συμβαίνει μόνον, όταν $\alpha_1 = -2\lambda$ και $\alpha_2 = \lambda^2$, συνεπώς η Δ.Ε (4) είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμη με την

$$y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0 \bullet \tag{5}$$

Αλλά, τότε η Δ.Ε (5) γράφεται

$$(y' - \lambda y)' - \lambda(y' - \lambda y) = 0 \bullet \tag{6}$$

Στην (6) θέτουμε

$$y' - \lambda y = z \tag{7}$$

οπότε $z' = (y' - \lambda y)'$ και η Δ.Ε (6) μετασχηματίζεται στη Δ.Ε

$$z' - \lambda z = 0 \tag{8}$$

Η Δ.Ε (8) είναι Δ.Ε 1ης τάξης χωριζόμενων μεταβλητών, οπότε

$$\frac{dz}{dx} = \lambda z \quad ή \quad \frac{dz}{z} = \lambda dx \quad ή \quad \ln z = \lambda x + c$$

ή, αν $c_2 = e^c$,

$$z = c_2 e^{\lambda x} \bullet \tag{9}$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση z από την (9) στην (7) βρίσκουμε

$$y' - \lambda y = c_2 e^{\lambda x}$$

η οποία είναι γραμμική Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης. Άρα, σύμφωνα με τον τύπο (1.7.3)

$$y = e^{\int \lambda\, dx}\left[c_1 + \int e^{-\int \lambda\, dx} c_2 e^{\lambda x}\, dx\right] =$$

$$= e^{\lambda x}\left[c_1 + c_2 \int dx\right]$$

ή

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{\lambda x} \bullet \tag{10}$$

Παρατηρούμε, δε, ότι οι συναρτήσεις $y_1 = e^{\lambda x}$ και $y_2 = x\, e^{\lambda x}$ είναι μερικές λύσεις της Δ.Ε (4) ή της ισοδύναμης αυτής Δ.Ε (5), αφού η ορίζουσα Wronsky

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x\, e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0 \bullet$$

Άρα οι y_1, y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και συνεπώς η (10) είναι η γενική λύση της (5), όταν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα των $\omega = \lambda$.

Προφανώς η προηγούμενη θεωρία των Περιπτώσεων I, II σε συνδυασμό γενικεύεται σε γραμμικές Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές ανώτερης της δεύτερης τάξης. Π.χ. αν η χαρακτηριστική εξίσωση μιας Δ.Ε 6ης τάξης έχει ρίζες της $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$, τότε η γενική της λύση θα είναι η

$$y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)\, e^{-2x} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2)\, e^{3x}$$

Περίπτωση III. Την περίπτωση μιγαδικών ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης θα την εξετάσουμε,επίσης,για την απλούστευση σε Δ.Ε δεύτερης τάξης. Έστω π.χ. $\omega_1 = \lambda + i\mu$, $\omega_2 = \lambda - i\mu$ ένα ζευγάρι τέτοιων ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης της Δ.Ε (4). Τότε, όμως,η Δ.Ε έχει τη μορφή

$$y'' - 2\lambda y' + (\lambda^2+\mu^2) = 0 \tag{11}$$

και η συνάρτηση $y = e^{(\lambda+i\mu)x}$ είναι προφανώς λύση της (11), αφού η $\omega_1 = \lambda + i\mu$ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσής της $\omega^2 - 2\lambda\omega + (\lambda^2+\mu^2) = 0$. Αλλά,

$$y = e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x}\cos \mu x + e^{\lambda x}\sin \mu x$$

Εύκολα, μπορείτε να επαληθεύσετε, τώρα ότι και οι συναρτήσεις

$$y_1 = e^{\lambda x}\cos \mu x\ ,\quad y_2 = e^{\lambda x}\sin \mu x$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της Δ.Ε (11) και συνεπώς η γενική λύση αυτής είναι η

$$y = e^{\lambda x}(c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x)$$

Η προηγούμενη θεωρία γενικεύεται στην περίπτωση πολλαπλών μιγαδικών ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης της Δ.Ε ανώτερης τάξης (1). Π.χ. αν η χαρακτηριστική εξίσωση μιας Δ.Ε της μορφής (1) έχει την απλή ρίζα $\omega_1 = -2$ και διπλές τις ρίζες $\omega_{2,3} = 3 \pm 4i$, τότε η γενική λύση της θα είναι η

$$y = c_1 e^{-2x} + e^{3x}\left[(c_2+c_3 x)\cos 4x + (c_4+c_5 x)\sin 4x\right].$$

Παράδειγμα 2.4.1. Να λυθούν οι Δ.Ε

(α) $y'' - y = 0$ (β) $y'' + 2y' + y = 0$

(γ) $y'' - 2y' + 5y = 0$ (δ) $y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$

Λύση. (α) Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε (α) είναι η $\omega^2-1=0$. Οι ρίζες αυτής είναι οι $\omega_{1,2}=\pm 1$ πραγματικές διακεκριμένες. Συνεπώς, η γενική λύση της Δ.Ε είναι η $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

(β) Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε (β) είναι η $\omega^2+2\omega+1=(\omega+1)^2=0$. Ρίζα αυτής είναι η $\omega=-1$ διπλή. Συνεπώς, η γενική λύση της Δ.Ε είναι η $y=(c_1+c_2x)\,e^{-x}$.

(γ) Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε (γ) είναι η $\omega^2-4\omega+5=0$. Οι ρίζες αυτής είναι μιγαδικές $\omega_{1,2}=2\pm i$. Συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε είναι η $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$.

(δ) Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε (δ) είναι η $\omega^4+2\omega^2+1=(\omega^2+1)^2=0$. Η εξίσωση αυτή έχει διπλές μιγαδικές ρίζες τις $\omega=\pm i$. Συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε είναι η $y=(c_1+c_2)\cos x+ (c_3+c_4x)\sin x$.

2.5. Μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Για να λύσουμε τη μη ομογενή γραμμική Δ.Ε

$$P(D)\,y=f(x) \tag{1}$$

χρησιμοποιούμε τις εξής προτάσεις:

Πρόταση 1: Αν y_c είναι η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε $P(D)\,y=0$ και y_μ είναι μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε $P(D)\,y=f(x)$, τότε η γενική λύση της (1) δίνεται από τη σχέση

$$y=y_c+y_\mu$$

Απόδειξη

$$P(D)\,y=P(D)\,(y_c+y_\mu)=P(D)\,y_c+P(D)\,y_\mu=0+f(x)=f(x)\,.$$

Παράδειγμα 2.5.1: Να λυθεί η Δ.Ε $y''+\omega^2y=x$, αν ξέρουμε ότι αυτή έχει μερική λύση την $y_\mu=\dfrac{1}{\omega^2}x$.

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε $y''+\omega^2y=0$ που είναι η εξίσωση $\lambda^2+\omega^2=0$, έχει ρίζες τις $\lambda=\pm\omega i$. Άρα, η γενική λύση της είναι η $y_c=c_1\,\text{συν}\omega x+c_2\,\text{ημ}\omega x$. Επομένως, η γενική λύση της μη ομογενούς είναι η

$$y=c_1\,\text{συν}\omega x+c_2\,\text{ημ}\omega x+\frac{1}{\omega^2}x.$$

Πρόταση 2: **Αν** y_1 **είναι μερική λύση της Δ.Ε** $P(D) = f_1(x)$ **και η** y_2 **είναι μερική λύση της Δ.Ε** $P(D)y = f_2(x)$, **τότε η** $y = y_1+y_2$ **είναι μερική λύση της** $P(D)y = f_1(x)+f_2(x)$.

Απόδειξη

$$P(D)y = P(D)(y_1+y_2) = P(D)y_1+P(D)y_2 = f_1(x)+f_2(x).$$

Παράδειγμα 2.5.2: Αν ξέρουμε ότι η $y_1 = \frac{1}{\omega^2}x$ είναι μερική λύση της Δ.Ε $y''+\omega^2 y = x$ και η $y_2 = \frac{1}{\omega^2-1}$ ημx είναι λύση της Δ.Ε $y''+\omega^2 y =$ = ημ x, τότε να θρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε $y''+\omega^2 y = x+$ημ x, $\omega \neq 1$.

Λύση: Επειδή, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, $y = c_1$ συνωx$+c_2$ ημωx είναι η γενική λύση της Δ.Ε $y''+\omega^2 y = 0$, εφαρμόζοντας την Πρόταση 2 θρίσκουμε ότι η

$$y = c_1\,\text{συν}\,\omega x+c_2\,\text{ημ}\,\omega x+\frac{1}{\omega^2}x+\frac{1}{\omega^2-1}\,\text{ημ}\,x$$

είναι η γενική λύση της Δ.Ε $y''+\omega^2 x = x+$ημ x.

2.6. Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Για την εύρεση μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = f(x), \qquad (1)$$

στην περίπτωση που η οδηγός συνάρτηση (εισερχόμενο σήμα) $f(x)$ είναι της ειδικής μορφής που αναφέρουμε πιο κάτω, χρησιμοποιείται η **μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.**

Η κεντρική ιδέα της απόδειξης της πρότασης που θα παραθέσουμε μετά το παράδειγμα 1 εμπεριέχεται στη λύση αυτού του παραδείγματος.

Παράδειγμα 2.6.1: Να λυθούν οι Δ.Ε

(α) $y''-y = e^x \sin x$ (β) $y'' - 2y'+ 2y = e^x \sin x$

Λύση: (α) Αφού η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε (α) είναι η $\omega^2-1 = 0$ με ρίζες $\omega_{1,2} = \pm 1$, έπεται ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε της (α είναι

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \tag{2}$$

Πρέπει να βρούμε και μια μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε (α). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Δηλαδή θέτουμε στην (α)

$$y = e^x (A \cos x + B \sin x) \tag{3}$$

και προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές A, B ώστε η (3) να γίνει μερική λύση της (α). Παραγωγίζοντας δύο φορές την συνάρτηση y που δίνεται από την (3) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y' &= e^x (A \cos x + B \sin x) + e^x (-A \sin x + B \cos x) \\ &= e^x [(A+B) \cos x + (B-A) \sin x] \\ y'' &= e^x [(A+B) \cos x + (B-A) \sin x] + e^x [-(A+B)\sin x + (B-A) \cos x] = \\ &= e^x (2B\cos x - 2A \sin x) \end{aligned} \tag{4}$$

Θέτουμε τις τιμές των y, και y΄΄ από τις (2), και (4) 6την Δ.Ε (α) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} y'' - y &= e^x (2B \cos x - 2A \sin x - A \cos x - B \sin x) = \\ &= e^x [(2B-A) \cos x + (-2A - B) \sin x] \equiv e^x \sin x. \end{aligned}$$

Για τον προσδιορισμό των A, B εξισώνουμε τους συντελεστές των $e^x \cos x$ και $e^x \sin x$ στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης και έχουμε

$$\left.\begin{aligned} 2B - A &= 0 \\ -2B - A &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= -\frac{2}{5} \\ B &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση που αναζητούσαμε είναι η

$$y_\mu = e^x \left(-\frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x\right).$$

Λαμβάνοντας υπόψη τώρα και τη (2) έχουμε ότι η γενική λύση Δ.Ε (α) είναι η

$$y = y_c + y_\mu = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{5} e^x (2\cos x + \sin x) \bullet$$

(β) Για τη Δ.Ε (β) θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία. Δηλαδή θα θέσουμε

$$y = e^x (A \cos x + B \sin x) \tag{5}$$

και παραγωγίζοντας

$$y' = e^x [(A+B)\cos + (B-A)\sin x] \tag{6}$$

$$y'' = e^x [2B\cos x - 2A\sin x]. \tag{7}$$

Θέτουμε τις τιμές y, y', y'' από τις (5), (6) και (7) αντιστοίχως στην Δ.Ε (β) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= e^x [2B\cos x - 2A\sin x - 2(A+B)\cos x - 2(B-A)\sin x + \\ &\quad + 2A\cos x + 2B\sin x] = \\ &= e^x (0\cdot\cos x + 0\cdot\sin x) \equiv e^x \sin x \Rightarrow 0 \equiv e^x \sin x. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση είναι αδύνατη, πράγμα που σημαίνει ότι δεν είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι συντελεστές A και B της σχέσης (5) για να προκύψει μερική λύση της Δ.Ε. Αυτό συνέβηκε διότι ο αριθμός $1+1i$ (οι μονάδες είναι οι συντελεστές των x στην παράσταση $e^x \sin x$) είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωση $\omega^2 - 2\omega + 2 = 0$ της Δ.Ε (β).

Ας δοκιμάσουμε, όμως, να εκτελέσουμε την αντικατάσταση

$$y = x e^x (A\cos + B\sin x) \tag{8}$$

αντί της (5). Οπότε

$$\begin{aligned} y' &= e^x (A\cos x + B\sin x) + x e^x (A\cos x + B\sin x) + x e^x (-A\sin x + B\cos x) = \\ &= e^x (A\cos x + B\sin x) + x e^x [(A+B)\cos x + (B-A)\sin x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= e^x (A\cos x + B\sin x) + e^x (-A\sin x + B\cos x) \\ &\quad + e^x [A+B)\cos x + (B-A)\sin x] \\ &\quad + x e^x [(A+B)\cos x + (B-A)\sin x] \\ &\quad + x e^x [-(A+B)\sin x + (B-A)\cos x] \\ &= 2e^x [(A+B)\cos x + (B-A)\sin x] + x e^x [2B\cos x - 2A\sin x]. \end{aligned}$$

Οπότε, για τον προσδιορισμό των A,B θέτουμε τις τιμές των y, y', y'' στη Δ.Ε και έχουμε

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= 2e^x [(A+B)\cos x + (B-A)\sin x] + x e^x (2B\cos x - 2A\sin x) - \\ &\quad - 2e^x (A\cos x + B\sin x) - 2x e^x [(A+B)\cos x + (B-A)\sin x] + \\ &\quad + 2x e^x (A\cos x + B\sin x) = \\ &= e^x (2B\cos x - 2A\sin x) \equiv e^x \sin x. \end{aligned}$$

Άρα $B = 0$, $A = -\frac{1}{2}$. Οπότε από την (8) η μερική λύση που ζητούσαμε είναι η

$$y_\mu = -\frac{1}{2}\, x\, e^x \cos x.$$

τελικώς η γενική λύση της Δ.Ε (β) είναι

$$y = y_\mu + y_c = -\frac{1}{2}\, x\, e^x \cos x + e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \bullet$$

Η χρησιμοποιηθείσα στο προηγούμενο Παράδειγμα 1 μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστέων στη γενική της διατύπωση περιέχεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1. Όταν η οδηγός συνάρτηση $f(x)$ **στη Δ.Ε (1) έχει τη μορφή**

$$f(x) = p(x)\, e^{kx} (\alpha \cos\lambda x + \beta \sin\lambda x) \tag{9}$$

και ο αριθμός $k + \lambda i$ **είναι ρ-πολλαπλότητας ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης** $P(\omega) = 0$, **τότε η Δ.Ε (1) έχει μερική λύση της μορφής**

$$y = x^\rho e^{kx} [A(x) \cos \lambda x + B(x) \sin \lambda x] \tag{10}$$

όπου $A(x)$ **και** $B(x)$ **είναι πολυώνυμα με συντελεστές προς προσδιορισμό του αυτού βαθμού με το πολυώνυμο** $P(x)$.

Παράδειγμα 2.6.2: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε

$$y'' - 4y' + 4y = e^x.$$

Λύση. Σύμφωνα με την Πρόταση 1 η οδηγός συνάρτηση e^x είναι της γενικής μορφής (9) με $p(x) = 1$, $k = 1$, $\lambda = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε είναι η

$$\omega^2 - 4\omega + 4 = (\omega - 2)^2 = 0$$

και έχει τη διπλή ρίζα $\omega_{1,2} = 2$. Οπότε, ο αριθμός $k + \lambda_i = 1 + 0\,i = 1$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Άρα ο αριθμός ρ της σχέσης (10) ισούται με μηδέν και άρα θέτουμε στη Δ.Ε

$$y = A\, e^x\ ,\quad y' = A\, e^x\ ,\quad y'' = A\, e^x \bullet$$

Για τον προσδιορισμό της παραμέτρου A, θέτουμε y, y', y'' στη Δ.Ε, οπότε

$$y'' - 4y' + 4y = A\, e^x - 4A\, e^x + 4A\, e^x \equiv e^x \quad \Rightarrow A = 1 \bullet$$

Άρα λαμβάνουμε ως μερική λύση $y_\mu = e^x$. Επειδή η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η $y_c = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$, έπεται τελικώς ότι η γενική λύση της Δ.Ε είναι

$$y = y_\mu + y_c = e^x + (c_1 + c_2 x)\, e^x.$$

Παράδειγμα 2.6.3: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$$

Λύση. Η αντίστοιχη ομογενής της Δ.Ε είναι η ίδια όπως στο προηγούμενο παράδειγμα 2 και η μόνη διαφορά είναι τώρα, ότι $k = 2$ και συνεπώς ο αριθμός $k + \lambda i = 2$ είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε πρέπει να θέσουμε στη Δ.Ε

$$y = Ax^2 e^{2x}, \quad y' = 2A\,x\, e^{2x} + 2Ax^2 e^{2x}, \quad y'' = 2A\, e^{2x} + 8Ax\, e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x}.$$

Συνεπώς, για τον προσδιορισμό της παραμέτρου A θέτουμε στη Δ.Ε τις τιμές των y, y', y'', και έχουμε

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= 2A\, e^{2x} + 8Ax\, e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x} \\ &\quad - 8Ax\, e^{2x} - 8Ax^2 e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x} \equiv e^{2x} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2A = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2}\,.$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση είναι $y_\mu = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$. Επειδή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε είναι $y_c = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$, έπεται τελικώς ότι η γενική λύση της Δ.Ε είναι η

$$y = y_c + y_\mu = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Παράδειγμα 2.6.4: Να λυθεί Δ.Ε, $y'' + y = \sin 2x$.

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε είναι $\omega^2 + 1 = 0$ με ρίζες $\omega_{1,2} = \pm i$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1 η οδηγός μιας συνάρτησης $\sin 2x$ είναι της γενικής μορφής (9) με

$$p(x) = 1, \; k = 0, \; \lambda = 2, \; \alpha = 0, \; \beta = 1$$

και ο αριθμός $k + \lambda i = 0 + 2i = 2i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Άρα πρέπει να αναζητήσουμε μερική λύση της μορφής

Οπότε,

$$\begin{aligned} y &= A\cos 2x + B\sin 2x \\ y' &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \quad \text{και} \\ y'' &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x\,. \end{aligned}$$

Για τον προσδιορισμό των A και B θέτουμε τις τιμές των y, y'' στη Δ.Ε και έχουμε

$$y'' + y = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x =$$
$$= -3A\cos 2x - 3B\sin 2x \equiv \sin 2x \Rightarrow$$
$$-3A = 0,\ -3B = 1 \Rightarrow A = 0,\ B = -1/3.$$

Επειδή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε είναι η $y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$, έπεται τελικώς ότι η γενική λύση της Δ.Ε είναι η

$$y = y_c + y_\mu = c_1\cos 2 + c_2\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x.$$

Παράδειγμα 2.6.5: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε $y'' + y = x\cos x$.

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς:

$$\omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm i$$

Οδηγός συνάρτηση: $f(x) = x\cos x$. Σύμφωνα, επομένως με την Πρόταση 1, αυτή είναι της μορφής (9) με

$$p(x) = x.\ k = 0,\ \lambda = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 0\,.$$

Οπότε, $k + \lambda i = 0 + 1i = i$ είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής. Πρέπει άρα να εκτελέσουμε την αντικατάσταση:

$$y = x\,[(A+Bx)\cos x + (\Gamma+\Delta x)\sin x]$$

$$y' = (A+Bx)\cos x + (\Gamma+\Delta x)\sin x + x\,(B\cos x + \Delta\sin x) + x\,[-(A+Bx)\sin x + (\Gamma+\Delta x)\cos x]$$

$$y'' = 2(B\cos x + \Delta\sin x) + 2\,[-(A+Bx)\sin x + (\Gamma+\Delta x)\cos x] + 2x(-B\sin x + \Delta\cos x) + x[-(A+Bx)\cos x - (\Gamma+\Delta x)\sin x],$$

και λαμβάνουμε

$$y'' + y = 2(B+\Gamma)\cos x + (2\Delta - 2A)\sin x - 4B\sin x + 4\Delta x\cos x \equiv x\cos x.$$

Οπότε, έχουμε,

$$B+\Gamma = 0,\ \ \Delta - A = 0,\ \ B = 0,\ \ 4\Delta = 1 \ \ \text{ή}\ \Delta = \frac{1}{4},\ \ A = \frac{1}{4},\ B = \Gamma = 0.$$

Συνεπώς η ζητούμενη γενική λύση της Δ.Ε είναι η

$$y = y_c + y_\mu = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x\,.$$

Παράδειγμα 2.6.6: Να λυθεί η Δ.Ε: $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^4e^x$

Λύση. Μπορούμε να εργασθούμε με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών,όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, αλλά λόγω της ειδικής μορφής της Δ.Ε, εδώ, μπορούμε, για την αποφυγή των πράξεων, να χρησιμοποιήσουμε το εξής τέχνασμα: Πρώτα γράφουμε τη Δ.Ε ως εξής,

$$e^{-x}(y''' - 3y'' + 3y' - y) = x^4 \quad \text{ή} \quad (e^{-x}y)''' = x^4.$$

Στη συνέχεια εκτελούμε τρείς διαδοχικές ολοκληρώσεις και λαμβάνουμε

$$e^{-x}y = \frac{x^7}{5\cdot6\cdot7} \quad \text{ή} \quad y_\mu = \frac{1}{5\cdot6\cdot7}x^7e^x$$

είναι μερική λύση της Δ.Ε επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η

$$\omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega - 1 = (\omega-1)^3 = 0 \;\Rightarrow\; \omega = 1 \text{ τριπλή ρίζα}$$

η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε είναι

$$y_c = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\,e^x.$$

Τελικώς,η γενική λύση της Δ.Ε είναι η

$$y = y_c + y_\mu = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\,e^x + \frac{1}{5\cdot6\cdot7}x^7e^x.$$

Παράδειγμα 2.6.7: Να λυθεί το πρόβλημα της αρχικής τιμής

$$y'' + y = x + 2e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς Δ.Ε είναι η

$$\omega^2 + 1 = 0 \text{ με ρίζες } \omega_{1,2} = \pm i \;\Rightarrow\; y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών της Πρότασης 1, για τον όρο x θα αναζητήσουμε λύση της μορφής $Ax+B$ και για τον όρο $2e^{-x}$ λύση της μορφής Γe^{-x}. Επομένως, θα θέσουμε στη Δ.Ε

$$y = Ax + B + \Gamma e^{-x}, \quad y' = B - \Gamma e^{-x}, \quad y'' = \Gamma e^{-x},$$

οπότε,

$$y'' + y = \Gamma e^{-x} + Ax + B + \Gamma e^{-x} = Ax + B + 2\Gamma e^{-x} \equiv x + 2e^{-x} \;\Rightarrow$$

$$A = 1,\; B = 0,\; \Gamma = 1$$

Άρα, μερική λύση της Δ.Ε είναι η $y_\mu = x + e^{-x}$. Επομένως η γενική λύση της Δ.Ε είναι

$$y(x) = y_c + y_\mu = c_1\cos x + c_2\sin x + x + e^{-x}.$$

Τελικώς, θα χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες για να προσδιορίσουμε τις σταθερές c_1, c_2. Προς το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε αμφότερα τα μέλη της γενικής λύσης και θέτουμε $x = 0$, οπότε έχουμε

$$\left.\begin{array}{ll} y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x + e^{-x} & \Rightarrow\ y(0) = c_1 + 1 = 1 \\ y'(x) = -c_1 \operatorname{cin} x + c_2 \cos x + 1 - e^{-x} & \Rightarrow\ y'(0) = c_2 - 1 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = -2 \end{array}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές των c_1 και c_2 στη γενική λύση, βρίσκουμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής είναι

$$y = -2\sin x + x + e^{-x} .$$

2.7. Μέθοδος της μεταβολής των αυθαίρετων σταθερών

Μία άλλη μέθοδος υπολογισμού μιας μερικής λύσης της γραμμικής Δ.Ε

$$L(D) = f(x),$$

όπου τώρα οι συντελεστές των παραγώγων $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y$ μπορεί να είναι και συναρτήσεις του x, είναι η **μέθοδος της μεταβολής των αυθαίρετων σταθερών**. Σε αντιδιαστολή με την προηγούμενη μέθοδο, δε χρειάζεται η $f(x)$ να έχει τη μορφή $p(x)e^{kx}$ (α συνλx+β ημλx) ($p(x)$ πολυώνυμο του x), αλλά οποιαδήποτε μορφή. Αναπτύσσουμε τη μέθοδο στις γραμμικές Δ.Ε 2ης τάξης και από την ανάπτυξη αυτή φαίνεται αμέσως η γενίκευση για Δ.Ε οποιασδήποτε τάξης.

Έστω η Δ.Ε

$$y'' + \alpha_1(x)\, y' + \alpha_2(x)\, y = f(x). \qquad (1)$$

Βασική προϋπόθεση είναι να ξέρουμε δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις y_1, y_2 της ομογενούς Δ.Ε

$$y'' + \alpha_1(x)\, y' + \alpha_2(x)\, y = 0 . \qquad (2)$$

Θεωρούμε την παράσταση

$$y_\mu = u y_1 + \upsilon y_2 \qquad (3)$$

όπου u, υ συναρτήσεις που ζητάμε να τις προσδιορίσουμε έτσι, ώστε η (3) να γίνει λύση της (1). Αφού δύο συναρτήσεις πρέπει να προσδιοριστούν, χρειάζεται να βάλουμε και δύο συνθήκες στο πρόβλημά μας. Η μία είναι ότι η $uy_1+\upsilon y_2$ πρέπει να ικανοποιεί τη Δ.Ε (1), ενώ η δεύτερη συνθήκη που πρέπει να θάλουμε έτσι, ώστε να διευκολύνονται οι υπολογισμοί, είναι η

$$u'y_1 + \upsilon'y_2 = 0. \tag{4}$$

Από την (3) έχουμε

$$y_\mu' = u'y_1+\upsilon'y_2+uy_1'+\upsilon y_2' . \tag{5}$$

Από τις (4) και (5) συνεπάγεται:

$$y_\mu' = uy_1'+\upsilon y_2' . \tag{6}$$

Τώρα

$$y_\mu'' = u'y_1'+\upsilon'y_2'+uy_1''+\upsilon y_2''$$

οπότε,

$$(u'y_1'+\upsilon'y_2'+uy_1''+\upsilon y_2'') + \alpha_1 (uy_1'+\upsilon y_2')+\alpha_2 (uy_1+\upsilon y_2) = f(x)$$

ή $$(u'y_1'+\upsilon'y_2')+u(y_1''+\alpha_1y_1'+\alpha_2y_1)+\upsilon(y_2''+\alpha_1y_2'+\alpha_2y_2) = f(x)$$

και επειδή οι συναρτήσεις y_1, y_2 είναι λύσεις της Δ.Ε, θα έχουμε

$$u'y_1'+\upsilon'y_2' = f(x). \tag{7}$$

Συνεπώς οι u', υ' επαληθεύουν το σύστημα των (4), (7), δηλαδή

$$\begin{cases} y_1u'+y_2\upsilon' = 0 \\ y_1'u'+y_2'\upsilon = f(x) . \end{cases} \tag{8}$$

Η λύση του συστήματος (8) είναι η

$$u' = -\frac{y_2}{W(y_1, y_2)} f(x), \qquad \upsilon' = \frac{y_1}{W(y_1, y_2)} f(x)$$

όπου $W(y_1, y_2)$ είναι η ορίζουσα του Wronski των y_1, y_2 που είναι $\neq 0$, αφού y_1, y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Από τις (8), με ολοκλήρωση, θρίσκουμε τις συναρτήσεις u, υ, τις τοποθετούμε στην (3) και αυτή είναι η λύση μας.

Παράδειγμα 2.7.1: Να λυθεί η Δ.Ε $y''+y = \text{εφ}\, x$.

Λύση: Σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο, πρέπει να θρούμε πρώτα δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε $y''+y = 0$. Προφανώς αυτές είναι οι $\text{συν}\, x$ και $\text{ημ}\, x$. Στη συνέχεια, λύνοντας το σύστημα (8), δηλαδή το

$$(\text{συν}\, x)\, u'+(\text{ημ}\, x)\, \upsilon' = 0, \qquad -(\text{ημ}\, x)\, u'+(\text{συν}\, x)\, \upsilon' = \text{εφ}\, x ,$$

έχουμε

$$u' = -\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu\, x}\,, \quad \upsilon' = \eta\mu\, x\,.$$

Άρα

$$u = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \eta\mu x - \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c_1$$

και $\upsilon = -\sigma\upsilon\nu x + c_2\,.$

Τελικά, η λύση της Δ.Ε (1) είναι

$$y = uy_1 + \upsilon y_2 = c_1\,\sigma\upsilon\nu x + c_2\,\eta\mu x - (\sigma\upsilon\nu\, x)\,(\ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x|)\,.$$

Αν ξέρουμε μόνο μία λύση της ομογενούς Δ.Ε (1), τότε μία άλλη μέθοδος, που λέγεται **μέθοδος υποβιβασμού της τάξης**, υποδεικνύει η παρακάτω μέθοδος.

Θέτουμε τώρα

$$y = uy_1$$

και η τάξη της Δ.Ε υποβιβάζεται, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.7.2: Να λυθεί η Δ.Ε $y'' - y = xe^x$, αν ξέρουμε ότι η ομογενής της έχει μερική λύση την $y_1 = e^x$.

Λύση: Θέτουμε $y = uy_1 = ue^x$, οπότε

$$y' = u'e^x + ue^x, \quad y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$$

και βρίσκουμε

$$u''e^x + 2u'e^x = xe^x \quad \text{ή} \quad u'' + 2u' = x\,,$$

ή αν

$$u' = w, \quad w' + 2w = x\,,$$

που είναι γραμμική Δ.Ε 1ης τάξης και έχει μία μερική λύση την $w = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, οπότε

$$u = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

(δε χρειάζεται σταθερή, αφού ζητούμε μερική λύση). Τελικά,

$$y = y_c + y_\mu = c_1e^x + c_2e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^x\,.$$

Μία μορφή γραμμικών Δ.Ε με μη σταθερούς συντελεστές που ανάγεται σε Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές είναι οι **Δ.Ε** Euler. Η γενική μορφή τους είναι

$$\boxed{\alpha_n x^n y^{(n)}+\alpha_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+\alpha_1 xy'+\alpha_0 y=f(x)} \qquad (\alpha)$$

όπου $x\in(0,\infty)$ ή $x\in(-\infty,0)$. Συνεπώς, η Δ.Ε μπορεί να λυθεί μόνο στα διαστήματα $(0,\infty)$ ή $(-\infty,0)$.

