

Παράκτια Υδραυλική & Τεχνολογία

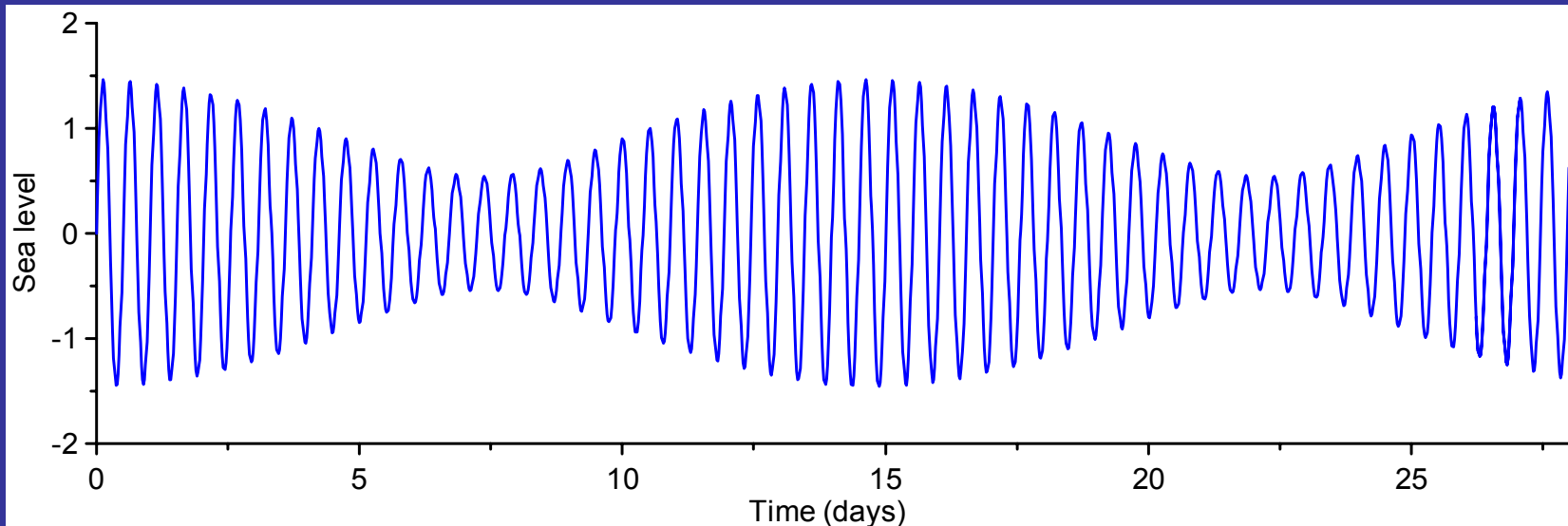
1-D Υδροδυναμικά Ομοιώματα

Δρ. Γιώργος Συλαίος
Ωκεανογράφος – Επ. Καθηγητής ΤΜΠ-ΔΠΘ

Παλίρροιες και Παλιρροιακά Ομοιώματα σε Παράκτιες Λεκάνες

Τι είναι η Παλίρροια;

- Αστρονομικής προέλευσης μεταβολές ΜΣΘ
- Προκαλούν ανυψώσεις – καταβυθίσεις ΜΣΘ
- Προκαλούν μεγάλης έντασης ρεύματα
- Επηρεάζουν και μεταβάλλουν τη παράκτια μορφολογία, τη ναυσιπλοΐα, την αλιεία, την οικολογία & την αναψυχή.



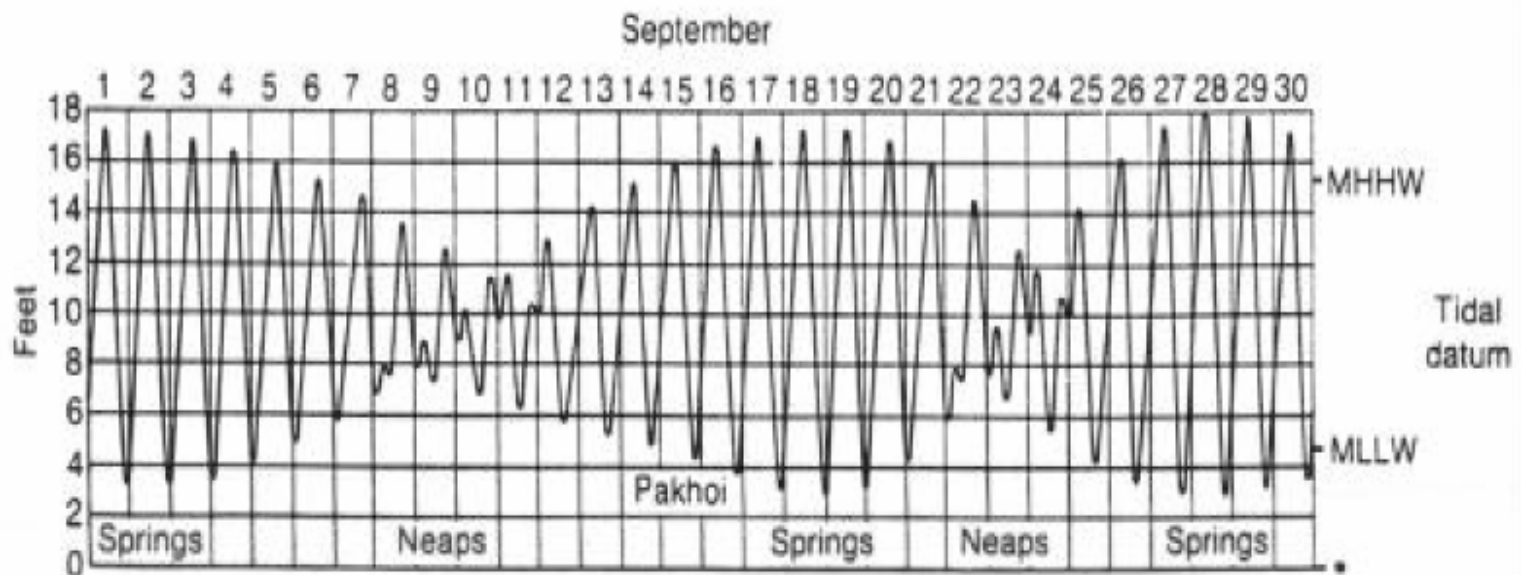
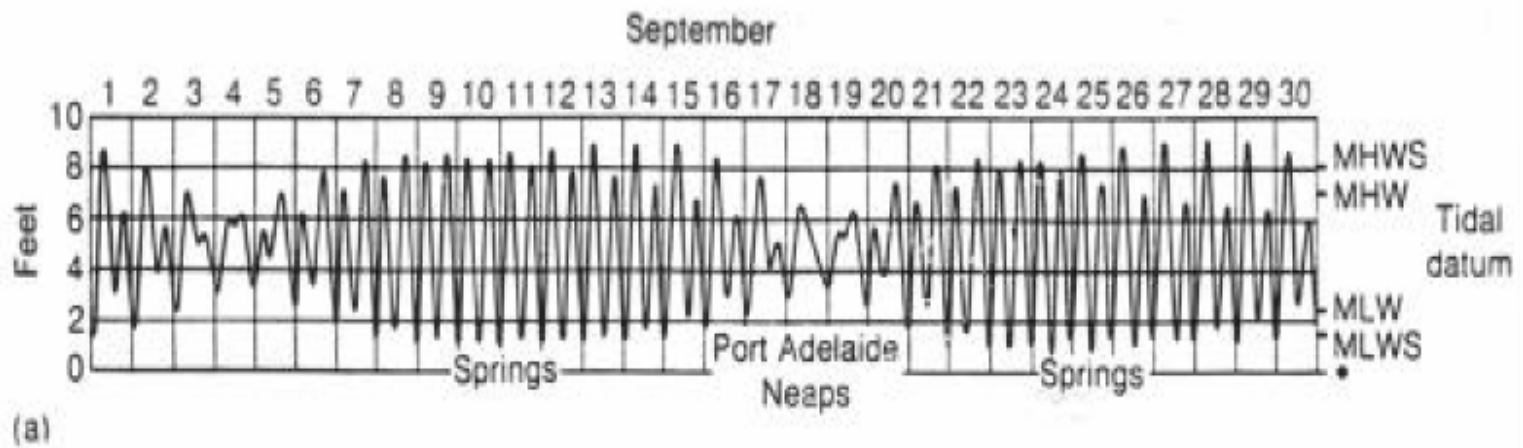
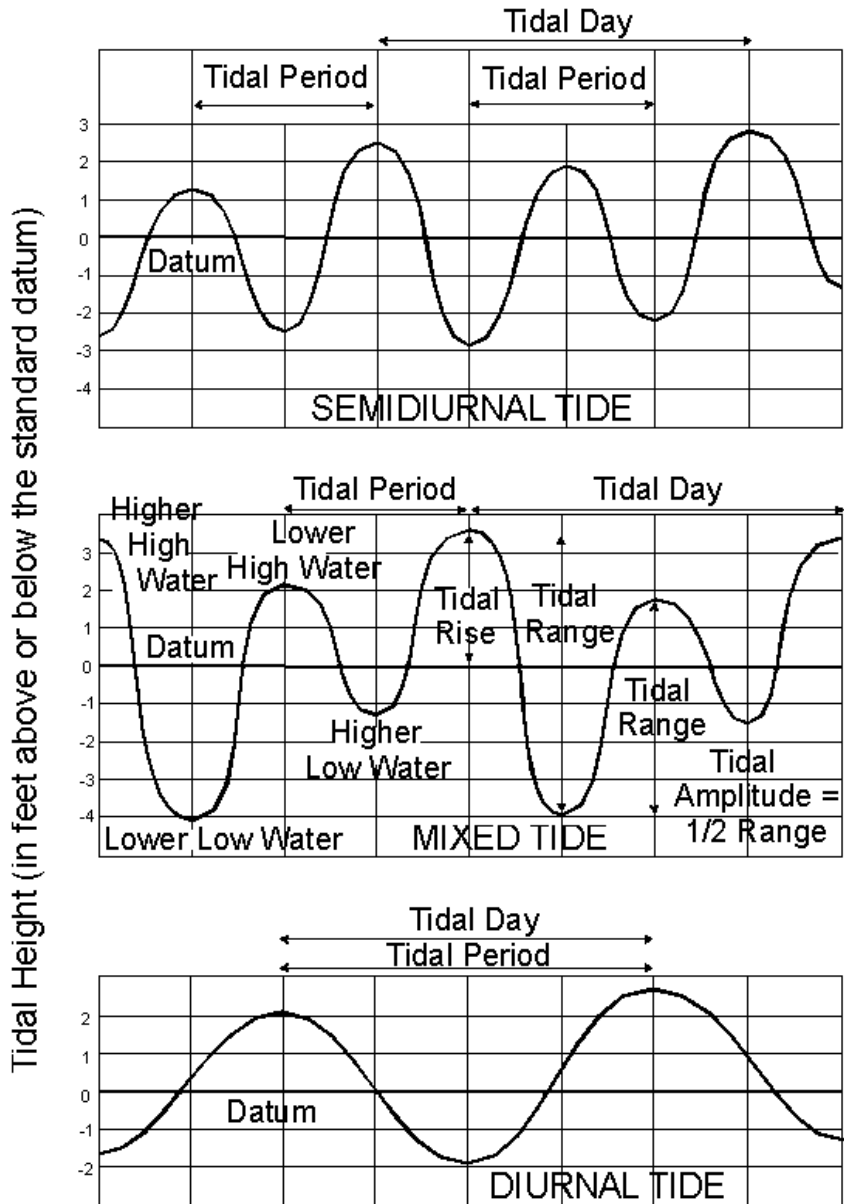


Figure 7.23 Observed tides in Port Adelaide are semidiurnal (twice-a-day) and in Pakhoi diurnal (once-a-day). Tidal ranges in both locations exhibit a spring-neap cycles that are out of phase.

Distribution of Tidal Phases

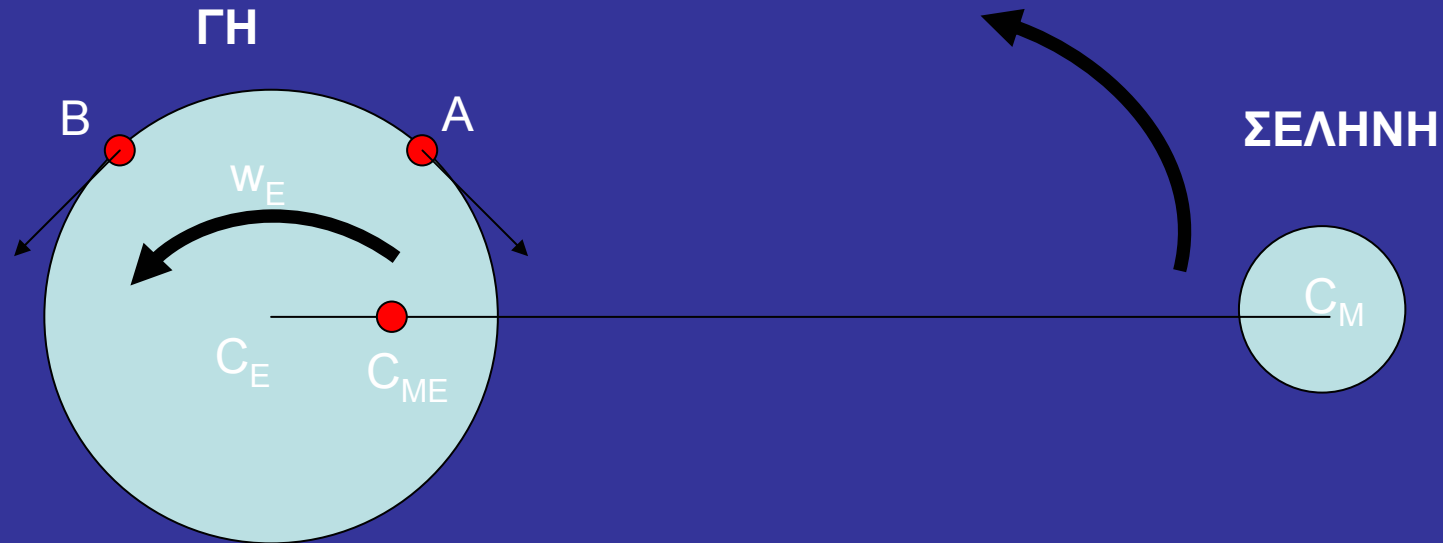


- Ανώτατη Στάθμη Πλήμμης
 - Στάθμη Πλήμμης
- Κατώτατη Στάθμη Ρηχείας
 - Στάθμη Ρηχείας
- Μέση Παλιρροιακή Στάθμη
 - Παλιρροιακό Εύρος
 - Ημερήσια Ανισότητα

Η παλίρροια μπορεί να είναι:

- ❖ ημι-ημερήσια (semi-diurnal) δηλ. να έχει δύο μέγιστα και δύο ελάχιστα στη διάρκεια της ημέρας, ή να είναι
- ❖ ημερήσια (diurnal) δηλ. να έχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο την ημέρα.

Έστω το σύστημα Γη - Σελήνη, στο οποίο η Γη είναι ολόκληρη καλυμμένη με νερό. Τότε η κατανομή των δυνάμεων που δρουν σε κάθε μόριο μάζας της Γης θα είναι ως εξής



Η συνολική δύναμη θα είναι μία ασθενής οριζόντια δύναμη.

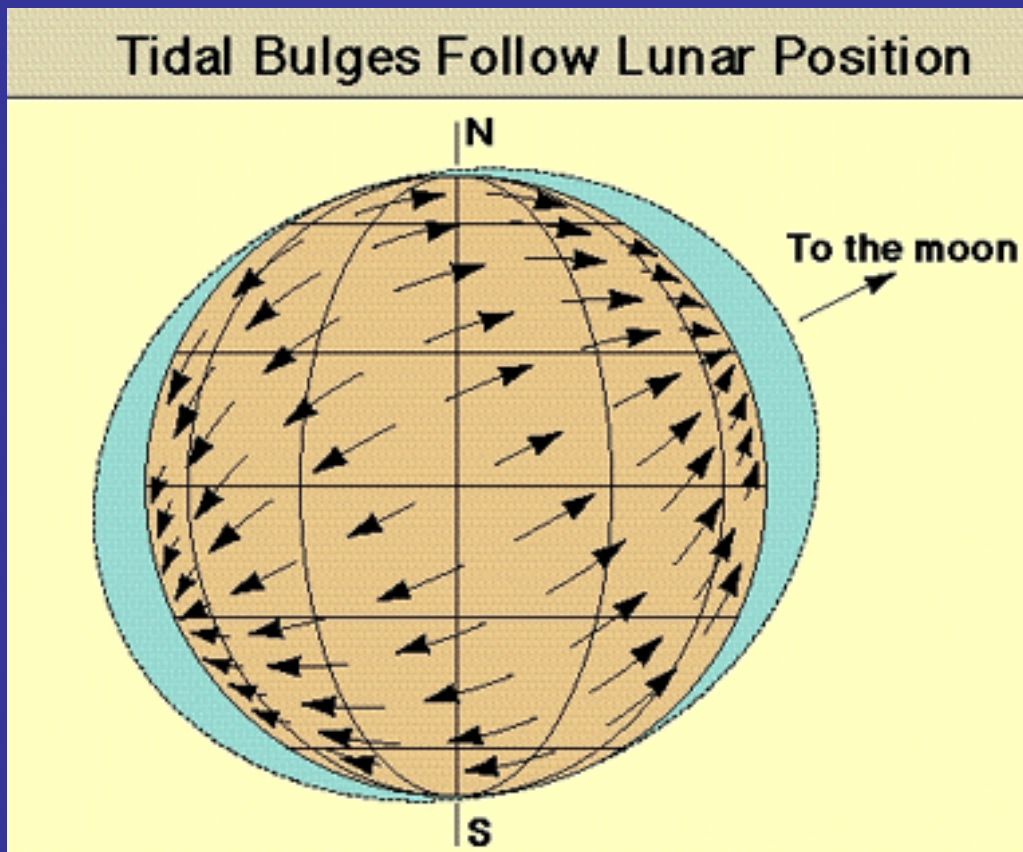
Θα μεταφέρει το Σωματίδιο A **προς** τη Σελήνη και το Σωματίδιο B **μακριά** από τη Σελήνη. Άρα:

A) Στο κέντρο της Γης θα έχουμε ότι η Βαρυτική Δύναμη έλξης της Σελήνης είναι ίση με τη Φυγόκεντρο Δύναμη που προκύπτει λόγω περιστροφής της Γης,

B) Στην επιφάνεια της Γης προς τη μεριά της Σελήνης έχουμε ότι η Βαρυτική Δύναμη έλξης της Σελήνης είναι μεγαλύτερη της Φυγόκεντρο Δύναμης λόγω περιστροφής της Γης, και τέλος

Γ) Στην επιφάνεια της Γης μακριά από τη Σελήνη έχουμε ότι η Βαρυτική Δύναμη έλξης της Σελήνης είναι μικρότερη της Φυγόκεντρο Δύναμης.

