Παράκτια Υδραυλική & Τεχνολογία

Διεργασίες Μεταφοράς και Διάχυσης Ρύπων στο Παράκτιο Περιβάλλον

Δρ. Γιώργος Συλαίος
Ωκεανογράφος – Επ. Καθηγητής ΤΜΠ-ΔΠΘ

Εσωτερικές Φυσικές & Βιογεωχημικές Διεργασίες

1. Δεδομένα Πεδίου (Βαθμονόμηση, Πιστοποίηση Ομοιώματος)
2. Χρήση Μαθηματικών Ομοιωμάτων

Τι είναι ένα Μαθηματικό Ομοίωμα ;

Ορίζεται ως η διαδικασία αναπαράστασης φυσικών, χημικών ή/και βιολογικών διεργασιών με τη μορφή <u>μαθηματικών εξισώσεων</u>, καταστρωμένων με τρόπο ώστε αυτές να <u>περιγράφουν</u> τις διεργασίες του υδατικού συστήματος <u>επαρκώς</u> και με <u>ακρίβεια</u>.

Ποια είναι τα χαρακτηριστικά του Μαθηματικού Ομοιώματος ?

1. **Αντικείμενο & Στόχοι ανάπτυξης**
   (βασική έρευνα, εφαρμογή, περιγραφή διεργασιών, πρόγνωση συμπεριφοράς συστήματος, κλπ.)

3. **Μεταβλητές και Διεργασίες που προσομοιώνονται**

4. **Διαστάσεις Μ.Ο.**
   - **0 διάσταση χώρου (box models)**
   - **1 διάσταση χώρου (1D steady state model)**
   - **1 διάσταση χώρου + χρόνος (1D dynamic model)**
   - **2 διαστάσεις χώρου (2D steady state model)**
   - **2 διαστάσεις χώρου (x, y ή x, z) + χρόνος (2D dynamic model)**
   - **3 διαστάσεις χώρου (3D steady state model)**

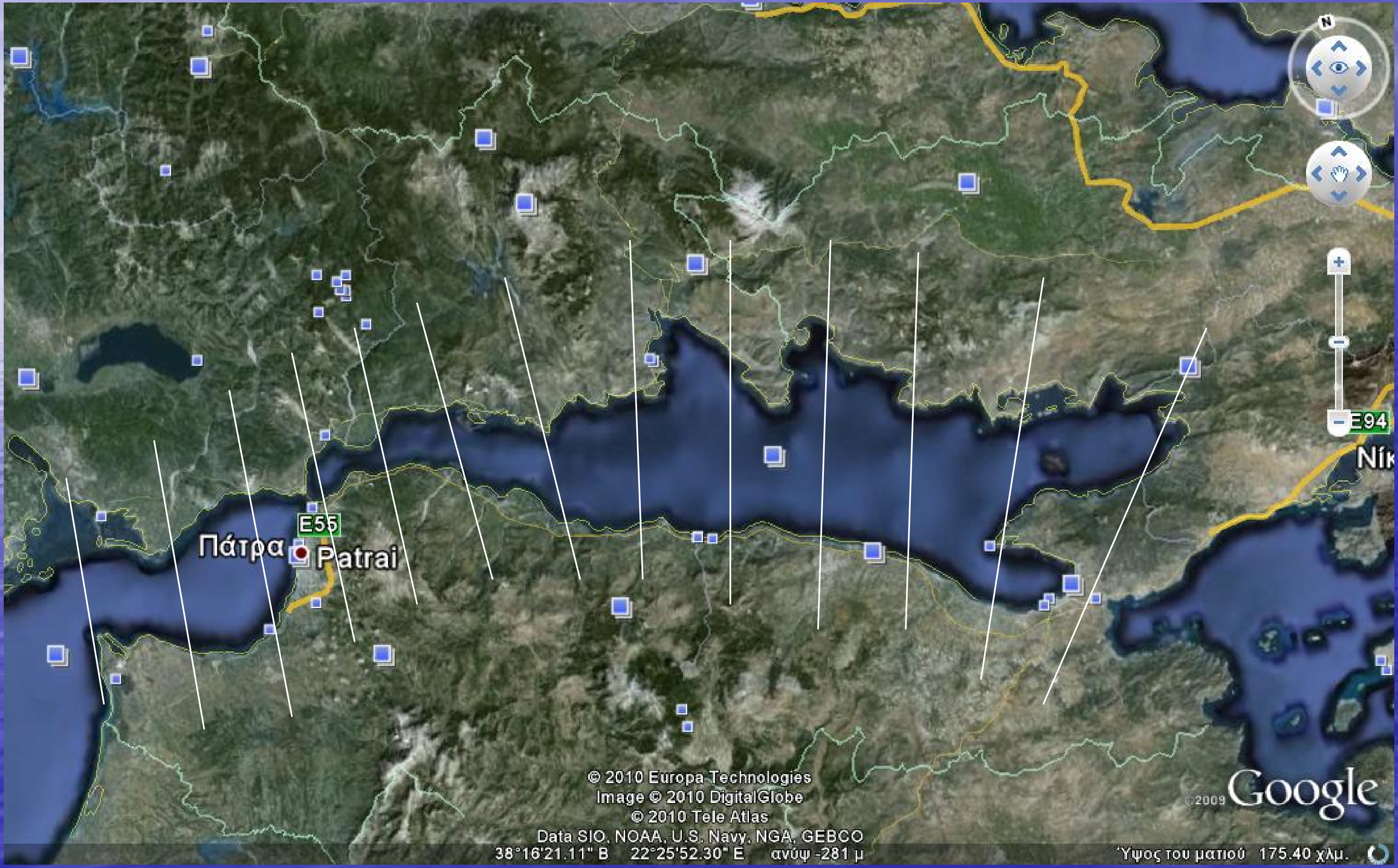
5. **Μέθοδος Επίλυσης (αναλυτική, αριθμητική)**