Στη Δ.Ε (α) εκτελούμε το μετασχηματισμό

$$x=\begin{cases} e^t & \text{αν } x>0 \\ -e^t & \text{αν } x<0, \end{cases}$$

οπότε καταλήγουμε σε Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές. Πράγματι, έστω $x>0$, οπότε $x=e^t$. Έχουμε

$$\frac{dx}{dt}=e^t \quad \text{ή} \quad \frac{dt}{dx}=e^{-t}$$

και άρα

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\dot{y}e^{-t}=\dot{y}\,\frac{1}{x}.$$

Δηλαδή,
$$xy'=\dot{y}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\,\frac{d^2t}{dx^2}=\ddot{y}\,\frac{1}{x^2}-\dot{y}\,\frac{1}{x^2} \quad \text{ή} \quad x^2y''=\ddot{y}-\dot{y} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ομοίως, αν $x<0$, οπότε το $x=-e^t$. Έχουμε $\frac{dx}{dt}=-e^t$, $\frac{dt}{dx}=-e^{-t}$, οπότε καταλήγουμε πάλι ακριβώς στους ίδιους προηγούμενους τύπους. Η διαδικασία συνεχίζεται και παρατηρούμε ότι τελικά οι όροι xy', x^2y'', ..., $x^ny^{(n)}$ εκφράζονται συναρτήσει των παραστάσεων με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή η Δ.Ε μετασχηματίζεται σε άλλη με σταθερούς συντελεστές.

Παράδειγμα 2.7.3: Να λυθεί η Δ.Ε $2x^2y''-3xy'-3y=0$.

Λύση: Επειδή $x^2y''=\ddot{y}-\dot{y}$, $xy'=\dot{y}$, έχουμε με αντικατάσταση:

$$2\ddot{y}-5\dot{y}-3y=0,$$

η οποία έχει γενική λύση

$$y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{3t}$$

ή επειδή $e^t = x$, θα είναι

$$y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^3 .$$

Αν $x < 0$, τότε

$$y = c_1 (-x)^{-1/2} + c_2 (-x)^3 .$$

2.8. Συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

Προβλήματα από διάφορα πεδία εφαρμογών οδηγούν, συνήθως, σε δύο ή περισσότερες γραμμικές Δ.Ε, που συνδέουν δύο ή περισσότερες εξαρτημένες μεταβλητές μιας ανεξάρτητης μεταβλητής και τις παραγώγους των εξαρτημένων μεταβλητών ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή. Παρακάτω εξετάζουμε αντιπροσωπευτικά παραδείγματα. Ο τρόπος της λύσης τους δίνει και τη μέθοδο που θα χρησιμοποιούμε.

Παράδειγμα 2.8.1: Να λυθεί το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + y = e^t \quad (1), \qquad \frac{dy}{dt} - x - y = 0. \quad (2)$$

Λύση: Παραγωγίζουμε και συγχρόνως προσπαθούμε να απαλείψουμε τη μία μεταβλητή

$$(2), (1) \Rightarrow \ddot{y} - \dot{x} - \dot{y} = \ddot{y} - (e^t - 3\dot{y} - y) - \dot{y} = \ddot{y} + 2\dot{y} + y - e^t = 0$$

που έχει λύση την

$$y = (c_1 + c_2 t)\, e^{-t} + e^t/4 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) βρίσκουμε

$$x = \dot{y} - y = -2c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - 2c_2 t e^{-t}. \quad (4)$$

Οι (3) και (4) δίνουν τη ζητούμενη λύση.

Παράδειγμα 2.8.2: Να λυθεί το σύστημα

$$\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 2x_1 = -4e^{2t} + 2 \quad (1)$$

$$2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - 3x_1 - x_2 = 0 \quad (2)$$

Λύση: Παραγωγίζουμε και συγχρόνως προσπαθούμε να απαλείψουμε το x_2

$$(2),(1) \Rightarrow 2\dot{x}_1+3\cdot\frac{1}{2}(-4e^{2t}+2-\dot{x}_1+2x_1)-3x_1-x_2 = \frac{1}{2}\dot{x}_1-x_2-6e^{2t}+3 = 0 \quad (3)$$

$$(3),(1) \Rightarrow \frac{1}{2}\ddot{x}_1-\dot{x}_2-12e^{2t} = \frac{1}{2}\ddot{x}_1-\frac{1}{2}(-4e^{2t}+2-\dot{x}_1+2x_1)-12e^{2t} =$$
$$= \frac{1}{2}\ddot{x}_1+\frac{1}{2}\dot{x}_1-x_1-10e^{2t}-1 = 0$$

ή

$$\ddot{x}_1+\dot{x}_1-2x_1 = 20e^{2t}+2\,.$$

Η Δ.Ε έχει ως προς x_1 γενική λύση

$$x_1 = c_1e^{-2t}+c_2e^{t}+5e^{2t}-1\,. \quad (4)$$

Η (1), λόγω της (4), δίνει

$$2\dot{x}_2 = 4c_1e^{-2t}+c_2e^{t}-4e^{2t}$$

και συνεπώς

$$x_2 = -c_1e^{-2t}+\frac{1}{2}c_2e^{t}-e^{2t}+c_3\,. \quad (5)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις (4) και (5) στη (2) για να ορίσουμε αν κάθε σταθερή c_1, c_2, c_3 είναι πράγματι αυθαίρετη

$$-3c_1e^{-2t}-3c_2e^{t}-15e^{2t}+3-4c_1e^{-2t}+2c_2e^{t}+20e^{2t}+c_1e^{-2t}-\frac{1}{2}c_2e^{t}+e^{2t}-$$
$$-c_3+6c_1e^{-2t}+\frac{3}{2}c_2e^{-t}-6e^{2t} = 0\,.$$

Δηλαδή έπεται ότι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες και η $c_3=3$. Συνεπώς η λύση είναι η

$$x_1 = c_1e^{-2t}+c_2e^{t}+5e^{2t}-1\,,$$
$$x_2 = -c_1e^{-2t}+\frac{1}{2}c_2e^{t}-e^{2t}+3\,.$$

Παράδειγμα 2.8.3: Να λυθεί το σύστημα των Δ.Ε $\dot{x}_1 = tx_2$, $\dot{x}_2 = t$.

Λύση: Το γραμμικό αυτό σύστημα, αν και δεν είναι με σταθερούς συντελεστές, έχει λύση που μπορεί να βρεθεί,όπως προηγούμενα. Διότι, από τη δεύτερη εξίσωση $x_2 = \frac{1}{2}t^2+c_1$, οπότε

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}t^3+c_1t \quad \text{ή} \quad x_1 = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}c_1t^2+c_2$$

και η γενική λύση του είναι

$$x_1 = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}c_1t^2+c_2, \quad x_2 = \frac{1}{2}t^2+c_1$$

2.9. Λύση διαφορικών εξισώσεων με μετασχηματισμό Laplace

Μια σπουδαία εφαρμογή των μετασχηματισμών Laplace είναι η εύρεση λύσης διαφορικής εξίσωσης όταν μας δύνονται ορισμένες αρχικές συνθήκες, δηλαδή στη λύση ενός **προβλήματος αρχικής τιμής**, όπως συνηθίζεται να λέγεται

Υπενθυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace των παραγώγων μιας συνάρτησης δίνεται από τους τύπους

$$L(\dot{y}) = s\,L(y) - y(0) = s\,Y(s) - y(0)$$

$$L(\ddot{y}) = s^2L(y) - s\,y(0) - \dot{y}(0) = s^2\,Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)$$

$$L(\dddot{y}) = s^3L(y) - s^2y(0) - s\,\dot{y}(0) - \ddot{y}(0) = s^3Y(s) - s^2y(0) - s\,\dot{y}(0) - \ddot{y}(0).$$

. . . .

Η μέθοδος λύσης Δ.Ε με μετασχηματισμό Laplace ακολουθεί τα εξής τρία βήματα:

(α) Λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της Δ.Ε

(β) Λύνουμε ως προς το μετασχηματισμό Laplace, $Y(s)$.

(γ) Βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace $L^{-1}[Y(s)]$ ο οποίος και δίνει τη λύση που ζητάμε.

Η όλη διαδικασία, όμως,γίνεται αντιληπτή καλύτερα μέσα από τα παραδείγματα πού ακολουθούν.

Παράδειγμα 2.9.1: Να βρεθεί η λύση $y(t)$ της Δ.Ε

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{5t},$$

τέτοια ώστε $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$.

Λύση Εφαρμόζουμε τα τρία βήματα που προαναφέραμε

(α) Λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace

$$L(\ddot{y}) - 3L(\dot{y}) + 2L(y) = L(e^{5t}) \Rightarrow$$

$$s^2 Y(s) - s\, y(0) - \dot{y}(0) - 3[s\, Y(s) - y(0)] + 2Y(s) = L(e^{5t}) \Rightarrow$$

$$s^2 Y(s) - s - 2 - 3[sY(s) - 1] + 2Y(s) = \frac{1}{s-5} \Rightarrow$$

$$(s^2 - 3s + 2)\, Y(s) = s - 1 + \frac{1}{s-5}\,\cdot$$

(β) Λύνουμε ως προς Y(s)

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s^2-3s+2)(s-5)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-5)}\,\cdot \qquad (1)$$

Αναλύουμε το δεύτερο κλάσμα σε μερικά κλάσματα

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{\Gamma}{s-5}$$

$$A = \left[\frac{1}{(s-2)(s-5)}\right]_{s=1} = \frac{1}{(-1)(-4)} = \frac{1}{4}$$

$$B = \left[\frac{1}{(s-1)(s-5)}\right]_{s=2} = \frac{1}{1\cdot(-3)} = -\frac{1}{3}$$

$$B = \left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right]_{s=5} = \frac{1}{4\cdot 3} = \frac{1}{12}\,\cdot$$

Η (1) γίνεται

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{s-2} + \frac{1}{12}\,\frac{1}{s-5}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{s-2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s-1} + \frac{1}{12}\,\frac{1}{s-5}\,\cdot \qquad (2)$$

(γ) Βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των μελών της σχέσης (2)

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{2}{3} L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{1}{4} L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{12} L^{-1}\left(\frac{1}{s-5}\right)\cdot$$

Οπότε η ζητούμενη λύση είναι η

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{12}e^{5t} + \bullet$$

Παράδειγμα 2.9.2: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\ddot{y} - 9y = 20\cos t,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 18 \bullet$$

Λύση (α) Λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace και λύνουμε ως προς Y.

$$L(\ddot{y}) - 9L(y) = 20L(\cos t) \ \Rightarrow\ s^2Y - s\,y(0) - \dot{y}(0) - 9Y = 20L(\cos t) \ \Rightarrow$$

$$s^2Y - 18 - 9Y = \frac{20s}{s^2+1} \ \Rightarrow\ (s^2-9)Y = 18 + \frac{20s}{s^2+1} \ \Rightarrow$$

$$Y = \frac{18}{s^2-9} + \frac{20s}{(s^2-9)(s^2+1)} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{18s^2+20s+18}{(s+3)(s-3)(s^2+1)} \bullet$$

Αναλύουμε το κλάσμα σε μερικά κλάσματα

$$\frac{18s^2+20s+18}{(s+3)(s-3)(s^2+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-3} + \frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+1} \tag{3}$$

$$A = \left[\frac{18s^2+20s+18}{(s-3)(s^2+1)}\right]_{s=-3} = \frac{18(9)+20(-3)+18}{(-6)\cdot(10)} = \frac{120}{-60} = -2 \tag{4}$$

$$B = \left[\frac{18s^2+20s+18}{(s+3)(s^2+1)}\right]_{s=3} = \frac{18(9)+20(+3)+18}{(6)\cdot(10)} = 4 \bullet \tag{5}$$

Οι συντελεστές Γ και Δ μπορούν να προσδιοριστούν, ως γνωστό, με τη μέθοδο των ταυτοτικά ίσων πολυωνύμων. Πιο εύκολα, όμως, εδώ προσδιορίζονται με το επόμενο τέχνασμα. Από τις (3), (4) και (5) προκύπτει

$$\frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+1} = \frac{18s^2+20s+18}{(s+3)(s-3)(s^2+1)} + \frac{2}{s+3} - \frac{4}{s-3} =$$

$$= \frac{18s^2+20s+18+2s^3+2s-6s^2-6-4s^3-4s-12s^2-12}{(s+3)((s-3)(s^2+1)}$$

$$= \frac{-2s^3+18s}{(s^2-9)(s^2+1)} = \frac{-2s(s^2-9)}{(s^2-9)(s^2+1)} = \frac{-2s}{s^2+1} \bullet$$

Συνεπώς,

$$Y = \frac{-2}{s+3} + \frac{4}{s-3} - \frac{2s}{s^2+1} \bullet$$

Βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, οπότε

$$y(t) = L^{-1}(Y) = -2L\left(\frac{1}{s+3}\right) + 4L\left(\frac{1}{s-3}\right) - 2L\left(\frac{s}{s^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$y(t) = -2e^{-3t} + 4e^{3t} - 2\cos t$$

Επαλήθευση: $\dot{y}(t) = 6e^{-3t} + 12e^{3t} + 12\sin t$,

$$\ddot{y}(t) = -18e^{-3t} + 36e^{3t} + 2\cos t.$$

Άρα

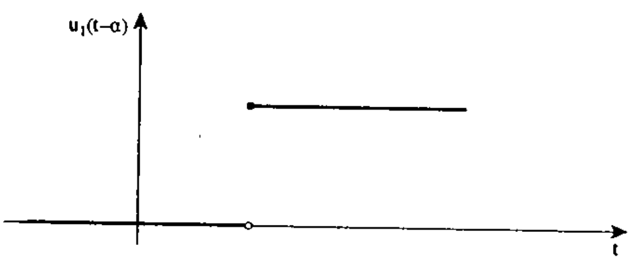
$$\ddot{y} - 9y = -18e^{-3t} + 36e^{3t} + 2\cos t + 18e^{-3t} - 36e^{3t} + 18\cos t = 20\cos t$$

και $\qquad y(0) = -2+4-2 = 0,\ \dot{y}(0) = 6+12+2 = 20.$

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ολες οι προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις μπορούσαν να λυθούν με την κλασσική μέθοδο, δηλαδή να βρούμε τη γενική λύση π.χ. με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών και ακολούθως χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες να λυθεί το πρόβλημα της αρχικής τιμής. Η κυριότερη χρησιμοποίηση του μετασχηματισμού Laplace στο γεγονός ότι μερικές φορές η οδηγός συνάρτηση δεν είναι συνεχής συνάρτηση και συνεπώς η προαναφερθείσα κλασσική μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Για το σκοπό αυτό προηγουμένως θα ορίσουμε τη **βηματική συνάρτηση** ή **συνάρτηση** Heaviside ή **κλιμακωτή συνάρτηση**

$$u_1(t-\alpha) = u_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t < \alpha \\ 1, & \text{όταν } t \geq \alpha \end{cases}, \quad \alpha > 0.$$

Η γραφική παράσταση της βηματικής συνάρτησης είναι η επόμενη Σχ. 2.9.1.



Σχ. 2.9.1

Μια γενίκευση της βηματικής συνάρτηση αποτελεί η συνάρτηση

$$u_c(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t > \alpha \\ c, & \text{όταν } t \geq \alpha \,. \end{cases}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$u_c(t-\alpha) = c\, u_1(t-\alpha).$$

Ας βρούμε τώρα το μετασχηματισμό Laplace της βηματικής συνάρτησης

$$L[u_\alpha(t)] = \int_0^\infty u_\alpha(t)\, e^{-st}\, dt = \int_\alpha^\infty e^{-st}\, dt = -\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_\alpha^\infty = \frac{e^{-\alpha s}}{s}$$

οπότε

$$L[u_\alpha(t)] = \frac{e^{-\alpha s}}{s}\,. \tag{6}$$

Ειδικώς, στην περίπτωση $\alpha = 0$, οπότε $u_0(t) = 1$ για $t > 0$ και $u_0(t) = 0$ για $t \leq 0$, έχουμε

$$L[u_0(t)] = \frac{1}{s}\,. \tag{6α}$$

Ισχύει η επόμενη πρόταση

Πρόταση 1. Αν $L[f(t)] = F(s)$, τότε

$$L[u_1(t-\alpha)\, f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s} F(s) \quad \text{ή} \quad L^{-1}[e^{-\alpha s} F(s)] = u_1(t-\alpha)\, f(t-\alpha) \tag{7}$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον ορισμό του μετασχηματισμό Laplace

$$L[u_1(t-\alpha)\, f(t-\alpha)] = \int_0^\infty e^{-st} u_1(t-\alpha)\, f(t-\alpha)\, dt = \int_\alpha^\infty e^{-st} f(t-\alpha) dt.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα εκτελούμε το μετασχηματισμό $z = t-\alpha$ και λαμβάνουμε

$$L[u_1(t-\alpha)\, f(t-\alpha)] = \int_0^\infty e^{-s(z+\alpha)} f(z)\, dz = e^{-s\alpha}\int_0^\infty e^{-sz}\, f(z)\, dz = e^{-s\alpha} F(s)$$

και η πρόταση αποδείχτηκε.

Ας δούμε λοιπόν τώρα μερικά παραδείγματα προβλημάτων αρχικής τιμής με οδηγό συνάρτηση μη συνεχή συνάρτηση

Παράδειγμα 2.9.3. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 4y = u_1(t) + u_2(t)\ ,\quad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1.$$

Λύση: Λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace αμφότερων των μελών της Δ.Ε, λύνουμε ως προς Y και αναλύουμε σε μερικά κλάσματα:

$$s^2Y - s\,y(0) - \dot{y}(0) - 3sY - 3y(0) + 4Y = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow$$

$$(s^2 - 3s + 4)\,Y = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + 1 \quad \Rightarrow$$

$$Y = \frac{e^{-s}}{s(s-4)(s+1)} + \frac{e^{-2s}}{s(s-4)(s-1)} + \frac{1}{(s-4)(s+1)}$$

$$= e^{-s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{\Gamma}{s+1}\right) + e^{-2s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{\Gamma}{s-1}\right) + \frac{\Delta}{s-4} + \frac{E}{s+1}.$$

Αλλά,

$$A = \left[\frac{1}{(s-4)(s+1)}\right]_{s=0} = -\frac{1}{4},\quad B = \left[\frac{1}{s(s+1)}\right]_{s=4} = \frac{1}{20},$$

$$\Gamma = \left[\frac{1}{s(s-4)}\right]_{s=-1} = \frac{1}{5}\quad \Delta = \left[\frac{1}{s+1}\right]_{s=4} = \frac{1}{5},\quad E = \left[\frac{1}{s-4}\right]_{s=-1} = -\frac{1}{5}.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον τύπο (7), έχουμε

$$y(t) = L^{-1}\,[Y(s)] = -\frac{1}{4}L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{20}L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{s-4}\right]$$

$$+\frac{1}{5}L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{s-1}\right] - \frac{2}{4}L^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{2s}\right] + \frac{1}{20}L^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{s-4}\right] +$$

$$+\frac{1}{5}L^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] - \frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}u_1(t-1) + \frac{1}{20}e^{4(t-1)}u_1(t-1) + \frac{1}{5}e^{-(t-1)}u_1(t-1) -$$

$$-\frac{1}{4}u_1(t-2) + \frac{1}{20}e^{4(t-2)}u_1(t-2) + \frac{1}{5}e^{-(t-2)}u_1(t-2) +$$

$$+\frac{1}{5}e^{4t} - \frac{1}{5}e^{-t}.$$

Παράδειγμα 2.9.4. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\ddot{y} = f(t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0 \tag{8}$$

όπου
$$f(t) = \begin{cases} \sin t\,, & \text{όταν} \quad 0 \le t < \pi \\ \cos t\,, & \text{όταν} \quad \pi \le t < \infty\,. \end{cases}$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας τη βηματική συνάρτηση $u_1(t-\pi)$, η οδηγός συνάρτηση γράφεται

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin t + u_1(t-\pi)(\cos t - \sin t) \\ &= \sin t + u_1(t-\pi)\left[-\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace της Δ.Ε και έχουμε

$$L(\ddot{y}) = L(f(t)) \;\Rightarrow\; s^2Y - s\,y(0) - \dot{y}(0) = L[f(t)] \;\Rightarrow$$

$$s^2Y - s = L(\sin t) - L[u_1(t-\pi)\cos(t-\pi)] + L[u_1(t-\pi)\sin(t-\pi)] \;\Rightarrow$$

$$Y = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2(s^2+1)} - e^{-\pi s}\frac{1}{s(s^2+1)} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2(s^2+1)}\,.$$

Αναλύουμε τα κλάσματα σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+\Gamma}{s^2+1} \;\Rightarrow\; A = \left[\frac{1}{s^2+1}\right]_{s=0} = 1, \quad \frac{Bs+\Gamma}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{1-s^2-1}{s(s^2+1)} = -\frac{3}{s^2+1} \;\Rightarrow\; B = -1, \; \Gamma = 0$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+1} \;\Rightarrow\; B = \left[\frac{1}{s^2+1}\right]_{s=0} = 1$$

$$\frac{A}{s} + \frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{1}{s^2} = \frac{-1}{s^2+1} \;\Rightarrow\; A = 0, \; \Gamma = 0, \; \Delta = -1.$$

Άρα,

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right] + e^{-\pi s} + \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right] \;\Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] -$$

$$-L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{1}{s}\right] + L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}\right] + L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{1}{s^2}\right] - L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}\right] =$$

$$= 1+t-\sin t + u_1(t-\pi)[-1+\cos(t-\pi)+(t-\pi)+\sin(t-\pi)] =$$
$$= 1+t-\sin t + u_1(t-\pi)[-1-\cos t+(t-\pi)+\sin t],$$

ή πιο απλά

$$y(t) = \begin{cases} 1+t-\sin t\,, & \text{όταν } 0 \le t < \pi \\ 2t-\pi-\cos t\,, & \text{όταν } \pi \le t \end{cases}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί, επίσης, να χρησιμοποιηθεί στη λύση συστήματος συνήθων γραμμικών Δ.Ε.

Παράδειγμα 2.9.5. Να θρεθεί η λύση x(t), Y(t) του συστήματος

$$\dot{x} = 2x - 3y$$
$$\dot{y} = -2x + y,$$

τέτοια ώστε $x(0) = 8$, $y(0) = 3$ •

Λύση: Λαμβάνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace αμφότερων των Δ.Ε, βρίσκουμε

$$\begin{matrix} sX-8 = 2X-3Y \\ sY-3 = -2X+Y \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} (s-2)X+3Y = 8 \\ 2X+(s-1)Y = 3 \end{matrix} \;\bullet$$

Λύνοντας το τελευταίο σύστημα ως X και Y βρίσκουμε

$$\begin{matrix} X = \dfrac{8s-17}{(s+1)(s-4)} \\ Y = \dfrac{3s-22}{(s+1)(s-4)} \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} X = \dfrac{5}{s+1} + \dfrac{3}{s-4} \\ Y = \dfrac{5}{s+1} - \dfrac{2}{s-4} \end{matrix} \;\bullet$$

Λαμβάνοντας, τέλος, τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace

$$L^{-1}(X) = x(t) = 5e^{-3t} - 3e^{4t}$$
$$Y^{-1}(Y) = y(y) = 5e^{-t} - 2e^{4t} \bullet$$

Θα δώσουμε τελικώς ένα παράδειγμα από τη θεωρία των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.

Παράδειγμα 2.9.6. Να υπολογισθεί η συνάρτηση του εξερχόμενου σήματος σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο αποτελείται από αντίσταση R, αυτεπαγωγή L και ηλεκτρεγερτικη δύναμη ενός μόνο τετραγωνικού κύματος $u_a(t) - u_b(t)$. Η αρχική ένταση του ρεύματος θεωρείται 0.

Λύση: Όπως ξέρουμε, αφού $\frac{1}{C} = 0$, η Δ.Ε του κυκλώματος είναι η

$$L\frac{di}{dt} + RI = u_a(t) - u_b(t) .$$

Η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace σε αμφότερα τα μέλη της ΦΔ.Ε θα δώσει

$$Ls\,I(s) + R\,I(s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s} \cdot$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως I(s),

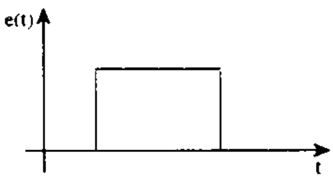
$$I(s) = \frac{e^{-as}}{Ls\left(s+\frac{R}{L}\right)} - \frac{e^{-bs}}{Ls\left(s+\frac{R}{L}\right)} = \frac{e^{-as}}{R}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right] -$$

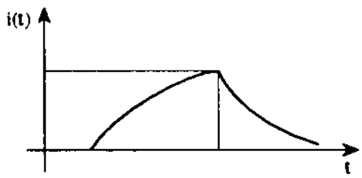
$$- \frac{e^{-bs}}{R}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right] \cdot$$

Οπότε βρίσκοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό σύμφωνα με τους τύπους (6) και (7) λαμβάνουμε

$$i(t) = u_1(t-a)\frac{1}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-a)}\right] - u_1(t-b)\left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-b)}\right]$$

(βλέπε Σχ.2.9.2).

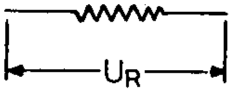


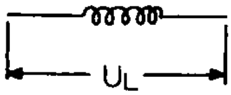


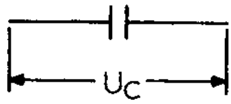
Σχ. 2.9.2.

2.10 Εφαρμογές

Μία από τις πιο άμεσες εφαρμογές των γραμμικών Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές 2ης τάξης είναι στα ηλεκτρικά κυκλώματα. Η στοιχειώδης θεωρία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων εξετάζει τρία βασικά στοιχεία· την ωμική αντίσταση R, την αυτεπαγωγή L και τη χωρητικότητα C. Μεταξύ των στοιχείων αυτών, της έντασης και της τάσης του ηλεκτρικού ρεύματος, ισχύουν οι σχέσεις

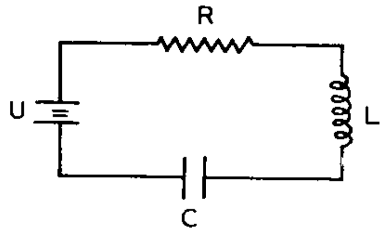






$$Ri_R = \upsilon_R \qquad L\frac{di_L}{dt} = \upsilon_L \qquad C\frac{d\upsilon_C}{dt} = i_C ,$$

όπου i_R, i_L, i_C, υ_R, υ_L, υ_C είναι η ένταση και η διαφορά δυναμικού στην ωμική αντίσταση, στο πηνίο και στη χωρητικότητα. Πολλά ηλεκτρικά κυκλώματα θεωρούνται συνδυασμοί των R, L και C. Έστω ένα RLC ηλεκτρικό κύκλωμα που οι αντιστάσεις R, L, C συνδέονται στη σειρά (διπλανό σχήμα).



Ισχύει ο νόμος του Kirchhoff που λέει ότι «Το άθροισμα των πτώσεων τάσεως κατά μήκος του κυκλώματος είναι μηδέν».

Δηλαδή

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,(s)\,ds = \upsilon\ ,}$$

όπου υ η τάση της πηγής. Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση έχουμε

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = \frac{d\upsilon}{dt}\,.$$

Έστω μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης $\upsilon = E\,\eta\mu\omega t$. Τότε,

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = E\omega\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t \qquad (1)$$

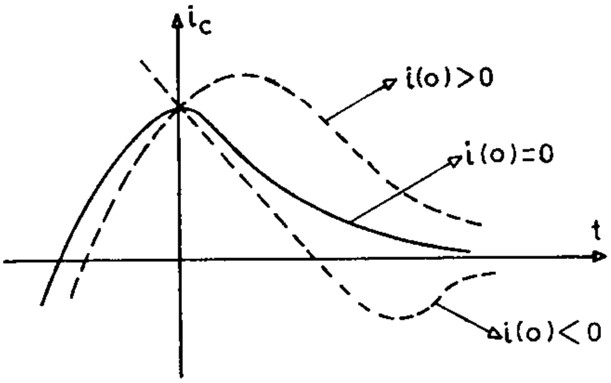
Η χαρακτηριστική εξίσωση $L\omega^2+R\omega+\frac{1}{C} = 0$ έχει ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \begin{cases} -\alpha \pm b, \alpha\nu \ \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} \geq 0 \\ -\alpha \pm i\omega_0\,, \alpha\nu \ \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0\,, \end{cases}$$

όπου ο $\frac{R}{2L}=\alpha$ καλείται **παράγοντας απόσβεσης** και η $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}$ φυσική **κυκλική συχνότητα.**

i) **Υπεραπόσβεση:** $(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}>0$. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε ότι η λύση της (1) είναι το ρεύμα **μόνιμης κατάστασης**, οπότε η λύση είναι

$$i_c = c_1 e^{-(\alpha+b)t} + e^{-(\alpha-b)t}$$



Το παραπάνω σχήμα δείχνει την ένταση για μερικές αρχικές συνθήκες.

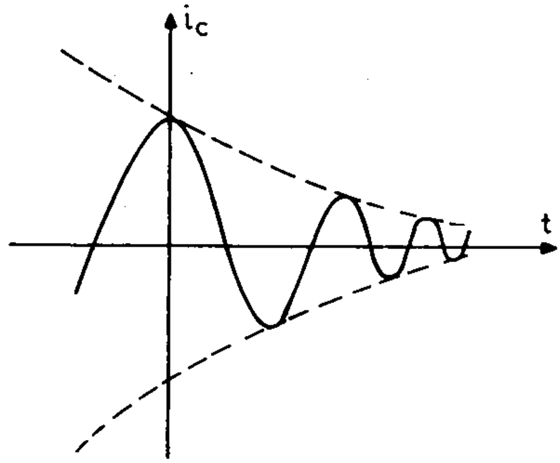
ii) **Κρίσιμη απόσβεση:** $(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}=0$. Στην περίπτωση αυτή η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα $\omega=-\alpha$ και επομένως το ρεύμα μόνιμης κατάστασης

$$i_C = e^{-\alpha t}(c_1+c_2 t)$$

iii) **Υποαπόσβεση:** Εδώ $(\frac{P}{2L})^2-\frac{1}{LC}<0$, οπότε οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι $\omega=-\alpha\pm i\omega_0$ και η λύση είναι η

$$i_C= e^{-\alpha t}(c_1\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t+c_2\,\eta\mu\,\omega t) = e^{\alpha t}c_3\,\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t+c_4)\,,$$

όπου $c_3=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ και $c_4=\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{c_2}{c_1}$. Το παρακάτω σχήμα δείχνει τυπική περίπτωση υποαπόσβεσης με αρχικές συνθήκες $i(0)=1, \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=0$.



Από τα προηγούμενα σχήματα έπεται ότι τα γραφήματα της υπεραπόσβεσης και κρίσιμης απόσβεσης τέμνουν τον άξονα t το πολύ μια φορά, ενώ της υποαπόσβεσης άπειρες φορές, δηλαδή έχουμε ταλαντούμενη συμπεριφορά.