Η κατανομή των υπολειπόμενων παλιρροιακών δυνάμεων (residuals of tide-producing forces) δείχνει ότι οι δυνάμεις αυτές έχουν φορά προς το εσωτερικό της Γης στα σημεία κατά μήκος του άξονα Γης – Σελήνης, και προς το εξωτερικό της Γης στα σημεία κάθετα στον άξονα αυτόν.



Προκαλείται λοιπόν ένα παλιρροιακό ελλειψοειδές (tidal bulge) Συσώρευση νερού στα σημεία του άξονα Γης-Σελήνης, έλλειμμα νερού στα σημεία κάθετα στον άξονα

Αυτή η κατανομή προκαλεί μία σειρά από ενδιαφέρουσες επιπτώσεις.

- ❖ Η περιστροφή της Γης ως προς τον άξονά της προκαλεί σε ένα σταθερό παρατηρητή την αίσθηση ότι σε μία ημέρα διέρχονται δύο παλιρροιακά μέγιστα και δύο παλιρροιακά ελάχιστα.
- ❖ Ωστόσο, η σεληνιακή ημέρα διαρκεί 24 ώρες και 50 λεπτά. Αυτό σημαίνει ότι το κάθε παλιρροιακό μέγιστο και ελάχιστο θα συμβεί την επόμενη μέρα με καθυστέρηση 50 λεπτών.
- ❖ Άρα η περίοδος του κύματος είναι 12 ώρες και 25 λεπτά ή 12.42 ώρες, και η παλίρροια αυτή ονομάζεται ημι-ημερήσια (semi-diurnal tide).
- ❖ Ισημερινές παλίρροιες (Equatorial Tides), συμβαίνουν δύο φορές κατά τη διάρκεια του κάθε μήνα όταν η Σελήνη διέρχεται από τον Ισημερινό. Κατά τις ημέρες αυτές τα παλιρροιακά μέγιστα και ελάχιστα έχουν το ίδιο εύρος.
- ❖ Συνήθως, το παλιρροιακό ελλειψοειδές βρίσκεται υπό γωνία ως προς τον Ισημερινό, η οποία γωνία μεταβάλλεται στη διάρκεια της ημέρας, οπότε η ημι-ημερήσια παλίρροια μεταβάλλει το εύρος της, προκαλώντας την ημερήσια ανισότητα (diurnal inequality).

Γενικά, η ημερήσια ανισότητα δεν παρατηρείται στον Ισημερινό, ενώ αυξάνεται με το γεωγραφικό πλάτος.

Ο κύκλος της Σεληνιακής ημερήσιας ανισότητας επαναλαμβάνεται κάθε 29,3 ημέρες (Σεληνιακός μήνας).

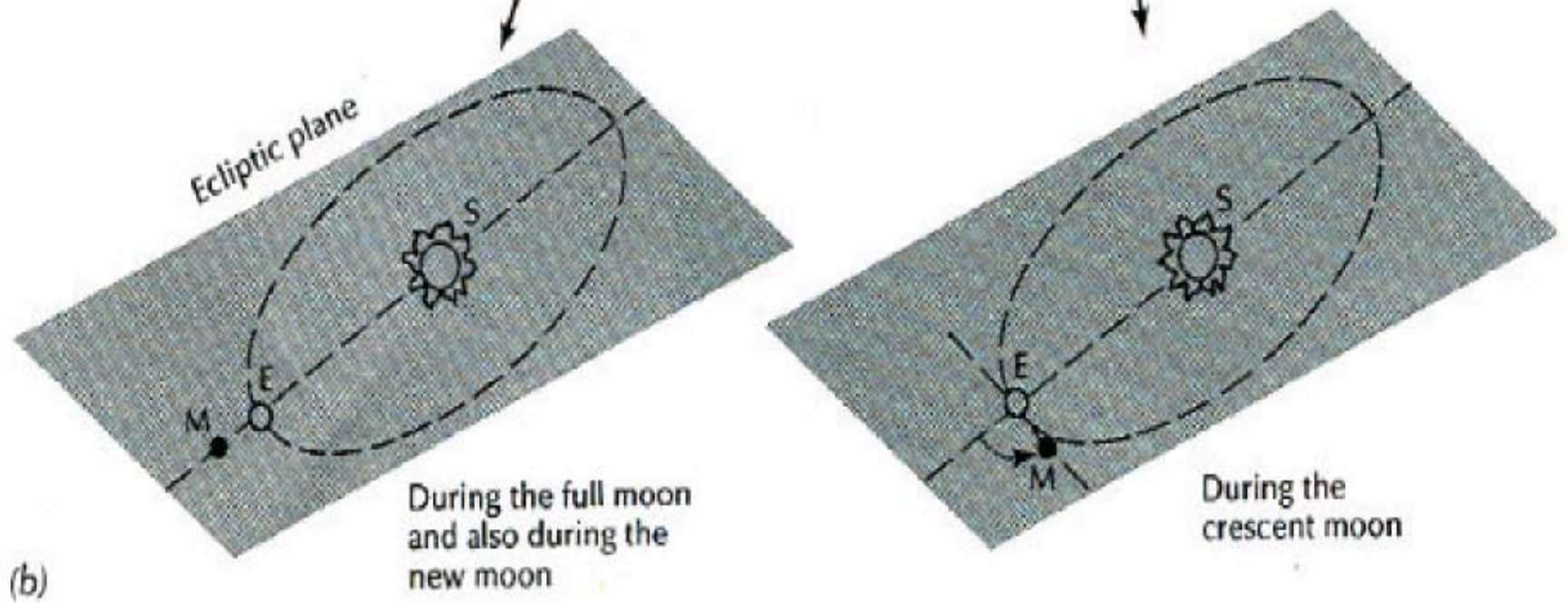
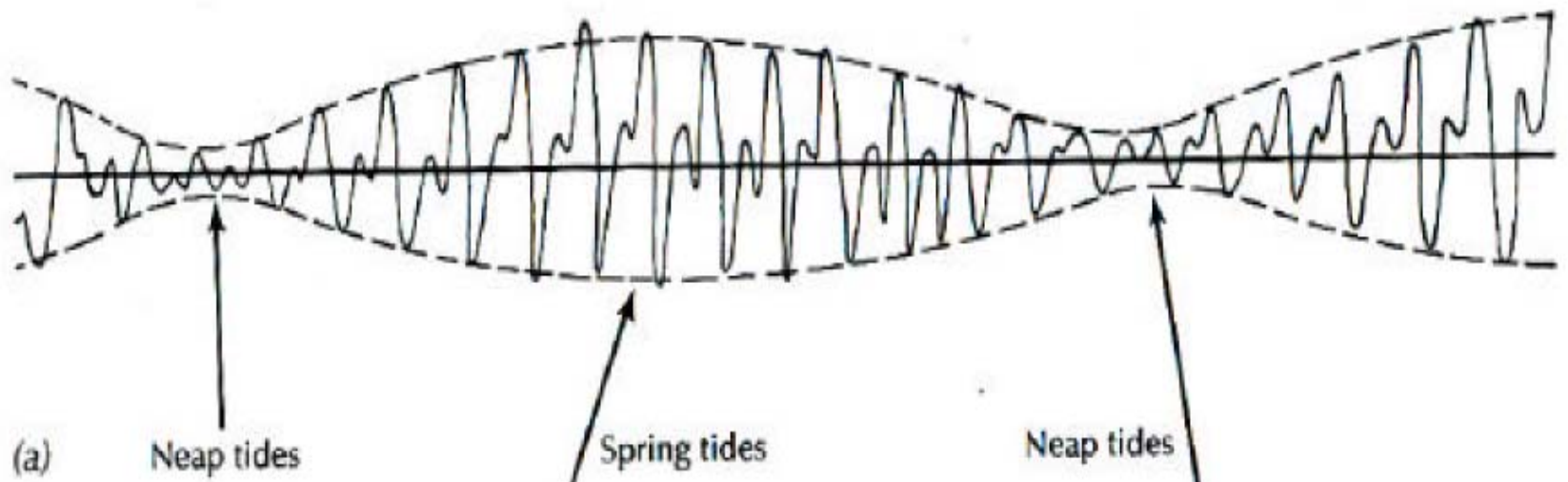
Ο κύκλος της Ηλιακής ημερήσιας ανισότητας επαναλαμβάνεται κάθε 1 έτος.

Σύστημα Γη-Σελήνη-Ήλιος

- Η βαρυντική έλξη του Ηλίου είναι η δεύτερη μεγαλύτερη μετά της Σελήνης
- Προκαλεί μικρότερα ελλειψοειδή προς και μακριά από τον Ήλιο.
- Η περίοδος των ηλιακών παλιρροιακών κυμάτων είναι 12 ώρες.

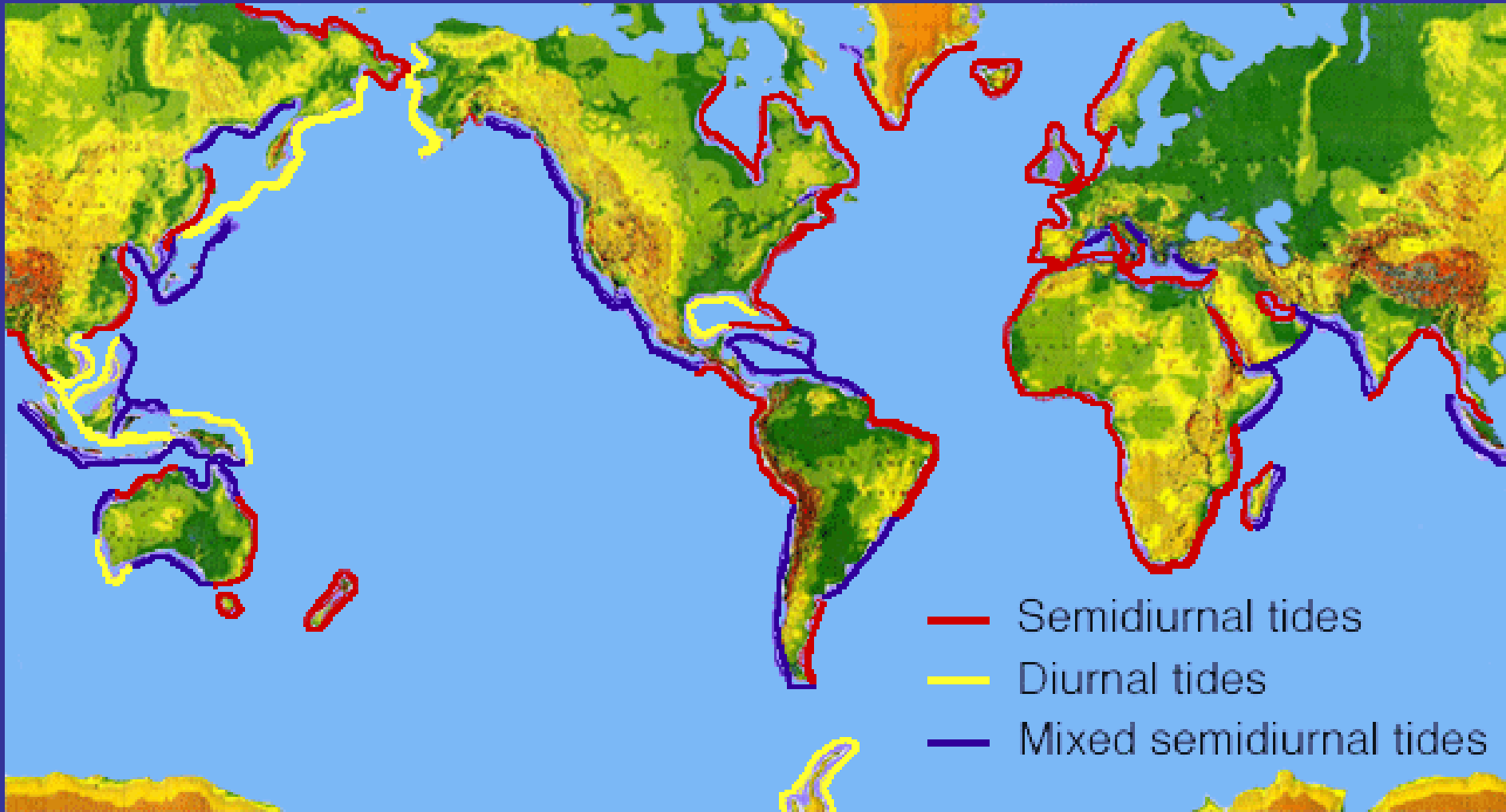
Όλες οι παραπάνω παλιρροιακές δυνάμεις συμβαίνουν ταυτόχρονα και προστίθενται (δηλ. δρουν αθροιστικά) όταν η Σελήνη και ο Ήλιος βρίσκονται σχεδόν στον ίδιο άξονα (Νέα Σελήνη, Πανσέληνος). Τις περιόδους αυτές οι δυνάμεις προκαλούν παλίρροια μεγάλου εύρους (spring tide).

Αντίθετα, τις περιόδους που ο Ήλιος και η Σελήνη βρίσκονται υπό γωνία 90° , οι δυνάμεις δρουν αφαιρετικά μεταξύ τους και οι παλίρροιες είναι μικρού εύρους (neap tides).



Πίνακας 1. Κύριες παλίρροιακές συνιστώσες.

Όνομα	Σύμβολο	Περίοδος (ώρες)
Ημι-ημερήσιες συνιστώσες (δύο μέγιστα/ελάχιστα ανά ημέρα)		
Κύρια Σεληνιακή	M_2	12,42
Κύρια Ηλιακή	S_2	12,00
Ελλειπτική Σεληνιακή	N_2	12,66
Συνδυασμός Ηλιακής-Σεληνιακής	K_2	11,97
Ημερήσιες συνιστώσες (ένα μέγιστο/ελάχιστο ανά ημέρα)		
Συνδυασμός Ηλιακής-Σεληνιακής	K_1	23,93
Κύρια Σεληνιακή	O_1	25,82
Ηλιακή	P_1	24,07
Παλίρροιες μεγάλης περιόδου		
Σεληνιακή δεκαπενθημέρου	M_f	327,86
Ηλιακή - Σεληνιακή δεκαπενθημέρου	M_{Sf}	354,36
Σεληνιακή μηνιαία	M_m	661,30
Ηλιακή ημιετήσια	S_{Sa}	4384,90
Ηλιακή ετήσια	S_a	365,242



- Semidiurnal tides
- Diurnal tides
- Mixed semidiurnal tides

Αρμονική Ανάλυση Παλιρροιών και Πρόγνωση

Παλιρροιακή ανάλυση ονομάζεται η διαδικασία διαχωρισμού των επιμέρους παλιρροιακών συνιστωσών σε ένα παλιρροιακό σήμα. Κάθε συνιστώσα ονομάζεται αρμονική.