Μαθηματικό Ομοίωμα 1-διάστασης

Βήμα 1 – Διακριτοποίηση Περιοχής Μελέτης

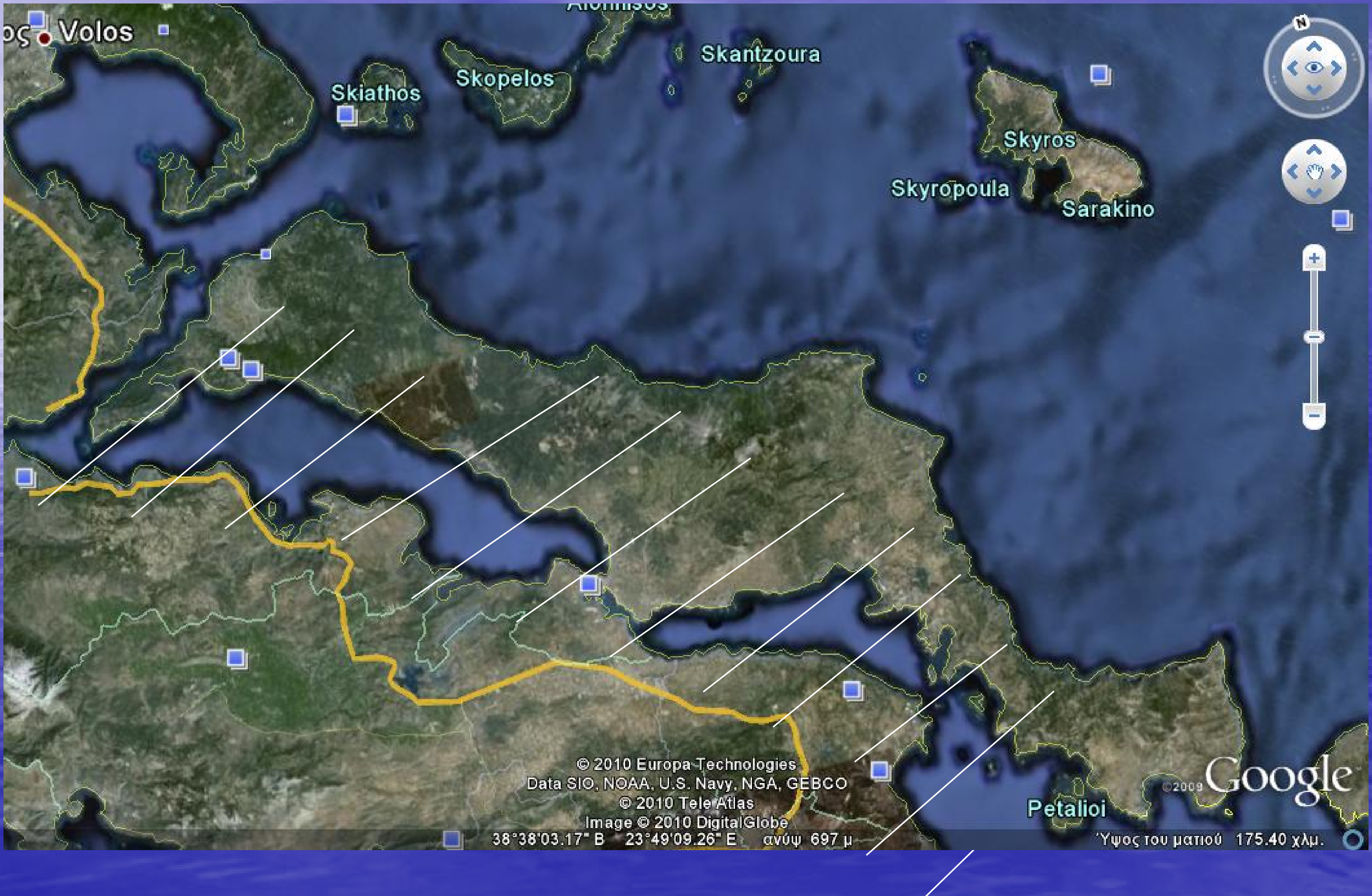
Μαθηματικό Ομοίωμα 1-διάστασης