Έστω τώρα η μη ομογενής Δ.Ε (1) με δεύτερο μέλος και έστω ότι ζητούμε την ένταση i τέτοια, ώστε i (0)=0, που λέγεται ρεύμα μόνιμης κατάστασης. Τότε σύμφωνα με τη μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών, θέτουμε στην (1)

$$i = A\ \text{συν}\omega t + B\ \text{ημ}\omega t$$

και προσδιορίζουμε τα A και B. Μετά τις πράξεις βρίσκουμε

$$A = \frac{-E\omega^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\omega^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \omega^2 R^2}, \qquad B = \frac{E\omega^2 R}{\omega^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \omega^2 R^2}.$$

Η ποσότητα $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ καλείται **επαγωγική αντίσταση** και η ποσότητα $|z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$ καλείται **εμπέδηση** ή **σύνθετη αντίσταση**. Τελικά, χρησιμοποιώντας αυτόν τον συμβολισμό, έχουμε

$$A = -\frac{EX}{|z|^2}, \qquad B = \frac{ER}{|z|^2}.$$

Συνηθίζεται να εκφράζουμε το ρεύμα μόνιμης κατάστασης στη μορφή

$$\alpha \text{ συν } (\omega t+\beta),$$

που δείχνει αμέσως ποιό είναι το εύρος α της ταλάντωσης και η φάση β. Έτσι έχουμε

$$\alpha = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\frac{E^2X^2+E^2R^2}{|z|^2}} = \frac{E}{z}, \qquad \beta = \text{τοξεφ}\,\frac{R}{X}.$$

Συνεπώς, ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε ότι το

«εξερχόμενο ρεύμα» = «παροδικό ρεύμα»+«ρεύμα μόνιμης κατάστασης»

$$i = c_1e^{-(a+b)t}+c_2e^{-(a-b)t}+\frac{E}{|z|}\text{ συν }\left(\omega t+\text{τοξεφ}\frac{R}{X}\right)$$

(υπεραπόσβεση)

$$i = e^{-at}(c_1+c_2t)+\frac{E}{|z|}\text{ συν }\left(\omega t+\text{τοξεφ}\frac{R}{X}\right)$$

(κρίσιμη απόσβεση)

$$i = e^{-at}c_3\text{ συν }(\omega_0t+c_4)+\frac{E}{|z|}\text{ συν }\left(\omega t+\text{τοξεφ}\frac{R}{X}\right).$$

(υποαπόσβεση)

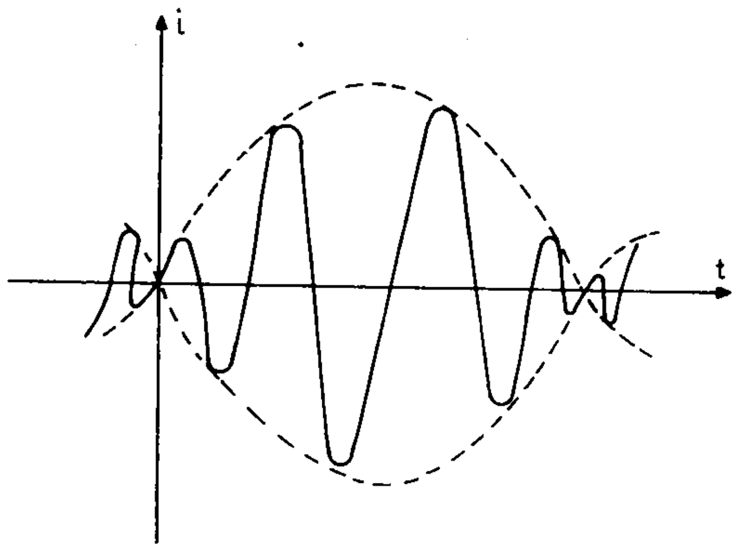
Μία αξιοσημείωτη περίπτωση είναι,όταν $R = 0$. Τότε θα είναι

$$i = c_3\text{ συν }(\omega_0t+c_4)+\frac{E}{X}\text{ συν }\omega t \qquad \text{(χωρίς απόσβεση)}$$

Αν $i(0) = \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$, τότε $c_4=0$ και $c_3 = -\frac{E}{X}$ και

$$i = \frac{2E}{X}\text{ ημ}\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\text{ ημ}\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}.$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει,επίσης,η περίπτωση, όταν η τιμή ω είναι κοντά στην τιμή ω_0. Ο τύπος αυτός ταλάντωσης μπορεί να παρασταθεί έτσι, ώστε να έχει κυκλική συχνότητα κοντά στο ω (και στο ω_0) με πλάτος $\alpha(t) = \frac{2E}{X}\text{ ημ}\frac{\omega_0-\omega}{2}t$ που ταλαντεύεται ελαφρά με το χρόνο με κυκλική συχνότητα $\frac{\omega_0-\omega}{2}$. Το κύμα ημ $\frac{\omega_0+\omega}{2}t$ λέμε ότι έχει **παραμορ-**



φώσιμο πλάτος. Στη θεωρία της Ακουστικής αυτές οι παραμορφώσεις του πλάτους λέγονται **διακροτήματα**, (παραπάνω σχήμα), η φωνή ηχεί στα αντίστοιχα μεγάλα πλάτη. Κρότοι μπορούν να συμβούν, όταν δύο ηχούντα διαπασών που έχουν κοντινές ιδιοσυχνότητες τίθενται σε ταλάντωση ταυτόχρονα. Μια πρακτική χρήση αυτού είναι το κούρδισμα των μουσικών οργάνων, όπου το ακριβές κούρδισμα επιτυγχάνεται προσαρμόζοντας τη συχνότητα της νότας με εκείνη μιας δοσμένης νότας, μέχρις ότου οι κρότοι εκλείψουν. Το φαινόμενο επίσης είναι σπουδαίο στη θεωρία της Οπτικής και του Ηλεκτρισμού.

Ας σημειωθεί επίσης ότι το πλάτος της κρούσης είναι διπλάσιο του πλάτους του ρεύματος μόνιμης κατάστασης, όταν υπάρχει απόσβεση. Στην πραγματικότητα υπάρχει πάντοτε κάποια απόσβεση έτσι, ώστε το παροδικό ρεύμα μπορεί να θεωρηθεί ανύπαρκτο ύστερα από ένα χρονικό διάστημα. Το πλάτος του ρεύματος μόνιμης κατάστασης εξαρτάται από τα L, C, R, E και ω και δίνεται από τον τύπο

$$\alpha = \frac{E}{|z|} .$$

Όταν αυτό γίνεται μέγιστο, λέμε ότι έχουμε **συντονισμό**. Προφανώς αυτό είναι μια αύξουσα συνάρτηση του E. Για σταθερό, όμως, E το πλάτος του εξερχόμενου ρεύματος γίνεται μέγιστο, όταν γίνει ελάχιστη η εμπέδωση $|z|$. Επειδή

$$|z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

το α γίνεται μέγιστο όταν:

α) $R=0$, για σταθερά L, C, ω

β) $L = 1/\omega^2 C$, για σταθερά R, C, ω

γ) $C = 1/\omega^2 L$, για σταθερά L, C, ω

δ) $\omega^2 = 1/LC$, για σταθερά L, R C.

Γενικά ένα RLC ηλεκτρικό κύκλωμα βρίσκεται σε συνθήκες συντονισμού, όταν η σύνθετη αντίσταση γίνει ελαχίστη, δηλαδή όταν

$$\omega^2 LC = 1 \bullet$$

Παράδειγμα 2.9.1: Έστω σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα $L=C=1$, $R=0$ και $U=\eta\mu\, t$ και $i(0) = \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$. Να βρεθεί η ένταση i.

Λύση: Η Δ.Ε που διέπει το κύκλωμα είναι η

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + i = \sigma\upsilon\nu\, t\ ,$$

οπότε

$$i = c_1\, \sigma\upsilon\nu t + c_2\, \eta\mu\, t + \frac{1}{2}\, t\, \eta\mu\, t$$

και από τις αρχικές συνθήκες,

$$i = \frac{1}{2}\, t\, \eta\mu\, t\ ,$$

δηλαδή μια μη φραγμένη ένταση με το χρόνο $\bullet$

Παράδειγμα 2.9.2: Ομοίως, όπως στο Παράδειγμα 2.9.1, αν $i=1$, $R=0$, $C = \frac{1}{1.1025}$, $U = \frac{1}{0.95}\, \eta\mu\, 0.95\, t$

Λύση: Έχουμε

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 10.25\, i = \sigma\upsilon\nu\, 0.95t\ ,$$

οπότε

$$i = c_1\, \sigma\upsilon\nu\, 1.05t + c_2\, \eta\mu\, 1.05t + 5\, \sigma\upsilon\nu\, 0.95t \bullet$$

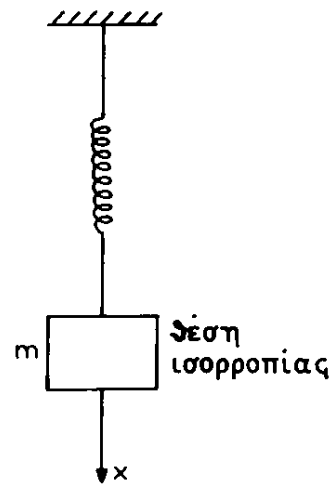
Από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε $c_1 = -5$, $c_2=0$ και άρα

$$i = 5\,(\sigma\upsilon\nu 0.95t - \sigma\upsilon\nu 1.05t) = 10\eta\mu\,(0.05t)\,\eta\mu t$$

δηλαδή έχουμε διακροτήματα.

Β. Ταλαντώσεις μηχανικών συστημάτων

Παράδειγμα 2.9.3: Ας θεωρήσουμε ένα μηχανικό σύστημα που αποτελείται από ένα σώμα μάζας m κρεμασμένο από ένα ελατήριο σταθερής ελαστικότητας k. Το σώμα μπορεί να ταλαντούται κατακόρυφα μέσα σε ένα ρευστό που εμποδίζει το σώμα να κινηθεί και άρα παρουσιάζει τριβές. Θεωρώντας άξονα Οx κατακόρυφο, υποθέτοντας ότι οι τριβές είναι ανάλογες της ταχύτητας, και εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα, έχουμε



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Έστω ότι στο σώμα ενεργεί η εξωτερική δύναμη F (t), τότε

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t).$$

Η αναλογία αυτής της Δ.Ε με εκείνη του ηλεκτρικού κυκλώματος RLC είναι προφανής. Η αντιστοιχία είναι η εξής:

$$(m\longleftrightarrow L(,\ (c\longleftrightarrow R),\ \left(k\longleftrightarrow \frac{1}{C}\right),\ \left(F(t)\longleftrightarrow \frac{d\upsilon}{dt}\right),\ (F\,\sigma\upsilon\nu\omega t\longleftrightarrow E\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega t)$$

$$(F\longleftrightarrow E\omega),\ (x\longleftrightarrow \text{ρεύμα } i).$$

Συνεπώς

$$x = c_1e^{-(a+b)t} + c_2e^{-(a-b)t} + \frac{F}{\omega|z|}\,\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \tau o\xi\epsilon\varphi\frac{c}{X}\right) \quad \text{Υπεραπόσβεση}$$

$$x = e^{-at}c_3\sigma\upsilon\nu\,(c_1t+c_2) + \frac{F}{\omega|z|}\,\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \tau o\xi\epsilon\varphi\frac{c}{X}\right) \quad \text{Κρίσιμη απόσβεση}$$

$$x = e^{-at}\,(\sigma\upsilon\nu\omega_0 t + c_4) + \frac{F}{\omega|z|}\,\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \tau o\xi\epsilon\varphi\frac{c}{X}\right) \quad \text{Υποαπόσβεση}.$$

όπου $a = \frac{c}{2m}$, $b = \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$

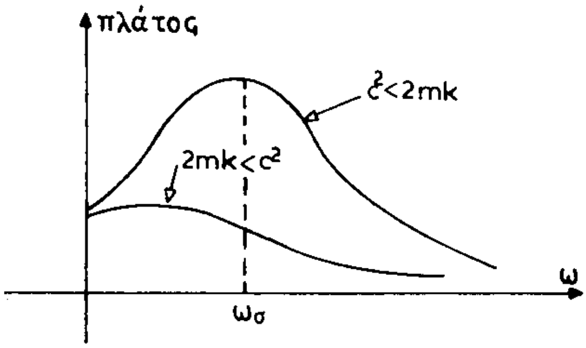
$$\omega|z| = \sqrt{\omega^2c^2+m^2\left(\omega^2-\frac{k}{m}\right)^2},\quad X = \frac{m}{\omega}\left(\omega^2-\frac{k}{m}\right).$$

Η έννοια του συντονισμού αναλύεται κατά τρόπο ανάλογο εκείνου του RLC κυκλώματος. Ας σημειωθεί ότι, ενώ συντονισμός συχνά είναι μια κατάσταση που μας χρειάζεται στα ηλεκτρικά κυκλώματα, είναι συχνά ανεπιθύμητος στα μηχανικά συστήματα. Το πλάτος μόνιμης κατάστασης της ταλάντωσης είναι $A = \frac{F}{\omega|z|}$. Η μέθοδος της μεγιστοποιήσεως του εύρους καθώς τα F, m, c και k μεταβάλλονται είναι η ίδια με την περίπτωση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Αν η ω μεταβάλλεται και τα F, m, c και k είναι σταθερά, το A μεγιστοποιείται, όταν ελαχιστοποιείται η $\omega|z|$ και η ποσότητα αυτή είναι ελάχιστη όταν $\omega^2|z|^2$ είναι ελάχιστη. Αλλά

$$\frac{d}{d\omega}(\omega^2|z|^2) = \frac{d}{d\omega}\left[\omega^2c^2+m^2\left(\omega^2-\frac{k}{m}\right)^2\right] = 2\omega x^2+4m^2\omega\left(\omega^2-\frac{k}{m}\right) = 0$$

ή $$c^2 = 2m^2\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right) \quad \text{ή} \quad \omega_\sigma^2 = \frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2},$$

όπου ω_σ η συχνότητα συντονισμού. Αν $c^2 > 2mk$ η εξίσωση για την ω_σ δεν δίνει πραγματική τιμή και το μέγιστο αποτέλεσμα συμβαίνει, όταν $\omega = 0$. Αν $2mk > c^2$ προκύπτει μια θετική πραγματική τιμή ω_σ.

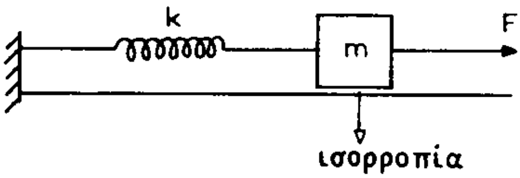


Το παραπάνω σχήμα δείχνει τη μεταβολή του πλάτους με το ω, όπου το μέγιστο πλάτος παρουσιάζεται για $\omega=0$ και για την περίπτωση κάποιας θετικής τιμής ω_σ. Ας σημειωθεί ότι οι τιμές συχνότητας συντονισμού και της φυσικής κυκλικής συχνότητας διαφέρουν κατά ένα μικρό ποσό, αν οι τριβές είναι μικρές. Όθεν, λέγεται μερικές φορές ότι συντονισμό έχουμε περίπου προσεγγιστικά, όταν το ω είναι κοντά στο ω_0 και αυτός είναι ένας από τους λόγους που η συχνότητα συντονισμού και οι φυσικές συχνότητες,μερικές φορές,συγχέονται.

Παράδειγμα 2.9.4: Ένα σώμα προσδένεται στο άκρο ελατηρίου και γλιστράει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Να δοθεί η θέση του σε κάθε στιγμή, αν η σταθερή του ελατηρίου είναι k και η τριβή F.

Λύση: Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = \pm F$$



Το σημείο + εκλέγεται όταν η ταχύτητα $\frac{dx}{dt} > 0$ και το $-$ όταν η ταχύτητα $\frac{dx}{dt} < 0$. Η λύση ως γνωστό είναι η

$$x(t) = c_1\,\text{συν}\,\omega_0 t + c_2\,\text{ημ}\,\omega_0 t \pm \frac{F}{k},$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Τις σταθερές c_1, c_2 θα τις προσδιορίσουμε από τις συνοριακές συνθήκες στη θέση που το σώμα αλλάζει διεύθυνση κινήσεως. Αφού η αρχική ταχύτητα στην αρχή κάθε χρονικού διαστήματος είναι μηδέν, το σώμα σταματά ταυτόχρονα, όταν γίνεται η αλλαγή των διευθύνσεων, και

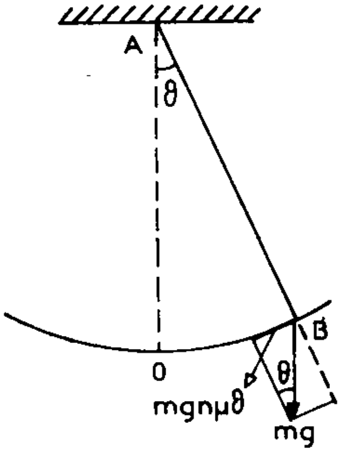
$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = (-c_1\omega\,\text{ημ}\,\omega t + c_2\omega\,\text{ημ}\,\omega t)_{t=0} \Rightarrow c_2=0 \Rightarrow x(t) = c_1\,\text{συν}\,\omega_0 t \pm \frac{F}{k}.$$

Η σταθερή c_1 ορίζεται στην αρχή κάθε χρονικού διαστήματος από την τιμή που έχει η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας.

Οι τιμές του t, για τις οποίες η κίνηση αλλάζει διεύθυνση, μπορούν να προκαθοριστούν από τη συνθήκη ότι η στιγμιαία ταχύτητα τότε είναι μηδέν. Δηλαδή, $\frac{dx}{dt} = -\omega_0 c\, \text{ημ}\omega t = 0$, ή όταν $\omega_0 t = n\pi$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Το σώμα θα σταματήσει, όταν η δύναμη του ελατηρίου σ' αυτές τις χρονικές στιγμές εξισορροπηθεί από τη δύναμη τριβής.

Γ. Εκκρεμές

Παράδειγμα 2.9.5: Σ' ένα απλό εκκρεμές μήκους l (διπλανό σχήμα), έστω θ (που θεωρείται μικρή) η γωνία μεταξύ της κατακόρυφης ΑΟ και της ΑΒ και mg το βάρος του σώματος Β. Όπως φαίνεται στο σχήμα η συνιστώσα mg ημθ είναι η κινούσα δύναμη, διότι η άλλη εξουδετερώνεται από την αντίσταση του νήματος. Όταν $\theta > 0$ το σώμα κινείται προς τα δεξιά της κατακόρυφης αλλά η κινούσα δύναμη έχει αντίθετη διεύθυνση. Όταν $\theta < 0$ το σώμα κινείται προς τα αριστερά της κατακόρυφης, ενώ η κινούσα δύναμη έχει πάλι αντίθετη διεύθυνση. Επειδή δε το μήκος του τόξου $s = l\theta$, θ μετρούμενο σε ακτίνια, έχουμε, σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα,



$$m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\text{ημ}\theta \quad \text{ή} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\text{ημ}\theta .$$

Αυτή η μη γραμμική Δ.Ε δε μπορεί να λυθεί έτσι, ώστε η λύση της να εκφραστεί μόνο με στοιχειώδεις συναρτήσεις. Για μικρές όμως γωνίες (μεταξύ -5^0 και 5^0) μπορούμε να γράψουμε $\text{ημ}\,\theta \approx \theta$, οπότε

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \, .$$

Η λύση της γραμμικής αυτής Δ.Ε, επειδή οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι $\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$, θα είναι η

$$\theta = A\,\eta\mu\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\,\sigma\upsilon\nu\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\,.$$

Συνεπώς το εκκρεμές εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις. Η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων είναι $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ και επομένως η περίοδος των ταλαντώσεων του εκκρεμούς είναι η

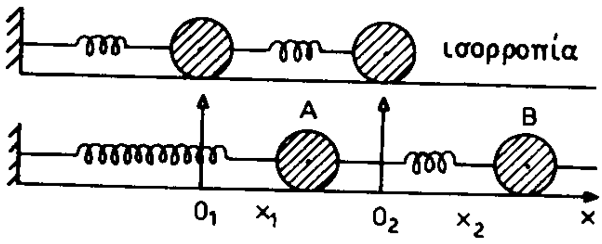
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}} \quad \text{ή} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,}$$

που είναι ένας τύπος γνωστός από τη Στοιχειώδη Φυσική.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η εύρεση της περιόδου εδώ δεν απαιτούσε αρχικές συνθήκες. Επίσης, η προσέγγιση του ημ θ με το θ είναι ισοδύναμη με τον υπόθεση ότι η κίνηση είναι απλή αρμονική.

Δ. Προβλήματα δονήσεων

Παράδειγμα 2.9.6: Στο παρακάτω σχήμα δύο σφαίρες που έχουν μάζα m η καθεμιά είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με ελατήρια και με ακλόνητο σημείο 0. Στην αρχή τα ελατήρια δεν έχουν καμιά τάση και συνεπώς οι



σφαίρες βρίσκονται σε ισορροπία. Αν μετακινήσουμε τις σφαίρες έτσι, ώστε για $t=0$, $x_1=-\alpha$ και $x_2=0$ και $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$, να βρεθεί η μετέπειτα κίνηση των σφαιρών. Η τριβή θεωρείται αμελητέα και η σταθερή των ελατηρίων είναι k.

Λύση: Θεωρούμε τις μάζες στη θέση που βρίσκονται στη δεύτερη γραμμή του σχήματος. Σύμφωνα με το Νόμο του Νεύτωνα και το Νόμο του Hooke, που λέει ότι «η δύναμη που δίνει μια έκταση μήκους l του ελατηρίου είναι ανάλογη του l», έχουμε ότι για τη σφαίρα Α

$$m\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = k\,(x_2-x_1)-kx_1\,,$$

διότι το πρώτο ελατήριο ωθεί την πρώτη σφαίρα προς τα αριστερά, ενώ το δεύτερο δίνει μια ώθηση $k\,(x_2-x_1)$ προς τα δεξιά. Ομοίως, για τη σφαίρα Β

$$m\,\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k\,(x_2-x_1)\,,$$

διότι το πρώτο ελατήριο δεν ενεργεί κατευθείαν σ' αυτή, αλλά το δεύτερο ελατήριο προσδίνει σ' αυτή μια δύναμη $k\,(x_2-x_1)$ προς τα αριστερά. Να βρεθεί η θέση των μαζών σε τυχούσα χρονική στιγμή. Θέτουμε $\omega^2 = k/m$, οπότε

$$\ddot{x}_1+\omega^2x_1-\omega^2x_2 = 0 \qquad (\alpha)$$

$$\ddot{x}_2-\omega^2x_1+\omega^2x_2 = 0\,. \qquad (\beta)$$

Από τις (α) και (β) με παραγωγίσεις και απαλειφή της x_2, βρίσκουμε

$$\ddddot{x}_1+3\omega^2\ddot{x}_1+\omega^4x_1 = 0\,.$$

Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^4+3\omega^2\lambda^2+\omega^4 = 0$, της οποίας οι ρίζες δίνονται από τις σχέσεις $\lambda^2 = \frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})\,\omega^2$, έπεται ότι $\lambda_{1,2} = \pm\alpha\omega i$, $\lambda_{3,4} = \pm\beta\omega i$, όπου $\alpha = \sqrt{\frac{6}{2}(-3-\sqrt{5})}$, $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})}$, έχουμε

$$x_1\,(t) = c_1\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha\omega t+c_2\,\eta\mu\,\alpha\omega t+c_3\,\sigma\upsilon\nu\,\beta\omega t+c_4\,\eta\mu\,\omega t$$

και αντικαθιστώντας στην (α)

$$x_2\,(t) = \frac{1}{\omega^2}(-c_1\alpha^2\omega^2\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha\omega t-c_2\alpha^2\omega^2\,\eta\mu\,\alpha\omega t-c_3\beta^2\omega^2\,\sigma\upsilon\nu\,\beta\omega t-c_4\beta^2\omega^2\,\eta\mu\,\omega t)+$$

$$+2\,(c_1\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha\omega t+c_2\,\eta\mu\,\alpha\omega t+c_3\,\sigma\upsilon\nu\,\beta\omega t+c_4\,\eta\mu\,\beta\omega t)$$

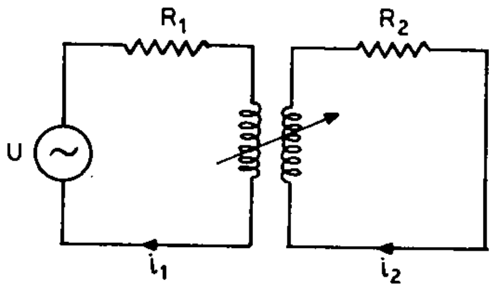
ή

$$x_2\,(t) = (2c_1-\alpha^2)\sigma\upsilon\nu\,\alpha\omega t+(2c_2-\alpha^2)\,\eta\mu\,\alpha\omega t+(2c_3-\beta^2)\,\sigma\upsilon\nu\,\beta\omega t+$$

$$+(2c_4-\beta^2)\,\eta\mu\,\beta\omega t$$

Οι αριθμοί $\nu_1 = \frac{\alpha\omega}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\nu_2 = \frac{\beta\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ λέγονται **κανονικές συχνότητες** ή **ιδιοσυχνότητες** του συστήματος. Αν είχαμε και περιοδικές εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούσαν πάνω στο σύστημα με μια τουλάχιστον τέτοια συχνότητα, τότε θα είχαμε το φαινόμενο του συντονισμού. Οι κανονικές συχνότητες ή ιδιοσυχνότητες του συστήματος παίζουν σημαντικό ρόλο σε πάρα πολλές επιστήμες, όπως στην επιστήμη των Πολιτικών, Μηχανολόγων Μηχανικών, κά. Μηχανικών. Ειδικώς δε, στο σχεδιασμό συστημάτων της Πυρηνικής Φυσικής για να εξηγηθούν η φασματική θεωρία και οι επιδράσεις της πυρηνικής ενέργειας.

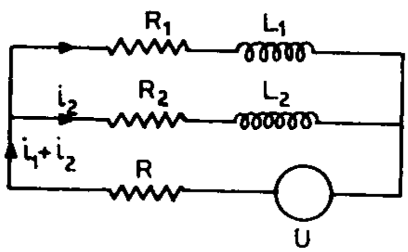
Παράδειγμα 2.9.7: Να δοθεί το σύστημα των Δ.Ε που διέπει το μετασχηματιστή του παρακάτω σχήματος



Λύση: Υπολογίζουμε τις πτώσεις τάσεων στα δύο κυκλώματα αντιστοίχως και έχουμε

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + m \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = U, \quad m \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0 .$$

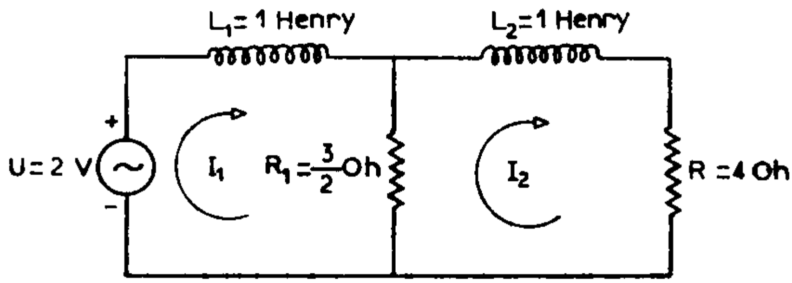
Παράδειγμα 2.9.8: Να δοθεί το σύστημα των Δ.Ε που διέπει το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα



Λύση: Εφαρμόζοντας το Νόμο του Kirchhoff στους δύο βρόγχους, βρίσκουμε

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + R\,(i_1+i_2) = U, \quad L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + R\,(i_1+i_2) = 0 \bullet$$

Παράδειγμα 2.9.9: Έστω το ηλεκτρικό κύκλωμα του παρακάτω σχήματος. Να βρεθούν οι εντάσεις σε κάθε χρονική στιγμή, αν $i_1(0) = i_2(0) = 0$.



Λύση:

Στον πρώτο βρόγχο: $L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 - R_1 I_2 = U \bullet$

Στο δεύτερο βρόγχο: $L_2 \frac{dI_2}{dt} - R_1 I_1 + (R_1+R_2)\, I_2 = 0$,

οπότε

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{3}{2} I_1 - \frac{3}{2} I_2 = 2, \qquad \frac{dI_2}{dt} - \frac{3}{2} I_1 + \frac{11}{2} I_2 = 0 \bullet$$

Με παραγώγιση της δεύτερης εξίσωσης και απαλοιφής της I_2, έχουμε

$$\ddot{I}_1 + 7\dot{I}_1 + 6I_1 = 11 \quad \text{ή} \quad I_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t} + \frac{11}{6},$$

οπότε, από την πρώτη,

$$I_2 = \frac{1}{3} c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-6t} + \frac{1}{2}\ .$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{6} = 0\,, \quad \frac{1}{3} c_1 - 3c_2 + \frac{1}{2} = 0$$

ή
$$c_1 = -\frac{9}{5}, \quad c_2 = -\frac{1}{30}$$

και τελικά

$$I_1(t) = \frac{9}{5}e^{-t} - \frac{1}{30}e^{-6t} + \frac{11}{6}$$

$$I_2(t) = \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{1}{10}e^{-6t} + \frac{1}{2} \cdot$$

2.11. Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $\{e^{mx}, e^{nx}, e^{kx}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, όταν οι αριθμοί m, n, k είναι διάφοροι μεταξύ τους.

2. Ομοίως οι συναρτήσεις $\{\text{συν}\, x, \text{ημ}\, x, x\, \text{ημ} x, x\, \text{συν} x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

3. Ομοίως οι συναρτήσεις $\{e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

4. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $\{1, x, x^2\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Ποιό διανυσματικό χώρο δημιουργούν;

5. Να βρεθεί μια βάση στο χώρο των λύσεων των Δ.Ε:
α) $y''+5y'+4y = 0$, b) $y''-9y = 0$, c) $y''+y = 0$,
d) $y^{(v)}-y''' = 0$, e) $y''-2y'+6y = 0$

α) $\{e^{-x}, e^{-4x}\}$, b) $\{e^{3x}, e^{-3x}\}$, c) $\{\text{ημ}\, x, \text{συν}\, x\}$,
d) $\{1, x, x^2, e^x, e^{-x}\}$, e) $\{e^x\, \text{συν} \sqrt{5}x, e^x\, \text{ημ} \sqrt{5}x\}$.

6. Να βρείτε τη μερική λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y''-6y'+9y = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2 .$$
(Απ. $y = e^{3x}-xe^{3x}$).

7. Χρησιμοποιώντας μια φορά τον ορισμό και μετά το κριτήριο της ορίζουσας Wronski, εξετάστε τη γραμμική εξάρτηση των συναρτήσεων:
α) $\{1, \text{συν}\, x\}$, b) $\{(x+2), (x-3)\}$, c) $\{2x^3, -2x^3\}$, d) $\{x^2, x^2+1, x^2-1\}$
(Απ.. α) γραμ. ανεξ., b) γραμ. ανεξ., c) γραμ. ανεξ., d) γραμ. ανεξ.).

8. Να λυθεί η Δ.Ε με τις αρχικές συνθήκες
$$\ddot{x}-(4+\varepsilon)\dot{x}+(4+2\varepsilon)x = 0, \quad \dot{x}(0)=, \quad x(0)=1$$

πρώτα για $\varepsilon=0$ και μετά για $\varepsilon \neq 0$. Δείξτε ότι η λύση για $\varepsilon=0$ είναι το όριο της λύσης για $\varepsilon \neq 0$, καθώς το $\varepsilon \to 0$.

9. Να λυθούν οι Δ.Ε:

α) $2y'+5y=0$, b) $\ddot{x}+30\dot{x}+225x=0$, c) $10\ddot{x}-7\dot{x}-12x = 0$,

d) $253y''+15y'-28y = 0$, e) $169\ddot{x}-52\dot{x}+4x = 0$,

f) $y'''-4y''-17y'+60y = 0$, g) $y^{(iv)}-16y = 0$.