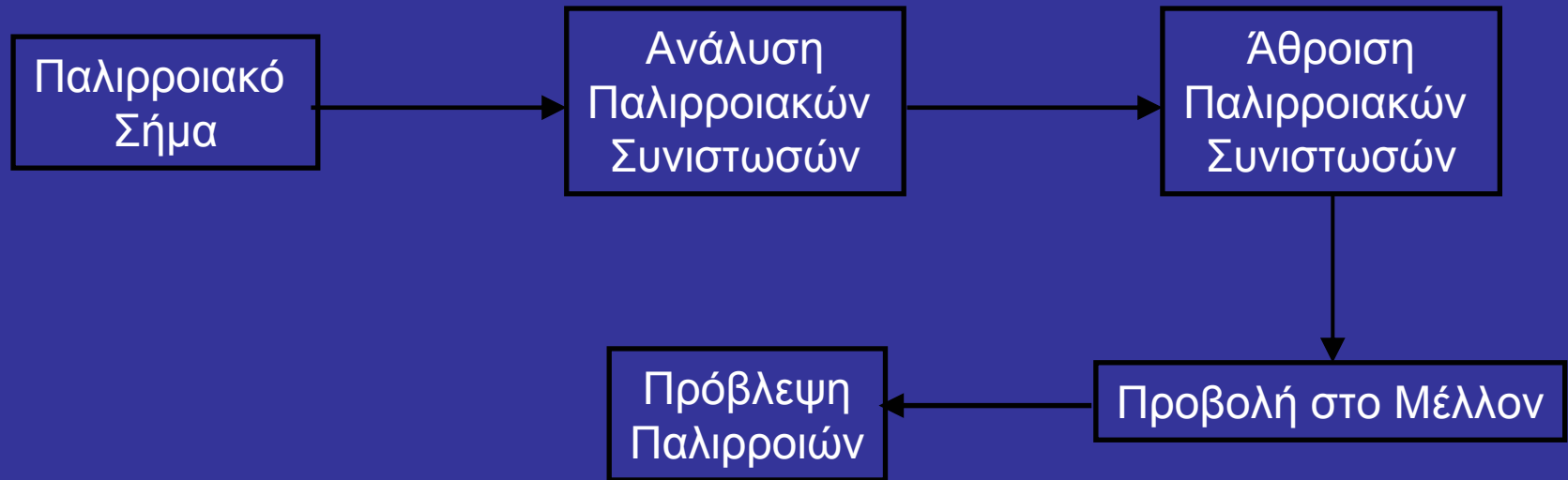
$$y = A_i \cos (\omega_i t + \theta_i)$$

Όπου A το εύρος κάθε παλιρροιακής συνιστώσας και θ_i η διαφορά φάσης της.

Η συνολική παλίρροια προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους αρμονικών.

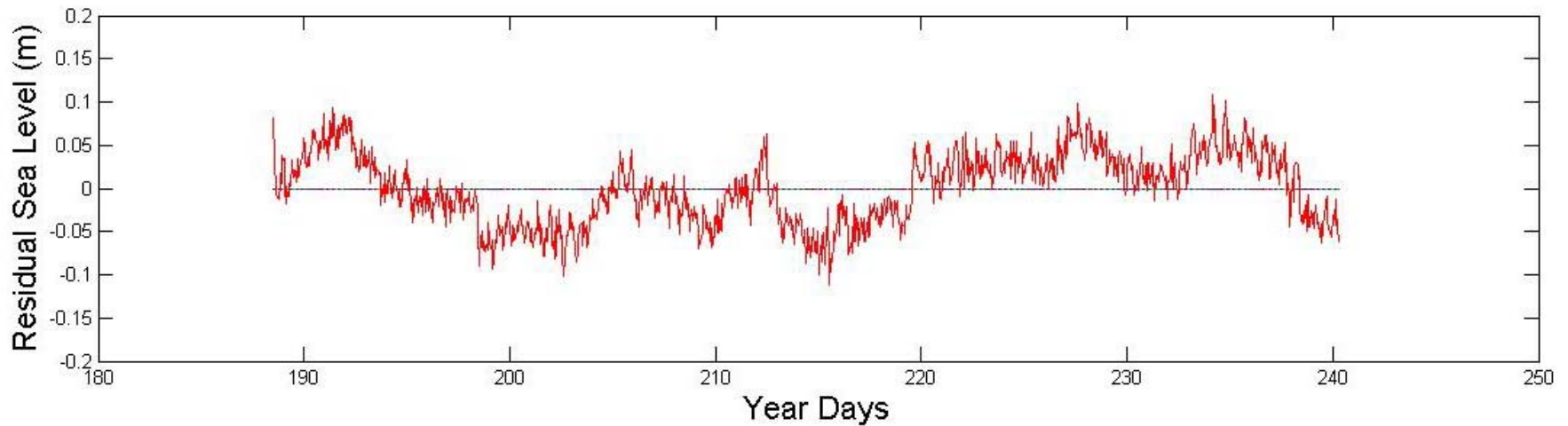
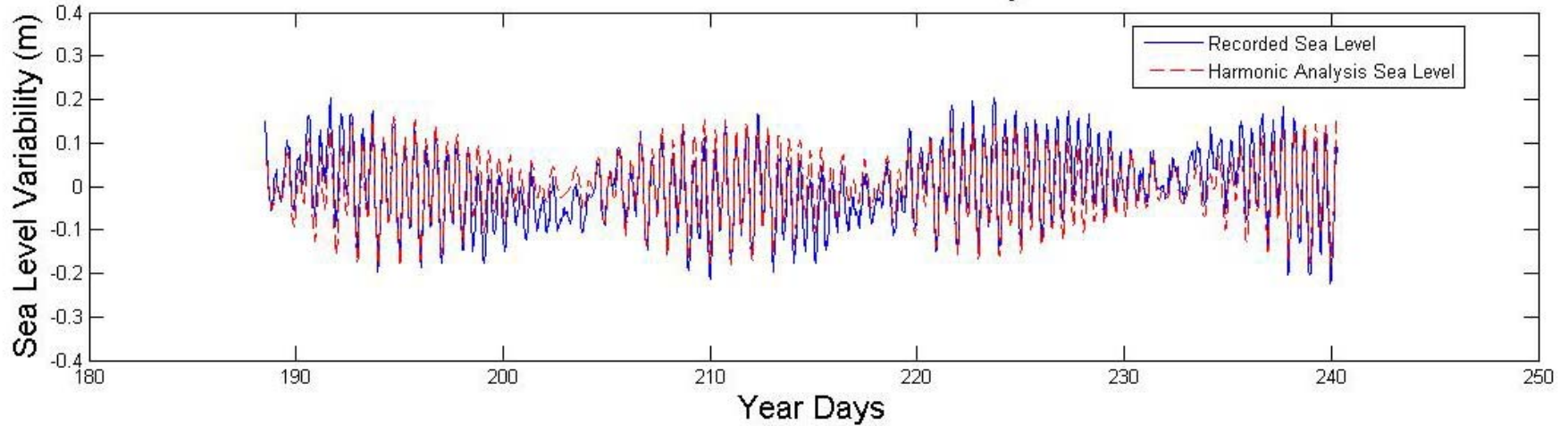
$$y = \sum_{n=1}^N A_n \cos (\omega_n t + \theta_n)$$

Αρμονική Ανάλυση Παλιρροιών και Πρόγνωση

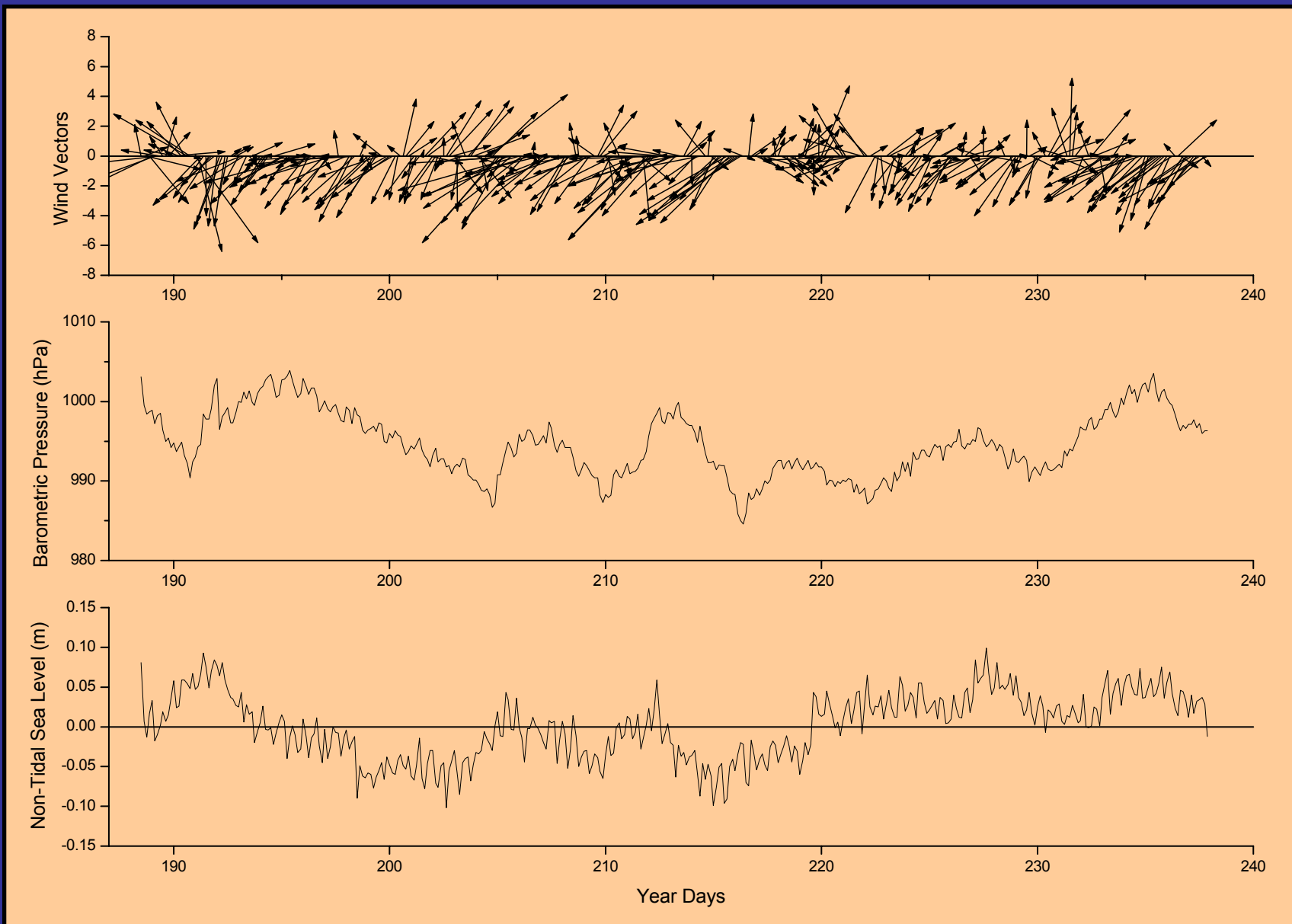


Αρμονική Ανάλυση και Προσδιορισμός Μη-Παλιρροιακής Μεταβολής

Tidal Level Harmonic Analysis



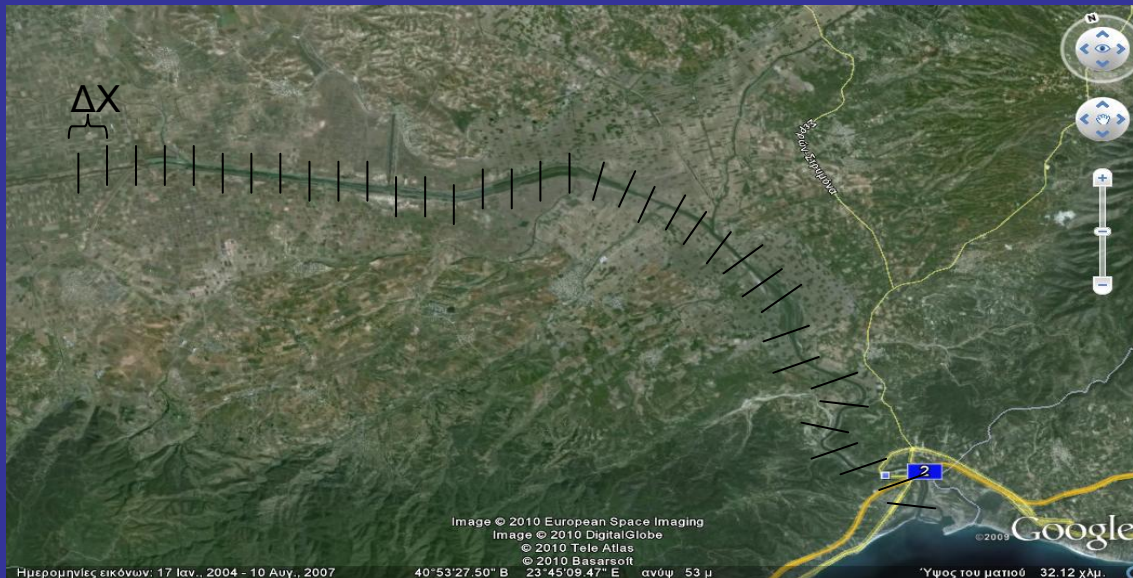
ΣΧΕΣΗ ΑΝΕΜΟΥ – ΜΗ-ΠΑΛΙΡΡΟΙΑΚΗΣ ΣΤΑΘΜΗΣ



Παλιρροιακό Ομοίωμα Μονοδιάστατης Κυκλοφορίας σε Πεδίο Μεταβλητού Πλάτους

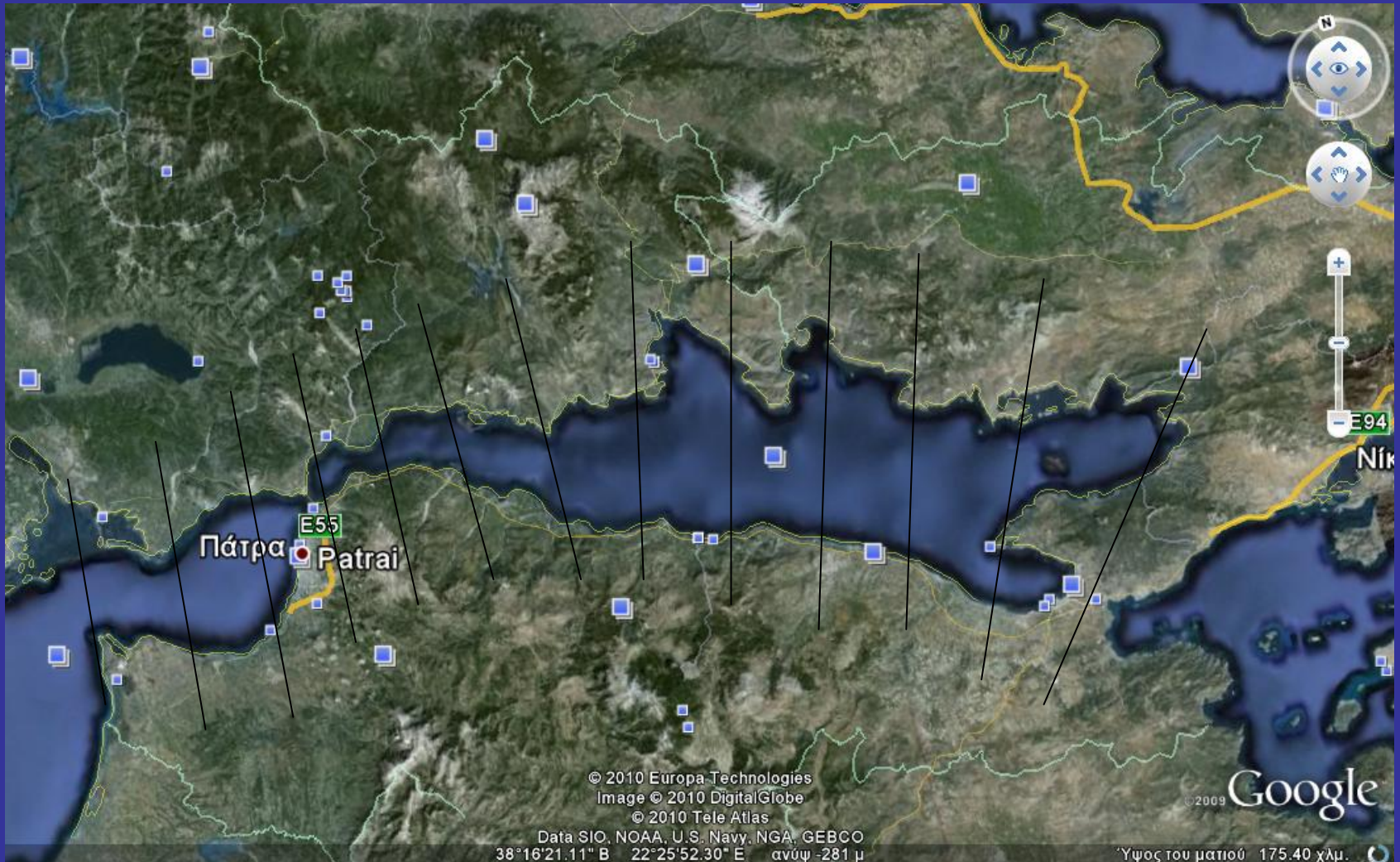
Σε περίπτωση που το πεδίο ροής έχει διάσταση μήκους \gg της διάστασης πλάτους, τότε είναι δυνατή η θεώρηση του 1D ομοιώματος και η περιγραφή και πρόβλεψη της μεταβολής της ολοκληρωμένης κατά τη διατομή ταχύτητας (άρα και παροχής) και της μεταβολής της ελεύθερης στάθμης θάλασσας.

Το ομοίωμα εφαρμόζεται σε στενές ποταμοεκβολές και διαμήκη παράκτια σώματα.