(Απ. α) $y=ce^{-5x/2}$, b) $x=e^{-15t}(c_1+c_2t)$, c) $x=c_1e^{3x/2}+c_2e^{-4x/5}$,

d) $y = c_1e^{7x/23}+c_2e^{-4x/11}$, e) $x = (c_1+c_2t)\,e^{2t/13}$,

f) $y = c_1e^{3t}+c_2e^{-4t}+c_3e^{5t}$, g) $y = c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\,\text{συν}2x+c_4\text{ημ}2x$)

10. Να λυθούν οι μη ομογενείς γραμμικές Δ.Ε:

α) $y''-4y'+4y = e^x+1$, b) $y''-4y'+4y = \text{ημ}\,x$

c) $y''-4y'+4y = xe^{2x}+e^{2x}$, d) $y''+4y = \text{ημ}\,2x$

e) $y''+4y' = \text{ημ}\,2x$, f) $y''+3y' = x+3$

(Απ. α) $y = \frac{1}{4}+e^x+c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$, b) $y = \frac{4}{25}\,\text{συν}\,x$ [illegible] $+c_2xe^{2x}$

c) $y = \frac{1}{6}x^3e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}+c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$,

d) $y = -\frac{1}{4}x\,\text{συν}2x+c_1\,\text{συν}2x+c_2\,\text{ημ}2x$

e) $y = -\frac{1}{10}\,\text{συν}\,2x-\frac{1}{20}\,\text{ημ}\,2x+c_1+c_2e^{-4x}$

f) $y = \frac{8}{9}x+\frac{1}{2}x^2+c_1+c_2e^{-3x}$)

11. Να λυθούν με τη μέθοδο της μεταβολής των αυθαίρετων σταθερών οι Δ.Ε:

α) $y''-3y'+2y = \dfrac{e^{3x}}{e^x+1}$, b) $x^2y''-xy'-y = -2x^2e^x$, $x>0$

(Απ. α) $y = c_1e^x+c_2e^{2x}+e^x\ln(e^x+1)+e^{2x}\ln(1+e^{-x})$

b) $y = c_1x+c_2x^{-1}+2(x^{-1}-1)e^x$)

12. Να λυθεί η Δ.Ε $x^2(x+1)y''-2xy'+2y = 0$, αν $y = x$ είναι μια μερική λύση της

(Απ. $y = c_1\dfrac{x}{x+1}+c_2x$)

13. Να λυθεί η Δ.Ε $x^2y''+xy'+4y = 1$.
(Απ. $y = A\,συν\,(2\ln x)+B\,ημ\,(2\ln x)+\frac{1}{4}$)

14. Να λυθεί η Δ.Ε $x^3y'''-x^2y''-2xy'-4y = 0$ για $x > 0$
(Απ. $y = c_1x^4+c_2\,συν\,(\ln x)+c_3\,ημ(\ln x)$)

15. Να λυθεί η Δ.Ε $x^2y''+3xy'+2y = x^2+2x$, $x > 0$
(Απ. $y = \frac{1}{x}\left(c_1\,συν(\ln x)+c_2\,ημ(\ln x)+\frac{1}{10}x^2+\frac{2}{5}x\right)$)

16. Να λυθούν τα συστήματα γραμμικών Δ.Ε:

α) $y_1'+y_2' = 3$, $y_1'-y_2' = x$

b) $y_1' = -2y_1-4y_2+4x+1$, $y_2' = -y_1+y_2+3x^2/2$

c) $\dot{x}_1 = x_2+t$, $\dot{x}_2 = -2x_1+3x_2+1$

d) $\dot{x}_1 = x_2+1$, $\dot{x}_2 = x_1$

(Απ. α) $y_1 = \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+c_1$, $y_2 = \frac{3}{2}x-\frac{1}{4}x^2+c_2$

b) $y_1 = c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}+x^2+x$, $y_2 = -c_1e^{2x}+\frac{1}{4}e^{-3x}-\frac{1}{2}x^2$

c) $x_1 = c_1e^t+c_2e^{3t}-\frac{3}{2}t-\frac{5}{4}$, $x_2 = c_1e^t+2c_2e^{3t}-t-\frac{3}{2}$

d) $x_1 = c_1e^t+c_2e^{-t}$, $x_2 = c_1e^t-c_22e^{-t}-1$)

17. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα γραμμικών Δ.Ε με τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες:

α) $\dot{x}_1 = -3x_1+4x_2$, $\dot{x}_2 = -2x_1+3x_2$ $\quad x_1(0) = -1 \quad x_2(0) = 3$

b) $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$ $\quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$

c) $\dot{x}_1 = x_1-3x_2+2x_3$ $\quad x_1(0)=-3,\ x_2(0)=0,\ x_3(0)=3$
$\dot{x}_2 = -x_2$
$\dot{x}_3 = -x_2-2x_3$

(Απ. α) $x_1 = 7e^t-8e^{-t}$, $x_2 = 7e^t-4e^{-t}$

b) $x_1 = συν\,t$, $x_2 = ημ\,t$

c) $x_1=5c_1e^{-t}-2c_2e^{-2t}+c_3e^t$, $x_2 = 2c_1e^{-t}$, $x_3=-2c_1e^{-t}+3c_2e^{-2t}$,
$x_1=-2e^{-2t}-e^t$, $x_2=0$, $x_3=3e^{-2t}$).

18. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής με μετασχηματισμό Laplace

$$\ddot{y} + 9y = e^{t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

(Απ. $y = \frac{1}{10} e^{t} - \frac{1}{10} \cos 3t - \frac{1}{30} \sin 3t$)

19. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής με μετασχηματισμό Laplace

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 26y = 37e^{t}, \; y(0) = 1, \; y(0) = 2$$

(Απ. $y = e^{t} + e^{-5t} \sin t$))

20. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής με μετασχηματισμό Laplace

$$\ddot{y} + 4y = 4\cos 2t, \; y(0) = 0, \; y(0) = 6$$

(Απ. $y = (t+3) \sin 2t$)

21. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής με μετασχηματισμό Laplace

$$y + 8y = -12e^{-2t}, \; y(0) = -8, \; \dot{y}(0) = 24, \; \ddot{y}(0) = -46$$

(Απ. $y = -11e^{-2t} - t\,e^{-2t} + 3e^{t} \cos \sqrt{3t}$)

22. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής με μετασχηματισμό Laplace

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u_1(t), \; y(0) = 0, \; \dot{y}(0) = -3$

(Απ. $y = -1 + 3e^{t} - 3\cos 2t + 2\sin 2t$)

23. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής με μετασχηματισμό Laplace

$$\ddot{y} + 3y - 4y = 20u_1(t-2), \; y(0) = 0, \; \dot{y}(0) = 0.$$

(Απ. $y = u_1(t-2)\,[-5 + e^{-4(t-2)} + 4e^{t-2}]$)

24. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής με μετασχηματισμό Laplace

$$\ddot{y} + 6y + 9y = 6u_3(t-1) + 9u_1(t-3), \; \upsilon(0), \; \dot{y}(0) = 1.$$

(Απ. $y = u_1(t-1)\,[2 - 2e^{-3(t-1)} - 6(t-1)\,e^{-3(t-1)}] +$
$+ u_1(t-3)\,[1 - e^{-3(t-3)} - 3(t-3)\,e^{-3(t-3)}] + t\,e^{-3t}$)

25. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής με μετασχηματισμό Laplace

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 - 2x_2, \\ x_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned} \qquad x_1(0) = 1, \; x_2(0) = 0.$$

(Απ. $x_1 = e^{-2t} + 2e^{3t}, \; x_2(t) = -e^{2t} + e^{3t}$)

26. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής με μετασχηματισμό Laplace

$$x_1 = 3x_1 - 2x_2, \quad x_2 = 17x_1 - 7x_2 \qquad x_1(0) = 1, \ (x_2(0) = 3.$$

(Απ. $x_1 = -2e^{-2t}\sin 3t$, $x_2(t) = 3e^{-2t}(\cos 3t - 5e^{-2t}\sin 3t\ )$

27. Να βρεθεί η ένταση $i(t)$ ενός RLC ηλεκτρικού κυκλώματος, αν $i(0)=0$, $\dot{i}(0)=0$, $L=1$, $R=0.2$, $C=1/1.01$, $E=$ ημ $t-0.05$ συνt.
(Απ. $i = e^{-0.1t}(c_1\,\text{συν}t+c_2\,\text{ημ}t)+5\text{ημ}\,t$, $i = (5-5e^{-0.1t})\,\text{ημ}\,t$)

28. Να βρεθεί το παροδικό και το ρεύμα μόνιμης κατάστασης σε ένα RLC ηλεκτρικό κύκλωμα με $R=10$ Ohms, $i=1$ Henry, $C=1/9$ Farad, αν η τάση είναι $U=25$ ημt Volts. Υποθέτουμε ότι $i(0)=0$, $\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

(Απ. $i = \dfrac{225}{656}e^{-9t} - \dfrac{1025}{656}e^{-t}$, $i = \dfrac{50}{41}\,\text{συν}\,t + \dfrac{125}{82}\,\text{ημ}\,t$)

29. Να υπολογιστεί η μόνιμη κατάσταση και οι παροδικές ταλαντώσεις ενός μηχανικού συστήματος (Παραδ. 2.9.3) ταλαντώσεων), αν $m=9$, $c=5$, $k=15$ με διεγείρουσα 10 συνt, αρχική μετατόπιση και αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν.

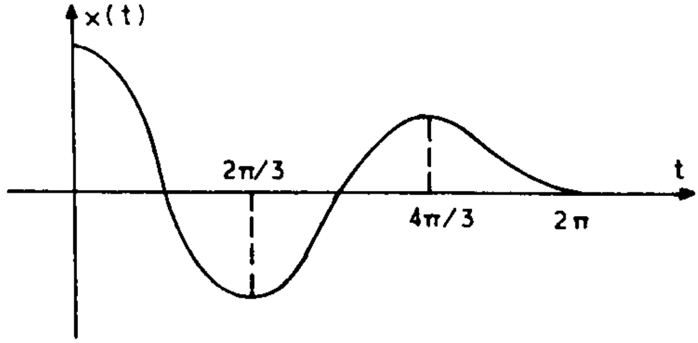
(Απ. $x(t) = e^{-5t/18}\left(-\dfrac{35}{37}\,\text{συν}\,\dfrac{\sqrt{551}}{18}\,t + \dfrac{275}{37\sqrt{551}}\,\text{ημ}\,\dfrac{\sqrt{551}}{18}\,t\right)$

$x(t) = \dfrac{35}{37}\,\text{συν}\,t + \dfrac{25}{37}\,\text{ημ}\,t$)

30. Ένα σώμα $m=4$ γραμ. είναι δεμένο σε σύρμα με ελατήριο σταθερής 9 dynes/cm. Η δύναμη τριβής είναι 4.5 dynes και το σώμα αρχικά μετατοπίζεται κατά 3 cm από την αρχική θέση ισορροπίας με μηδέν αρχική ταχύτητα. Να ορίσετε την κίνηση του σώματος και να σχεδιασθεί το γράφημα της κίνησης.

(Απ. $x(t) = \dfrac{5}{2}\,\text{συν}\dfrac{3}{2}\,t + \dfrac{1}{2}$, $0 \le t \le \pi/3$, $x(t) = \dfrac{3}{2}\,\text{συν}\dfrac{3}{2}\,t - \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2\pi}{3} \le t \le \dfrac{4\pi}{3}$, $x(t) = \dfrac{1}{2}\,\text{συν}\dfrac{3}{2}\,t + \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4\pi}{3} \le t \le 2\pi$, $x(t)=0$, $t \le 2\pi$)



31. Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση με μόνη αλλαγή δύναμη τριβής 4 dynes.

(Απ. $x(t) = \frac{23}{9}\text{συν}\frac{3}{2}t + \frac{4}{9}$, $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$, $x(t) = \frac{15}{9}\text{συν}\frac{3}{2}t - \frac{4}{9}$,
$\frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{4\pi}{3}$, $x(t) = \frac{7}{9}\text{συν}\frac{3}{2}t + \frac{4}{9}$, $\frac{4\pi}{3} \leq t \leq 2\pi$, $x(2\pi) = -\frac{1}{3}$
και η δύναμη, σ' αυτή τη στιγμή, του ελατηρίου είναι 3 dynes και δεν μπορεί να υπερνικήσει την τριβή που είναι 4 dynes).

32. Να βρεθεί η δύναμη $x(t)$ ενός μηχανικού συστήματος χωρίς τριβή με $k=4$, $m=1$, αν η διεγείρουσα δύναμη είναι η ημ2t, με $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

(Απ. $x(t) = \frac{1}{8}\,\text{ημ}\,2t - \frac{1}{4}\,t\,\text{συν}2t$)

33. Να οριστεί η κίνηση ενός σώματος μάζας 1 γραμ. που είναι δεμένο σε ελατήριο με σταθερή ελατηρίου 1. Η τριβή είναι 3/8 dynes και το σώμα αρχικά μετατοπίζεται 1 cm από τη θέση ισορροπίας

(Απ. $x(t) = \frac{5}{8}\text{συν}\,t + \frac{3}{8}$, $0 \leq t \leq \pi$, $x(t) = -\frac{1}{4}$, $t \geq \pi$)

34. Οι μικρές ταλαντώσεις ενός απλού εκκρεμούς έχουν περίοδο 2 sec. Να οριστεί το μήκος του εκκρεμούς. Να βρείτε το αντίστοιχο μήκος απλού εκκρεμούς που έχει διπλάσια περίοδο.
(Απ. 3.26 πόδια, 13.04 πόδια).

35. Το σφαιρίδιο απλού εκκρεμούς που έχει μήκος 20 cm μετατοπί-

ζεται έτσι, ώστε το σκοινί να σχηματίζει γωνία 5^0 με την κατακόρυφη. Αν το σφαιρίδιο αφεθεί από αυτή τη θέση, a) βρείτε τη γωνία θ, την οποία το σκοινί σχηματίζει με την κατακόρυφη σ' οποιαδήποτε χρονική στιγμή, b) να υπολογιστεί η συχνότητα της ταλάντωσης, c) να υπολογιστεί η απόσταση που διαγράφει το σφαιρίδιο κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, d) να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σφαιριδίου στο σημείο που η κατακόρυφη τέμνει την τροχιά.

(Απ. a) $\theta = 5\sigma\upsilon\nu\, 4t$ βαθμούς, $\theta = \frac{\pi}{36}\sigma\upsilon\nu 4t$ ακτίνια,

b) $\nu = \frac{2}{\pi}$ κύκλους ανά sec, c) $\frac{20\pi}{9}$ cm,

d) $\upsilon = \frac{20\pi}{9}$ cm/sec, $\gamma = \frac{20\pi^2}{81}$ cm/sec^2)

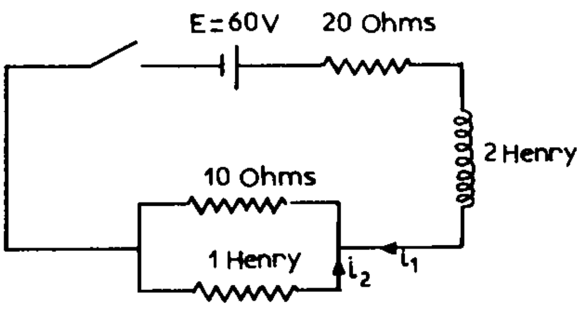
36. Στο πρόβλημα των δύο σφαιρών που συνδέονται με ελατήρια, έστω ότι οι σταθερές ελατηρίου είναι k_1, k_2, ενώ οι μάζες των σφαιρών είναι ίσες με m. Να δείξετε ότι οι Δ.Ε που διέπουν την κίνηση είναι οι

$$m\ddot{x}_1 = k_2x_2-(k_1+k_2)\,x_1, \quad m\ddot{x}_2 = k_2x_1-k_2x_1$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο κανονικές συχνότητες ν_1, ν_2, όπου

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+2k_2+\sqrt{k_1^2+4k_2^2}}{2m}}, \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+2k_2-\sqrt{k_1^2+4k_2^2}}{2m}}.$$

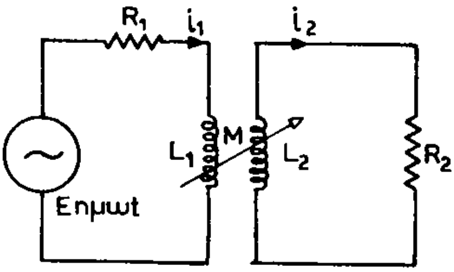
37. Στο πιο κάτω εικονιζόμενο ηλεκτρικό κύκλωμα υποθέτουμε ότι όταν ο διακόπτης είναι κλειστός $i_1=i_2=0$. Να βρεθούν τα ρεύματα μόνιμης κατάστασης.



(Απ. $i_1 = 3-2e^{-5t}-e^{-20t}$, $i_2 = 4e^{-5t}-e^{-20t}-3$)

38. Στην άσκηση 37, έστω $E=150\,\eta\mu\,10t$. Να θρεθούν τα ρεύματα μόνιμης κατάστασης.
(Απ. $i_1 = 2e^{-5t}+e^{-20t}-3\eta\mu\,10t-e^{-20t}-3$, $\quad i_2 = 3\sigma\upsilon\nu\,10t-4e^{-5t}-e^{-20t}$)

39. Δείξτε ότι το σύστημα γραμμικών Δ.Ε που διέπει τον πιο κάτω εικονιζόμενο μετασχηματιστή είναι τα



$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} = E\,\eta\mu\omega t$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} = 0\,.$$

Να λύσετε το σύστημα αυτό αν $L_1 = 1$ Henry, $L_2=0$, $M=1/2$ Henry, $R_1=50$ ohms, $R_2=25$ Ohms, $V=200\,\eta\mu\,100t$, και αν στην αρχή του χρόνου $i_1 = i_2 = 0$.

$$\left(\text{Απ.}\quad i_1 = \frac{4}{13}\left[\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,e^{50(1-\sqrt{3})t} - \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,e^{50(1+\sqrt{3})t} + 3\eta\mu\,100t - 2\sigma\upsilon\nu\,100t\right]\right.$$

$$i_2 = \frac{4}{13}\left[\frac{(4-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}\,e^{50(1+\sqrt{3})t} + \frac{(4+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\,e^{50(1-\sqrt{3})t} - \right.$$

$$\left. - 2\,(2\eta\mu\,100t + 3\sigma\upsilon\nu\,100t)\right]\,.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΣΕ ΣΕΙΡΕΣ

3.1. Λύση διαφορικών εξισώσεων με χρήση σειρών

Μέχρι τώρα για την εύρεση της γενικής λύσης μιας Δ.Ε χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι που δίνουν τη λύση με πεπερασμένου πλήθους αλγεβρικές πράξεις, παραγωγίσεις και ολοκληρώσεις, που τελικά οδηγούν μόνο σε στοιχειώδεις συναρτήσεις και παραστάσεις τους.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε μια τελείως διαφορετική μέθοδο, **τη μέθοδο των σειρών**, που χρησιμοποιείται, όταν αποκλείονται οι προηγούμενες μέθοδοι. Με τη μέθοδο αυτή λύνονται και ορισμένες Δ.Ε που προκύπτουν συχνά από προβλήματα της θεωρητικής Φυσικής, της Μηχανικής, της Γεωμετρίας, της Ηλεκτρολογίας, κ.λ.π. Τέτοιες Δ.Ε είναι η Δ.Ε του Bessel,του Legendre και άλλες.

Θα αναπτύξουμε τη μέθοδο χωρίς αποδείξεις που είναι μακροσκελείς και είναι έξω από τα όρια του βιβλίου αυτού. Θα περιοριστούμε δε σε Δ.Ε 2ης τάξης, μονολότι η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για Δ.Ε ανώτερης της 2ης τάξης.

Έστω η Δ.Ε

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0\,, \qquad (3.1.1)$$

όπου $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ είναι πολυώνυμα του x ή σειρές δυνάμεων του x. Το σημείο $x = x_0$ καλείται **ομαλό σημείο** της Δ.Ε, όταν $p_0(x_0) \neq 0$. Το σημείο $x = x_0$ καλείται **κανονικό ανώμαλο σημείο**, αν δεν είναι ομαλό σημείο της Δ.Ε (7.1.1), αλλά τα

$$\lim\,(x-x_0)\,\frac{p_1(x)}{p_0(x)} \quad \text{και} \quad \lim\,(x-x_0)^2\,\frac{p_2(x)}{p_0(x)}\,,$$

υπάρχουν αμφότερα Το σημείο $x = x_0$ **καλείται ανώμαλο σημείο** της Δ.Ε (7.1.1), αν δεν είναι ομαλό ή κανονικό ανώμαλο σημείο της.

Π.χ. το σημείο $x=0$ είναι ομαλό σημείο της Δ.Ε $(1+x^2)\,y''+xy=0$, ενώ το σημείο $x=0$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο της Δ.Ε, $xy''+y'+xy=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot 1}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cdot x}{x} = 0$.

Παρατήρηση: Ας σημειωθεί ότι δεν περιορίζεται η γενικότητα, αν θεωρήσουμε ως ομαλό ή ανώμαλο σημείο το $x=0$, γιατί αν είναι το $x=x_0 \neq 0$, τότε η αντικατάσταση $x = x_0+u$ στη Δ.Ε (3.1.1) δίνει άλλη ισοδύναμη με ανεξάρτητη μεταβλητή την u που έχει ομαλό ή ανώμαλο σημείο της το $u=0$.

Α. Έστω το σημείο $x=0$ είναι ομαλό σημείο της Δ.Ε (3.1.1). Τότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 1: Η σειρά δυνάμεων του x, $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ είναι η γενική λύση της Δ.Ε, όπου όλοι οι συντελεστές α_n για $n \geq 2$ προσδιορίζονται από τους α_0 και α_1 που θεωρούνται αυθαίρετες σταθερές και η σειρά συγκλίνει στο ίδιο διάστημα που συγκλίνουν και οι σειρές δυνάμεων του $x=0$ των συντελεστών $x_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$.

Παρατηρήσεις: 1. Στο προηγούμενο θεώρημα 1 εννοείται ότι, όταν οι συντελεστές $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ της Δ.Ε (3.1.1) είναι πολυώνυμα του x, τότε η σειρά συγκλίνει για όλα τα x.

2. Σύμφωνα με το παρακάτω Παράδειγμα 3.1.1 υπάρχει αναδρομική σχέση που συνδέει τους συντελεστές α_n της σειράς του Θεωρήματος 1 και μάλιστα του τύπου $\alpha_{n+2} = f(\alpha_n)$ και η γενική λύση γράφεται $y = \alpha_0\, y_1(x)+\alpha_1\, y_2(x)$, όπου η $y_1(x)$ περιέχει όλους τους όρους άρτιας δύναμης του x και η $y_2(x)$ όλους τους όρους περιττής δύναμης του x.

Β. Έστω ότι το σημείο $x=0$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο της Δ.Ε (3.1.1). Τότε, για την εύρεση της γενικής λύσης, ακολουθούμε την εξής διαδικασία (**Μέθοδος του Frobenius**):

Θέτουμε στην Δ.Ε (3.1.1) όπου $y = x^p \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ και μετά τις πράξεις εξισώνουμε με 0 το συντελεστή του x^p. Η εξίσωση που προκύπτει δίνει μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς p, που λέγεται **εξίσωση δείκτη** και που είναι δυνατό να έχει:

1η περίπτωση: Δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 > \rho_2$, που η διαφορά τους είναι διάφορη ακέραιου αριθμού.

2η περίπτωση: Μία διπλή πραγματική ρίζα $\rho_1 = \rho_2$.

3η περίπτωση: Δύο ρίζες $\rho_1 > \rho_2$ πραγματικές που η διαφορά τους είναι ακέραιος αριθμός.

Δε θα θεωρήσουμε εδώ την περίπτωση μιγαδικών ριζών.
Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2: α) Στην περίπτωση 1, η Δ.Ε έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις τις

$$y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\rho_1)\, x^n, \qquad y_2(x) = x^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\rho_2)\, x^n.$$

b) Στην περίπτωση 2, η Δ.Ε έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις τις

$$y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\rho_1)\, x^n \qquad\qquad y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\rho_1)\, x^n$$

$$\text{ή}$$

$$y_2(x) = x^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\rho_2)\, x^n \qquad\qquad y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\rho_1)\, x^n.$$

c) Στην περίπτωση 3 η Δ.Ε έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις τις

$$y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\rho_1)\, x^n, \qquad y_2(x) = d_1\, y_1(x) + x^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\rho_2)\, x^n$$

Ο τρόπος εφαρμογής των παραπάνω Θεωρημάτων 1, 2, φαίνεται στα επόμενα τυπικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.1.1: Να λυθεί η Δ.Ε $y'' + xy' + y = 0$.

Λύση: Το $x=0$ είναι ομαλό σημείο αυτής. Θέτουμε

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

$$y' = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \ldots$$

$$y'' = 2\alpha_2 + 2\cdot 3\alpha_3 x + 2\cdot 3\cdot 4\alpha_4 x^2 + \ldots$$

οπότε,

$$(2\alpha_2 + \alpha_0) + (2\cdot 3\alpha_3 + 2\alpha_1)\, x + \ldots + [n(n-1)\,\alpha_n + (n-2)\,\alpha_{n-2} + \alpha_{n-2}]\, x^{n-2} + \ldots \equiv 0.$$

Άρα, γενικά $\alpha_n = -\frac{1}{n}\alpha_{n-2}$. Έστω α_0, α_1 αυθαίρετες σταθερές, τότε θα είναι

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_0, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2\cdot 4}\alpha_0, \quad \alpha_6 = -\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha_0, \ldots$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{1\cdot 3}\alpha_1, \quad \alpha_5 = \frac{1}{3\cdot 5}\alpha_1, \quad \alpha_7 = -\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}\alpha_1, \ldots$$

Τελικά,

$$y = \alpha_0\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots\right)+\alpha_1\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3\cdot 5\cdot 7}-\ldots\right)=$$

$$= \alpha_0 y_1(x)+\alpha_1 y_2(x),$$

που είναι η γενική λύση, γιατί οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Παράδειγμα3.1.2: Να βρεθεί με τη μέθοδο του Frobenius η γενική λύση της Δ.Ε $4xy''+2y'+y = 0$.

Λύση: Το σημείο $x=0$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο αυτής. Θέτουμε

$$y = \alpha_0 x^\rho+\alpha_1 x^{\rho+1}+\alpha_2 x^{\rho+2}+\alpha_3 x^{\rho+3}+\alpha_4 x^{\rho+4}+\ldots$$

$$y' = \rho\alpha_0 x^{\rho-1}+(\rho+1)\alpha_1 x^\rho+(\rho+2)\alpha_2 x^{\rho+1}+(\rho+3)\alpha_3 x^{\rho+2}+(\rho+4)\alpha_4 x^{\rho+3}+\ldots$$

$$y'' = (\rho-1)\rho\alpha_0 x^{\rho-2}+\rho(\rho+1)\alpha_1 x^{\rho-1}+(\rho+1)(\rho+2)\alpha_2 x^\rho+\ldots,$$

οπότε,

$$4xy''+2y'+y = [2\rho\alpha_0+4(\rho-1)\rho\alpha_0]x^{\rho-1}+[4(\rho+1)\rho\alpha_1+2(\rho+1)\alpha_1+\alpha_0]x^\rho+$$
$$+[4(\rho+1)(\rho+2)\alpha_2+2(\rho+2)\alpha_2+\alpha_1]x^{\rho+1}+\ldots$$

και άρα

$$\alpha_0[2\rho+4(\rho-1)\rho] = 0 \qquad (\alpha)$$
$$4(\rho+1)\rho\alpha_1+2(\rho+1)\alpha_1+\alpha_0 = 0 \qquad (b)$$
$$4(\rho+1)(\rho+2)\alpha_2+2(\rho+2)\alpha_2+\alpha_1 = 0 \qquad (c)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Έστω $\alpha_0 \neq 0$. Τότε, από την (α) προκύπτει η εξίσωση δείκτη της Δ.Ε, που είναι η $\rho+2(\rho-1)\rho=0$ ή $2\rho^2-\rho = 0$ με ρίζες $\rho_1=0$ και $\rho_2=1/2$.

Η (b) δίνει

$$\alpha_1 = \frac{-\alpha_0}{4(\rho+1)\rho+2(\rho+1)} \quad \text{και η (c)} \quad \alpha_2 = \frac{-\alpha_1}{4(\rho+2)(\rho+1)+2(\rho+2)}$$

και γενικά μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\alpha_n = \frac{-\alpha_{n-1}}{4(\rho+n)(\rho+n-1)+2(\rho+n)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{d}$$

Για τη ρίζα $\rho_1=0$ της εξίσωσης δείκτη, έχουμε από τη (d)

$$a_1 = -\frac{1}{2}\alpha_0, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{12}\alpha_1 = \frac{1}{4!}\alpha_0, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{30}\alpha_2 = -\frac{1}{720}\alpha_0 = -\frac{1}{6!}\alpha_0$$

ή

$$y = A\left(1-\frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{6!}x^3 + \ldots\right).$$

Για $\rho = \frac{1}{2}$ η (d) δίνει, διαδοχικά,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{6}\alpha_0 = -\frac{1}{3!}\alpha_0, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{20}\alpha_1 = \frac{1}{120}\alpha_0 = \frac{1}{5!}\alpha_0,$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{42}\alpha_2 = -\frac{1}{5040}\alpha_0 = -\frac{1}{7!}\alpha_0, \ldots \quad ,$$

οπότε,

$$y = B\left(x^{1/2}-\frac{1}{3!}x^{3/2} + \frac{1}{5!}x^{5/2} + \frac{1}{7!}x^{7/2} + \ldots\right).$$

Η γενική λύση είναι, συνεπώς,

$$y = A\left(1-\frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 - \ldots\right) + B\left(x^{1/2} - \frac{1}{3!}x^{3/2} + \frac{1}{5!}x^{5/2} - \ldots\right) =$$

$$= A\,\text{συν}\,x + B\,\text{ημ}\sqrt{x}.$$

Παράδειγμα 3.1.3: Να βρεθεί με τη μέθοδο του Frobenius η γενική λύση στη περιοχή του σημείου $x=0$ της Δ.Ε

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0\,\bullet$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim_{x\to 0} x\frac{x}{x^2} = 1$, $\lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2}{x^2} = 0$, υπάρχουν αμφότερα. Άρα το $x=0$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο. Θέτουμε

$$y = \alpha_0x^\rho + \alpha_1x^{\rho+1} + \alpha_2x^{\rho+2} + \ldots + \alpha_nx^{\rho+n} + \ldots$$

$$y' = \rho\alpha_0x^{\rho-1} + (\rho+1)\alpha_1x^\rho + (\rho+2)\alpha_2x^{\rho+1} + \ldots + (\rho+n)\alpha_nx^{\rho+n-1} + \ldots$$

$$y'' = (\rho-1)\rho\alpha_0x^{\rho-2} + \rho(\rho+1)\alpha_1x^{\rho-1} + (\rho+1)(\rho+2)\alpha_2x^\rho + \ldots +$$
$$+ (\rho+n-1)(\rho+n)\alpha_nx^{\rho+n-2} + \ldots \quad ,$$

οπότε,

$$x^2y''+xy'+x^2y = x^\rho\,[(\rho-1)\,\rho\alpha_0+\rho\alpha_0]+x^{\rho+1}\,[\rho\,(\rho+1)\,\alpha_1+(\rho+1)\,\alpha_1]+$$
$$+\,x^{\rho+2}\,[(\rho+1)\,(\rho+2)\,\alpha_2+(\rho+2)\,\alpha_2+\alpha_0]+\ldots+$$
$$+x^{\rho+n}\,[(\rho+n-1)\,(\rho+n)\,\alpha_n+(\rho+n)\,\alpha_n+\alpha_{n-2}]+\ldots=0\,.$$

Η εξίσωση δείκτη είναι η $\rho^2=0$, $\alpha_0 \neq 0$, ή $\rho=0$, διπλή ρίζα. Στη συνέχεια $(\rho+1)^2\,\alpha_1=0$, άρα $\alpha_1=0$. Για $n \geq 2$

$$(\rho+n)^2\,\alpha_n+\alpha_{n-2}=0 \quad \text{ή} \quad \alpha_n=\frac{-1}{(\rho+n)^2}\,\alpha_{n-2}\,.$$

Συνεπώς, για $\rho=0$ και με $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_2=0$, η τελευταία αναδρομική σχέση δίνει $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=\ldots=0$ και

$$\alpha_2=\frac{-1}{2^2\,(1!)^2}\,\alpha_0, \quad \alpha_4=\frac{-1}{4^2}\,\alpha_2=\frac{(-1)^2}{2^2\cdot 4^2}\,\alpha_0=\frac{(-1)^2}{2^4\cdot(2!)^2}\,\alpha_0$$

$$\alpha_6=\frac{-1}{6^2}\,\alpha_4=\frac{(-1)^3}{2^6\cdot(3!)^2}\,\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2}\,\alpha_0\,.$$

Συνεπώς,

$$y_1\,(x)=\alpha_0\Big[\,1-\frac{1}{2^2\,(1!)^2}\,x^2+\frac{1}{2^4\,(2!)^2}\,x^4-\ldots+\frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)}\,x^{2k}+\ldots\Big]=$$

$$=\alpha_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2}\,x^{2k}\,.$$

Για να βρούμε τη λύση $y_2\,(x)$, όταν η εξίσωση δείκτη έχει ρίζες ίσες, χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση και βρίσκουμε την $y\,(\rho,x)=x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$, οπότε αποδεικνύεται ότι η δεύτερη λύση που ζητάμε είναι η

$$\boxed{y_2\,(x)=\left.\frac{\partial y\,(\rho,x)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_2}}\,.$$

Στο παράδειγμά μας

$$\alpha_2=\frac{-1}{(\rho+2)^2}\,\alpha_0, \quad \alpha_4=\frac{-1}{(\rho+4)^2}\,\alpha_2=\frac{1}{(\rho+4)^2\,(\rho+2)^2}\,\alpha_0,\ \ldots$$

οπότε

$$y\,(\rho,x)=\alpha_0\left[\,x^\rho-\frac{1}{(\rho+2)^2}\,x^{\rho+2}+\frac{1}{(\rho+4)^2\,(\rho+2)^2}\,x^{\rho+4}+\ldots\right]$$

$$\frac{\partial y\,(\rho,x)}{\partial\rho}=\alpha_0\left[\,x^\rho\ln x+\frac{2}{(\rho+2)^3}\,x^{\rho+2}+\frac{1}{(\rho+2)^2}\,x^{\rho+4}\ln x+\ldots\right],$$

$$y_2(x) = \left.\frac{\partial y(\rho, x)}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = \alpha_0 \ln x \left[1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} x^4 - \dots \right] +$$

$$+ \alpha_0 \left[\frac{1}{2^2 (1!)^2} x^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2^4 (2!)^2} x^4 + \dots \right].$$

Η γενική λύση είναι η $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

Παράδειγμα 3.1.4: Να βρεθεί με τη μέθοδο του Frobenius, στην περιοχή του σημείου $x=0$, η γενική λύση της Δ.Ε

$$x^2 y'' + (x^2 - 2x) y' + 2y = 0 .$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x \to 0} x \dfrac{x^2 - 2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} (x-2) = -2$ και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot 2}{x^2} = 2$. Άρα, έχουμε κανονικό ανώμαλο σημείο, οπότε θέτουμε

$$y = \alpha_0 x^\rho + \alpha_1 x^{\rho+1} + \dots + \alpha_n x^{\rho+n} + \dots$$

$$y' = \rho \alpha_0 x^{\rho-1} + (\rho+1)\alpha_1 x^\rho + \dots + (\rho+n)\alpha_n x^{\rho+n-1} + \dots$$

$$y'' = \rho(\rho-1)\alpha_0 x^{\rho-2} + \rho(\rho+1)\alpha_1 x^{\rho-1} + \dots + (\rho+n-1)(\rho+n)\alpha_n x^{\rho+n-2} + \dots$$

ή $\quad x^2 y'' + (x^2-2x) y' + 2y = x^\rho [\rho(\rho-1)\alpha_0 - 2\rho\alpha_0 + 2\alpha_0] +$

$$+ x^{\rho+1} [\rho(\rho+1)\alpha_1 + \rho\alpha_0 - 2(\rho+1)\alpha_1 + 2\alpha_1] + \dots +$$

$$+ x^{\rho+n} [(\rho+n-1)(\rho+n)\alpha_n + (\rho+n-1)\alpha_{n-1} - 2(\rho+n)\alpha_n + 2\alpha_n] + \dots =$$

$$= x^\rho (\rho^2 - 3\rho + 2)\alpha_0 + x^{\rho+1}[(\rho^2-\rho)\alpha_1 + \rho\alpha_0] + \dots +$$

$$+ x^{\rho+n} \{[(\rho+n)^2 - 3(\rho+n) + 2]\alpha_n + (\rho+n-1)\alpha_{n-1}\} + \dots = 0 .$$

Η εξίσωση δείκτη, $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$ δίνει $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$ με διαφορά $\rho_1 - \rho_2 = 1$, ακέραιος. Η γενική αναδρομική σχέση είναι η

$$\alpha_n = -\frac{1}{\rho+n-2} \alpha_{n-1}, \quad \nu \geq 1 .$$

Συνεπώς, για $\rho_1 = 2$ βρίσκουμε διαδοχικά $\alpha_1 = -\alpha_0$,

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2!}\alpha_0, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{3}\alpha_2 = -\frac{1}{3}\frac{1}{2!}\alpha_0 = -\frac{1}{3!}\alpha_0$$

και γενικά $\alpha_k = \dfrac{(-1)^k}{k!}\alpha_0$. Άρα

$$y_1(x) = \alpha_0 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \alpha_0 x^2 e^{-x} .$$

Θέτοντας τη μικρότερη ρίζα $\rho_2 = 1$, παρατηρούμε ότι δε βρίσκεται άλλη λύση με τη μέθοδο του Frobenius, αφού για $n=1$ ο συντελεστής α_1 απειρίζεται.

Για να βρούμε τη δεύτερη λύση στην περίπτωση αυτή, που η μέθοδος του Frobenius δε δίνει άλλη λύση με τη μικρότερη ρίζα της εξίσωσης δείκτη, αποδεικνύεται ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο τύπος

$$\boxed{y_2(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho-\rho_2)\, y(\rho, x)\right]_{\rho=\rho_2}} \; .$$

Στο παράδειγμά μας η αναδρομική σχέση δίνει

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\rho-1}\alpha_0, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\rho}\alpha_1 = \frac{1}{\rho(\rho-1)}\alpha_0, \quad \alpha_3 = \frac{-1}{(\rho+1)\rho(\rho-1)}\alpha_0,$$

και άρα

$$y(\rho, x) = \alpha_0\left[x^\rho - \frac{1}{(\rho-1)}x^{\rho+1} + \frac{1}{\rho(\rho-1)}x^{\rho+2} - \frac{1}{(\rho+1)\rho(\rho-1)}x^{\rho+3} + \ldots\right]$$

οπότε

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[(\rho-\rho_2)\, y(\rho, x)\right] = \alpha_0\Big[x^\rho + (\rho-1)x^\rho \ln x - x^{\rho+1}\ln x - \frac{1}{\rho}x^{\rho+2} +$$

$$+\frac{1}{\rho}x^{\rho+2}\ln x + \frac{1}{\rho^2(\rho+1)}x^{\rho+2} + \frac{1}{\rho(\rho+1)^2}x^{\rho+3} - \frac{1}{\rho(\rho+1)}x^{\rho+3}\ln x + \ldots\Big]$$

και

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[(\rho-\rho_2)\, y(\rho, x)\right]_{\rho=\rho_2=1} =$$

$$= \alpha_0\left[x + 0 - x^2\ln x - x^3 + x^3\ln x + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^4\ln x + \ldots\right] =$$

$$= (-\ln x)\,\alpha_0\left[x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \ldots\right] + \alpha_0\left(x - x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \ldots\right) =$$

$$= -y_1(x)\ln x + \alpha_0 x\left(1 - x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \ldots\right).$$

Η γενική λύση, τελικά, είναι η $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

3.2. Διαφορικές εξισώσεις του Bessel

Μία σπουδαία Δ.Ε που προκύπτει σε πολλά προβλήματα, τα οποία μελετούνται με διαφορικές εξισώσεις, είναι η **Δ.Ε του Bessel**

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)\, y = 0, \quad v > 0\,.$$

Η λύση αυτής βρίσκεται με τη μέθοδο του Probenius. Θέτουμε

$$y = \alpha_0 x^\rho + \alpha_1 x^{\rho+1} + \ldots + \alpha_n x^{\rho+n} + \ldots$$

μέσα στη Δ.Ε και εκτελώντας τις πράξεις θρίσκουμε

$$x^\rho (\rho^2 - \nu^2)\, \alpha_0 + x^{\rho+1} [(\rho+1)^2 - \nu^2]\, \alpha_1 + x^{\rho+2} \{ [(\rho+2)^2 - \nu^2]\, \alpha_2 + \alpha_0 \} + \\ + x^{\rho+n+2} \{ [(\rho+n)^2 - \nu^2]\, \alpha_n + \alpha_{n-2} \} + \ldots = 0 .$$

Η εξίσωση δείκτη, $\rho^2 - \nu^2 = 0$, έχει ρίζες $\rho = \pm \nu$.

1η περίπτωση: Ο ν διάφορος ακεραίου και διάφορος μισού περιττού ακεραίου. Στην περίπτωση αυτή $\rho_2 - \rho_1 \neq$ ακεραίου. Με $\rho = \nu$, βρίσκουμε, $\alpha_1 = 0$ και για $\nu \geq 2$

$$\alpha_n = - \frac{1}{n\,(2\nu+n)}\, \alpha_{n-2} ,$$

οπότε, $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = 0$ και $\alpha_2 = - \dfrac{1}{2^2 \cdot 1!\,(\nu+1)}\, \alpha_0$,

$\alpha_4 = - \dfrac{1}{2^2 \cdot 2\,(\nu+2)}\, \alpha_2 = - \dfrac{1}{2^4 \cdot 2!\,(\nu+2)\,(\nu+1)}\, \alpha_0$ και γενικά

$$\alpha_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \cdot k!\,(\nu+k)\,(\nu+k-1) \ldots (\nu+2)\,(\nu+1)}\, \alpha_0, \quad k \geq 1 \bullet$$

Συνεπώς,

$$y_1(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = x^\nu \left[\alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} x^{2k} \right] =$$

$$= \alpha_0 x^\nu \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} \cdot k!\,(\nu+k)\,(\nu+k-1) \ldots (\nu+2)\,(\nu+1)} \right] .$$

Συνηθίζεται να θέτουμε τη σταθερή $\alpha_0 = \dfrac{1}{2^\nu\, \Gamma(\nu+1)}$, όπου $\Gamma(x)$ είναι η γνωστή συνάρτηση γάμα, που ορίζεται από τη σχέση

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

και αναδρομικά $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, για $x > 0$. Οπότε,

$$y_1(x) = \frac{1}{2^\nu\, \Gamma(\nu+1)}\, x^\nu + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{x^{2k+\nu} \cdot k!\, \Gamma(\nu+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} \cdot k!\, \Gamma(\nu+k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu} = J_\nu(x) \bullet$$

Η συνάρτηση

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

καλείται **συνάρτηση Bessel του πρώτου είδους τάξης ν.**

Αν θέσουμε στη θέση του ν το $-\nu$, που είναι η δεύτερη ρίζα της εξίσωσης δείκτη, βρίσκουμε

$$y = \alpha_0 2^{-\nu}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} - \frac{1}{1!(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\nu} + \frac{1}{2!(1-\nu)(2-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4-\nu}\ldots\right] =$$

$$=\left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} - \frac{1}{1!\,\Gamma(2-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!\,\Gamma(3-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4-\nu}\ldots\right] = J_{-\nu}(x)$$

και η γενική λύση είναι η

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x),$$

όπου είπαμε ότι το ν είναι θετικός αριθμός όχι ακέραιος και όχι το μισό περιττού ακεραίου.

2η περίπτωση ν=0: Από τη ρίζα $\nu=0$ της εξίσωσης δείκτη παίρνουμε στην περίπτωση αυτή μία λύση

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Αλλά $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)\,\Gamma(k-1) = \ldots = k(k-1)\ldots 2\Gamma(2)$, όπου

$$\Gamma(2) = \int_0^{\infty} e^{-t}t\,dt = [te^{-t}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-t})\,dt = 1\,.$$

Συνεπώς, $\qquad \Gamma(k+1) = k!$

και τελικά

$$\boxed{J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}\,.$$

Βρήκαμε, όμως, και μία ακόμη λύση της εξίσωσης Bessel τάξης μηδέν, δηλαδή της $x^2y''+xy'+x^2y=0$ στο παράδ. 3.1.3 την

$$\alpha_0 \ln x \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} x^4 - \dots\right) + \alpha_0 \left[\frac{1}{2^2} x^2 - \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^4 + \dots \right] =$$

$$= \alpha_0 \left\{ J_0(x) \ln x + \left[\frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right\} .$$

Ας γράψουμε

$$X(x) = J_0(x) \ln x + \left[\frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right].$$

Αν εισάγουμε τη σταθερή Euler

$$\gamma = \lim_{m \to \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m \right] \cong 0.5772 \dots$$

και ορίσουμε τη συνάρτηση

$$\boxed{Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left\{ \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma \right\} J_0(x) + X(x) \right]}$$

τότε η $Y_0(x)$ είναι η δεύτερη λύση της εξίσωσης Bessel τάξης μηδέν και είναι γνωστή ως **συνάρτηση Weber – Bessel δεύτερου είδους τάξης μηδέν**.

Η γενική λύση είναι,τελικά,η

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x) .$$

3η περίπτωση: Ο ν είναι ακέραιος ή μισό περιττού ακεραίου. Στην περίπτωση αυτή, $\rho_1 = \rho_2$ = ακέραιος. Τότε $\Gamma(n+k+1) = (n+k)!$ και μια λύση της Δ.Ε Bessel τάξης n είναι η

$$y = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+n}$$

Σύμφωνα με τους πίνακες της Βρεττανικής Μαθηματικής Εταιρείας Τόμος VI (Cambridge University Press 1937) ορίζουμε

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \left\{ \frac{\sigma\upsilon\nu\,\nu\pi\, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\eta\mu\,\nu\pi} \right\} =$$

$$= \lim_{\nu \to n} \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\sigma\upsilon\nu\,\nu\pi\, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{\frac{\partial}{\partial \nu} \eta\mu\,\nu\pi} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=n} .$$

Η πλήρης εκτίμηση του ορίου αυτού είναι έξω από το σκοπό αυτού του βιβλίου.

Τελικά

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left\{ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right\} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)}{k!\,(k+n)} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k+n}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

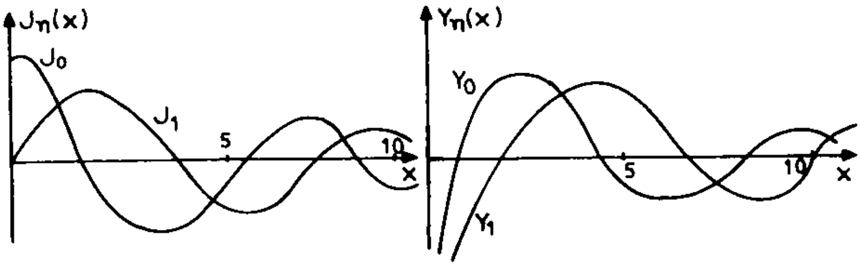
Η συνάρτηση $Y_n(x)$ καλείται **συνάρτηση Weber– Bessel του δεύτερου είδους**. Παρατηρούμε ότι η $Y_n(x)$ έχει μια λογαριθμική ανωμαλία στο $x=0$ και η γενική λύση είναι η

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x).$$

Ειδικώς, πολλαπλασιάζοντας τις συναρτήσεις Bessel τάξης 1/2 επί $\sqrt{2/\pi}$, έχουμε

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \text{ημ}\, x, \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \text{συν}\, x.$$

Στα επόμενα σχήματα δείχνουμε τις γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων Bessel



Οι συναρτήσεις Bessel τρίτου είδους είναι οι μιγαδικές λύσεις της Δ.Ε Bessel και ορίζονται από τις σχέσεις

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_n(x), \qquad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) + iY_n(x),$$

και είναι γνωστές ως **συναρτήσεις Hankel του πρώτου και του δεύτερου είδους**.

3.3. Διαφορική εξίσωση του Legendre

Μια αξιοσημείωτη διαφορική εξίσωση είναι εκείνη του Legendre

$$(1-x^2)\, y'' - 2xy' + n\,(n+1)\, y = 0\,,$$

όπου n είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Το σημείο $x=0$ είναι συνηθισμένο σημείο και αντικαθιστώντας ως $y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ στη Δ.Ε, έχουμε

$$[2\alpha_2+(n^2+n)\,\alpha_0]+[6\alpha_3+(n^2+n-2)\,\alpha_1]\,x + \ldots +$$
$$+ [(k+2)\,(k+1)\,\alpha_{k+2}+(n^2+n-k^2-k)\,\alpha_k]\,x^k + \ldots = 0\,.$$

Ας σημειωθεί ότι $n^2+n-k^2-k = (n-k)\,(n+k+1)$, οπότε παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$\alpha_{k+2} = -\,\frac{(n-k)\,(n+k+1)}{(k+2)\,(k+1)}\,\alpha_k\,.$$

Λόγω του παράγοντα $n-k$ σ' αυτή τη σχέση, όταν $k=n$ θα έχουμε $\alpha_{k+2} = 0$, οπότε $0 = \alpha_{k+4} = \alpha_{k+6} = \alpha_{k+8} = \ldots$ Έτσι, αν ο n είναι περιττός, τότε όλοι οι περιττής τάξης συντελεστές α_k $(k>n)$ θα μηδενίζονται, ενώ, αν n είναι άρτιος, όλοι οι άρτιας τάξης συντελεστές θα μηδενίζονται. Συνεπώς μία από τις δύο λύσεις $y_1(x)$ ή $y_2(x)$, σύμφωνα με την παρατήρηση 2 της §3.1, θα είναι ένα πολυώνυμο του x. Αφού οι α_0 και α_1 είναι αυθαίρετες σταθερές, συνηθίζεται να εκλέγονται αυτές έτσι, ώστε για οποιαδήποτε από τις $y_1(x)$ ή $y_2(x)$ που είναι ένα πολυώνυμο να πληρούται η συνθήκη $y(1)=1$. Τα προκύπτοντα πολυώνυμα, συμβολίζονται με $P_n(x)$ και είναι γνωστά ως πολυώνυμα του Legendre βαθμού n. Τα πρώτα από αυτά είναι τα

$$p_0(x)=1,\quad p_1(x)=x,\quad p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\quad p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)\,,$$

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\,.$$

Παρατήρηση: Ας σημειωθεί ότι, τόσο οι συναρτήσεις Bessel όσο και τα πολυώνυμα Legendre, είναι **ορθογώνιες συναρτήσεις** και επομένως χρησιμοποιούνται για να αναπτύσσουμε άλλες συναρτήσεις σε σειρές Fourier ως προς αυτές.

3.4. Ασκήσεις

1. Να λυθεί,στο σημείο $x=0$,η Δ.Ε $y''+y = 0$.
(Απ. $y = \alpha_0 \sigma\upsilon\nu x+\alpha_1 \eta\mu x$)

2. Να λυθεί,στο $x=0$, η Δ.Ε $y''-xy'+2y = 0$.
$\left(\text{Απ. } y = \alpha_0(1-x^2) + \alpha_1\left(x-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 - \ldots\right)\right)$

3. Ομοίως η $y''-(x-2)y'+2y=0$, στο $x=2$.

(Απ. $y=\alpha_0[1-(x-2)^2]+\alpha_1\left[(x-2)-\frac{1}{6}(x-2)^3-\frac{1}{120}(x-2)^5-\ldots\right]$)

4. Ομοίως η $y''-y'=0$, στο $x=0$.

(Απ. $y=c_1+c_2e^x$)

5. Ομοίως της $(x^2-1)y''+xy'-y=0$, στο $x=0$.

(Απ. $y=\alpha_0\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^4-\ldots\right)+\alpha_1 x$)

6. Να λυθούν οι επόμενες διαφορικές εξισώσεις,στο $x=0$,με τη μέθοδο του Frobenius

α) $xy''+y'-y=0$, b) $x^2y''+xy'+x^3y=0$, c) $x^2y''+(x^2-3x)y'-(x-4)y=0$.

(Απ. α) $y_1(x)=\alpha_0\left(1+x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{36}x^3+\ldots\right)$

$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\alpha_0\left(-2x-\frac{3}{4}x^2-\ldots\right)$

b) $y_1(x)=\alpha_0\left(1-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{324}x^6+\ldots\right)$

$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\alpha_0\left(\frac{2}{27}x^3-\frac{1}{324}x^6+\ldots\right)$

c) $y_1(x)=\alpha_0x^2e^{-x}$,

$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\alpha_0x^2\left(x-\frac{3}{4}x^2+\frac{11}{36}x^3+\ldots\right)$)

7. Να δειχθεί ότι $\frac{d}{dx}[x^{p+1}J_{p+1}(x)]=x^{p+1}J_p(x)$

8. Ομοίως ότι $xJ_p'(x)=pJ_p(x)-xJ_{p+1}(x)$

9. Ομοίως ότι $xJ_p'(x)=-p\,J_p(x)+x\,J_{p-1}(x)$

10. Να δειχθεί ότι τα πολυώνυμα $p_n(x)=\frac{d}{dx}(x^2-1)^n$ επαληθεύουν τη Δ.Ε Legrendre.

(Υπόδειξη: Θέστε $u=(x^2-1)^n$, οπότε $(x^2-1)u'=2nxu$ και παραγωγίστε αυτή $n+1$ φορές)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Agnew, R.P., Differential Equations, New York, McGaw-Hill Book Co., 1960.
2. Bajpai, A.C., Mustoe, L.R., Walker D. Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester-New York 1977.
3. Berg, P.W. and McGregor, J.L., Elementary Partial Differential Equations, San Francisco: Holden-Day, Inc., 1966.
4. Bronson, R., Differential Equations, Schaum's outline series McGraw-Hill Book Co. New York, 1973.
5. Γεωργανοπούλου, Γ. Στοιχεία Μαθηματικής Αναλύσεως, Θεσσαλονίκη, 1983.
6. Chirgwin, B. Hott, Plumpton, C., Mathematics for Engineers and Scientists, Pergamon Press, Oxford, New York, 1970.
7. Churchill, R.V., Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill Book Co., New York, 1941.
8. Chorlton, F., Ordinary Differential and Difference Equations, D. Van Nostrand Co., Ltd, London, 1965.
9. Δασκαλοπούλου Δ., Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα, Αθήνα, 1973.
10. Finizio, N., Ladas, G., Ordinary Differential Equations with Modern Applications, Wadsworth Publishing Company, Belmont, California, 1982.
11. Hsu, H. P. Fourier analysis, Simon and Schuster, New York, 1970.
12. Jeffrey, A. Mathematics for Eingineers and Scientists, Thomas Nelson and sons, LTD, London, 1969.
13. Knopp, P., Linear Algebra, Hamilton Publishing Co., Santa Barbara, California, 1974.
14. Μπόζη, Γ., Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές, Θεσσαλονίκη, 1982.
15. Παντελίδη, Γ. Μαθηματική ανάλυση. Τόμος II. Αθήνα 1983.
16. Παντελίδη Γ., Κραββαρίτη Δ. και Χατζησάββα Ν., Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα, 1990.

17. Rabenstein, A., Introduction to Ordinary Differential Equations, Academic Press, New York, London, 1972.
18. Rice, B., Applied Analysis for physicists and Engineers, Prindle, Weber & Schmidt, Inc. Boston, London, Sydney, 1972.
19. Smith, L., Linear Algebra, Springer-Verlay, New York, Berlin, 1978.
20. Spencer, A., Parker, D., Berry D., England A, Faulknez, T. Green W., Holden, J., Middleton, D., Rogers, J. Engineering Mathematics, Van McGraw-Nostrand Reinhold Co., Limited, New York-London, 1977.
21. Spiegel, M., Applied Differential Equations, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York, 1967.
22. Spiegel, M., (Μετάφραση Ι. Σχοινά), Ανώτερα Μαθηματικά, McGraw-Hill, New York, ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1982.
23. Spiegel, M., (Μετάφραση Σ. Περσίδη), Ανάλυση Fourier. McGraw-Hill, New York, ΕΣΠΙ, Αθήνα 1978.
24. Spiegel, M., Laplace transforms, McGraw-Hill, New York, 1975.
25. Sokolnikoff, I.S and Redhefter, R.M., Mathematics of Physics and Modern Engineering, New York, MacGraw-Hill Book Co., 1966.
26. Σκοινά, Ι., Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Θεσσαλονίκη, 1985.
27. Σχοινά, Ι., Ειδικά Κεφάλαια Ανωτέρων Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, 1985.
28. Τερζίδη, Γ., Ανώτερα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Θεσσαλονίκη, 1983.
29. Williamson, R.E., Crowell, R.H., Trotter H.F. Calculus of Vector Functions, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
30. Taylor, A.E., Advanced Calculus, Ginn. & Co., Boston, 1955.
31. Wylie, C. R., Advanced Engineering Mathematics, New York, McGraw-Hill Book Co., 1966.
32. Vladimirov, V.S., Generalized Functions in Mathematical Physics, Mir Publishers, Moscow, 1979.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

4. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. Εἰσαγωγικές Ἔννοιες καί Συμβολισμοί
2. Ἀλγεβρικές Ἰδιότητες Γραμμικῶν Συστημάτων
3. Ἐπίλυση μέ Ἰδιοτιμές - Ἰδιοδιανύσματα
4. Ὁ Ἐκθετικός Πίνακας
5. Μή-Ὁμογενή Γραμμικά Συστήματα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἐξετάσουμε ἕνα πλῆθος n διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξης (ὅπου n εἶναι ἕνας θετικός ἀκέραιος ἀριθμός) τῆς μορφῆς

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ὅπου $f_1, f_2, \ldots, f_n$ εἶναι n δοθεῖσες (πραγματικές) συναρτήσεις $n+1$ μεταβλητῶν. Λέμε ὅτι τό παραπάνω πλῆθος διαφορικῶν ἐξισώσεων συνιστᾶ ἕνα σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξης, γιά τήν ἀκρίβεια, ἕνα σύστημα n διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξης. Ἄν ὑπάρχουν n συναρτήσεις $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, οἱ ὁποῖες μαζί μέ τίς πρῶτες παραγώγους τους νά ἱκανοποιοῦν τό παραπάνω πλῆθος ἐξισώσεων, τότε οἱ συναρτήσεις αὐτές λέγονται λύσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ.

Πολλές φορές, ζητᾶται νά ἐπιλυθεῖ ἕνα πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά ἕνα σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξης: δηλαδή, ζητοῦνται ἐκεῖνες οἱ λύσεις $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ τοῦ συστήματος, πού ἱκανοποιοῦν τίς ἀρχικές συνθῆκες

$$y_1(t_0) = y_{10},\ y_2(t_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(t_0) = y_{n0}, \qquad (2)$$

ὅπου $t_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ εἶναι $n+1$ γνωστοί (δοθέντες) πραγματικοί ἀριθμοί.

Σκοπός τοῦ παρόντος κεφαλαίου εἶναι ἡ ἐπίλυση (τοὐλάχιστον μιᾶς σημαντικῆς κατηγορίας) συστημάτων διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξης (καί προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν). Ἡ ἐπίλυση αὐτή εἶναι πολύ εὔκολη, σύμφωνα μέ τίς μεθόδους τοῦ πρώτου κεφαλαίου, ὅταν γίνεται <u>ἀποσύζευξη</u> στό σύστημα. Μ'αὐτό ἐννοοῦμε τή περίπτωση, κα΄ τό δεξιό μέρος τῆς πρώτης ἐξίσωσης τοῦ συστήματος (1) ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τά t, y_1, τό δεξιό μέρος τῆς δεύτερης ἐξίσωσης τοῦ συστήματος (1) ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τά t, y_1, y_2, κ.ο.κ.. Διότι, τότε ἡ πρώτη ἐξίσωση λύνεται ἀμέσως ὡς πρός y_1, αντικαθίσταται ἡ λύση y_1 στή δεύτερη ἐξίσωση, καί λύνεται τότε ἀμέσως ὡς πρός y_2, κ.ο.κ..

<u>Παράδειγμα 1</u>. Ἔστω τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= xy \end{aligned}\right\}$$

$$x(0) = 1,\ y(0) = 4 \ .$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος περιέχει μόνο τό x καί εἶναι μιά διαχωρίσιμη ἐξίσωση πρώτης τάξης. Ἡ λύση της βρίσκεται ἀπό ὁλοκλήρωμα (ἀφοῦ $x(0)=1$)

$$\int_1^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi^3} = -\int_0^t dt = -t \ ,$$

ἤτοι

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} \ .$$

Ἀλλά τότε ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γίνεται

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\, y \ , \quad y(0) = 4 \ .$$

Ἔχουμε λοιπόν πάλι ἕνα πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά μιά διαχωρίσιμη ἐξίσωση πρώτης τάξης καί ἡ λύση του βρίσκεται εὔκολα ὅτι εἶναι ἡ συνάρτηση

$$y(t) = 4e^{\sqrt{2t+1}} - 1 .$$

Ἑπομένως, οἱ συναρτήσεις

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} , \quad y(t) = 4e^{\sqrt{2t+1}} - 1$$

εἶναι ἡ λύση τοῦ παραπάνω προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν γιά ἕνα σύστημα δύο διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξης. ■

Μιά πολύ ἐνδιαφέρουσα κατηγορία διαφορικῶν ἐξισώσεων μπορεῖ νά γραφεῖ σάν σύστημα ἐξισώσεων. Εἶναι οἱ ἐξισώσεις τάξης n, τῶν ὁποίων ἡ γενική μορφή εἶναι

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) , \qquad (3)$$

ὅπου g εἶναι μιά κατάλληλη συνάρτηση $n+1$ μεταβλητῶν. Τότε ἰσχύει τό γεγονός ὅτι μιά συνάρτηση $y(t)$ εἶναι λύση τῆς (3) ἄν καί μόνον ἄν οἱ συναρτήσεις

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t) , \\ y_2(t) &= y'(t) , \\ y_3(t) &= y''(t) , \\ &\cdots\cdots \\ y_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος πρώτης τάξης

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\cdots\cdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= g(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} .$$

Ἡ ἰσοδυναμία αὐτή μεταξύ ἐξισώσεων ἀνωτέρας τάξης καί συστημάτων μπορεῖ μερικές φορές νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν ἐπίλυση συστημάτων, ὅπως φαίνεται στό ἑπόμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Ἔστω τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 3x - 2y \end{aligned}\right\}$$

$$x(0) = 3\ ,\ y(0) = 1 .$$

Γράφοντας $z = x$, ἔχουμε $z' = y$ καί $z'' = y'$, δηλαδή

$$z'' + 2z' - 3z = 0 .$$

Ἐπειδή $\lambda = -1, 3$ εἶναι οἱ χαρακτηριστικές ῥίζες τῆς τελευταίας ἐξίσωσης, ἡ γενική λύση της εἶναι

$$z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} ,$$

ὅπου c_1, c_2 εἶναι δύο σταθερές. Ἑπομένως, ἡ λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος εἶναι

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t},\ y(t) = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t} ,$$

ὅπου οἱ σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες, δηλαδή, τό γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 3 \\ -c_1 + 3c_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

καί εἶναι $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Συνεπῶς, ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν εἶναι

$$x(t) = 2e^{-t} + e^{3t}\ ,\ y(t) = -2e^{-t} + 3e^{3t} . \quad ▦$$

Στό μεγαλύτερο μέρος αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου θά ἀναφερόμαστε σέ μιά εἰδική κατηγορία συστημάτων διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξης.