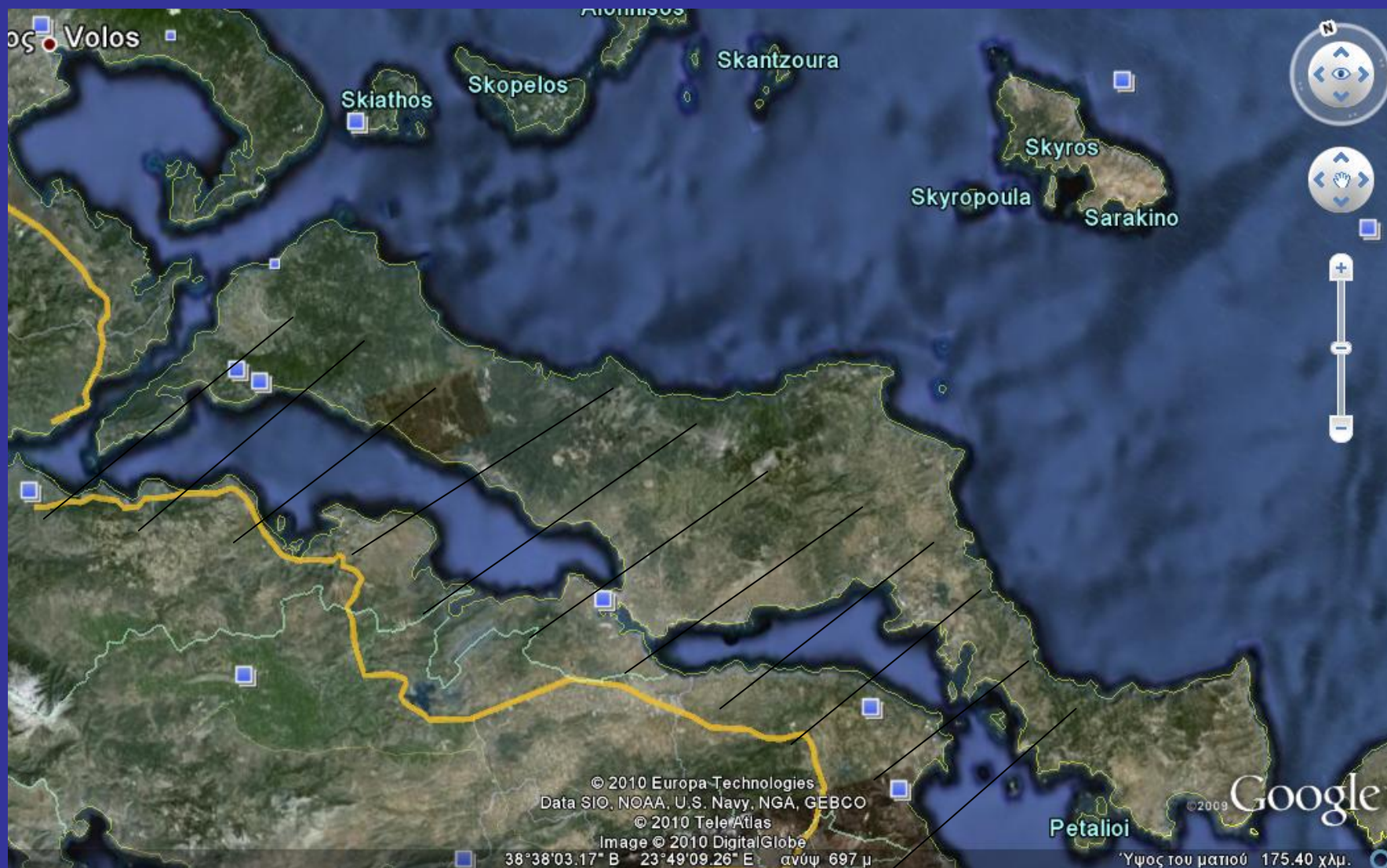


Εκβολή π. Στρυμόνα

Κορινθιακός Κόλπος



Βόρειος και Νότιος Ευβοϊκός Κόλπος



Το μαθηματικό ομοίωμα που αναπτύσσεται αναφέρεται σε πεδίο μεταβλητού πλάτους και βάθους. Το παλιρροιακό ομοίωμα περιγράφει τις συναρτήσεις παροχής της κάθε διατομής $Q(x,t)$, και της ελεύθερης στάθμης της θάλασσας $\eta(x,t)$, πάνω από τη στάθμη ηρεμίας.

Οι εξισώσεις κίνησης και διατήρησης μάζας είναι:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Εξίσωση 1-D διατήρησης μάζας

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2 / A}{\partial x} = -gA \frac{\partial \eta}{\partial x} - gAS_f$$

Εξίσωση 1D κίνησης

Εξισώσεις St. Venant

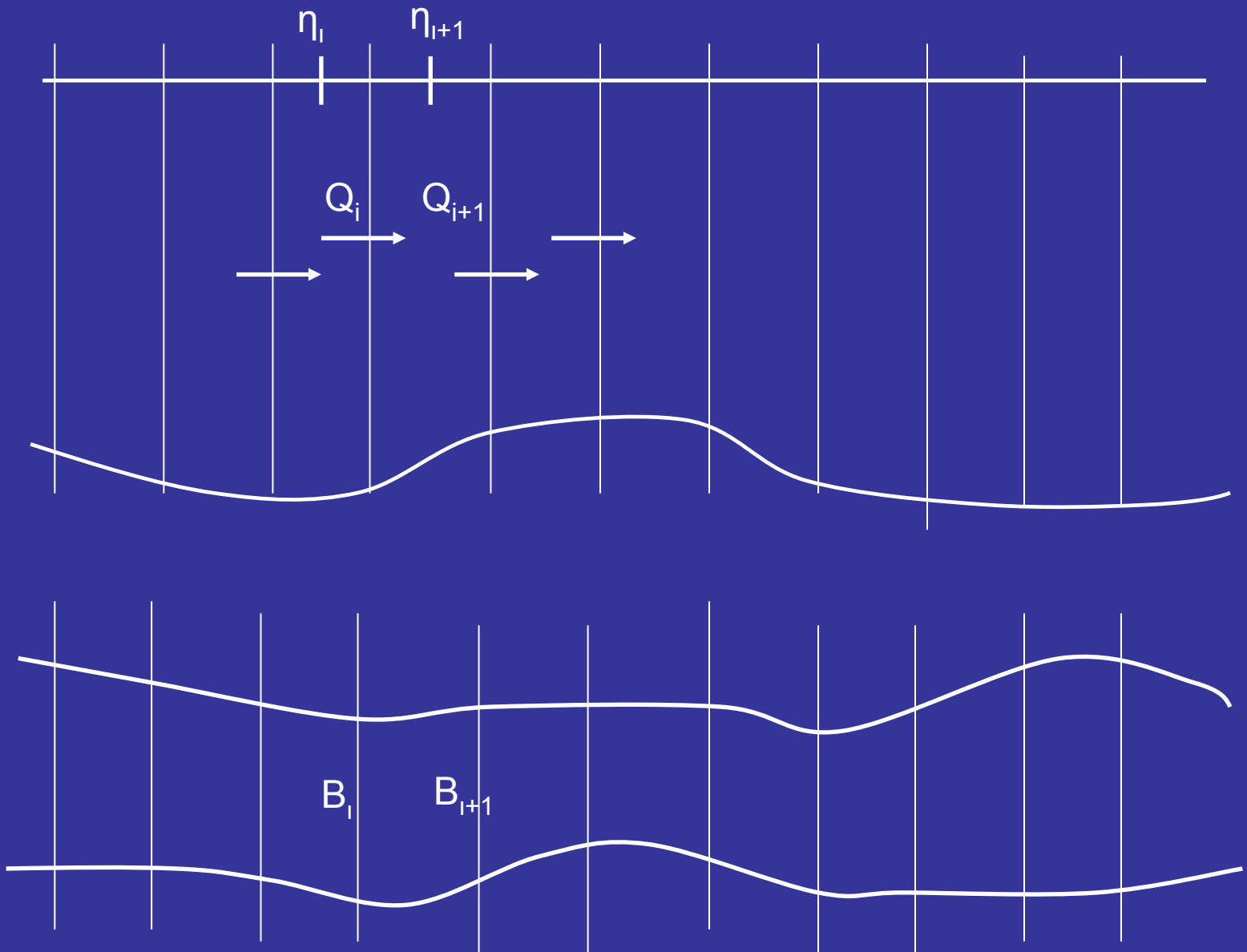
S_f είναι η κλίση της γραμμής ενέργειας η οποία από το Νόμο Chezy γράφεται:

$$S_f = \frac{U^2}{C^2 R}$$

Όπου R είναι η υδραυλική ακτίνα

$$R = \frac{A}{P}$$

Η αριθμητική λύση βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.



$$\frac{\eta_i^{n+1/2} - \eta_i^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{2}{B_i + B_{i+1}} \left[\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = -\frac{(Q_{i+1}^n)^2 / A_{i+1} - (Q_{i-1}^n)^2 / A_{i-1}}{2 \Delta x} - g A_i \frac{\eta_i^{n+1/2} - \eta_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x} - g A_i \left[\frac{U_i^n}{C^2 R_i} + \frac{(|U_{i+1}^n| - |U_i^n|) \text{sign}(U_i^n)}{2g \Delta x} \right]$$

Ο τελευταίος όρος απωλειών ισχύει αν $U_{i+1} < U_{i-1}$

Οριακές Συνθήκες: Στο ανάντι άκρο δίνεται η μεταβολή της στάθμης της θάλασσας με το χρόνο.

$$\eta_{i,1} = \eta_o \sin(2\pi(n-1)\Delta t / T)$$

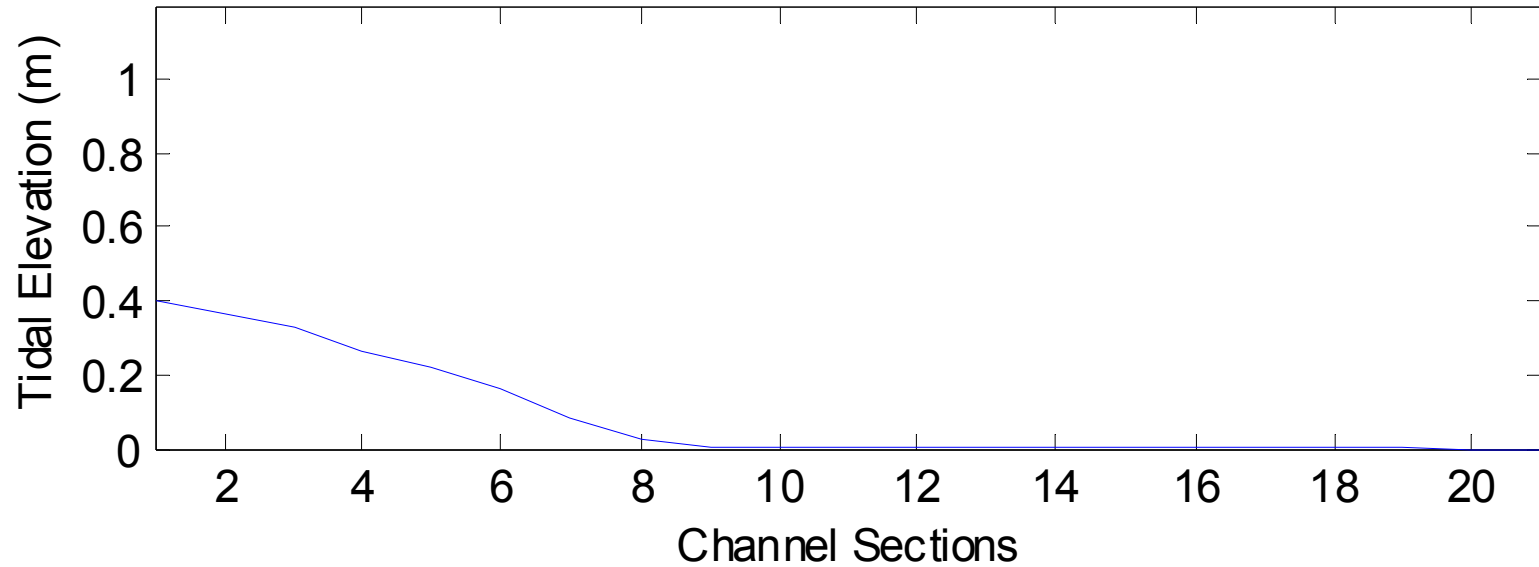
Στο κατάντι όριο υπάρχει είτε ξηρά, οπότε εφαρμόζεται συνθήκη πλήρους ανάκλασης είτε όριο ανοικτής θάλασσας οπότε εφαρμόζεται συνθήκη ελεύθερης διάβασης.

Tidal.m

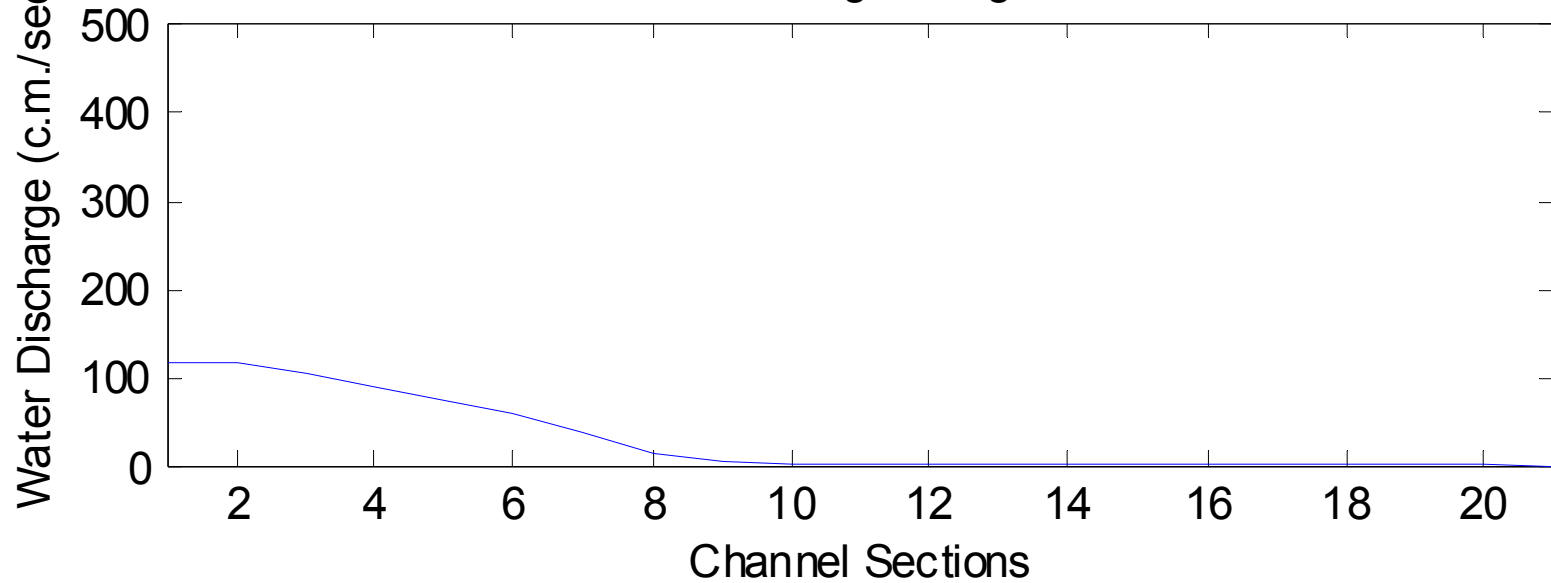
```
% 1-D tidal circulation model
im = 21; dt = .5; dx = 100; c = 50; pr = 500; zo = 0.5; nm = 1000; bk = 1;
r = zeros(im,1); a = zeros(im,1); b = zeros(im,1); ho = zeros(im,1); h = zeros(im,1); z =
zeros(im,1); zn = zeros(im,1); q = zeros(im,1); qn = zeros(im,1);
i = 1:1:im;
    b(i) = 30; ho(i) = 10; z(i) = 0; q(i) = 0; qn(i) = 0;
n = 0; t = 0;
while n<450
    n = n+1; t = t+dt; z(1) = zo*sin(2*3.14*t/pr);
    i=2:1:im-1; h(i)=ho(i)+(z(i)+z(i-1))/2; h(1)=ho(1)+z(1);h(im)=ho(im)+z(im-1);
    i = 1:1:im; a(i)=b(i).*h(i); r(i)=a(i)./(b(i)+2*h(i));
    i = 1:1:im-1; zn(i)=z(i)-2*dt/dx*(q(i+1)-q(i))./(b(i)+b(i+1));
    i = 2:1:im-1;
        vv=0; vv=abs(q(i+1)./a(i+1))-abs(q(i-1)./a(i-1))/(4*9.8*dx);
        qn(i)=q(i)-dt*(q(i+1).^2./a(i+1)-q(i-1).^2./a(i-1))/(2*dx)-dt*9.81*a(i).*(z(i)-z(i-1))/dx-
dt*9.8*a(i).*(q(i)./a(i))./(c.^2.*r(i)); qn(1) = qn(2);
        qn(im) = z(im-1)*sqrt(9.81*b(im)*a(im)); zn(im) = q(im)/a(im);
    i = 1:1:im;
        q(i) = qn(i); z(i) = zn(i);
end
f1 = figure; h1 = subplot(2,1,1), grid; plot(i,z(i),'-'); axis (h1, [1 21 0 1.2]);
title ('Tidal Elevation along channel');xlabel ('Channel Sections');ylabel ('Tidal Elevation (m)')
h2 = subplot(2,1,2), grid; plot(i,q(i)); axis (h2, [1 21 0 500]);
title ('Water Discharge along channel');xlabel ('Channel Sections');ylabel ('Water Discharge
(c.m./sec)')
```