Πιό συγκεκριμένα, ἐνδιαφερόμαστε γιά συστήματα τῆς μορφῆς

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{array}\right\} \quad (4)$$

ὅπου $f_i(t)$, $a_{ij}(t)$, γιά $i,j=1,\dots,n$, εἶναι γνωστές δοθεῖσες συνεχεῖς συναρτήσεις. Βλέποντας τά δεξιά μέρη τοῦ συστήματος (4), εἶναι φυσικό τό σύστημα αὐτό νά τό ὀνομάζουμε γραμμικό σύστημα. Οἱ συναρτήσεις $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ λέγονται μή-ὁμογενεῖς ὅροι καί γι' αὐτό τό σύστημα (4) λέγεται ἀκριβέστερα μή-ὁμογενές γραμμικό σύστημα, ἐκτός ἄν $f_1(t)=f_2(t)=\cdots=f_n(t)=0$, ὁπότε λέγεται ὁμογενές γραμμικό σύστημα. Στή περίπτωση πού $a_{ij}(t)=a_{ij}$, δηλαδή, σταθερές συναρτήσεις, γιά $i,j=1,\dots,n$, τότε τό σύστημα (4) λέγεται γραμμικό σύστημα μέ σταθερούς συντελεστές. Ἄν θέλουμε νά συμπεριλάβουμε καί τόν ἀριθμό τῶν ἐξισώσεων τοῦ παραπάνω συστήματος, λέμε ὅτι τό σύστημα (4) εἶναι ἕνα n-διάστατο γραμμικό σύστημα.

Ὅπως ἔχουμε δεῖ στήν ἀρχή, ἡ λύση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος (4) εἶναι οἱ n συναρτήσεις $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$. Οἱ συναρτήσεις αὐτές μπορεῖ νά θεωρηθοῦν ὅτι ἀποτελοῦν τίς συνιστῶσες μιᾶς διανυσματικῆς συνάρτησης πραγματικῆς μεταβλητῆς

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

δηλαδή, ἡ λύση εἶναι μιά συνάρτηση $\underline{y}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, πού οἱ τιμές της εἶναι τό παραπάνω n-διάστατο διάνυσμα στήλης. Ἐπιπλέον, ἡ παράγωγος τῆς λύσης είναι τό έξης n-διάστατο διάνυσμα στήλης

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} .$$

καί οί μή-όμογενεῖς ὅροι συνιστοῦν τό ἑξῆς n-διάστατο διάνυσμα στήλης

$$\underline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} .$$

Τέλος, θεωρώντας ὅτι οἱ συναρτήσεις $a_{ij}(t)$ (γιά $i,j = 1, \dots, n$) ἀποτελοῦν μιά συνάρτηση, τῆς ὁποίας οἱ τιμές εἶναι οἱ παρακάτω (τετραγωνικοί) πίνακες $n \times n$

$$\underline{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} ,$$

καταλήγουμε νά γράψουμε τό γραμμικό σύστημα (4) ὑπό τήν ἑξῆς διανυσματική μορφή (ἤ μορφή πίνακα)

$$\underline{y}' = \underline{A}(t)\underline{y} + \underline{f}(t) .$$

Ἄν εἴχαμε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά τό γραμμικό σύστημα (4) μαζί μέ τίς ἀρχικές συνθῆκες (2), θά μπορούσαμε τότε νά τό γράψαμε ὑπό τήν ἑξῆς διανυσματική μορφή

$$\underline{y}' = \underline{A}(t)\underline{y} + \underline{f}(t) ,$$
$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 ,$$

όπου τό $\underline{y}_0$ είναι τό παρακάτω n-διάστατο διάνυσμα στή-λης, πού αποτελείται από τίς τιμές τών αρχικών συνθηκών (2),

$$\underline{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

<u>Παράδειγμα 3</u>. Τό δι-διάστατο γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 - 5t \\ y_2' &= 6y_1 - 3y_2 - 19 \end{aligned}\right\}$$

γράφεται υπό μορφή πίνακα ως έξής

$$\underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y} + \underline{f}(t) \quad ,$$

όπου

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}(t) = -\begin{pmatrix} 5t \\ 19 \end{pmatrix}. \quad ■$$

Όπως είδαμε κάθε διαφορική εξίσωση ανωτέρας τάξης ισο-δυναμεί μέ ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Έτσι καί τώρα, μιά συνάρτηση $y(t)$ είναι λύση της μή-ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τάξης n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = r(t)$$

(όπου $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_{n-1}(t), r(t)$ είναι $n+1$ γνωστές συνεχείς συναρτήσεις) άν καί μόνον άν ή διανυσματική συνάρτηση

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

εἶναι λύση τοῦ n-διαστάτου μή-ὁμογενοῦς γραμμικοῦ συστήματος πρώτης τάξης

$$\underline{y}' = \underline{A}(t)\,\underline{y} + \underline{f}(t),$$

ὅπου ἡ συνάρτηση πινάκων $n \times n$ $\underline{A}(t)$ καί ἡ n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση $\underline{f}(t)$ ὁρίζονται ὡς ἑξῆς

$$\underline{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(t) \end{pmatrix}.$$

<u>Παράδειγμα 4.</u> Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά τήν ἐξίσωση τετάρτης τάξης

$$y^{(4)} - 2y''' + y' - 6y = \sin 2t,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = 0,$$

γράφεται ὑπό μορφή πίνακα ὡς ἑξῆς

$$\underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y} + \underline{f}(t),$$

$$\underline{y}(0) = \underline{y}_0,$$

ὅπου

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρεῖτε τίς λύσεις τῶν παρακάτω προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν γιά διδιάστατα συστήματα, λύνοντας πρῶτα τήν πρώτη ἐξίσωση καί ἀντικαθιστώντας τή λύση της στή δεύτερη:

(i) $\left.\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= x-y \end{aligned}\right\}$ $\quad x(0)=3,\ y(0)=0$

(ii) $\left.\begin{aligned} x' &= -x^2 \\ y' &= x+2 \end{aligned}\right\}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=3$

(iii) $\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{t}x+1 \\ y' &= y+x+1 \end{aligned}\right\}$ $\quad x(1)=2,\ y(1)=0$

(iv) $\left.\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -(1+x^2)y^2 \end{aligned}\right\}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=3$.

2. Βρεῖτε τίς λύσεις τῶν παρακάτω προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν γιά δι-διάστατα συστήματα, λύνοντας τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση δευτέρας τάξης:

(i) $\left.\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 4x \end{aligned}\right\}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=0$

(ii) $\left.\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -9x \end{aligned}\right\}$ $\quad x(0)=-3,\ y(0)=2$

(iii) $\left.\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 3x+2y \end{aligned}\right\}$ $\quad x(0)=0,\ y(0)=2$

(iv) $\left.\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -5x-2x \end{aligned}\right\}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=0$.

3. Γράψτε τά παρακάτω συστήματα ὑπό μορφή πινάκων

(i) $\left.\begin{aligned} y_1' &= 6y_1 - 2y_2 + te^t \\ y_2' &= y_2 - 7e^{2t} \end{aligned}\right\}$

(ii) $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 - y_3 + \sin 2t \\ y_2' &= 2y_2 + y_3 + 2e^{-t} \\ y_3' &= -y_1 + y_2 - y_3 - \cos 2t \end{aligned}\right\}$

(iii) $$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_3 \\ y_2' &= -4y_1 + y_2 \\ y_3' &= 6y_1 \end{aligned}\right\}$$

(iv) $$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + e^{t} \\ y_2' &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - e^{-t} \\ y_3' &= y_3 - y_4 + e^{t} \\ y_4' &= y_1 - y_3 - e^{-t} \end{aligned}\right\}.$$

1. Γράψτε τὶς παρακάτω ἐξισώσεις ἀνωτέρας τάξης ὑπό μορφή πινάκων

   (i) $y''' - y'' + y' - y = e^{2t}$

   (ii) $y^{(4)} - 2y'' + y = e^{-t} + 1$

   (iii) $y''' - 8y = 0$.

2. ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Κατ' ἀρχήν, θά ἐξετάσουμε τό παρακάτω ὁμογενές n-διάστατο γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}' = \underline{A}(t)\,\underline{y}\,, \tag{1}$$

ὅπου

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Γιά $k=1,2,\dots$, θά συμβολίζουμε τά διανύσματα (πάντοτε, ὅσες φορές ἀναφέρεται, ἐννοοῦμε n-διάστατα διανύσματα καί πίνακες $n\times n$)

$$\underline{y}_k = \begin{pmatrix} y_{k1} \\ y_{k2} \\ \vdots \\ y_{kn} \end{pmatrix}.$$

Ἔστω ὅτι ἔχουμε δύο λύσεις $\underline{y}_1=\underline{y}_1(t)$, $\underline{y}_2=\underline{y}_2(t)$ τοῦ (1) καί c_1, c_2 δύο τυχοῦσες σταθερές. Τότε, γράφοντας $\underline{y}=c_1\underline{y}_1+c_2\underline{y}_2$, παίρνουμε λόγω τῆς γραμμικότητας τῶν πινάκων

$$\underline{y}' = c_1\underline{y}_1' + c_2\underline{y}_2' = c_1\underline{A}(t)\underline{y}_1 + c_2\underline{A}(t)\underline{y}_2 =$$
$$= \underline{A}(t)(c_1\underline{y}_1 + c_2\underline{y}_2) = \underline{A}(t)\underline{y},$$

δηλαδή, καί ἡ $\underline{y}=c_1\underline{y}_1+c_2\underline{y}_2$ εἶναι λύση τοῦ (1).

Δείξαμε λοιπόν ὅτι κάθε γραμμικός συνδιασμός λύσεων τοῦ γραμμικοῦ συστήματος (1) εἶναι κι αὐτός λύση του.

Τό πρόβλημα εἶναι νά προσδιορίσουμε πῶς παράγεται ἡ <u>γενική λύση</u> τοῦ γραμμικοῦ συστήματος (1). Ἡ ἀπάντηση στό πρόβλημα αὐτό δίνεται ἀπό τό παρακάτω ἀποτέλεσμα.

Ἔστω $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n$ n λύσεις τοῦ (1). Τότε θά δείξουμε ὅτι ὁ γραμμικός συνδιασμός

$$\underline{y} = c_1\underline{y}_1 + c_2\underline{y}_2 + \dots + c_n\underline{y}_n \qquad (2)$$

(ὅπου $c_1, c_2, \dots, c_n$ σταθερές) εἶναι ἡ γενική λύση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος (1) ἄν καί μόνον ἄν τά διανύσματα $\underline{y}_1(t_0), \underline{y}_2(t_0), \dots, \underline{y}_n(t_0)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, γιά κάποιον πραγματικό ἀριθμό t_0.

Ἄς ὑπενθυμίσουμε τί ἐννοοῦμε μέ τή γραμμική ἀνεξαρτησία. Δύο διανύσματα $\underline{y}_1, \underline{y}_2$ λέγονται <u>γραμμικῶς ἀνεξάρτητα</u>, ἄν, ὅποτε ἰσχύει $c_1\underline{y}_1+c_2\underline{y}_2=\underline{0}$, γιά δύο σταθερές c_1, c_2, τότε νά συνεπάγεται $c_1=c_2=0$. Στήν ἀντίθετη περίπτωση, λέμε ὅτι τὰ διανύσματα $\underline{y}_1, \underline{y}_2$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, δηλαδή, ὅταν ὑπάρχουν δύο σταθερές c_1, c_2 καί μία τουλάχιστον ἀπό αὐτές εἶναι διάφορη τοῦ μηδενός, τέτοιες ὥστε $c_1\underline{y}_1 + c_2\underline{y}_2 = \underline{0}$. Εὔκολα οἱ ὁρισμοί αὐτοί γενικεύονται γιά περισσότερα ἀπό δύο διανύσματα.

Γιά νά δείξουμε ὅτι ἰσχύει τό πιό πάνω διατυπωθέν ἀποτέλεσμα, ἄς ὑποθέσουμε πρῶτα ὅτι τά διανύσματα $\underline{y}_1(t_0)$, $\underline{y}_2(t_0), \ldots, \underline{y}_n(t_0)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, γιά κάποιο πραγματικό t_0, καί ἔστω $\underline{y}$ ὁποιαδήποτε λύση τοῦ (1). Ἐπειδή τό πλῆθος τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων αὐτῶν διανυσμάτων εἶναι ἀκριβῶς ἡ διάσταση τοῦ n-διαστάτου διανυσματικοῦ χώρου, ἕπεται ὅτι θά ὑπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ὥστε

$$\underline{y}(t_0) = c_1\underline{y}_1(t_0) + c_2\underline{y}_2(t_0) + \cdots + c_n\underline{y}_n(t_0).$$

Θεωροῦμε τή συνάρτηση $\underline{x}(t) = c_1\underline{y}_1(t) + c_2\underline{y}_2(t) + \cdots + c_n\underline{y}_n(t)$. Προφανῶς, τό $\underline{x} = \underline{x}(t)$ εἶναι λύση τοῦ (1) καί

$$\underline{x}(t_0) = c_1\underline{y}_1(t_0) + c_2\underline{y}_2(t_0) + \cdots + c_n\underline{y}_n(t_0) = \underline{y}(t_0).$$

Ἀφοῦ ὅμως τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν, πού συνδέεται μέ τό σύστημα (1), ἔχει μοναδική λύση, θά πρέπει $\underline{x}(t) = \underline{y}(t)$, γιά κάθε πραγματικό t. Ἄρα, γιά κάθε t, ὁ γραμμικός συνδυασμός

$$\underline{y}(t) = c_1\underline{y}_1(t) + c_2\underline{y}_2(t) + \cdots + c_n\underline{y}_n(t)$$

εἶναι ἡ γενική λύση τοῦ (1).

Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι ὁ γραμμικός συνδυασμός (2) εἶναι ἡ γενική λύση τοῦ (1) καί ἔστω $\underline{\eta}$ ἕνα τυχαῖο διάνυσμα. Τότε, γιά ὁποιοδήποτε πραγματικό t_0, ὑπάρχει μοναδική λύση $\underline{y}$ τοῦ (1), πού ἱκανοποιεῖ τήν ἀρχική συνθήκη $\underline{y}(t_0) = \underline{\eta}$. Μέ ἄλλα λόγια, ὑπάρχουν μοναδικές σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ὥστε

$$\underline{y}(t_0) = c_1\underline{y}_1(t_0) + c_2\underline{y}_2(t_0) + \cdots + c_n\underline{y}_n(t_0) = \underline{\eta}. \qquad (3)$$

Συνεπώς, τά διανύσματα $\underline{y}_1(t_0), \underline{y}_2(t_0), \dots, \underline{y}_n(t_0)$ πρέπει νάναι γραμμικώς ανεξάρτητα (καί μάλιστα, όπως δείξαμε, γιά κάθε πραγματικό t_0).

Στή πράξη, γιά νά διαπιστώσουμε άν ένα πλήθος διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα χρησιμοποιούμε τό κριτήριο τής ορίζουσας. Ξέραμε, δηλαδή, ότι οι λύσεις $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n$ τού (1) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, άν καί μόνον άν

$$\det(\underline{y}_1(t), \underline{y}_2(t), \dots, \underline{y}_n(t)) \equiv \det \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \cdots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \cdots & y_{n2}(t) \\ - & - & - & - \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{pmatrix} \neq 0 ,$$

γιά κάποιο πραγματικό t. Όπότε, άν ή παραπάνω ορίζουσα είναι διάφορη τού μηδενός, τότε ή γενική λύση τού (1) είναι

$$\underline{y} = c_1 \underline{y}_1 + c_2 \underline{y}_2 + \dots + c_n \underline{y}_n ,$$

όπου $c_1, c_2, \dots, c_n$ σταθερές.

Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι γιά νά βρούμε τή μοναδική λύση τού προβλήματος αρχικών τιμών τού (1) μαζί μέ τήν αρχική συνθήκη $\underline{y}(t_0) = \underline{\eta}$, όταν μάς δίνονται n λύσεις $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n$ τού (1), πρέπει πρώτα νά ελέγξουμε τή γραμμική ανεξαρτησία τους, οπότε σέ καταφατική περίπτωση ή γενική λύση (2) τού (1) είναι ή ζητούμενη λύση τού προβλήματος αρχικών τιμών, εφ' όσον ικανοποιεί τήν αρχική συνθήκη (3), πού είναι ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων γιά τό προσδιορισμό τών n αγνώστων $c_1, c_2, \dots, c_n$ (καί πάντοτε έχει λύση, λόγω τού μή-μηδενισμού τής ορίζουσας).

<u>Παράδειγμα 1</u>. Ἔστω τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά τό τρι-διάστατο σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underline{y} ,$$

$$\underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ἔστω οἱ λύσεις τοῦ παραπάνω συστήματος

$$\underline{y}_1(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{y}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \underline{y}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ἐπειδή

$$\det(\underline{y}_1(0), \underline{y}_2(0), \underline{y}_3(0)) \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 ,$$

οἱ λύσεις αὐτές εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες καί, ἄρα, ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος, γιά 3 σταθερές c_1, c_2, c_3, εἶναι

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Γιά νά βροῦμε τή λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, πρέπει νά ὑπολογίσουμε τίς σταθερές c_1, c_2, c_3, πού ἱκανοποιοῦν τή παραπάνω ἀρχική συνθήκη, δηλαδή,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Έχουμε λοιπόν τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= 4 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 2 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 &= 1 \end{aligned}\right\},$$

πού εύκολα λύνεται, γιά νά μάς δώσει

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 2 .$$

Επομένως, ή λύση τού προβλήματος άρχικών τιμών είναι

$$\underline{y}(t) = e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 2e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} - e^{-t} + 4e^{2t} \\ e^{t} - e^{-t} + 2e^{2t} \\ e^{t} - 2e^{-t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Ένας τρόπος νά αποδώσουμε τίς παραπάνω παρατηρήσεις μέ πιό σύντομη μορφή είναι ό ακόλουθος ορισμός. Ονομάζουμε __θεμελιώδη πίνακα__ $\underline{Y}(t)$ τού ομογενούς γραμμικού συστήματος (1) τόν πίνακα $\underline{Y}(t)$, τού όποίου οί στήλες είναι n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n$ τού (1), δηλαδή,

$$\underline{Y}(t) = (\underline{y}_1(t), \underline{y}_2(t), \cdots, \underline{y}_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \cdots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \cdots & y_{n2}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{pmatrix} .$$

Σύμφωνα, μέ όσα δείξαμε παραπάνω, μιά συνάρτηση πινάκων $\underline{Y}(t)$ ορίζει ένα θεμελιώδη πίνακα γιά τό σύστημα (1) άν καί μόνον άν: (i) ή συνάρτηση $\underline{Y}(t)$ είναι διαφορίσιμη καί τέτοια ώστε $\underline{Y}'(t) = \underline{A}(t)\underline{Y}(t)$ καί (ii) $\det \underline{Y}(t) \neq 0$, γιά κάποιο πραγματικό t καί άρα καί γιά κάθε πραγματικό t. Επιπλέον, δοθέντος ενός n-διαστάτου διανύσματος $\underline{c}$ μέ συνιστώσες τίς σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$, τότε ή γενική λύση τού

(1) είναι

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}(t)\,\underline{c}\ .$$

Ἄν, τώρα, ἔχουμε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά τό ὁμογενές γραμμικό σύστημα (1) μαζί μέ τήν ἀρχική συνθήκη

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0\ ,$$

γιά κάποιο πραγματικό t_0 καί γιά κάποιο διάνυσμα $\underline{y}_0$, τότε τό διάνυσμα $\underline{c}$ τῶν σταθερῶν θά πρέπει νά ἱκανοποιῆ τή σχέση

$$\underline{Y}(t_0)\,\underline{c} = \underline{y}_0$$

καί, λόγῳ τῆς ἀντιστρεψιμότητας τοῦ θεμελιώδους πίνακα,

$$\underline{c} = \underline{Y}^{-1}(t_0)\,\underline{y}_0\ ,$$

ὁπότε προκύπτει ὅτι ἡ λύση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν εἶναι

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}(t)\,\underline{Y}^{-1}(t_0)\,\underline{y}_0\ .$$

<u>Παράδειγμα 2</u>. Ἔστω τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά τό δι-διάστατο σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{y}\ ,$$

$$\underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ἔστω οἱ λύσεις τοῦ παραπάνω συστήματος

$$\underline{y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{y}_2(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}\ .$$

Ἐπειδή

$$\det(\underline{y}_1(t), \underline{y}_2(t)) = \det\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = e^{2t} \neq 0\ ,$$

ἕνας θεμελιώδης πίνακας εἶναι

$$\underline{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Ἔχουμε

$$\underline{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

καί

$$\underline{Y}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ἐπομένως, ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν εἶναι

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+2t)e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Πρέπει νά προσθέσουμε ὅτι ὁ θεμελιώδης πίνακας δέν εἶναι μοναδικός. Πράγματι, ἄν $\underline{Y}(t)$ εἶναι ἕνας θεμελιώδης πίνακας τοῦ (1) καί $\underline{C}$ ἕνας μή-ἰδιόμορφος πίνακας, τότε καί ὁ πίνακας $\underline{Y}(t)\underline{C}$ εἶναι ἕνας θεμελιώδης πίνακας τοῦ (1) (π.χ. $\det(\underline{Y}(t)\underline{C}) = (\det \underline{Y}(t))(\det \underline{C}) \neq 0$). Ἐπιπλέον, ἀντιστρόφως, γιά κάθε δύο θεμελιώδεις πίνακες $\underline{Y}(t)$ καί $\tilde{\underline{Y}}(t)$ τοῦ (1), ὑπάρχει ἕνας μή-ἰδιόμορφος πίνακας $\underline{C}$ ὥστε $\underline{Y}(t) = \tilde{\underline{Y}}(t)\underline{C}$.

Ἐρχόμαστε τώρα στό μή-ὁμογενές γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}' = \underline{A}(t)\underline{y} + \underline{f}(t) \quad , \qquad (4)$$

ὅπου $\underline{f}(t)$ εἶναι μιά δοθεῖσα (γνωστή) διανυσματική συνάρτηση

$$\underline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} .$$

Ἔστω $\underline{y}_H$ μιά λύση τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος (1) καί $\underline{y}_p$ μιά λύση τοῦ μή-ὁμογενοῦς συστήματος (4). Τότε, γιά τή συνάρτηση $\underline{y} = \underline{y}_H + \underline{y}_p$ ἔχουμε

$$\underline{y}' = \underline{y}_H' + \underline{y}_p' = \underline{A}(t)\underline{y}_H + \underline{A}(t)\underline{y}_p + \underline{f}(t) =$$
$$= \underline{A}(t)(\underline{y}_H + \underline{y}_p) + \underline{f}(t) = \underline{A}(t)\underline{y} + \underline{f}(t) \; ,$$

ἤτοι, καί τό ἄθροισμα $\underline{y} = \underline{y}_H + \underline{y}_p$ εἶναι λύση τοῦ μή-ὁμογενοῦς συστήματος (4).

Βλέπουμε, λοιπόν, ὅτι δοθέντος ἑνός θεμελιώδους πίνακα $\underline{Y}(t)$ τοῦ (1) καί ἑνός διανύσματος σταθερῶν $\underline{c}$, ἡ συνάρτηση

$$\underline{y} = \underline{Y}(t)\underline{c} + \underline{y}_p$$

εἶναι λύση τοῦ (4). Ἄν εἴχαμε μιά ἄλλη λύση τοῦ (4), τότε θά βρίσκαμε, γιά τή διαφορά $\underline{x} = \tilde{\underline{y}} - \underline{y}_p$,

$$\underline{x}' = \tilde{\underline{y}}' - \underline{y}_p' = \underline{A}(t)\tilde{\underline{y}} + \underline{f}(t) - \underline{A}(t)\underline{y}_p - \underline{f}(t) =$$
$$= \underline{A}(t)(\tilde{\underline{y}} - \underline{y}_p) = \underline{A}(t)\underline{x} \; ,$$

δηλαδή, καί τό $\underline{x}$ εἶναι λύση τοῦ (1), ὁπότε θά ὑπάρχει μιά σταθερά $\tilde{\underline{c}}$ τέτοια ὥστε

$$\tilde{\underline{y}} = \underline{Y}(t)\tilde{\underline{c}} + \underline{y}_p .$$

Μέ ἄλλα λόγια, βρήκαμε ὅτι ἡ γενική λύση τοῦ (4) εἶναι

$$\underline{y} = \underline{Y}(t)\underline{c} + \underline{y}_p .$$

Ἑπομένως, γιά νά βρῶμε τή γενική λύση τοῦ μή-ὁμογενοῦς συστήματος (4), χρειαζόμαστε μιά μερική λύση τοῦ (4) καθώς καί η γραμμικῶς ἀνεξάρτητες λύσεις τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος (1) (δηλαδή, ἕναν θεμελιώδη πίνακα τοῦ (1)).

Ἄρα, τό πρόβλημα εἶναι νά βρῶμε μιά μερική λύση τοῦ (4). Γιά τό σκοπό αὐτό, θά ἐφαρμόσουμε τή μέθοδο τῆς μεταβολῆς τῶν σταθερῶν, δηλαδή, θά ἀναζητήσουμε μιά λύση τοῦ (4) ὑπό τή μορφή

$$\underline{y}_p(t) = \underline{Y}(t)\underline{z}(t) ,$$

ὅπου $\underline{z}(t)$ εἶναι μία συνάρτηση, πού πρέπει νά προσδιορισθῆ. Παραγωγίζοντας τή σχέση αὐτή καί λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη ὅτι ὁ θεμελιώδης πίνακας $\underline{Y}(t)$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση $\underline{Y}' = \underline{A}(t)\underline{Y}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\underline{y}_p' &= \underline{Y}'\underline{z} + \underline{Y}\underline{z}' = \underline{A}(t)\underline{Y}\underline{z} + \underline{Y}\underline{z}' = \\ &= \underline{A}(t)\underline{y}_p + \underline{Y}\underline{z}'\end{aligned}$$

καί, γιά νάναι τό $\underline{y}$ λύση τοῦ (4), πρέπει

$$\underline{A}(t)\underline{y}_p + \underline{Y}\underline{z}' = \underline{A}(t)\underline{y}_p + \underline{f}(t) ,$$

ἤτοι, πρέπει (λόγω τῆς ἀντιστρεψιμότητας τοῦ $\underline{Y}$)

$$\underline{z}' = \underline{Y}^{-1}(t)\,\underline{f}(t) .$$

Ὁλοκληρώνοντας τή τελευταία σχέση, βρίσκουμε ὅτι μιά μερική λύση τοῦ μή-ὁμογενοῦς συστήματος (4) εἶναι

$$\underline{y}_p(t) = \underline{Y}(t)\int^t \underline{Y}^{-1}(s)\,\underline{f}(s)\,ds .$$

Ἔχουμε, λοιπόν, ὅτι ἡ γενική λύση τοῦ μή-ὁμογενοῦς γραμμικοῦ συστήματος (4) εἶναι

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}(t)\underline{c} + \int^t \underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(s)\,\underline{f}(s)\,ds .$$

Ἄν, τέλος, μᾶς δίνεται τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά τό μή-ὁμογενές γραμμικό σύστημα (4) μαζί μέ τήν ἀρχική συνθήκη

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad ,$$

τότε παίρνοντας τό t_0 σάν τό κάτω ἄκρο ὁλοκληρώσεως στό ὁλοκλήρωμα τῆς μερικῆς λύσης καί ὑπολογίζοντας ἀνάλογα τή σταθερά $\underline{c}$ τῆς γενικῆς λύσης ἀπό τήν ἀρχική συνθήκη, προκύπτει ὅτι ἡ (μοναδική) λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἀρχικῶν τιμῶν δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(t_0)\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(s)\underline{f}(s)ds ,$$

πού συχνά λέγεται <u>τύπος μεταβολῆς σταθερῶν</u>.

<u>Παράδειγμα 3</u>. Ἔστω τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γιά τό διδιάστατο σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\underline{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ὅπως εἴδαμε στό Παράδειγμα 2, ὁ θεμελιώδης πίνακας τοῦ ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς συστήματος εἶναι

$$\underline{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} ,$$

ὁπότε βρίσκουμε

$$\underline{Y}^{-1}(s) = \frac{1}{e^{2s}} \begin{pmatrix} e^{s} & -se^{s} \\ 0 & e^{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-s} & -se^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} .$$

Επίσης έχουμε

$$\underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(s)\begin{pmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{Y}(t)\begin{pmatrix} e^{-s} & -se^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2s} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t-2s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

καί

$$\int_0^t \underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(s)\begin{pmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \int_0^t e^{t-2s}\,ds \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, ὁ τύπος μεταβολῆς σταθερῶν δίνει ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἀρχικῶν τιμῶν εἶναι

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} te^{t} - \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t}) \\ e^{t} \end{pmatrix}. \quad ∎$$

Στή τελευταία παράγραφο τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ θά ἐπανέλθουμε στήν ἐπίλυση τῶν μή-ὁμογενῶν γραμμικῶν συστημάτων, ἀφοῦ στίς ἑπόμενες παραγράφους ἀναπτύξουμε μεθόδους γιά τήν ἐπίλυση τῶν ὁμογενῶν γραμμικῶν συστημάτων μέ σταθερούς συντελεστές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε τη γενική λύση των παρακάτω συστημάτων, χρησιμοποιώντας τις παρατιθέμενες λύσεις τους:

(i) $$\underline{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \underline{Y}, \quad \underline{Y}_1 = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}_2 = \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

(ii) $$\underline{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \underline{Y}, \quad \underline{Y}_1 = \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{5t} \\ e^{3t} - 3e^{5t} \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}_2 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

(iii) $$\underline{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{Y}, \quad \underline{Y}_1 = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}_2 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}_3 = \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

2. Βρείτε τη λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικών τιμών για συστήματα, χρησιμοποιώντας τις παρατιθέμενες λύσεις των αντίστοιχων ομογενών συστημάτων:

(i) $$\underline{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \underline{Y} - \begin{pmatrix} e^{t} + e^{2t} \\ 4e^{t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}_2 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(ii) $$\underline{Y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{Y} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_1 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}_2 = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}_3 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

3. ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ - ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Στή παράγραφο αυτή θά προσπαθήσουμε νά λύσουμε τό n-διάστατο ομογενές γραμμικό σύστημα μέ σταθερούς συντελεστές

$$\underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y} \quad , \qquad (1)$$

όπου ο πίνακας $n \times n$ $\underline{A}$ είναι

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Γιά τό σκοπό αυτό θά εφαρμόσουμε τή *μέθοδο των ιδιοτιμών - ιδιοδιανυσμάτων*, πού είναι μιά άμεση επέκταση στά συστήματα της μεθόδου της παραγράφου 2.4 γιά γραμμικές εξισώσεις ανωτέρας τάξης.

Σύμφωνα μέ τή μέθοδο αυτή, πρέπει νά προσδιορίσουμε όλες τίς λύσεις τού (1) της μορφής

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda t}\,\underline{v} \quad , \qquad (2)$$

όπου λ είναι ένας αριθμός καί $\underline{v}$ ένα σταθερό διάνυσμα. Γιά νά έχουμε τέτοιες λύσεις, πρέπει

$$\lambda e^{\lambda t}\underline{v} = \underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y} = \underline{A}\,(e^{\lambda t}\underline{v}) = e^{\lambda t}\underline{A}\,\underline{v} \quad ,$$

ήτοι

$$\underline{A}\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v} \; .$$

Μέ άλλα λόγια, τό σύστημα (1) έχει μιά λύση της μορφής (2), άν τό λ είναι *ιδιοτιμή* τού πίνακα $\underline{A}$ μέ αντίστοιχο *ιδιοδιάνυσμα* τό $\underline{v}$.