n=150

Tidal Elevation along channel

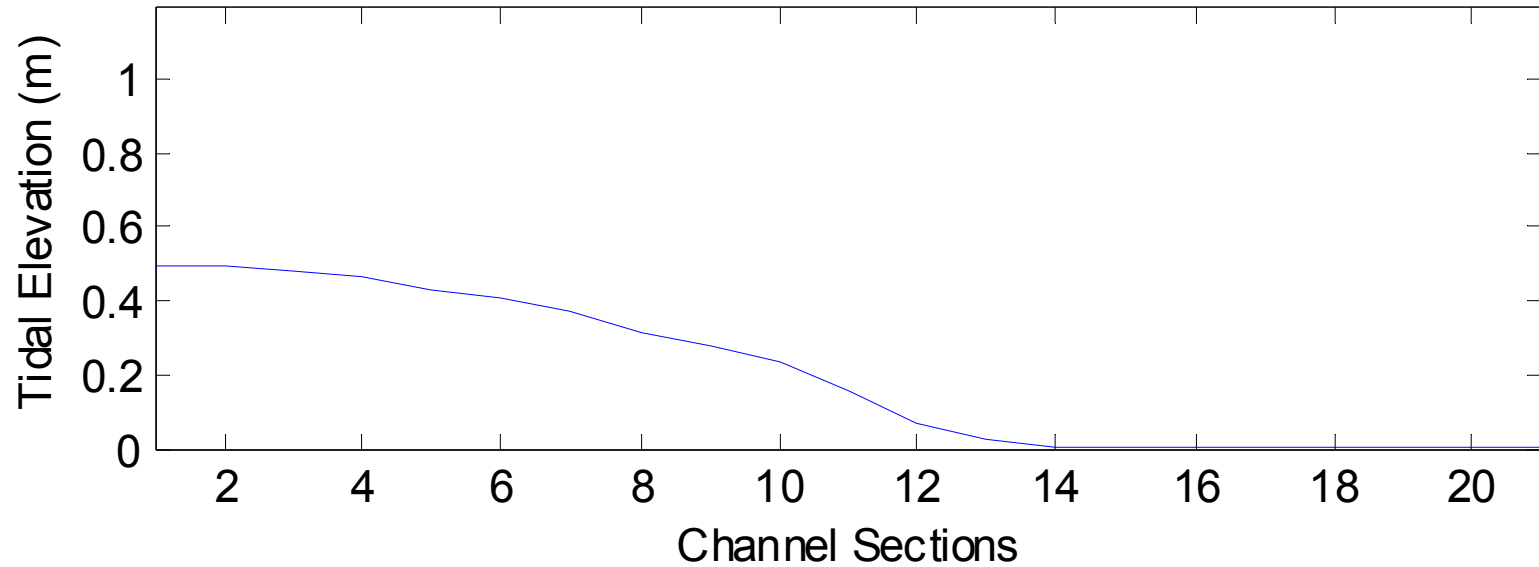


Water Discharge along channel

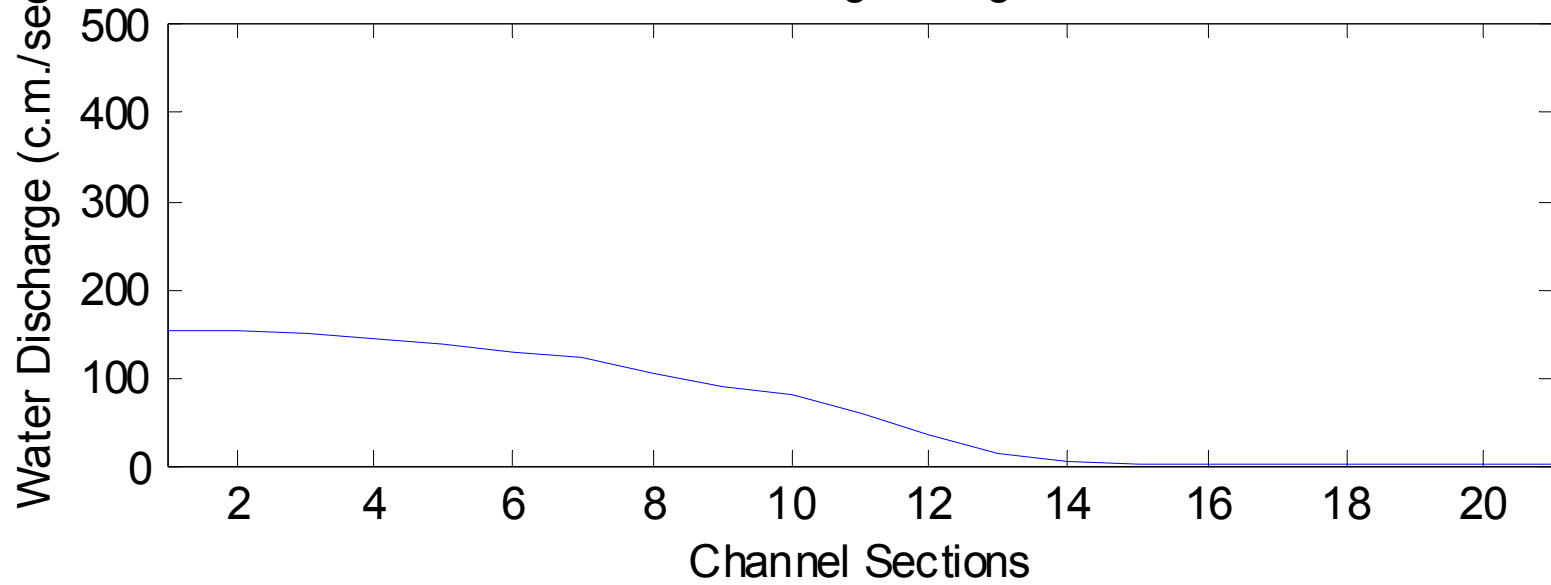


n=250

Tidal Elevation along channel

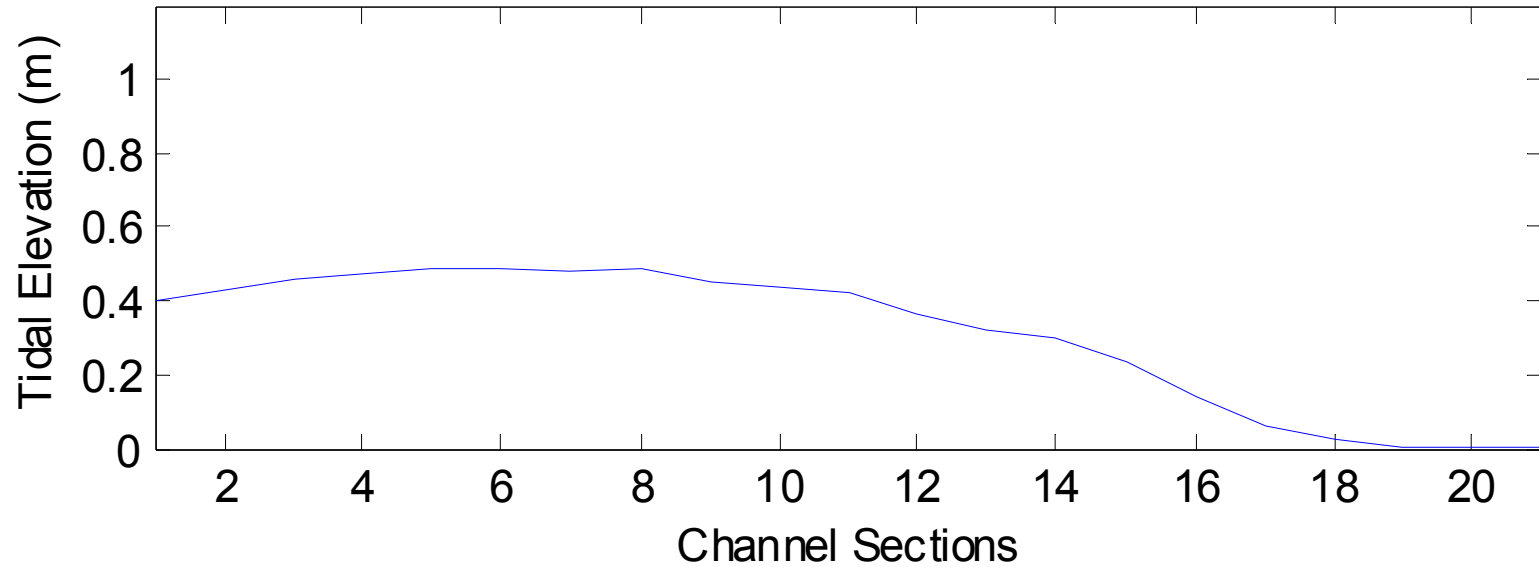


Water Discharge along channel

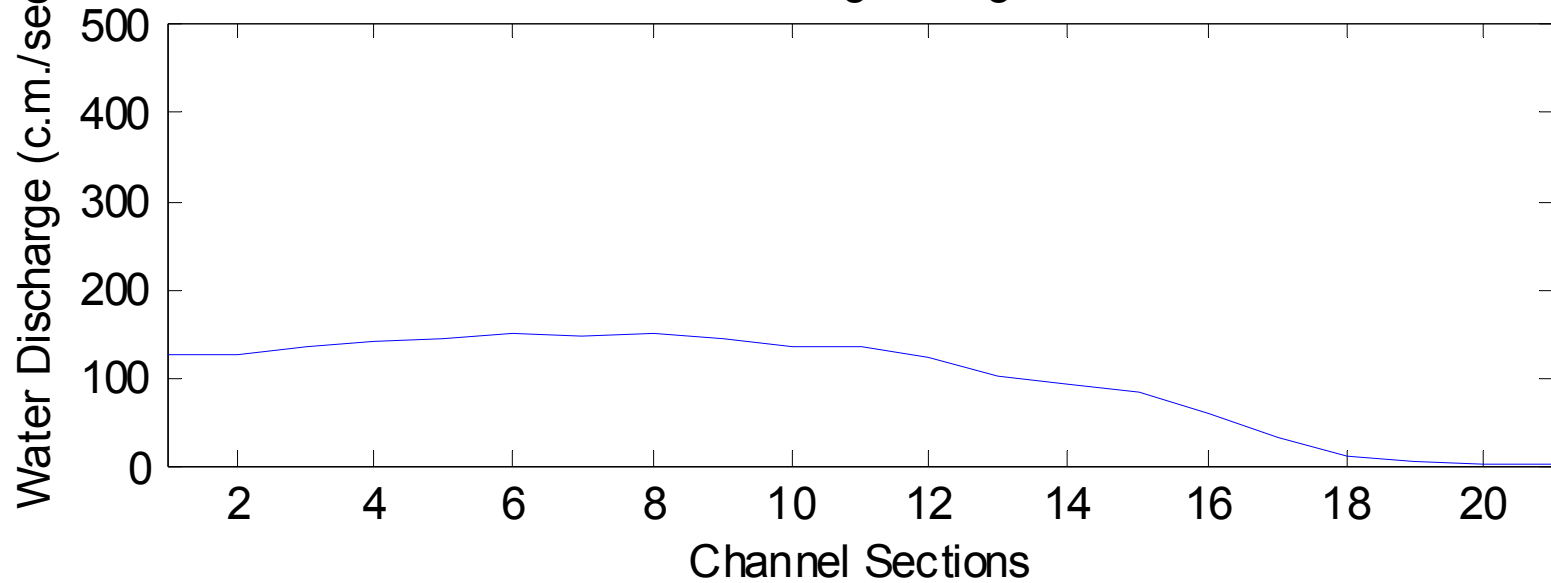


n=350

Tidal Elevation along channel

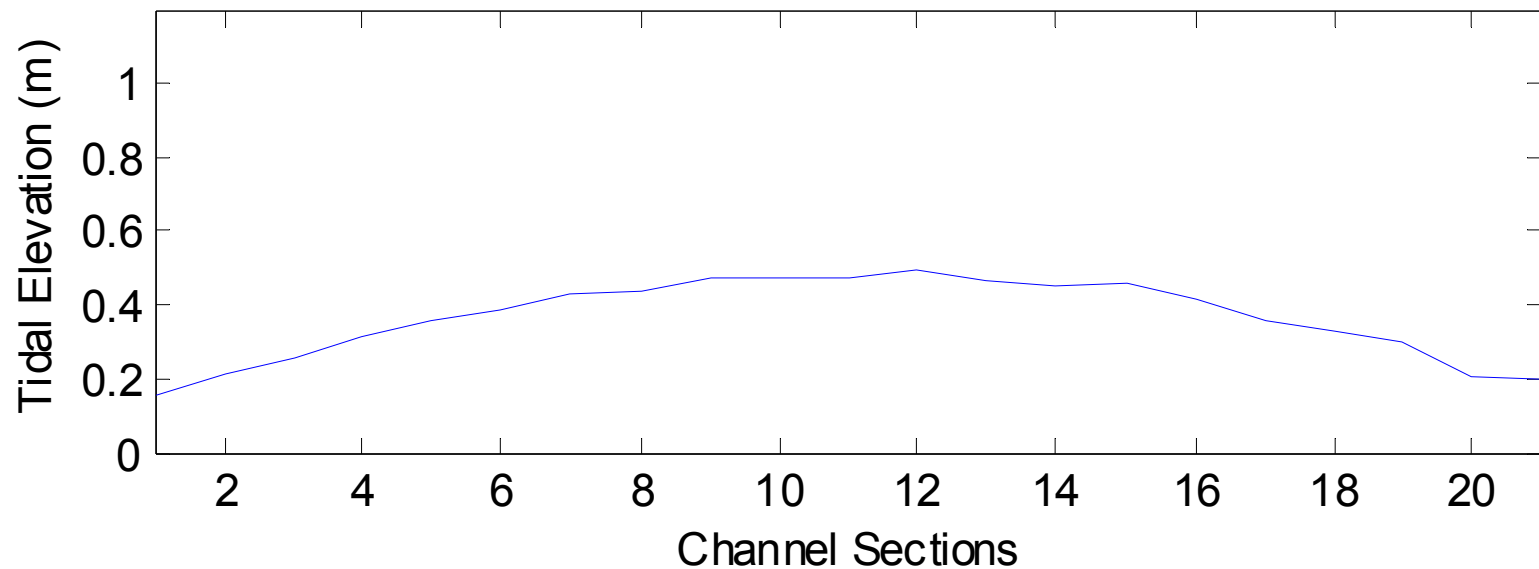


Water Discharge along channel

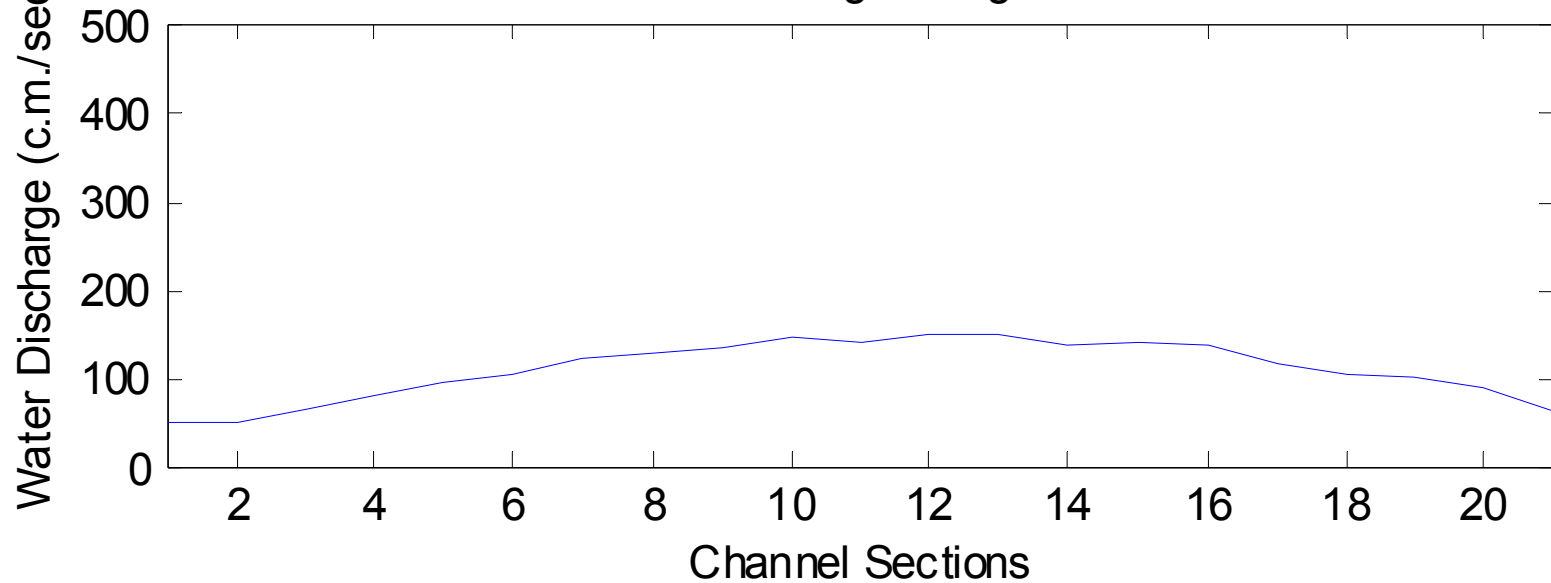


n=450

Tidal Elevation along channel

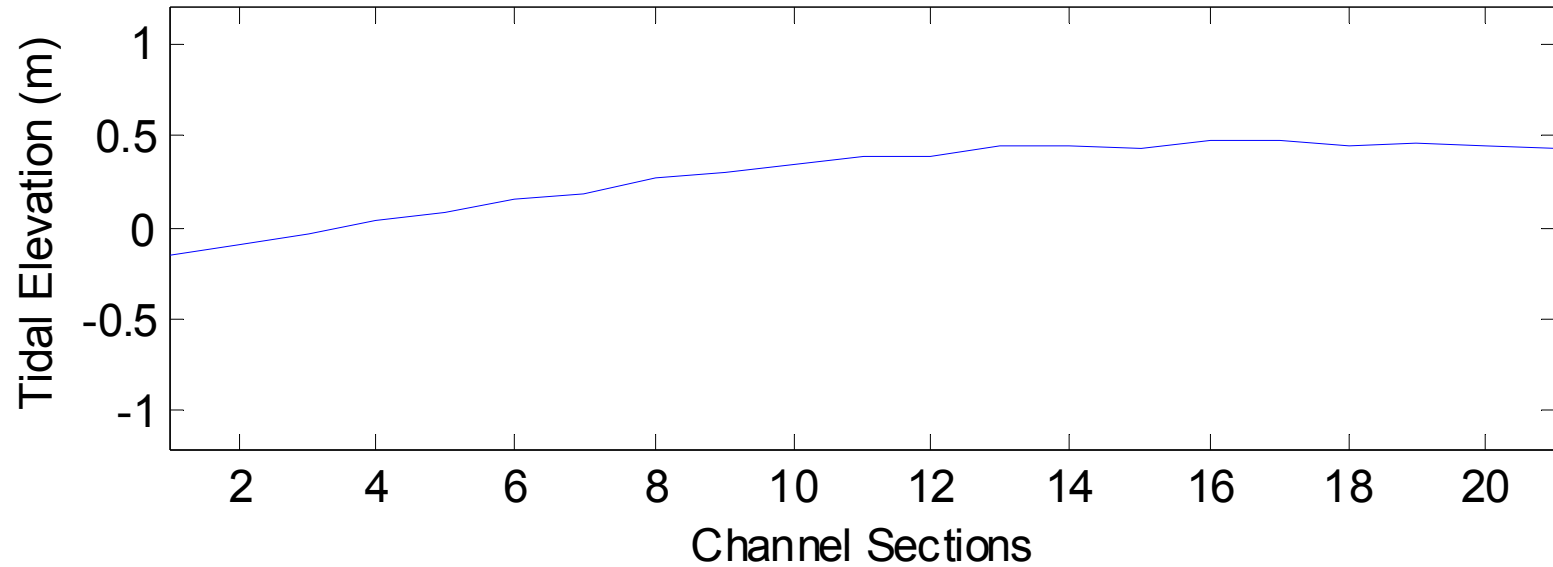


Water Discharge along channel

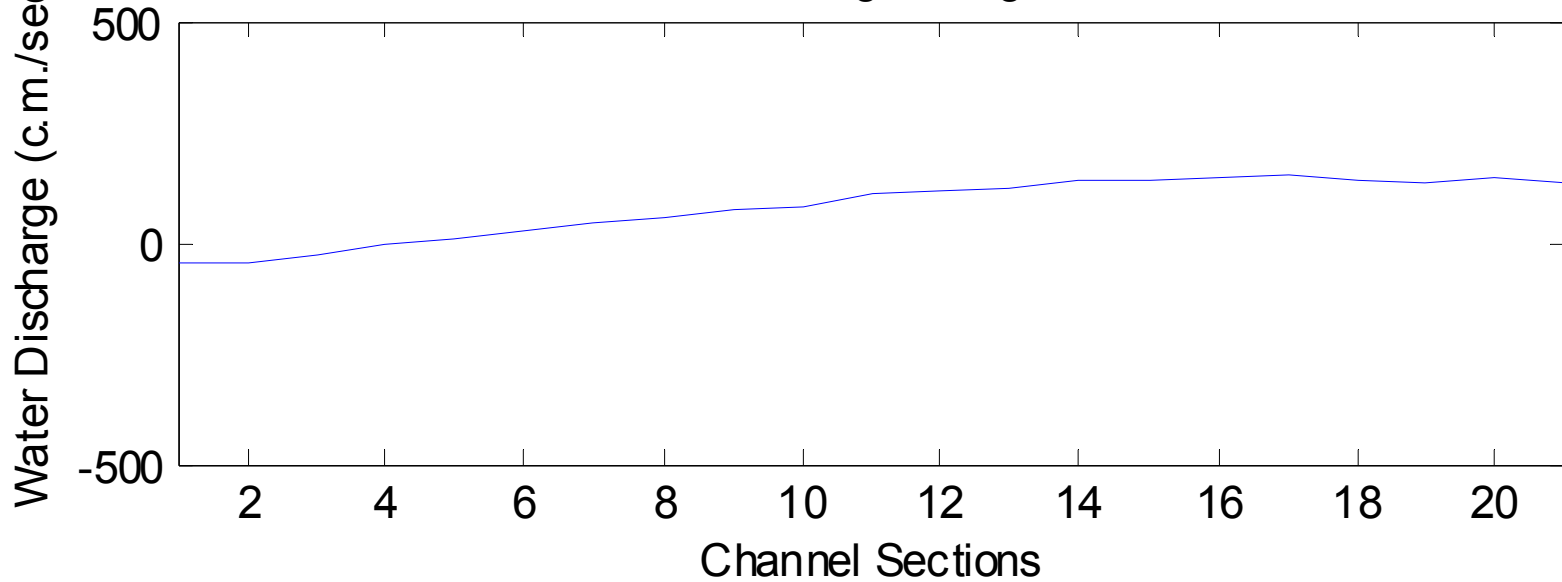


n=550

Tidal Elevation along channel

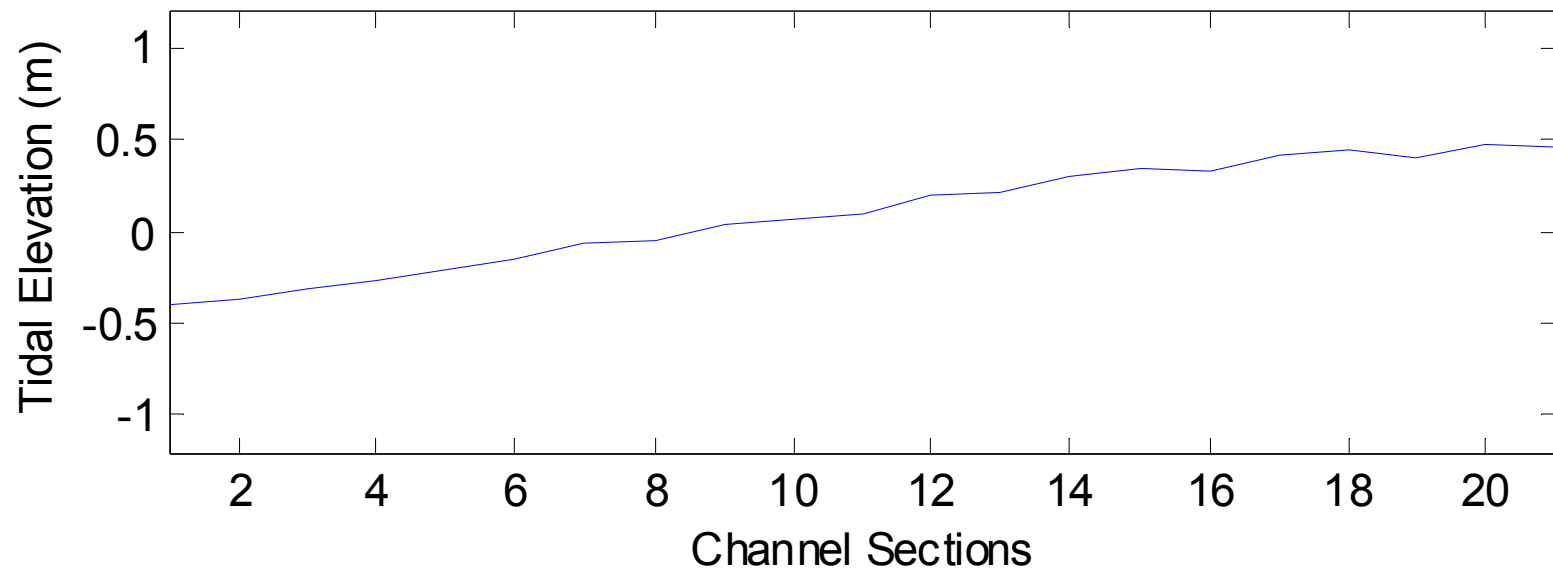


Water Discharge along channel

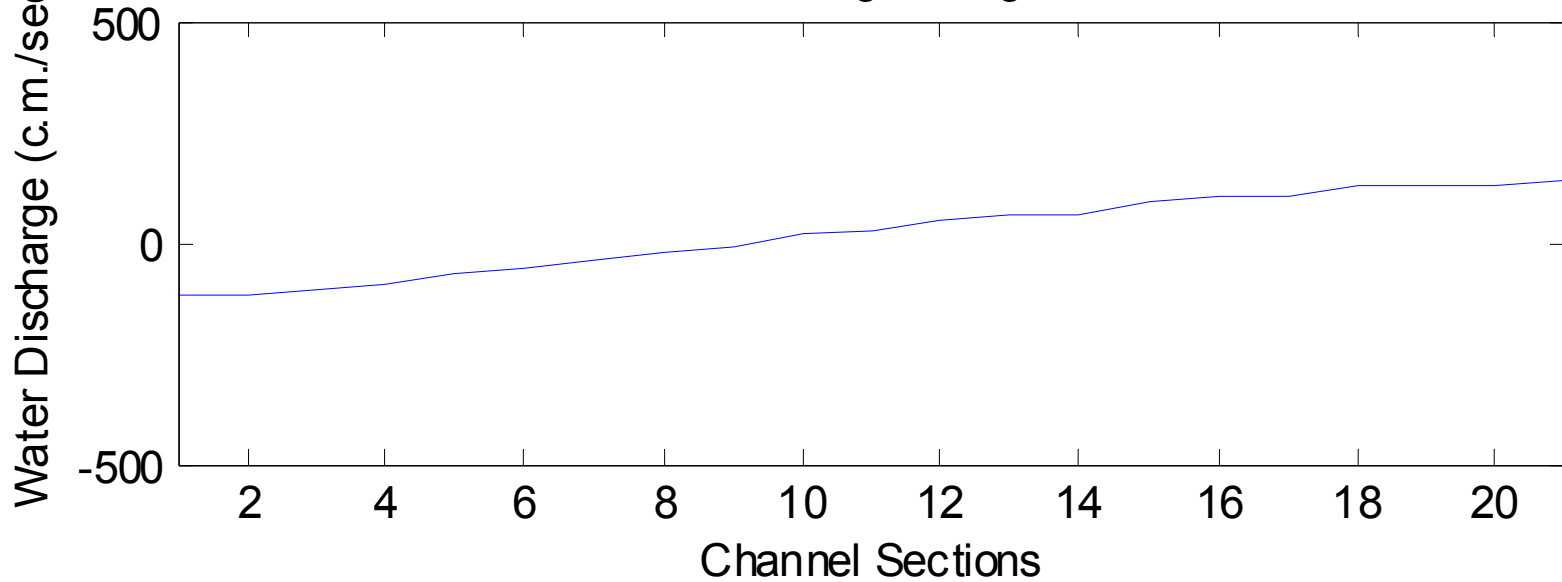


n=650

Tidal Elevation along channel

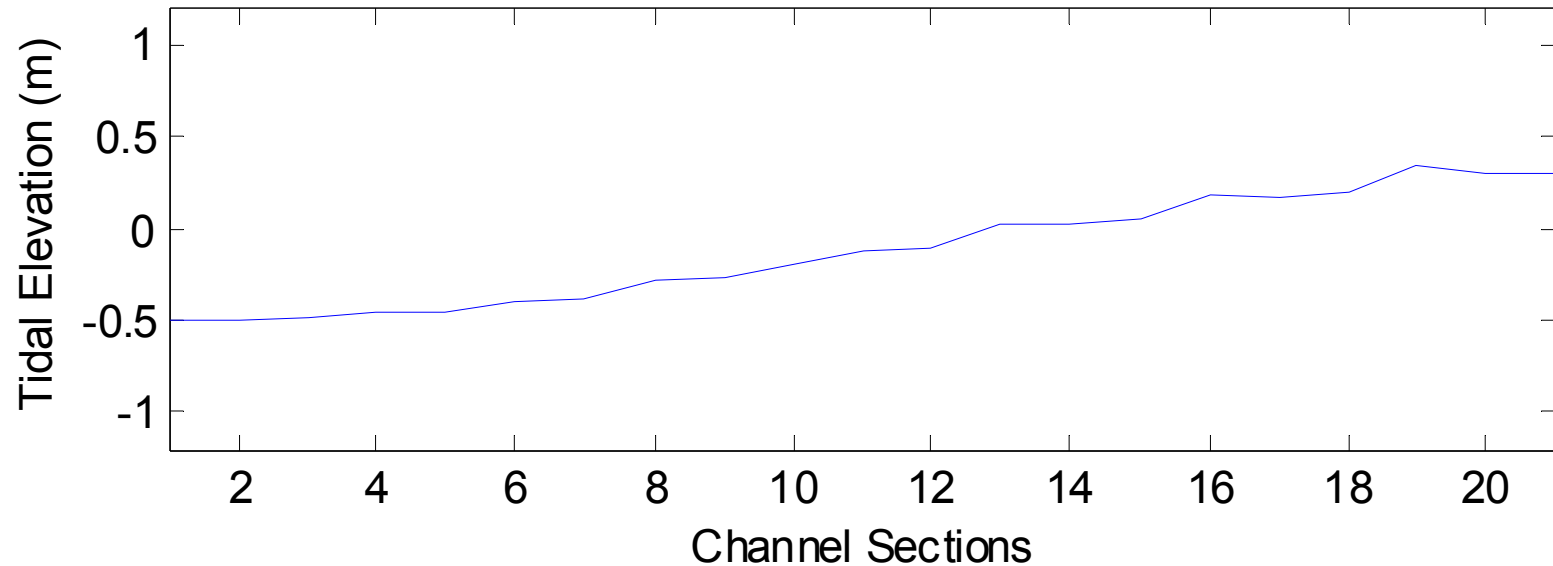


Water Discharge along channel

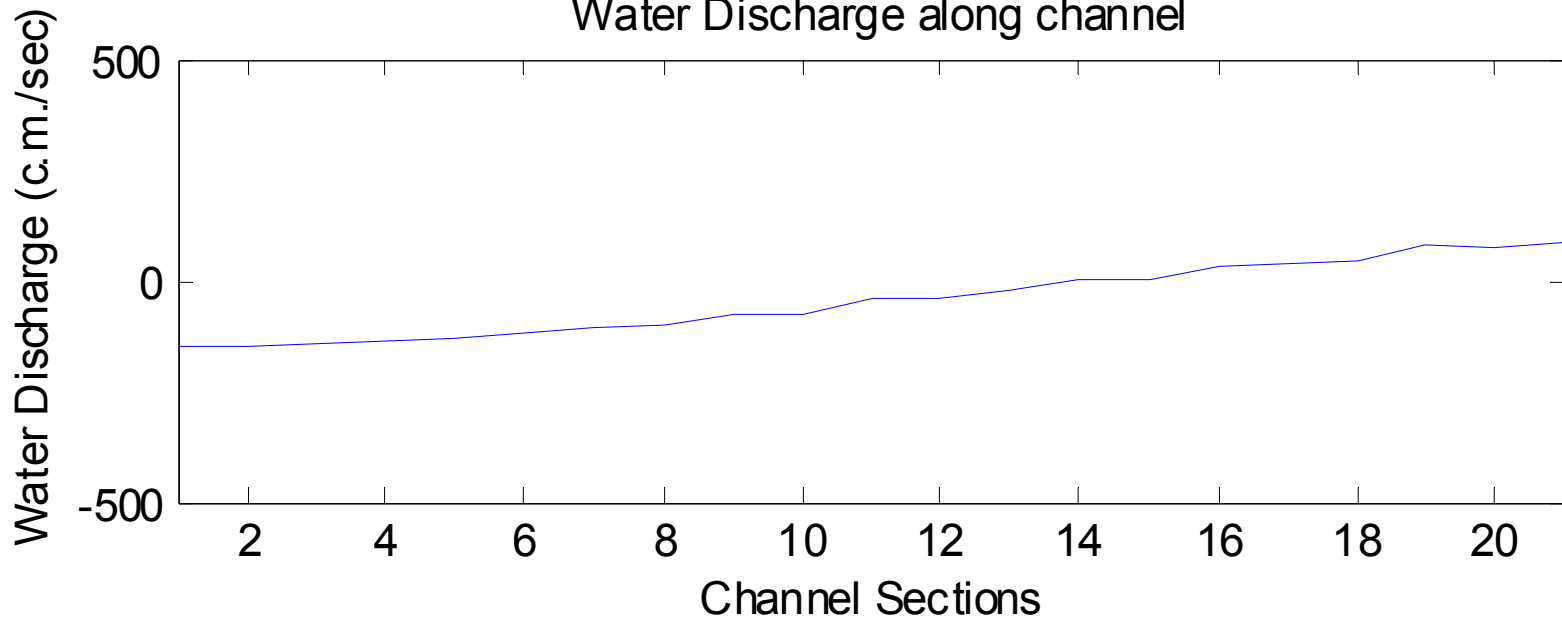


n=750

Tidal Elevation along channel



Water Discharge along channel



Μονοδιάστατη Μεταφορά – Διάχυση Άλατος

Η εξίσωση μεταφοράς και διάχυσης άλατος γράφεται:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Θεωρούμε ότι το ποτάμι έχει σταθερό πλάτος και βάθος, άρα σταθερή ταχύτητα ροής U . Η αναλυτική λύση είναι:

$$S = S_0 \exp\left(-\frac{U}{K_x} x\right)$$

Όπου S_0 είναι η ωκεάνια αλατότητα. Η εξίσωση δείχνει την εκθετική μείωση της αλατότητας με την x -απόσταση ανάντι του ποταμού.