Επομένως, γιά νά λύσουμε τό (1), χρειάζεται νά προσδιονίσουμε τίς ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα A μέ τά ἰδιοδιανύσματά τους. Ὡς γνωστόν, ἕνας ἀριθμός λ εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ $\underline{A}$ ἄν καί μόνον ἄν τό λ εἶναι ρίζα τοῦ <u>χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου</u> τοῦ $\underline{A}$, πού δείχεται σάν

$$P_{\underline{A}}(\lambda) \equiv \det(\underline{A}-\lambda\underline{I}) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix},$$

ὅπου $\underline{I}$ συμβολίζει τόν μοναδιαῖο πίνακα. Καί ἐπειδή κάθε πολυώνυμο ἔχει τοὐλάχιστον μία ρίζα (πού μπορεῖ νά'ναι μιγαδική), κάθε πίνακας ἔχει τοὐλάχιστον μιά ἰδιοτιμή. Ἔστι, ἄν ὁ πίνακας $n\times n$ $\underline{A}$ ἔχει τίς (διακριτές) ἰδιοτιμές λ_1, $\lambda_2,\dots,\lambda_k$ $(k \leqq n)$ καί κάθε μία ἀπ' αὐτές ἔχει πολλαπλότητα $m_1, m_2, \dots, m_k$, ἀντιστοίχως, τότε πρέπει $m_1+m_2+\dots+m_k = n$.

Στό σημεῖο αὐτό πρέπει νά διακρίνουμε τίς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις, ὡς πρός τίς ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα $\underline{A}$:

(i) πραγματικές ἰδιοτιμές,
(ii) μιγαδικές ἰδιοτιμές,
(iii) πολλαπλές ἰδιοτιμές.

(i) <u>Πραγματικές ἰδιοτιμές</u>

Ἔστω ὅτι ὁ $n\times n$ πίνακας $\underline{A}$ ἔχει k ἁπλές διακριτές πραγματικές ἰδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, ὅπου $k \leqq n$ (ἁπλή ἰδιοτιμή σημαίνει ὅτι ἡ πολλαπλότητα κάθε μιᾶς εἶναι 1). Ἔστω $\underline{v}_1$,

$\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ τά ἰδιοδιανύσματα, πού ἀντιστοιχοῦν σέ καθέ-μιά ἀπό τίς ἰδιοτιμές αὐτές. Ὅπως ξέρουμε ἀπό τή γραμμική ἄλγεβρα, ἀφοῦ οἱ ἰδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ εἶναι διακριτοί πραγματικοί ἀριθμοί, τά ἰδιοδιανύσματα $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ θά εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Ἑπομένως, τό σύστημα (1) ἔχει, τότε, k γραμμικῶς ἀνεξάρτητες λύσεις:

$$\underline{y}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\underline{v}_1,$$
$$\underline{y}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\underline{v}_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\underline{y}_k(t) = e^{\lambda_k t}\underline{v}_k.$$

Στήν εἰδική περίπτωση, πού $k=n$ (δηλαδή, πού ὅλες οἱ ἰδιοτιμές τοῦ $\underline{A}$ εἶναι n διακριτοί πραγματικοί ἀριθμοί), γιά κάθε σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$, ἡ γενική λύση τοῦ (1) εἶναι

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\underline{v}_n.$$

Μέ ἄλλα λόγια, στή περίπτωση αὐτή, ἕνας θεμελιώδης πίνακας τοῦ (1) εἶναι ὁ τριγωνικός πίνακας

$$\underline{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

<u>Παράδειγμα 1</u>. Ἔστω τό δι-διάστατο γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\underline{y}.$$

Τότε τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του εἶναι

$$p_{\underline{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1).$$

Ἄρα $\lambda=3$ καί $\lambda=-1$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές.

(i) Γιά νά βροῦμε τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}=(v_1,v_2)^T$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή $\lambda=3$, πρέπει νά λύσουμε τό σύστημα $(\underline{A}-3\underline{I})\,\underline{v}=\underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} -2v_1+2v_2&=0\\ 2v_1-2v_2&=0\end{aligned}\right\}.$$

Ἔχουμε $v_1=v_2$ καί, θέτοντας $v_2=1$, βρίσκουμε καί $v_1=1$, ὁπότε τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή $\lambda=3$, εἶναι

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

(ii) Γιά νά βροῦμε τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}=(v_1,v_2)^T$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή $\lambda=-1$, πρέπει νά λύσουμε τό σύστημα $(\underline{A}+\underline{I})\,\underline{v}=\underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} 2v_1+2v_2&=0\\ 2v_1+2v_2&=0\end{aligned}\right\}.$$

Ἔχουμε $v_1=-v_2$ καί, θέτοντας $v_2=1$, βρίσκουμε $v_1=-1$, ὁπότε τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή $\lambda=-1$, εἶναι

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Συνεπῶς, ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι, δοθέντων δύο σταθερῶν c_1, c_2,

$$\underline{y}(t)=c_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}c_1e^{3t}-c_2e^{-t}\\ c_1e^{3t}+c_2e^{-t}\end{pmatrix}. \quad ▦$$

<u>Παράδειγμα 2.</u> Ἔστω τό τριδιάστατο γραμμικό σύστημα

$$\underline{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{Y} .$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο εἶναι

$$p_{\underline{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + 1 - (-\lambda)(-1)1 =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+1) .$$

Ἄρα $\lambda = 1$ καί $\lambda = \pm i$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές.

Ἡ μόνη πραγματική ἰδιοτιμή εἶναι τό $\lambda = 1$. Γιά νά βροῦμε τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή αὐτή, πρέπει νά λύσουμε τό σύστημα $(\underline{A} - \underline{I})\underline{v} = \underline{0}$, δηλαδή

$$\left. \begin{aligned} v_2 - v_1 &= 0 \\ v_3 - v_2 &= 0 \\ v_1 - v_2 &= 0 \end{aligned} \right\} .$$

Ἔχουμε $v_1 = v_2 = v_3$ καί, θέτοντας $v_3 = 1$, βρίσκουμε καί $v_2 = 1$, $v_1 = 1$, ὁπότε τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή $\lambda = 1$, εἶναι

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Συνεπῶς, μιά λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι

$$\underline{y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 3. Έστω τό τριδιάστατο σύστημα

$$\underline{Y}' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \underline{Y} .$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$P_{\underline{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -4 & -3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(3-\lambda)(-3-\lambda) + (-4)6 + (-1)2\cdot 6 =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda + 4\lambda^2 - 4 =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4).$$

Άρα $\lambda = 1, -1, 4$ είναι όλες οί ίδιοτιμές του.

(i) Γιά νά βροῦμε τό ίδιοδιάνυσμα $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, πού άντιστοιχεῖ στήν ίδιοτιμή $\lambda = 1$, πρέπει νά λύσουμε τό σύστημα $(\underline{A} - \underline{I})\underline{v} = \underline{0}$, ήτοι

$$\left.\begin{aligned} 3v_1 + 6v_2 + 6v_3 &= 0 \\ v_1 + 2v_2 + 2v_3 &= 0 \\ -v_1 - 4v_2 - 4v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Παρατηρώντας ότι ή δεύτερη έξίσωση είναι πολλαπλάσιο τῆς πρώτης, ούσιαστικά έχουμε τό σύστημα, άφοῦ θέσουμε $v_3 = 1$,

$$\left.\begin{aligned} 3v_1 + 6v_2 &= -6 \\ -v_1 - 4v_2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

μέ λύσεις $v_1 = 0$, $v_2 = -1$. Όπότε τό ίδιοδιάνυσμα $\underline{v}$, πού άντιστοιχεῖ στήν ίδιοτιμή $\lambda = 1$, είναι

$$\underline{v} = (0, -1, 1)^T .$$

(ii) Γιά νά βροῦμε τό ίδιοδιάνυσμα $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, πού ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ $\lambda=-1$, πρέπει νὰ λύσουμε τὸ σύστημα $(\underline{A}+\underline{I})\underline{v}=\underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} 5v_1 + 6v_2 + 6v_3 &= 0 \\ v_1 + 4v_2 + 2v_3 &= 0 \\ -v_1 - 4v_2 - 2v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Παρατηρώντας ὅτι ἡ τρίτη ἐξίσωση εἶναι πολλαπλάσιο τῆς δεύτερης, οὐσιαστικὰ ἔχουμε τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 5v_1 + 6v_2 &= -6v_3 \\ v_1 + 4v_2 &= -2v_3 \end{aligned}\right\}$$

μὲ λύσεις $v_1 = -\frac{6}{7}v_3$, $v_2 = -\frac{2}{7}v_3$. Θέτοντας $v_3=7$, βρίσκουμε $v_1=-6$, $v_2=-2$, ὁπότε τὸ ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ $\lambda=-1$, εἶναι

$$\underline{v} = (-6, -2, 7)^T .$$

(iii) Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)^T$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ $\lambda=4$, πρέπει νὰ λύσουμε τὸ σύστημα $(\underline{A}-4\underline{I})\underline{v}=\underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} 6v_2 + 6v_3 &= 0 \\ v_1 - v_2 + 2v_3 &= 0 \\ -v_1 - 4v_2 - 7v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Παρατηρώντας ὅτι ἡ πρώτη ἐξίσωση προκύπτει ἀπὸ τὶς ἄλλες δύο, οὐσιαστικὰ ἔχουμε τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} v_1 - v_2 &= -2v_3 \\ -v_1 - 4v_2 &= 7v_3 \end{aligned}\right\}$$

μὲ λύσεις $v_1=-3v_3$, $v_2=-v_3$. Θέτοντας $v_3=-1$, βρίσκουμε $v_1=3$, $v_2=1$, ὁπότε τὸ ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ $\lambda=4$, εἶναι

$$\underline{v} = (3, 1, -1)^T .$$

Συνεπώς, ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι, δοθέντων τριῶν σταθερῶν c_1, c_2, c_3,

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + c_3 e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6c_2 e^{-t} + 3c_3 e^{4t} \\ -c_1 e^{t} - 2c_2 e^{-t} + c_3 e^{4t} \\ c_1 e^{t} + 7c_2 e^{-t} - c_3 e^{4t} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

(ii) <u>Μιγαδικές ἰδιοτιμές</u>

Καθ' ὅσον ὁ $n\times n$ πίνακας $\underline{A}$ θεωρεῖται ὅτι ἔχει γιά στοιχεῖα πραγματικούς ἀριθμούς, τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_{\underline{A}}$ μπορεῖ νά ἔχει μόνο συζυγεῖς μιγαδικές ρίζες. Δηλαδή, ἄν $\lambda = \alpha + i\beta$, ὅπου α, β πραγματικοί ἀριθμοί, εἶναι μιά ἰδιοτιμή τοῦ $\underline{A}$, τότε καί $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ $\underline{A}$. Προφανῶς, τότε τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{u}$, πού ἀντιστοιχεῖ στή μιγαδική ἰδιοτιμή $\lambda = \alpha + i\beta$, πρέπει κι αὐτό νά ἔχει μιγαδικές συνιστῶσες, π.χ. νά εἶναι $\underline{u} = \underline{v} + i\underline{w}$, ὅπου $\underline{v}, \underline{w}$ διανύσματα μέ πραγματικές συνιστῶσες. Ἐπίσης, ἔχουμε ὅτι τό συζυγές ἰδιοδιάνυσμα $\bar{\underline{u}} = \underline{v} - i\underline{w}$ εἶναι τό ἰδιοδιάνυσμα, πού ἀντιστοιχεῖ στήν συζυγῆ ἰδιοτιμή $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$.

Ἔστω λοιπόν $\lambda = \alpha + i\beta$ μιά μιγαδική ἰδιοτιμή τοῦ $\underline{A}$ μέ ἀντίστοιχο μιγαδικό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{u} = \underline{v} + i\underline{w}$. Τότε, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, ἡ συνάρτηση $\underline{z}(t) = e^{\alpha t + i\beta t}(\underline{v} + i\underline{w})$ εἶναι μιά μιγαδική λύση τοῦ (1). Ἔστω $\underline{y}_1(t) = \mathrm{Re}\{\underline{z}(t)\}$, $\underline{y}_2(t) = \mathrm{Im}\{\underline{z}(t)\}$, τότε ἔχουμε

$$\underline{y}_1' + i\underline{y}_2' = \underline{z}' = \underline{A}\,\underline{z} = \underline{A}(\underline{y}_1 + i\underline{y}_2) =$$
$$= \underline{A}\underline{y}_1 + i\underline{A}\underline{y}_2 ,$$

ἤτοι, ἐξισώνοντας τά πραγματικά καί φανταστικά μέρη τῆς παραπάνω σχέσης, βρίσκουμε ὅτι δύο πραγματικές λύσεις τοῦ (1) εἶναι

$$\underline{y}_1(t) = \mathrm{Re}\{\underline{z}(t)\} = \mathrm{Re}\{e^{at+i\beta t}(\underline{v}+i\underline{w})\},$$
$$\underline{y}_2(t) = \mathrm{Im}\{\underline{z}(t)\} = \mathrm{Im}\{e^{at+i\beta t}(\underline{v}+i\underline{w})\}.$$

Κάνοντας χρήση τοῦ τύπου τοῦ Euler προκύπτει ὅτι

$$\underline{y}_1(t) = e^{at}[(\cos\beta t)\underline{v} - (\sin\beta t)\underline{w}],$$
$$\underline{y}_2(t) = e^{at}[(\sin\beta t)\underline{v} + (\cos\beta t)\underline{w}].$$

Ἐπιπλέον, βρίσκεται εὔκολα ὅτι οἱ δύο παραπάνω λύσεις τοῦ (1) εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες.

<u>Παράδειγμα 4</u>. Ἔστω τό δι-διάστατο σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{y} .$$

Τότε τό χαρακτηριστικό πολυώνυμό του εἶναι

$$p_{\underline{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 .$$

Ἐπειδή οἱ ρίζες τοῦ $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ εἶναι $\lambda = 1 \pm 2i$, ὁ πίνακας $\underline{A}$ ἔχει τίς μιγαδικές ἰδιοτιμές $1 \pm 2i$.

Γιά νά βροῦμε τό μιγαδικό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{z} = (z_1, z_2)^T$, πού ἀντιστοιχεῖ στή μιγαδική ἰδιοτιμή $\lambda = 1 + 2i$, πρέπει νά λύσουμε τό μιγαδικό σύστημα $(\underline{A} - (1+2i)\underline{I})\underline{z} = \underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} -2iz_1 + 2z_2 &= 0 \\ -2z_1 - 2iz_2 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Ἔχουμε $z_2 = iz_1$ καί, θέτοντας $z_1 = 1$, βρίσκουμε $z_2 = i$, ὁπότε τό μιγαδικό ἰδιοδιάνυσμα, πού ἀντιστοιχεῖ στή μιγαδική ἰδιο-τιμή $\lambda = 1+2i$, εἶναι

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Ἑπομένως, δύο γραμμικῶς ἀνεξάρτητες λύσεις τοῦ συστήματός μας εἶναι

$$\underline{y}_1(t) = \mathrm{Re}\left\{ e^{t+2it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\},$$

$$\underline{y}_2(t) = \mathrm{Im}\left\{ e^{t+2it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

Χρησιμοποιώντας τόν τύπο τοῦ Euler βρίσκουμε

$$\underline{y}_1(t) = e^t\left[(\cos 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (\sin 2t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = e^t\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix},$$

$$\underline{y}_2(t) = e^t\left[(\sin 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\cos 2t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = e^t\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Ἑπομένως, δοθέντων δύο σταθερῶν c_1, c_2, ἡ γενική λύση τοῦ συστήματός μας εἶναι

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t \\ c_2 e^t \cos 2t - c_1 e^t \sin 2t \end{pmatrix}. \quad ▦$$

<u>Παράδειγμα 5</u>. Ἔστω τό τρι-διάστατο γραμμικό σύστημα τοῦ Παραδείγματος 2

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{y}.$$

Ὅπως εἴδαμε στό Παράδειγμα 2, οἱ ἰδιοτιμές τώρα εἶναι $\lambda = 1, \pm i$. Βρήκαμε, ἐπίσης, ὅτι τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή $\lambda = 1$, εἶναι $\underline{v} = (1,1,1)^T$.

Γιά νά βροῦμε τό μιγαδικό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{z}=(z_1,z_2,z_3)^T$, πού ἀντιστοιχεῖ στή μιγαδική ἰδιοτιμή $\lambda=i$, πρέπει νά λύσουμε τό μιγαδικό σύστημα $(\underline{A}-i\underline{I})\underline{z}=\underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} -iz_1+z_2 &= 0\\ -iz_2+z_3 &= 0\\ z_1-z_2+(1-i)z_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Παρατηρώντας ὅτι ἡ τρίτη ἐξίσωση προκύπτει ἀπό τίς δύο πρῶτες, οὐσιαστικά ἔχουμε τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} -iz_1+z_2 &= 0\\ -iz_2+z_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

μέ λύσεις $z_1=-z_3$, $z_2=-iz_3$. Θέτοντας $z_3=i$, βρίσκουμε $z_1=-i$, $z_2=1$, ὁπότε τό μιγαδικό ἰδιοδιάνυσμα, πού ἀντιστοιχεῖ στή μιγαδική ἰδιοτιμή $\lambda=i$, εἶναι

$$\underline{z}=(-i,1,i)^T.$$

Συνεπῶς, τρεῖς γραμμικῶς ἀνεξάρτητες λύσεις τοῦ συστήματός μας εἶναι

$$\underline{y}_1(t)=e^t(1,1,1)^T,$$
$$\underline{y}_2(t)=\mathrm{Re}\{e^{it}(-i,1,i)^T\},$$
$$\underline{y}_3(t)=\mathrm{Im}\{e^{it}(-i,1,i)^T\}.$$

Χρησιμοποιώντας τόν τύπο τοῦ Euler βρίσκουμε

$$\underline{y}_2(t)=(\sin t,\cos t,-\sin t)^T,$$
$$\underline{y}_3(t)=(-\cos t,\sin t,\cos t)^T.$$

Επομένως, δοθέντων τριῶν σταθερῶν c_1,c_2,c_3, ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος εἶναι

$$\underline{y}(t)=c_1\underline{y}_1(t)+c_2\underline{y}_2(t)+c_3\underline{y}_3(t)=$$
$$=\begin{pmatrix} c_1e^t+c_2\sin t-c_3\cos t\\ c_1e^t+c_2\cos t+c_3\sin t\\ c_1e^t-c_2\sin t+c_3\cos t\end{pmatrix}. \quad \#$$

(iii) Πολλαπλές ιδιοτιμές

Έστω ότι ο $n\times n$ πίνακας $\underline{A}$ έχει μιά ιδιοτιμή λ_0 μέ πολλαπλότητα $m_0 > 1$. Γιά νά βρούμε τά ιδιοδιανύσματα $\underline{v}$, πού αντιστοιχούν στή πολλαπλή ιδιοτιμή λ_0, πρέπει νά λύσουμε τό σύστημα

$$(\underline{A} - \lambda_0 \underline{I})\,\underline{v} = \underline{0} \ . \tag{3}$$

Τό πρόβλημα είναι ότι ο αριθμός τών γραμμικώς ανεξαρτήτων λύσεων τού συστήματος αυτού μπορεί νά είναι οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός μεταξύ 1 καί m_0. Άν είναι k, $k \leq m_0$, τότε οι συναρτήσεις

$$\underline{y}_1(t) = e^{\lambda_0 t}\underline{v}_1 ,\ \underline{y}_2(t) = e^{\lambda_0 t}\underline{v}_2 ,\ \ldots ,\ \underline{y}_k(t) = e^{\lambda_0 t}\underline{v}_k$$

είναι k γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις τού συστήματος (1) καί, δοθέντων τών σταθερών $c_1, c_2, \ldots, c_k$, η συνάρτηση

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda_0 t}(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \cdots + c_k\underline{v}_k) \tag{4}$$

είναι η μοναδική λύση τού συστήματος (1) τής μορφής $e^{\lambda_0 t}\underline{v}$. Επομένως, άν $k = m_0$, η (4) μάς δίνει όλες τίς λύσεις, πού γεννούνται από τήν ιδιοτιμή λ_0.

Άν, όμως, $k < m_0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα $\underline{v}$ τέτοιο ώστε $(\underline{A} - \lambda_0\underline{I})\underline{v} \neq \underline{0}$, αλλά

$$(\underline{A} - \lambda_0\underline{I})^2\,\underline{v} = \underline{0} \ , \tag{5}$$

καί μπορεί νά αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda_0 t}\left[\,\underline{v} + t(\underline{A} - \lambda_0\underline{I})\underline{v}\,\right] \tag{6}$$

είναι μιά λύση τού (1), πού είναι γραμμικώς ανεξάρτητη πρός κάθε λύση τού (1) τής μορφής (4).

Άν τά διανύσματα, πού λύνουν τίς εξισώσεις (3), (5), είναι λιγότερα τών m_0 (κάτι πού συμβαίνει, μόνο όταν $m_0 > 2$), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα $\underline{v}$ τέτοιο ώστε

$(\underline{A}-\lambda_0\underline{I})^2\underline{v} \neq \underline{0}$, ἀλλά

$$(\underline{A}-\lambda_0\underline{I})^3\underline{v} = 0 , \tag{7}$$

καί μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda_0 t}\left[\underline{v} + t(\underline{A}-\lambda_0\underline{I})\underline{v} + \frac{t^2}{2}(\underline{A}-\lambda_0\underline{I})^2\underline{v}\right] \tag{8}$$

εἶναι μιά λύση τοῦ (1), πού εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητη πρός κάθε λύση τοῦ (1) τῆς μορφῆς (4) καί (6).

Ἄν τά διανύσματα, πού λύνουν τίς ἐξισώσεις (3), (5) καί (7), εἶναι πάλι λιγότερα τῶν m_0 (κάτι πού συμβαίνει, μόνον ὅταν $m_0>3$), τότε ὑπάρχει ~~ἕνα~~ τουλάχιστον ἕνα διάνυσμα $\underline{v}$ τέτοιο ὥστε $(\underline{A}-\lambda_0\underline{I})^3\underline{v} \neq \underline{0}$, ἀλλά

$$(\underline{A}-\lambda_0\underline{I})^4\underline{v} = \underline{0} ,$$

καί μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda_0 t}\left[\underline{v} + t(\underline{A}-\lambda_0\underline{I})\underline{v} + \frac{t^2}{2!}(\underline{A}-\lambda_0\underline{I})^2\underline{v} + \frac{t^3}{3!}(\underline{A}-\lambda_0\underline{I})^3\underline{v}\right]$$

εἶναι μιά λύση τοῦ (1), πού εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητη πρός κάθε λύση τοῦ (1) τῆς μορφῆς (4), (6) καί (8).

Προχωρώντας κατ' αὐτό τό τρόπο, θά τελειώσουμε, μόνον ὅταν θά ἔχουμε m_0 γραμμικῶς ἀνεξάρτητες λύσεις, πού γεννοῦνται ἀπό τήν πολλαπλή ἰδιοτιμή λ_0. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀνώτερη δύναμη τοῦ t, πού εἶναι δυνατόν νά ὑπάρχει σέ μιά λύση, πού γεννᾶται ἀπό τό λ_0, εἶναι t^{m_0-1}.

<u>Παράδειγμα 6.</u> Ἔστω τό τρι-διάστατο σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \underline{y} .$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο εἶναι

$$P_{\underline{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & 5-\lambda & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left[(5-\lambda)(-4-\lambda)+18\right] =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

Ἄρα ἔχουμε τίς ἰδιοτιμές $\lambda = 2, -1$, ἡ πρώτη διπλή (πολλαπλότητα δύο) καί ἡ δεύτερη ἁπλή (πολλαπλότητα ἕνα).

(i) Γιά νά βροῦμε τά ἰδιοδιανύσματα $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, πού ἀντιστοιχοῦν στή διπλή ἰδιοτιμή $\lambda = 2$, πρέπει νά λύσουμε τό σύστημα $(\underline{A} - 2\underline{I})\underline{v} = \underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} -3v_2 + 3v_3 &= 0 \\ 3v_2 - 3v_3 &= 0 \\ 6v_2 - 6v_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Ἔχουμε $v_2 = v_3$ καί τό v_1 δέν ἐμφανίζεται στό σύστημα. Ἔτσι, παίρνοντας πρῶτα $v_2 = v_3 = 0$, $v_1 = 1$ καί ἔπειτα $v_2 = v_3 = 1$, $v_1 = 0$, προκύπτουν τά ἑξῆς 2 γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ἰδιοδιανύσματα, πού ἀντιστοιχοῦν στή διπλή ἰδιοτιμή $\lambda = 2$,

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{καί} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Γιά νά βροῦμε τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἁπλή ἰδιοτιμή $\lambda = -1$, πρέπει νά λύσουμε τό σύστημα $(\underline{A} + \underline{I})\underline{v} = \underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 &= 0 \\ 6v_2 - 3v_3 &= 0 \\ 6v_2 - 3v_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Ἐπειδή οἱ δύο τελευταῖες ἐξισώσεις εἶναι οἱ ἴδιες, οὐσιαστικά, ἔχουμε τίς δύο πρῶτες, πού μᾶς δίνουν $v_1 = -\frac{1}{2}v_3$, $v_2 = \frac{1}{2}v_3$. Ὁπότε, θέτοντας $v_3 = 2$, βρίσκουμε ὅτι τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή $\lambda = -1$, εἶναι

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Συνεπώς, ή γενική λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι, δοθέντων τριῶν σταθερῶν c_1, c_2, c_3,

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c_3 e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} - c_3 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} + 2c_3 e^{-t} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

<u>Παράδειγμα 7</u>. Ἔστω τό τριδιάστατο σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} -6 & -7 & -13 \\ 5 & 6 & 9 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underline{y}.$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο εἶναι

$$p_{\underline{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -6-\lambda & -7 & -13 \\ 5 & 6-\lambda & 9 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-6-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda) - 130 - 126 + 35(5-\lambda) +$$
$$+ 26(6-\lambda) + 18(6+\lambda) =$$
$$= -(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 36\lambda + 180) + 183 - 43\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 =$$
$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

Ἄρα ἔχουμε τίς ἰδιοτιμές $\lambda = 1, 3$, ή πρώτη διπλή (πολλαπλότητα δύο) καί ή δεύτερη ἁπλή (πολλαπλότητα ἕνα).

(i) Γιά νά βροῦμε τά ἰδιοδιανύσματα $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, πού ἀντιστοιχοῦν στή διπλή ἰδιοτιμή $\lambda = 1$, πρέπει νά λύσουμε τό σύστημα $(\underline{A} - \underline{I})\underline{v} = \underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} -7v_1 - 7v_2 - 13v_3 &= 0 \\ 5v_1 + 5v_2 + 9v_3 &= 0 \\ 2v_1 + 2v_2 + 4v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Παρατηρώντας ὅτι ἡ πρώτη ἐξίσωση προκύπτει ἀπό τίς ἄλλες δύο, οὐσιαστικά ἔχουμε τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= -\tfrac{9}{5}v_3 \\ v_1 + v_2 &= -2v_3 \end{aligned}\right\} ,$$

πού ἱκανοποιεῖται μόνο γιά $v_3=0$, $v_1=-v_2$. Ἔτσι, θέτοντας $v_2=-1$, προκύπτει ὅτι τό μοναδικό ἰδιοδιάνυσμα, πού γεννᾶται ἀπό τή διπλή ἰδιοτιμή $\lambda=1$, εἶναι τό

$$\underline{v} = (1,-1,0)^T .$$

(iii) Ἔστω τό διάνυσμα $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)^T \neq (1,-1,0)^T$, πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση $(\underline{A}-\underline{I})^2\underline{v}=\underline{0}$, ἤτοι, ἐφ' ὅσον

$$\begin{pmatrix} -7 & -7 & -13 \\ 5 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -12 & -12 & -24 \\ 8 & 8 & 16 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

πού ἱκανοποιεῖ τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} -12v_1 - 12v_2 - 24v_3 &= 0 \\ 8v_1 + 8v_2 + 16v_3 &= 0 \\ 4v_1 + 4v_2 + 8v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Παρατηρώντας ὅτι καί οἱ τρεῖς ἐξισώσεις προέρχονται ἀπό τήν

$$v_1 + v_2 + 2v_3 = 0 ,$$

προκύπτει ὅτι ἡ τελευταία ἐξίσωση (δηλαδή, τό προηγούμενο σύστημα) ἔχει τίς ἑξῆς δύο γραμμικά ἀνεξάρτητες λύσεις

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Η $\underline{v}_1$ απορρίπτεται (διότι είναι τό ἰδιοδιάνυσμα τοῦ $\lambda=1$) καί ἔτσι κρατᾶμε μόνο τή λύση $\underline{v}_2$, ὁπότε βρίσκουμε ὅτι μιά δεύτερη γραμμικώς ἀνεξάρτητη λύση, πού γεννᾶται ἀπό τή διπλή ἰδιοτιμή $\lambda=1$, εἶναι

$$\underline{y}(t) = e^t\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-7 & -7 & -13\\5 & 5 & 9\\2 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right] =$$

$$= e^t\begin{pmatrix}1-t\\1+t\\-1\end{pmatrix}.$$

(iv) Γιά νά βροῦμε τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)^T$, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἁπλή ἰδιοτιμή $\lambda=3$, πρέπει νά λύσουμε τό σύστημα $(\underline{A}-3\underline{I})\underline{v}=\underline{0}$, ἤτοι

$$\left.\begin{aligned}-9v_1-7v_2-13v_3&=0\\5v_1+3v_2+9v_3&=0\\2v_1+2v_2+2v_3&=0\end{aligned}\right\}.$$

Παρατηρώντας ὅτι ἡ πρώτη ἐξίσωση προκύπτει ἀπό τίς ἄλλες δύο, οὐσιαστικά ἔχουμε τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned}5v_1+3v_2&=-9v_3\\v_1+v_2&=-v_3\end{aligned}\right\}$$

μέ λύσεις $v_1=-3v_3$, $v_2=2v_3$. Θέτοντας $v_3=1$, βρίσκουμε $v_1=-3$, $v_2=2$, ὁπότε τό ἰδιοδιάνυσμα, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή $\lambda=3$, εἶναι

$$\underline{v} = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

(v) Συνεπῶς, ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ, δοθέντων τριῶν σταθερῶν c_1, c_2, c_3, εἶναι

$$\underline{y}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^t (1-t) - 3c_3 e^{3t} \\ -c_1 e^t + c_2 e^t (1+t) + 2c_3 e^{3t} \\ -c_2 e^t + c_3 e^{3t} \end{pmatrix} . \quad \blacksquare$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε τις γενικές λύσεις των παρακάτω δι-διάστατων συστημάτων:

(i)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \underline{y}$$

(ii)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \underline{y} .$$

2. Βρείτε τις γενικές λύσεις των παρακάτω τρι-διάστατων συστημάτων

(i)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{y}$$

(ii)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underline{y}$$

(iii)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \underline{y}$$

(iv)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 12 \\ -6 & -6 & -7 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underline{y}$$

(v)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{y}$$

(vi)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{y} .$$

3. Βρείτε τή γενική λύση τών παρακάτω τετραδιαστάτων συστημάτων:

(i)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{y}$$

(ii)
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underline{y} .$$

4. Ο ΕΚΘΕΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Όταν έχουμε έναν $n \times n$ πίνακα $\underline{A}$ καί έναν πραγματικό αριθμό t, τότε ή παρακάτω σειρά πινάκων, πού αποδεικνύεται ότι συγκλίνει απολύτως,
$$e^{t\underline{A}} = I + t\underline{A} + \frac{t^2}{2!}\underline{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\underline{A}^3 + \dots + \frac{t^m}{m!}\underline{A}^m + \dots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\underline{A}^k$$

λέγεται εκθετικός πίνακας.

Διαφορίζοντας τή σειρά, πού ορίζει τόν εκθετικό πίνακα, παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}e^{t\underline{A}} = \underline{A} + t\underline{A}^2 + \frac{t^2}{2!}\underline{A}^3 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\underline{A}^m + \dots =$$

$$= \underline{A}\left[\underline{I} + t\underline{A} + \frac{t^2}{2!}\underline{A}^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\underline{A}^{m-1} + \dots\right] =$$

$$= \underline{A}e^{t\underline{A}} .$$

Επιπλέον επειδή, γιά $t=0$, $e^{t\underline{A}} = \underline{I}$, έχουμε ότι $\det e^{t\underline{A}} \neq 0$, γιά $t=0$. Επομένως, αφοῦ $\frac{d}{dt}e^{t\underline{A}} = \underline{A}e^{t\underline{A}}$ καί $\det^{t\underline{A}} \neq 0$, ὁ εκθετικός πίνακας $e^{t\underline{A}}$ ορίζει έναν θεμελιώδη πίνακα γιά τό ὁμογενές γραμμικό σύστημα μέ σταθερούς συντελεστές

$$\underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y} . \qquad (1)$$

Ἄν έχουμε ὁποιοδήποτε άλλο θεμελιώδη πίνακα $\underline{Y}(t)$ τοῦ (1), επειδή, όπως αναφέρθηκε στή παράγραφο 2, θά υπάρχει ένας μή-ιδιόμορφος πίνακας $\underline{C}$ ὥστε

$$e^{t\underline{A}} = \underline{Y}(t)\,\underline{C} ,$$

θέτοντας $t=0$, βρίσκουμε $\underline{I} = \underline{Y}(0)\underline{C}$, ἤτοι $\underline{C} = \underline{Y}^{-1}(0)$. Δείξαμε λοιπόν ότι ὁ εκθετικός πίνακας τοῦ συστήματος (1) εἶναι τέτοιος ὥστε

$$e^{t\underline{A}} = \underline{Y}(t)\,\underline{Y}^{-1}(0) , \qquad (2)$$

γιά κάθε άλλο θεμελιώδη πίνακα $\underline{Y}(t)$ τοῦ (1).

Επομένως, ένας έμμεσος τρόπος νά υπολογίσουμε τόν εκθετικό πίνακα ενός ὁμογενοῦς γραμμικοῦ συστήματος μέ σταθερούς συντελεστές εἶναι νά λύσουμε τό σύστημα αὐτό βρίσκοντας τίς n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του, δηλαδή, υπολογίζοντας όχι έναν θεμελιώδη πίνακα τοῦ $Y(t)$, γιά νά χρησιμοποιήσουμε στή συνέχεια τή σχέση (2). Αὐτό κάνουμε στά επόμενα παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Έστω τό τριδιάστατο γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \underline{y} .$$

Τό σύστημα αυτό τό λύσαμε στό Παράδειγμα 3 της προηγουμένης παραγράφου, όπου βρήκαμε ότι τρεις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του είναι

$$\underline{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2(t) = \begin{pmatrix} -6e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ 7e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3(t) = \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ e^{4t} \\ -e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Επομένως, ένας θεμελιώδης πίνακας του συστήματος αυτού είναι

$$\underline{Y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -6e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{t} & -2e^{-t} & e^{4t} \\ e^{t} & 7e^{-t} & -e^{4t} \end{pmatrix},$$

όπου έχουμε

$$\underline{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

καί

$$\underline{Y}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, ό εκθετικός πίνακας του συστήματος αυτού είναι

$$e^{t\underline{A}} = \underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -6e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{t} & -2e^{-t} & e^{4t} \\ e^{t} & 7e^{-t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \\ 1/3 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{4t} & \frac{6e^{4t}-6e^{-t}}{5} & \frac{6e^{4t}-6e^{-t}}{5} \\ \frac{e^{4t}-e^{t}}{3} & \frac{5e^{t}-2e^{-t}+2e^{4t}}{5} & \frac{2e^{4t}-2e^{-t}}{5} \\ \frac{e^{t}-e^{4t}}{3} & \frac{7e^{-t}-5e^{t}-2e^{4t}}{5} & \frac{7e^{-t}-2e^{4t}}{5} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Ἐρχόμαστε τώρα νά δοῦμε δύο ἄμεσους τρόπους γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἐκθετικοῦ πίνακα $e^{t\underline{A}}$.

Ὁ πρῶτος τρόπος ἀφορᾶ τήν εἰδική περίπτωση, καί ὁ πίνακας $\underline{A}$ εἶναι <u>μηδενοδύναμος</u> τάξεως k. Αὐτό σημαίνει $\underline{A}^k = \underline{A}^{k+1} = \dots = \underline{0}$ καί $\underline{A}^m \neq \underline{0}$, γιά $m < k$. Τότε, χρησιμοποιώντας τόν ὁρισμό τοῦ ἐκθετικοῦ πίνακα, βλέπουμε ὅτι αὐτός ὑπολογίζεται ἀπό τό πεπερασμένο ἄθροισμα

$$e^{t\underline{A}} = \underline{I} + t\underline{A} + \frac{t^2}{2!}\underline{A}^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}\underline{A}^k .$$

<u>Παράδειγμα 2</u>. Ἔστω ὁ πίνακας

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ἔχουμε

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

καί ἄρα $\underline{A}^m = \underline{0}$, γιά $m \geq 3$, δηλαδή, ὁ πίνακας $\underline{A}$ εἶναι μηδενοδύναμος τάξης 3. Ἑπομένως, ὁ ἐκθετικός πίνακας $e^{t\underline{A}}$ εἶναι

$$e^{t\underline{A}} = \underline{I} + t\underline{A} + \frac{t^2}{2}\underline{A}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad \blacksquare$$

Βέβαια, ὅταν ὁ πίνακας $\underline{A}$ δέν εἶναι μηδενοδύναμος, σκοπός μας εἶναι νά προσπαθήσουμε νά βροῦμε ἕναν πραγματικό ἀριθμό λ τέτοιο ὥστε ὁ πίνακας $\underline{A}-\lambda\underline{I}$ νά εἶναι μηδενοδύναμος κάποιας τάξης, ὁπότε ἀμέσως, ὅπως πρίν, ὑπολογίζεται ὁ ἐκθετικός πίνακας $e^{t(\underline{A}-\lambda\underline{I})}$. Τότε, ἄν ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση

$$e^{t\underline{A}} = e^{\lambda t} e^{t(\underline{A}-\lambda\underline{I})}, \qquad (3)$$

θά ἔχουμε βρεῖ ἕναν τρόπο γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἐκθετικοῦ πίνακα $e^{t\underline{A}}$. Πράγματι, γιά τήν ἀπόδειξη τῆς (3), γράφουμε

$$\underline{Y}(t) = e^{-\lambda t} e^{t\underline{A}}$$

καί παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned}\underline{Y}'(t) &= e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}e^{t\underline{A}} - \lambda e^{-\lambda t}e^{t\underline{A}} = \\ &= e^{-\lambda t}\underline{A}e^{t\underline{A}} - \lambda e^{-\lambda t}e^{t\underline{A}} = \\ &= \underline{A}(e^{-\lambda t}e^{t\underline{A}}) - \lambda e^{-\lambda t}e^{t\underline{A}} = \\ &= (\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{Y}(t)\end{aligned}$$

καί $\det \underline{Y}(0) = \det \underline{I} = 1 \neq 0$. Ἐπομένως, ὁ $\underline{Y}(t)$ εἶναι θεμελιώδης πίνακας τοῦ συστήματος

$$\underline{y}' = (\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{y}$$

καί, ἐπειδή $\underline{Y}(0) = \underline{I}$, ἡ (4) συνεπάγεται ὅτι

$$\begin{aligned}e^{t(\underline{A}-\lambda\underline{I})} &= \underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(0) = \underline{Y}(t) = \\ &= e^{-\lambda t}e^{t\underline{A}},\end{aligned}$$

ἤτοι, συνεπάγεται ἡ (3).

<u>Παράδειγμα 3</u>. Ἔστω ὁ πίνακας

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ἐπειδή ὁ πίνακας

$$\underline{A} + 3\underline{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ὅπως εἴδαμε στό παράδειγμα 2, εἶναι μηδενοδύναμος τάξης 3, βρίσκαμε, χρησιμοποιώντας τό ἀποτέλεσμα τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ,

$$e^{t\underline{A}} = e^{-3t} e^{t(\underline{A}+3\underline{I})} =$$

$$= e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & \frac{t^2}{2}e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} . \quad ■$$

Τώρα, θά ἀναφερθοῦμε σέ ἕναν πολύ σημαντικό τρόπο γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἐκθετικοῦ πίνακα, πού στηρίζεται στό <u>Θεώρημα Cayley-Hamilton</u>. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα αὐτό, ἄν $p_{\underline{A}}(\lambda) \equiv \det(\underline{A}-\lambda\underline{I}) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n$ εἶναι τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τοῦ $n\times n$ πίνακα $\underline{A}$, τότε ἰσχύει ἡ σχέση $p_{\underline{A}}(\underline{A}) = \underline{0}$.
Ἀπό τή σχέση αὐτή μποροῦμε νά ὑπολογίζουμε τίς δυνάμεις τοῦ $\underline{A}$ ὁποιασδήποτε τάξης σάν γραμμικό συνδυασμό τῶν $\underline{I}, \underline{A}, \ldots, \underline{A}^{n-1}$.
Ἑπομένως, ὁ ὁρισμός τοῦ ἐκθετικοῦ πίνακα, θά ἔδινε ὅτι ὑπάρχουν n ἄγνωστες συναρτήσεις τοῦ t, $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$, πού πρέπει νά προσδιορίσουμε, τέτοιες ὥστε

$$e^{t\underline{A}} = \alpha_0(t)\underline{I} + \alpha_1(t)\underline{A} + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\underline{A}^{n-1} .$$

Ἔστω λ μιά ἰδιοτιμή τοῦ $\underline{A}$, στήν ὁποία ἀντιστοιχεῖ τό ἰδιοδιάνυσμα $\underline{v}$. Ἐπειδή, τότε, ἰσχύει $\underline{A}^m\underline{v} = \lambda^m\underline{v}$, γιά κάθε $m=1,2,3,\ldots$, ὁ ὁρισμός τοῦ ἐκθετικοῦ πίνακα δίνει $e^{t\underline{A}}\underline{v} = e^{t\lambda}\underline{v}$ καί ἡ παραπάνω σχέση συνεπάγει

$$e^{t\lambda}\underline{v} = \alpha_0(t)\underline{v} + \alpha_1(t)\lambda\underline{v} + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1}\underline{v} ,$$

ἤτοι, ἀφοῦ $\underline{v} \neq \underline{0}$, βρίσκουμε τό τύπο

$$e^{t\lambda} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} . \quad (4)$$

Ὁ τελευταῖος τύπος μπορεῖ νά δώσει ἕνα σύστημα n ἐξισώσεων γιά τούς n ἀγνώστους $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_{n-1}(t)$, ἀναλόγως τοῦ τύπου τῶν ἰδιοτιμῶν τοῦ $\underline{A}$.

Ἔτσι, ὅταν ὁ $\underline{A}$ ἔχει n πραγματικές διακεκριμένες (ἁπλές) ἰδιοτιμές, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, τότε προκύπτει τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} &= e^{t\lambda_1} \\ a_0(t)+a_1(t)\lambda_2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} &= e^{t\lambda_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_0(t)+a_1(t)\lambda_n+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} &= e^{t\lambda_n} \end{aligned}\right\}.$$

Ὅταν ὁ $\underline{A}$ ἔχει τή μιγαδική ἰδιοτιμή λ (ἄρα καί τή συζυγή της), τότε, παίρνοντας τό πραγματικό καί τό φανταστικό μέρος τοῦ τύπου (4), καταλήγουμε σέ δύο ἐξισώσεις (ὁπότε παραλείπουμε τόν τύπο (4), πού νά προκύπτει ἀπό τή συζυγή ἰδιοτιμή).

Ὅταν ἡ ἰδιοτιμή λ τοῦ $\underline{A}$ ἔχει πολλαπλότητα $m>1$, τότε μαζί μέ τόν τύπο (4) θεωροῦμε τίς $m-1$ ἐξισώσεις, πού προκύπτουν, ἄν πάρουμε τίς παραγώγους μέχρι τάξης $m-1$ ὡς πρός λ τοῦ ἀριστεροῦ καί δεξιοῦ μέρους τῆς (4) καί τίς ὑπολογίσουμε στήν πολλαπλή ἰδιοτιμή λ, δηλαδή, ἔχουμε τίς m ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} e^{t\lambda} &= a_0(t)+a_1(t)\lambda+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda^{n-1}, \\ t e^{t\lambda} &= a_1(t)+2a_2(t)\lambda+\cdots+(n-1)a_{n-1}(t)\lambda^{n-2}, \\ t^2 e^{t\lambda} &= 2a_2(t)+6a_3(t)\lambda+\cdots+(n-2)(n-1)a_{n-1}(t)\lambda^{n-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t^{m-1}e^{t\lambda} &= [(m-1)!]a_{m-1}(t)+(m!)a_m(t)\lambda+\cdots+(n-m+1)\cdots(n-1)a_{n-1}(t)\lambda^{n-m+1}. \end{aligned}$$

Πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι ἡ μέθοδος ὑπολογισμοῦ τοῦ εκθετικοῦ πίνακα $e^{t\underline{A}}$ μέσω τοῦ θεωρήματος Cayley-Hamilton, ὅταν χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν ἐπίλυση γραμμικῶν συστημάτων, πλεονεκτεῖ τῆς μεθόδου τῶν ἰδιοτιμῶν τῆς προηγούμενης παραγράφου κατά τό γεγονός ὅτι δέν ἀπαιτεῖ τόν πρόσθετο κόπο γιά τόν ὑπολογισμό τῶν ἰδιοδιανυσμάτων.

Παράδειγμα 4. Ἔστω ὁ πίνακας

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο εἶναι

$$p_{\underline{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -4 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4),$$

ὁπότε οἱ ἰδιοτιμές τοῦ $\underline{A}$ εἶναι $\lambda = 1, -1, 4$. Ἔτσι, ἔχουμε τό σύστημα $(n=3)$

$$\left.\begin{aligned} a_0(t) + a_1(t) + a_2(t) &= e^{t} \\ a_0(t) - a_1(t) + a_2(t) &= e^{-t} \\ a_0(t) + 4a_1(t) + 16a_2(t) &= e^{4t} \end{aligned}\right\},$$

λύνοντας τό ὁποῖο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \frac{2}{3}e^{t} + \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{1}{15}e^{4t}, \\ a_1(t) &= \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}, \\ a_2(t) &= \frac{1}{15}e^{4t} + \frac{1}{10}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{t}. \end{aligned}$$

Ἑπομένως, ὁ ζητούμενος πίνακας εἶναι

$$e^{t\underline{A}} = a_0(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1(t)\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} + a_2(t)\begin{pmatrix} 16 & 18 & 18 \\ 5 & 7 & 6 \\ -5 & -6 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{4t} & \frac{6}{5}e^{4t} - \frac{6}{5}e^{-t} & \frac{6}{5}e^{4t} - \frac{6}{5}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t} & \frac{2}{5}e^{4t} + e^{t} - \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{2}{5}e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t} \\ -\frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{t} & -\frac{2}{5}e^{4t} - e^{t} + \frac{7}{5}e^{-t} & -\frac{2}{5}e^{4t} + \frac{7}{5}e^{-t} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

<u>Παράδειγμα 5</u>. Έστω ό πίνακας

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p_{\underline{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 9 ,$$

οπότε οι ιδιοτιμές τού $\underline{A}$ είναι συζυγείς μιγαδικές $\lambda = \pm 3i$.
Έτσι, έχουμε θέτοντας στόν τύπο (4') $\lambda = 3i$ καί $n = 2$

$$a_0(t) + a_1(t)\,3i = e^{3it} = \cos 3t + i \sin 3t$$

καί παίρνοντας τό πραγματικό καί τό φανταστικό μέρος τής εξίσωσης αυτής βρίσκουμε

$$a_0(t) = \cos 3t ,$$
$$a_1(t) = \frac{1}{3} \sin 3t .$$

Επομένως, ο εκθετικός πίνακας είναι

$$e^{t\underline{A}} = \cos 3t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \sin 3t \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix} . \quad ∎$$

<u>Παράδειγμα 6</u>. Έστω ό πίνακας

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p_{\underline{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)^2 ,$$

οπότε ό $\underline{A}$ έχει μόνο τήν ιδιοτιμή $\lambda = -1$ μέ πολλαπλότητα 2.

Έτσι, έχουμε τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} a_0(t) - a_1(t) &= e^{-t} \\ a_1(t) &= te^{-t} \end{aligned}\right\}$$

μέ λύσεις

$$a_0(t) = (1+t)e^{-t},$$
$$a_1(t) = te^{-t}.$$

Επομένως, ό εκθετικός πίνακας είναι

$$e^{t\underline{A}} = (1+t)e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Γιά τούς παρακάτω πίνακες βρείτε τούς αντίστοιχους εκθετικούς πίνακες, βρίσκοντας πρώτα τόν αριθμό λ, γιά τόν όποιο ό πίνακας $\underline{A} - \lambda\underline{I}$ είναι μηδενοδύναμος κάποιας τάξης:

(i) $$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii) $$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) $$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Γιά τούς παρακάτω πίνακες βρεῖτε τούς ἀντίστοιχους ἐκθετικούς πίνακες μέσω τοῦ θεωρήματος Cayley-Hamilton:

(i) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (ii) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ (iv) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(v) $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (vi) $\underline{A} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & -13 \\ 5 & 6 & 9 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. ΜΗ-ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στή παράγραφο αὐτή θά ἐπανέλθουμε στή μελέτη τῶν μή-ὁμογενῶν γραμμικῶν συστημάτων, πού ἀρχίσαμε στή παράγραφο 2 αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου.

Πρῶτα, ὅμως, χρειαζόμαστε νά ἀποδείξουμε τή παρακάτω βασική ἰδιότητα τοῦ ἐκθετικοῦ πίνακα: γιά ὅλους τούς ἀριθμούς t, s, ἰσχύει

$$e^{(t+s)\underline{A}} = e^{t\underline{A}} e^{s\underline{A}} . \qquad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε τή παρακάτω σχέση, χρησιμοποιώντας τή μοναδικότητα τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\underline{y}' = \underline{A}\underline{y} \quad , \quad \underline{y}(0) = \underline{y}_0 \quad . \qquad (2)$$

Πράγματι, θεωρώντας τό s σταθερό καί ἕνα διάνυσμα $\underline{v}$, ὁρίζουμε

$$\underline{u}(t) = e^{t\underline{A}} e^{s\underline{A}} \underline{v} ,$$
$$\underline{w}(t) = e^{(t+s)\underline{A}} \underline{v} .$$

Τότε έχουμε

$$\underline{u}'(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{t\underline{A}}\right) e^{s\underline{A}} \underline{v} = \underline{A} e^{t\underline{A}} e^{s\underline{A}} \underline{v} = \underline{A}\,\underline{u}(t),$$

$$\underline{w}'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{(t+s)\underline{A}} \underline{v}\right) = \frac{d}{dr}\left(e^{r\underline{A}} \underline{v}\right)\Big|_{r=t+s} =$$
$$= \underline{A}\, e^{r\underline{A}} \underline{v}\Big|_{r=t+s} = \underline{A} e^{(t+s)\underline{A}} \underline{v} = \underline{A}\,\underline{w}(t)$$

και

$$\underline{u}(0) = \underline{I}\, e^{s\underline{A}} \underline{v} = e^{s\underline{A}} \underline{v} ,$$
$$\underline{w}(0) = e^{(0+s)\underline{A}} \underline{v} = e^{s\underline{A}} \underline{v} ,$$

δηλαδή, βλέπουμε ότι και η συνάρτηση $\underline{u}$ και η συνάρτηση $\underline{w}$ είναι λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών (2) με $\underline{y}_0 = e^{s\underline{A}} \underline{v}$. Λόγω μοναδικότητος λύσεως, $\underline{u}(t) = \underline{w}(t)$, ήτοι, για κάθε διάνυσμα $\underline{v}$, $e^{(t+s)\underline{A}} \underline{v} = e^{t\underline{A}} e^{s\underline{A}} \underline{v}$, και άρα η (1) ισχύει.

Στη συνέχεια θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα μη-ομογενές γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές

$$\left.\begin{aligned} \underline{y}' &= \underline{A}\underline{y} + \underline{f}(t) \\ \underline{y}(0) &= \underline{y}_0 . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Στη παράγραφο 2 είδαμε ότι η μοναδική λύση του προβλήματος αυτού δίνεται από τον παρακάτω τύπο μεταβολής σταθερών

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}(t)\,\underline{Y}^{-1}(0)\,\underline{y}_0 + \int_0^t \underline{Y}(t)\,\underline{Y}^{-1}(s)\,\underline{f}(s)\,ds ,$$

όπου $\underline{Y}(t)$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας του ομογενούς γραμμικού συστήματος με σταθερούς συντελεστές $\underline{y}' = \underline{A}\underline{y}$. Αλλά, όπως δείξαμε στη προηγούμενη παράγραφο 4, ένας τέτοιος θεμελιώδης πίνακας δίνεται από τον εκθετικό πίνακα, δηλαδή, $\underline{Y}(t) = e^{t\underline{A}}$. Σύμφωνα δε με την (1), $(e^{t\underline{A}})^{-1} = e^{-t\underline{A}}$, όπο-

τε προϋπόθεση ότι $\underline{Y}^{-1}(0) = \underline{I}$ και $\underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(s) = e^{(t-s)\underline{A}}$.
Επομένως, ο τύπος μεταβολής σταθερών για το μη-ομογενές σύστημα (3) γράφεται ως εξής:

$$\underline{y}(t) = e^{t\underline{A}}\underline{y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)\underline{A}}\,\underline{f}(s)\,ds .$$

<u>Παράδειγμα 1</u>. Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\underline{y} + \begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ για } 0 \leqq t < \frac{\pi}{2},$$

$$\underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

και, συνεπώς, ο τύπος μεταβολής σταθερών δίνει ότι η λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$\underline{y}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sec s \\ 0 \end{pmatrix} ds =$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s)\sec s \\ -\sin(t-s)\sec s \end{pmatrix} ds =$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} (\cos t\cos s + \sin t\sin s)\sec s \\ (-\sin t\cos s + \cos t\sin s)\sec s \end{pmatrix} ds =$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos t + \dfrac{\sin t\sin s}{\cos s} \\ -\sin t + \dfrac{\cos t\sin s}{\cos s} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \int_0^t ds + \sin t \int_0^t \frac{\sin s}{\cos s}\, ds \\ -\sin t \int_0^t ds + \cos t \int_0^t \frac{\sin s}{\cos s}\, ds \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t\cos t - \ln(\cos t)\sin t \\ -t\sin t - \ln(\cos t)\cos t \end{pmatrix} . \quad \blacksquare$$

Ἐπειδή πολλές φορές στήν πράξη ἡ χρήση τοῦ τύπου μεταβολῆς σταθερῶν παρουσιάζει ὑπολογιστικές δυσκολίες, τότε, γιά ὁρισμένα προβλήματα, μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μιά τεχνική παρόμοια τῆς μεθόδου τῶν ἀπροσδιορίστων συντελεστῶν (τῆς παραγράφου 5 τοῦ κεφαλαίου 2). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μ εἶναι ἕνας πραγματικός ἤ μιγαδικός ἀριθμός καί $\underline{v}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα μέ πραγματικές ἤ μιγαδικές συνιστῶσες. Θεωροῦμε τότε τήν ἐξίσωση

$$\underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y} + e^{\mu t}\underline{v} . \qquad (4)$$

Ὅπως εἴδαμε στή παράγραφο 2, γιά νά λύσουμε τήν (4) ἀρκεῖ νά βροῦμε τή γενική λύση τῆς ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς ἐξίσωσης $\underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y}$ (δηλαδή, τόν ἐκθετικό πίνακα $e^{t\underline{A}}$) καί μιά μερική λύση $\underline{y}_p$ τῆς μή-ὁμογενοῦς ἐξίσωσης (4), ὁπότε ἡ γενική λύση τῆς (4) θά εἶναι, γιά κάθε διάνυσμα σταθερῶν $\underline{c}$,

$$\underline{y}(t) = e^{t\underline{A}}\underline{c} + \underline{y}_p(t) .$$

Ἄν ἐπιχειρήσουμε νά βροῦμε μιά μερική λύση τῆς (4) τῆς μορφῆς

$$\underline{y}_p(t) = e^{\mu t}\underline{u} , \qquad (5)$$

τότε, ἐπειδή $\underline{y}_p'(t) = \mu e^{\mu t}\underline{u}$, θά ἔχουμε

$$\mu e^{\mu t} \underline{u} = \underline{A}(e^{\mu t}\underline{u}) + e^{\mu t}\underline{v}$$

δηλαδή,

$$\mu \underline{u} - A\underline{u} = \underline{v} \quad . \qquad (6)$$

Μὲ ἄλλα λόγια, καταλήγουμε στό ὅτι, ἂν ὑπάρχη ἕνα διάνυσμα $\underline{u}$, πού ἱκανοποιῆ τήν (6), τότε μιά μερική λύση τῆς (4) εἶναι τῆς μορφῆς (5). Βέβαια, ἂν τό μ δέν εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ $\underline{A}$, τότε $\det(\mu \underline{I} - \underline{A}) \neq 0$ καί ἡ (6) ἔχη μοναδική λύση $\underline{u}$. Ὅταν ὅμως τό μ εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ $\underline{A}$, ἡ (6) μπορῆ ἢ δέν μπορῆ νά ἔχη λύσεις.

Παράδειγμα 2. Ἔστω τό μή-ὁμογενές γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix} .$$

Γιά νά βροῦμε μιά λύση τῆς μορφῆς

$$\underline{y}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} ,$$

θά πρέπη νά ἱκανοποιῆται τό σύστημα

$$2\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

δηλαδή, τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &= 1 \\ 2u_1 + 3u_2 + 2u_3 &= 0 \\ -u_1 - u_2 - 4u_3 &= -1 \end{aligned}\right\} ,$$

τό ὁποῖο λυόμενο δίνει $u_1 = -7$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1$. Ἐπομένως, μιά μερική λύση τοῦ παραπάνω μή-ὁμογενοῦς συστήματος εἶναι

$$\underline{y}_p(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι ὅταν ὁ μή-ὁμογενής ὅρος $e^{\mu t}\underline{v}$ τοῦ συστήματος (4) εἶναι μιγαδικός καί $y_p(t) = e^{\mu t}\underline{u}$ εἶναι μία μιγαδική λύση τοῦ (4), τότε ἔχουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις

$$\underline{y}_1(t) = \mathrm{Re}\,(e^{\mu t}\underline{u}),$$
$$\underline{y}_2(t) = \mathrm{Im}\,(e^{\mu t}\underline{u})$$

εἶναι λύσεις τῶν συστημάτων (ἀντιστοίχως)

$$\underline{y}_1' = \underline{A}\underline{y}_1 + \mathrm{Re}\,(e^{\mu t}\underline{v}),$$
$$\underline{y}_2' = \underline{A}\underline{y}_2 + \mathrm{Im}\,(e^{\mu t}\underline{v}).$$

Ἡ παρατήρηση αὐτή ἐπαληθεύεται ἀμέσως μέ ἁπλή ἀντικατάσταση στό σύστημα καί ἐξαγωγή πραγματικοῦ καί φανταστικοῦ μέρους.

<u>Παράδειγμα 3.</u> Ἔστω τό μή-ὁμογενές γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\underline{y} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Ἐπειδή

$$e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = (\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix},$$

ἕπεται ὅτι, ἄν $\tilde{\underline{y}}_p(t)$ εἶναι μιά μερική λύση τοῦ συστήματος

$$\underline{\tilde{y}}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\tilde{y}} + e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

τότε ἡ συνάρτηση $y_p(t) = \mathrm{Re}(\underline{\tilde{y}}_p(t))$ εἶναι μιά μερική λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος.

Γιά νά βροῦμε μιά λύση τοῦ (7) τῆς μορφῆς

$$\underline{\tilde{y}}_p(t) = e^{it} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

θά πρέπει νά ἱκανοποιεῖται τό σύστημα

$$i \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

δηλαδή, τό σύστημα

$$\left. \begin{aligned} i u_1 - u_2 &= 1 \\ -u_1 + i u_2 &= -i \end{aligned} \right\},$$

τό ὁποῖο λυνόμενο δίνει $u_1 = 0$, $u_2 = -1$. Ἑπομένως, μιά μερική λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος εἶναι

$$y_p(t) = \mathrm{Re}\left[(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \mathrm{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos t - i \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Ἐπιπλέον, ἐπειδή εὔκολα βρίσκεται ὅτι

$$e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

συνεπάγεται ὅτι, δοθέντων δύο σταθερῶν c_1, c_2, ἡ γενική λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος εἶναι

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \cosh t + c_2 \sinh t \\ c_1 \sinh t + c_2 \cosh t - \cos t \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Τέλος, πρέπει νά ἀναφερθοῦμε στή περίπτωση, πού τό μ τοῦ συστήματος (4) εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ $\underline{A}$ μέ πολλαπλότητα 1 (ἁπλή ἰδιοτιμή), ὁπότε δέν ὑπάρχει μερική λύση τοῦ (4) τῆς μορφῆς (5), καί τότε μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχει μιά μερική λύση τοῦ (4) τῆς μορφῆς

$$\underline{y}_p(t) = e^{\mu t}(\underline{u} + t\underline{w}), \tag{8}$$

ὅπου τό $\underline{w}$ εἶναι ἕνα ἰδιοδιάνυσμα, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή μ καί τό $\underline{u}$ ἐπιλέγεται ἔτσι ὥστε νά λύνει τό σύστημα

$$(\underline{A} - \mu \underline{I})\underline{u} = \underline{w} - \underline{v} . \tag{9}$$

<u>Παράδειγμα 4</u>. Ἔστω τό μή-ὁμογενές γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \underline{y} - \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ πίνακας τοῦ παραπάνω συστήματος ἔχει τό 2 σάν ἁπλή ἰδιοτιμή μέ ἰδιοδιάνυσμα $(2,1)^T$ καί τά πολλαπλάσια του. Ἑπομένως, θέτοντας $\underline{u} = (u_1, u_2)^T$, $\underline{w} = (2c, c)^T$ στή μερική λύση (8), ὅπου c εἶναι μιά σταθερά, πού πρέπει νά ὑπολογισθεῖ μαζί μέ τά u_1, u_2, ἔχουμε ὅτι πρέπει νά ἱκανοποιεῖται τό σύστημα (9), πού εἶναι

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ c+1 \end{pmatrix},$$

ἤτοι

$$\left.\begin{aligned} -2u_2 - 2c &= -u_1 \\ -4u_2 - c &= -2u_1 + 1 \end{aligned}\right\}$$

καί ἔχει λύσεις $c = \frac{1}{3}$, $3u_1 - 6u_2 = 2$. Θέτοντας $u_2 = 0$, παίρνουμε $c = \frac{1}{3}$, $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = 0$, δηλαδή, μιά μερική λύση εἶναι

$$\underline{y}_p(t) = e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}\right]. \quad \blacksquare$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρεῖτε τή λύση τῶν παρακάτω συστημάτων μέ τόν τύπο μεταβολῆς σταθερῶν:

(i) $\underline{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, t>0$

(iii) $\underline{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

(iv) $\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$.

2. Βρεῖτε μιά μερική λύση τῶν παρακάτω συστημάτων:

(i) $\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & \text{[illegible]} \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$

(ii) $\underline{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$

(iii) $\underline{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}$

(iv) $\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$.