Ο λόγος (U/K_x) έχει μονάδες μήκους (m). Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει επίσης την εισδοχή του αλμυρού νερού για το σχηματισμό αλμυρής σφήνας πάχους (U/K_x) . Το πάχος της αλμυρής σφήνας αυξάνει καθώς αυξάνει η τιμή του συντελεστή διαμήκους τυρβώδους διάχυσης K_x , ενώ μειώνεται με την αύξηση της ταχύτητας ροής του ποταμού U .

Αν ο ποταμός έχει αλατότητα S_r τότε η αναλυτική λύση γίνεται:

$$S = S_r + (S_0 - S_r) \exp\left(-\frac{U}{K_x} x\right)$$

Γεγονός που σημαίνει ότι η ανώτερη διατομή του μοντέλου δεν αντιστοιχεί σε καθαρά ποτάμια συνθήκη ($S_r = 0$) αλλά σε διατομή ενδιάμεσης αλατότητας, στην οποία η ροή άλατος είναι μηδέν. Άρα

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_r = 0$$

Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε διαλυμένο ρύπο συγκέντρωσης C . Αν θεωρήσουμε ότι αυτός εκρέει στο ποτάμι και η θάλασσα έχει μηδενική τιμή του ρύπου, τότε:

$$C = C_r \left[1 - \exp\left(-\frac{U}{K} x\right) \right]$$

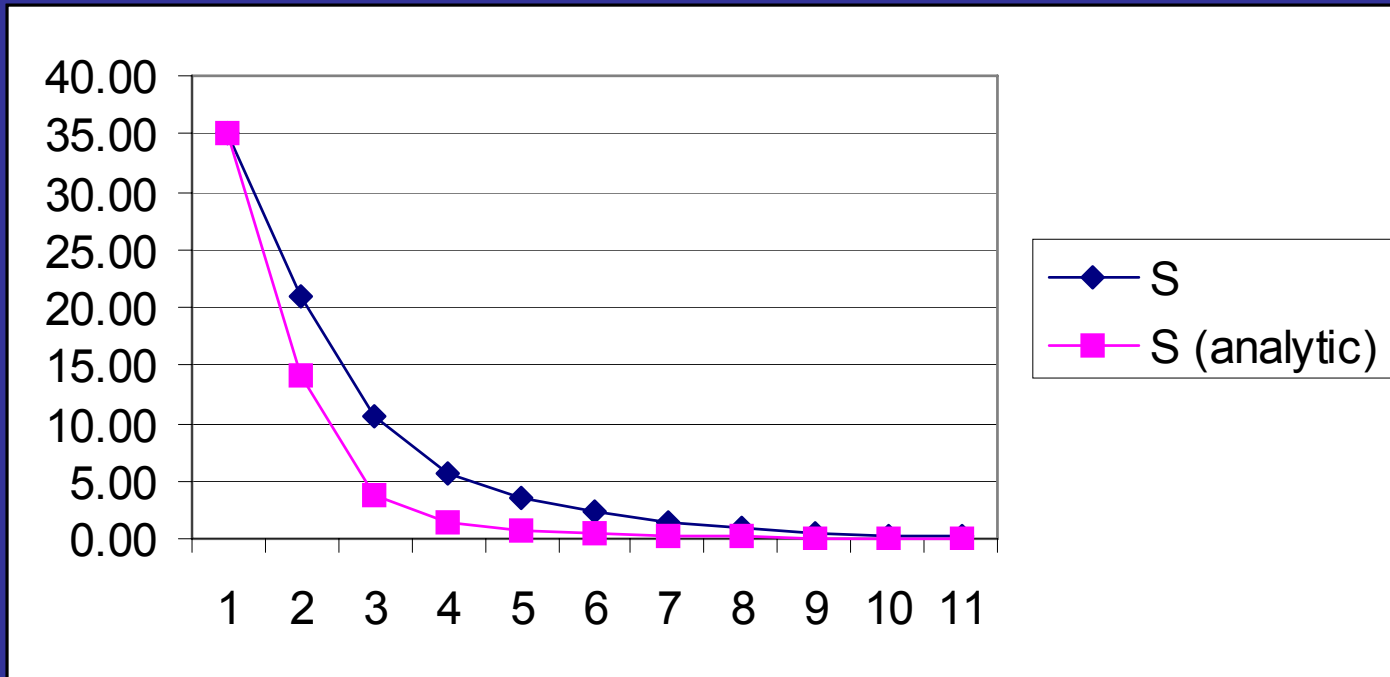
Τυπικές τιμές K από 10 έως 100 $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Αν U είναι 100 $\text{m}^3/\text{s} / 10^4 \text{m}^2 = 0.01 \text{m/s}$, άρα ο λόγος (U/K) κυμαίνεται μεταξύ 1 και 10 km .

Αν η κατανομή αλατότητας βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, τότε οι όροι μεταφοράς και διάχυσης εξισορροπούνται, και ισχύει:

$$\Delta S = -\frac{U_r}{K} S \Delta x$$

Αν το S_0 είναι γνωστό, και θεωρώντας μικρές τιμές Δx , το μοντέλο λύνεται εύκολα:

Length (km)	K/Ur (km)	Mean K/Ur	DX (km)	DS	S	S (analytic)
0	2.3		1		35.00	35.00
1	2.5	2.4	1	-14.00	21.00	14.08
2	2	2.25	1	-10.50	10.50	3.86
3	2.2	2.1	1	-4.77	5.73	1.46
4	2.6	2.4	1	-2.20	3.52	0.76
5	2.8	2.7	1	-1.26	2.27	0.38
6	3	2.9	1	-0.76	1.51	0.20
7	3.3	3.15	1	-0.46	1.05	0.13
8	1.6	2.45	1	-0.66	0.39	0.00
9	2.3	1.95	1	-0.17	0.22	0.00
10	2.3	2.3	1	-0.10	0.13	0.00



Να προσδιοριστεί η κατανομή αλατότητας για $K/U_r = 30$ km και $K/U_r = 2$ km.

Θεωρώντας τη μέση αλατότητα από το ωκεάνιο όριο ($x=0$) έως το ποτάμιο όριο ($x=L$), έχουμε:

$$\bar{S} - S_0 = S_0 \left[\frac{K}{LU_r} (1 - \exp(-\frac{U_r}{K} L)) - 1 \right]$$

Αν το K είναι επαρκές ώστε η ποτάμια λεκάνη αναμιγνύεται επαρκώς:

$$S_0 - \bar{S} \rightarrow S_0 \frac{U_r L}{2K}$$

Μονοδιάστατη Μεταφορά – Διάχυση Ρύπου σε Παλιρροιακό Πεδίο

$$\frac{\eta_i^{n+1/2} - \eta_i^{n-1/2}}{\Delta t} = - \frac{2}{B_i + B_{i+1}} \left[\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = - \frac{(Q_{i+1}^n)^2 / A_{i+1} - (Q_{i-1}^n)^2 / A_{i-1}}{2 \Delta x} - g A_i \frac{\eta_i^{n+1/2} - \eta_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x} - g A_i \left[\frac{U_i^n}{C^2 R_i} + \frac{(|U_{i+1}^n| - |U_i^n|) \text{sign}(U_i^n)}{2g} \right]$$

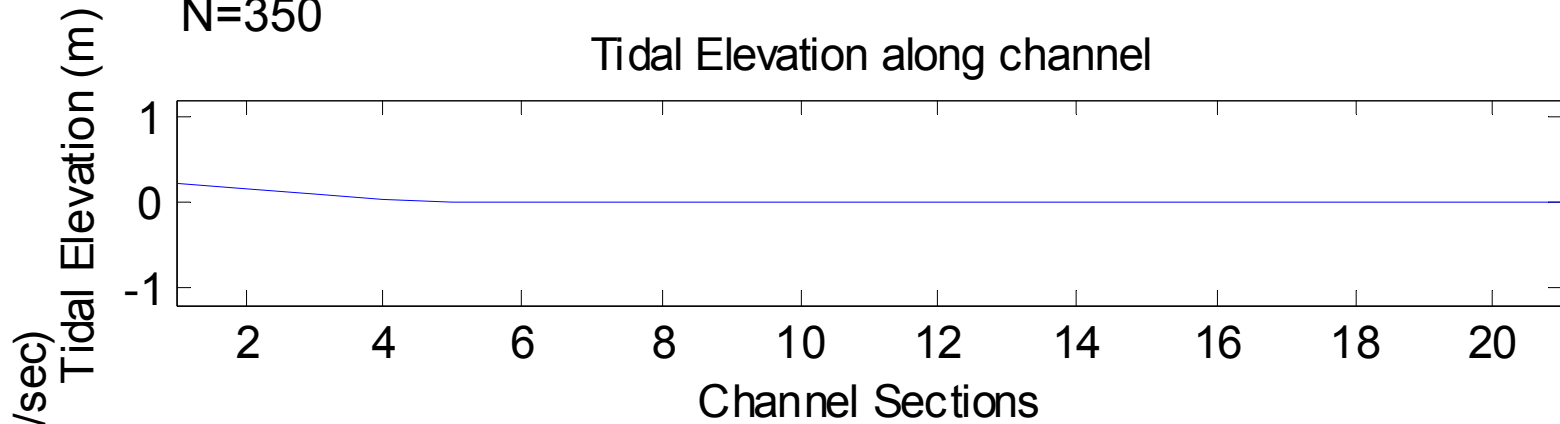
$$c_i^{n+1} = c_i^n - (Q_i^n / A_i) \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2 \Delta x} + D \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Κεντρικές Διαφορές
Όρου μεταφοράς μάζας

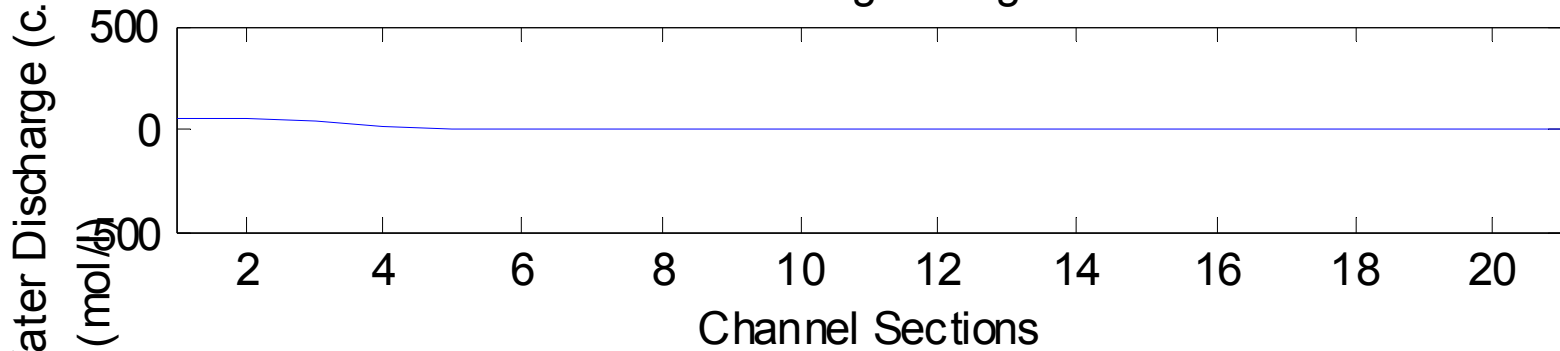
Κεντρικές Διαφορές
Όρου διάχυσης μάζας

N=350

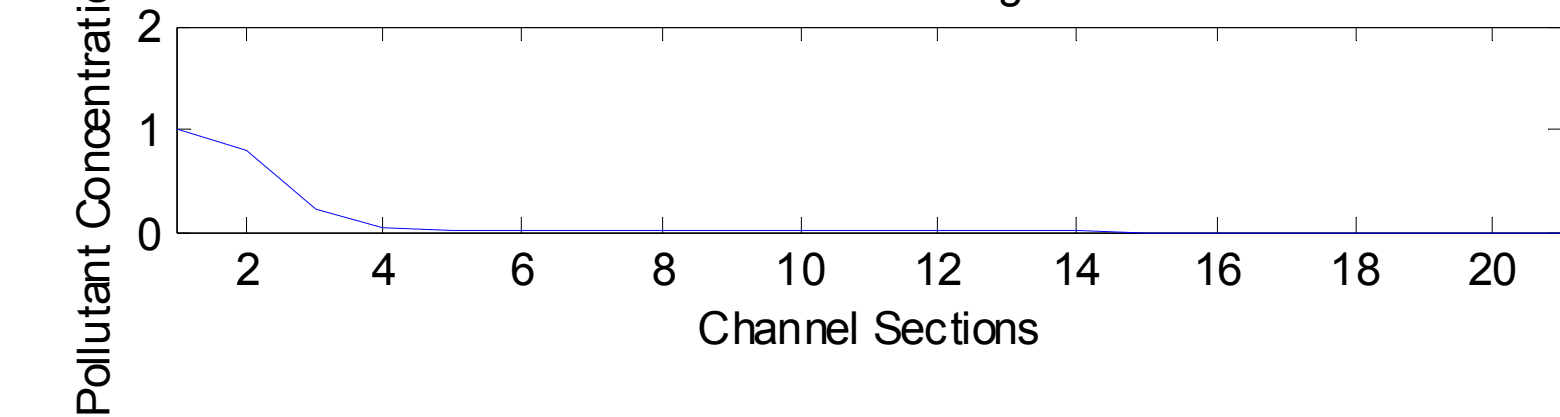
Tidal Elevation along channel



Water Discharge along channel

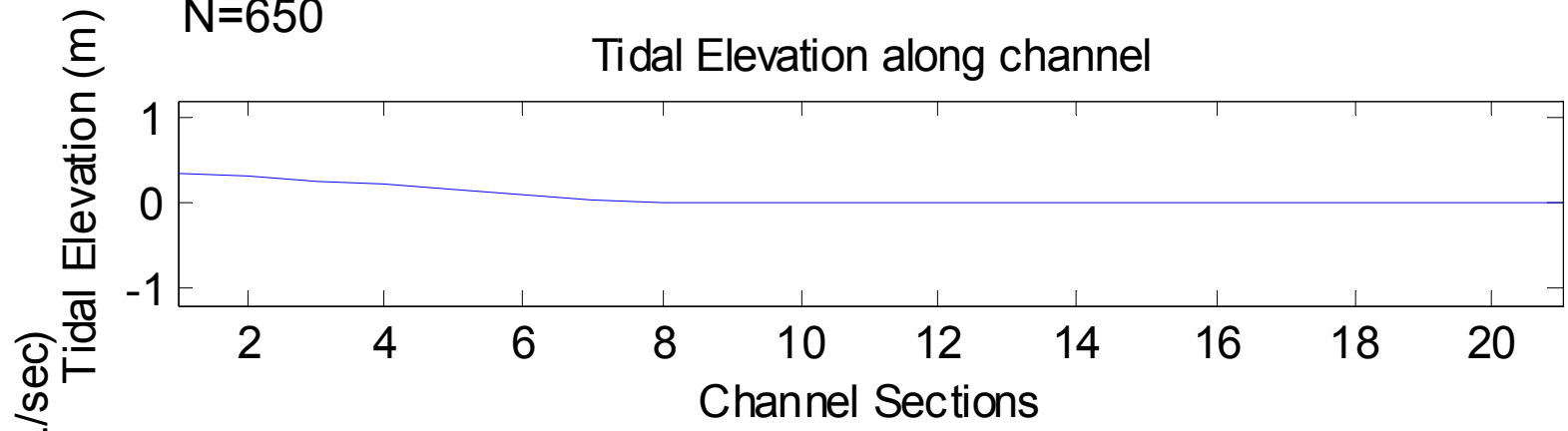


Pollutant Transfer along channel

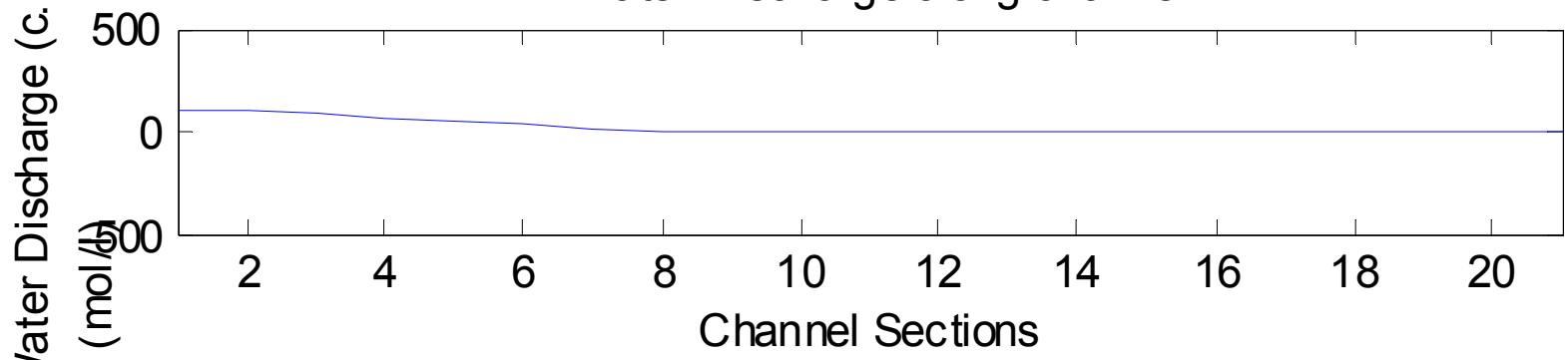


N=650

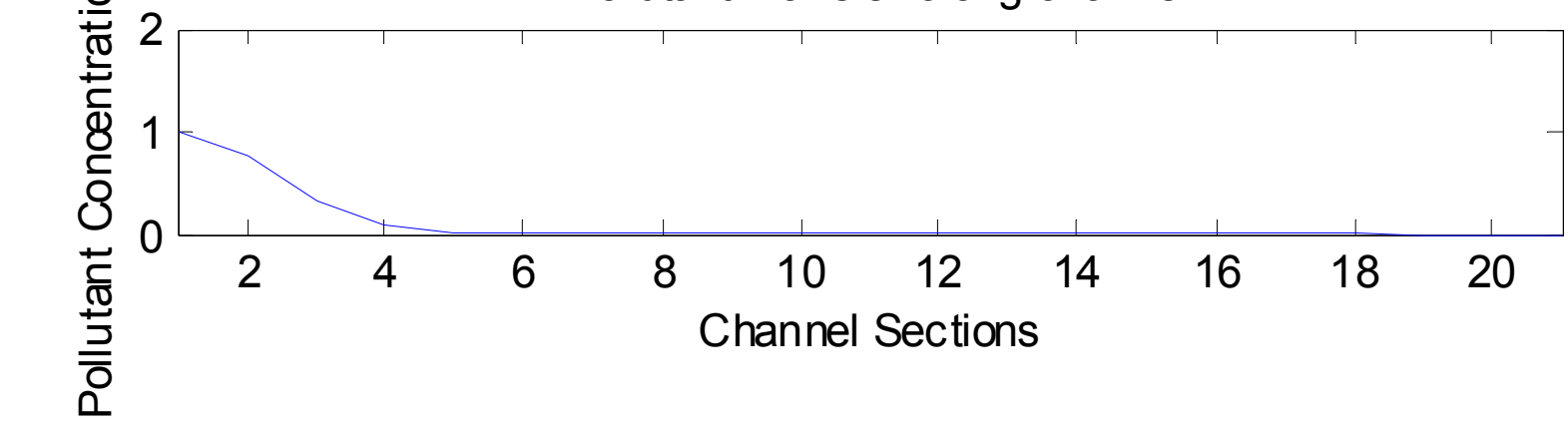
Tidal Elevation along channel



Water Discharge along channel

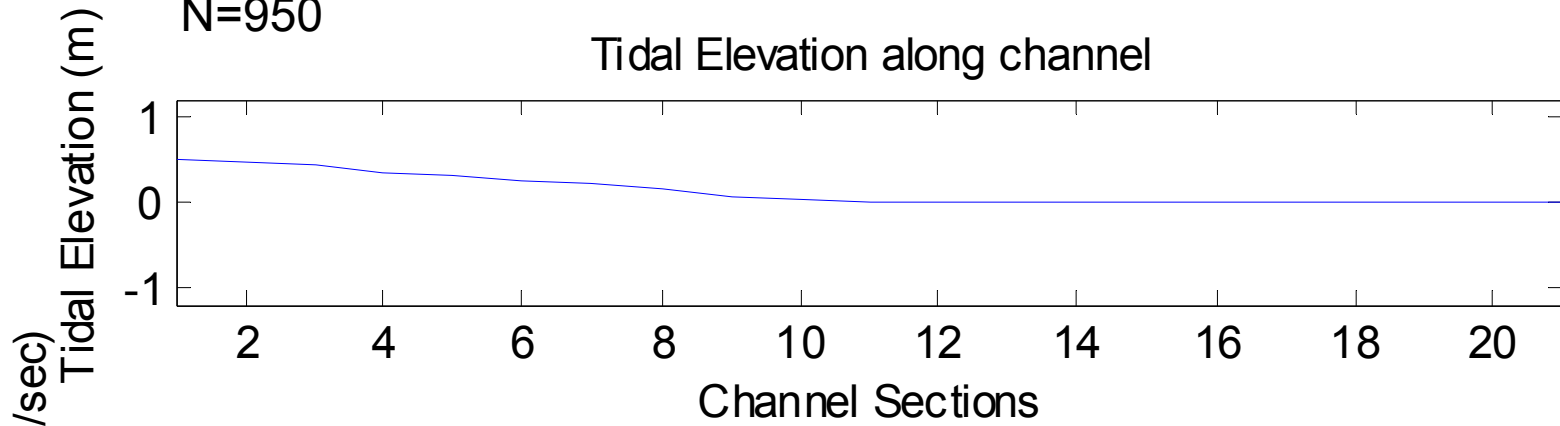


Pollutant Transfer along channel

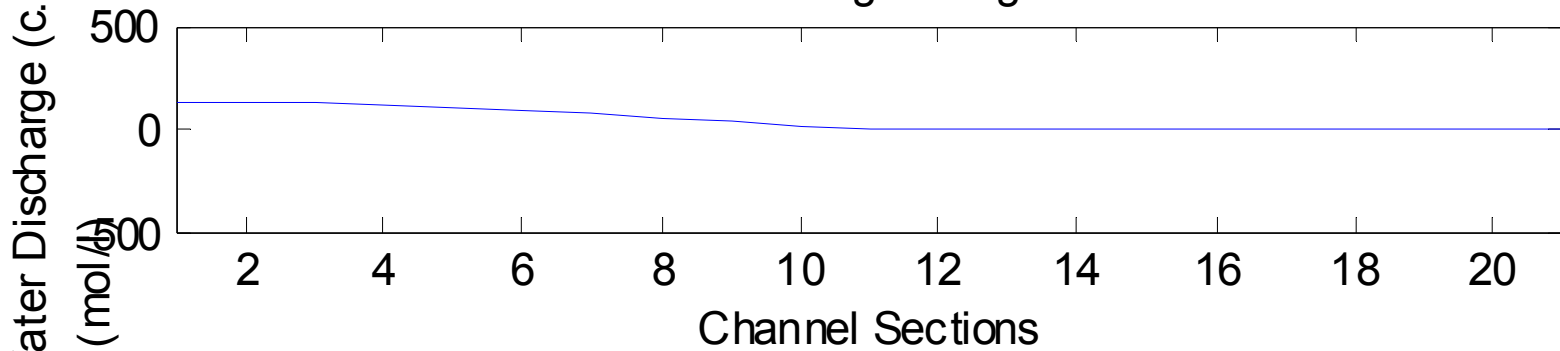


N=950

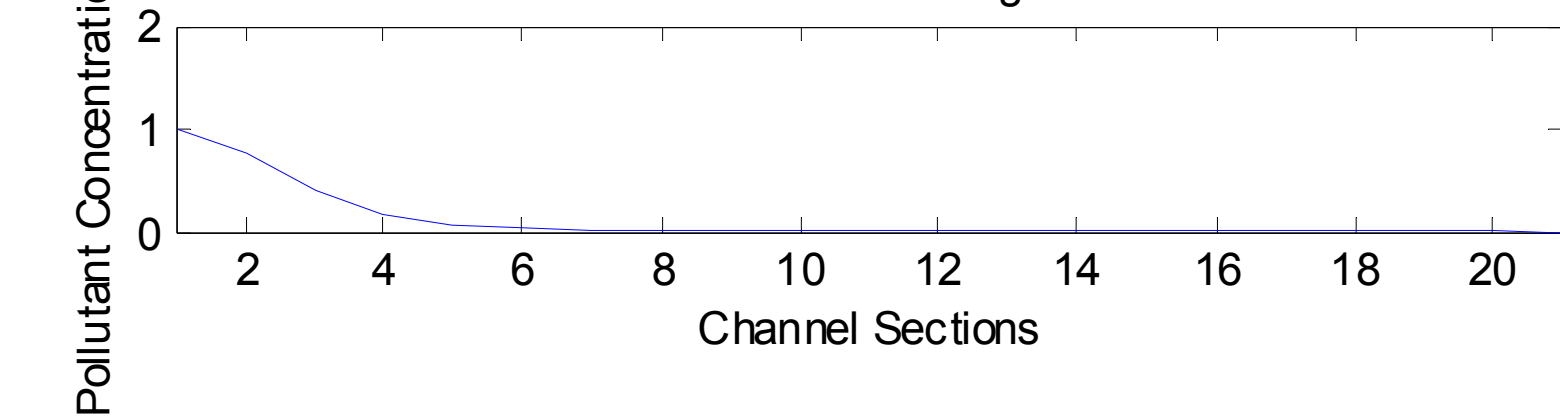
Tidal Elevation along channel



Water Discharge along channel



Pollutant Transfer along channel



A Dynamic One-Dimensional Model of Hydrodynamics and Water Quality

EPD-RIV1

<http://www.epa.gov/athens/wwqtsc/html/epd-riv1.html>

Εξισώσεις Ομοιώματος

Continuity

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q$$

Momentum

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(UQ)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gA \left(S_o - S_f - \frac{h_E}{\Delta x} \right) + qU_q$$

Τοπικός
Όρος

Μεταφορά
Μάζας

Επίδραση
βαθυμετρίας

Πιεσοβαθμί
δα

Τριβή
πυθμένα

Πλευρική
εισροή

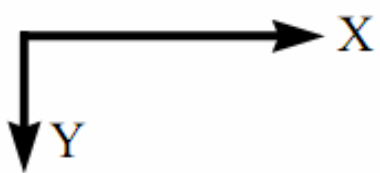
$$h_E = \frac{K_E}{2g} \left(\frac{Q}{A} \right)^2$$

Head losses – Απώλειες ορμής λόγω απότομων αλλαγών διατομής ποταμού (γέφυρες, άλλα έργα), όπου K_E συντελεστής απώλειας ορμής ίσος περίπου με 0.5.

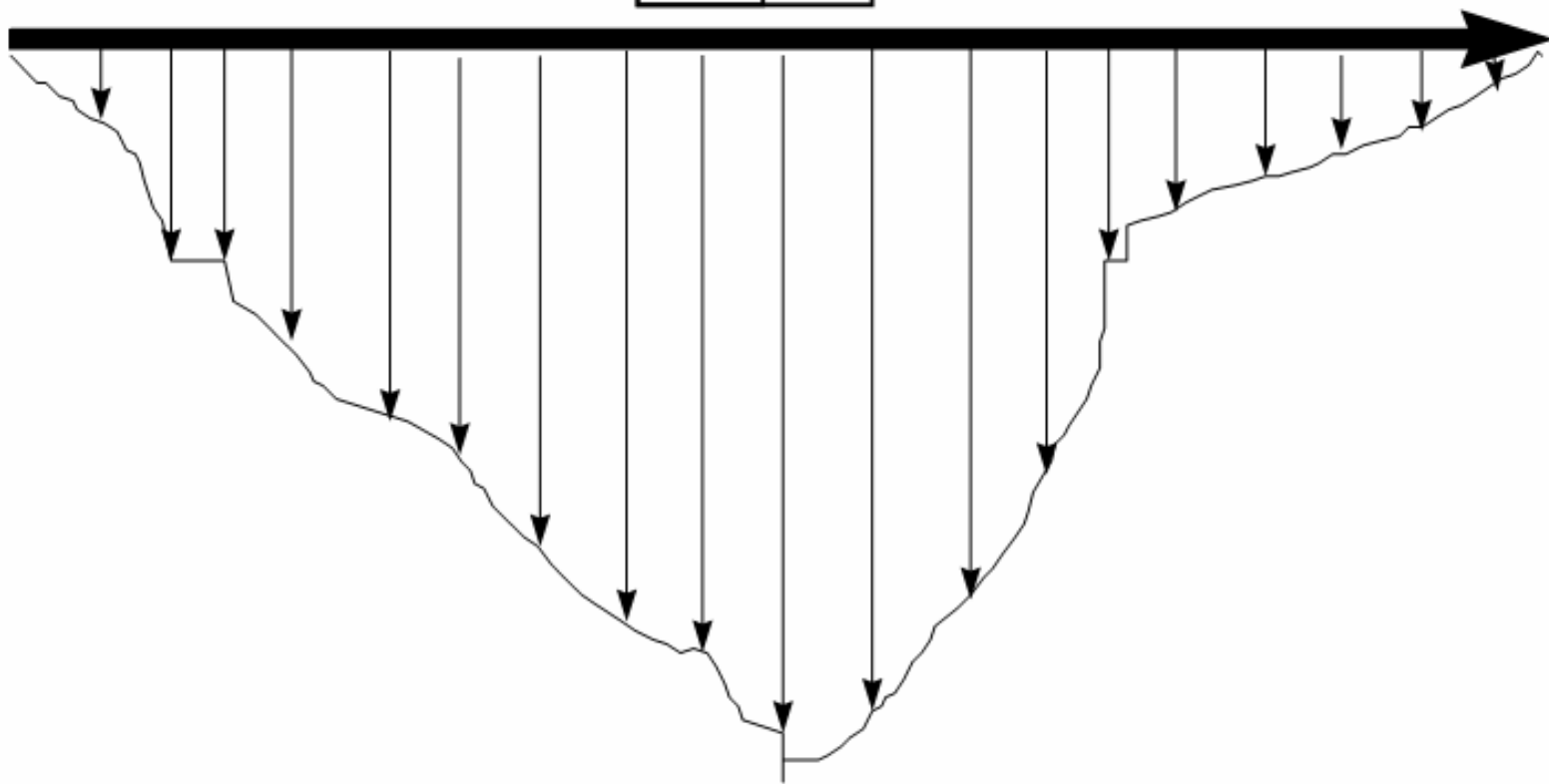
$$A = C_1 H + C_2 H^{C_3}$$

Εμβαδόν διατομής, με H τη στάθμη και $C_1 - C_3$ συντελεστές που ορίζουν το σχήμα της διατομής. Αν $C_2 = 0$ θεωρούμε ορθογώνια διατομή πλάτους C_1 . Για ελλειπτική διατομή, C_1 είναι το ήμισυ του μήκους του κατακόρυφου άξονα, C_2 το ήμισυ του μήκους του οριζόντιου άξονα και $C_3 = -1$. Για κυκλική διατομή $C_1 = C_2$.

Σύνθετες Διατομές



Y	X
0	0
•	•
•	•
•	•
•	•
•	•
•	•



Μεταφορά Ρύπων

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{q}{A} (\gamma - \alpha) - K_s \alpha + \text{SINKS}$$

Ομοίωμα Στρωματοποιημένων Ροών (2 Στρώσεις)

- Εφαρμόζεται σε περίπτωση κατακόρυφης διαστρωμάτωσης πυκνότητας
- Αποτελείται από δύο επάλληλα ομοιώματα ολοκληρωμένης κατά τη διατομή ροής ανά στρώμα
- Εφόσον είναι αρχικά γνωστή η θέση του πυκνοκλινούς (κατά την έναρξη του ομοιώματος), τότε εφαρμόζουμε σε κάθε στρώμα της ροής τις εξισώσεις:

* Εξίσωση Διατήρησης Μάζας ή Εξίσωση Συνέχειας

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_0 h_0) + \frac{\partial}{\partial y} (V_0 h_0) = 0$$

$$\frac{\partial (\zeta - \zeta_0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Uh) + \frac{\partial}{\partial y} (Vh) = 0$$

* Εξίσωση Κίνησης

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\tau_{sx} - \tau_{ix}}{\lambda \rho_0 h} + fV$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\tau_{sy} - \tau_{iy}}{\lambda \rho_0 h} - fU$$

Άνω στρώμα

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\lambda g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - (1 - \lambda) g \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \frac{\tau_{ix} - \tau_{bx}}{\rho_0 h} + fV_0$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} = -\lambda g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - (1 - \lambda) g \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \frac{\tau_{iy} - \tau_{by}}{\rho_0 h} - fU_0$$

Κάτω στρώμα

Όπου $\lambda = \rho/\rho_0$ ο λόγος μεταξύ των δύο πυκνοτήτων

ÓΠΟΥ

$$\frac{\tau_{sx}}{\rho_0} = k_w W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$$
$$\frac{\tau_{sy}}{\rho_0} = k_w W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$$

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho_0} = k_b U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2}$$
$$\frac{\tau_{by}}{\rho_0} = k_b U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2}$$

$$\frac{\tau_{ix}}{\rho_0} = (U - U_0) k_i \sqrt{(U - U_0)^2 + (V - V_0)^2}$$
$$\frac{\tau_{iy}}{\rho_0} = (V - V_0) k_i \sqrt{(U - U_0)^2 + (V - V_0)^2}$$

$$O[k_w] = 5 \cdot 10^{-6}$$

$$O[k_i] = 10^{-3}$$

$$O[k_b] = 5 \cdot 10^{-2}$$