Βήμα 1 – Διακριτοποίηση Περιοχής Μελέτης

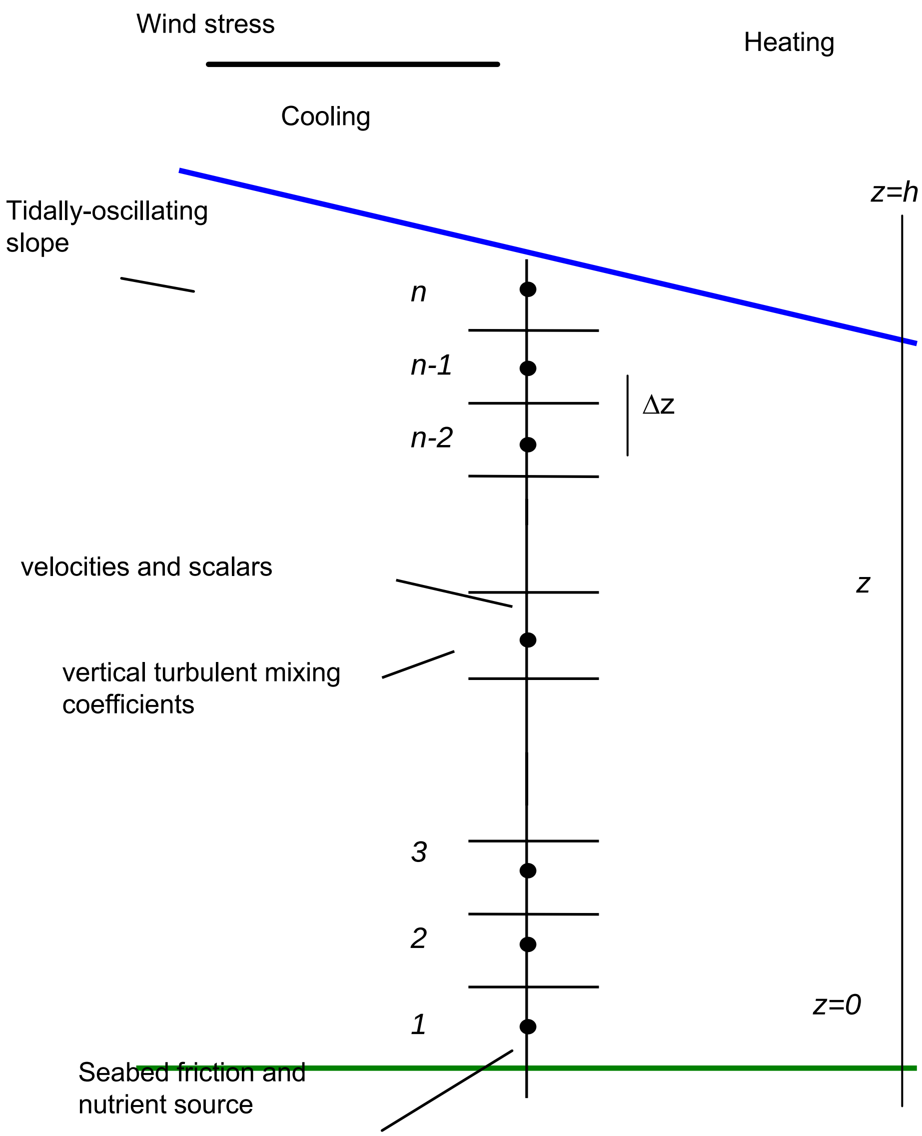


Μαθηματικό Ομοίωμα 1-διάστασης

Βήμα 1 – Διακριτοποίηση Περιοχής Μελέτης

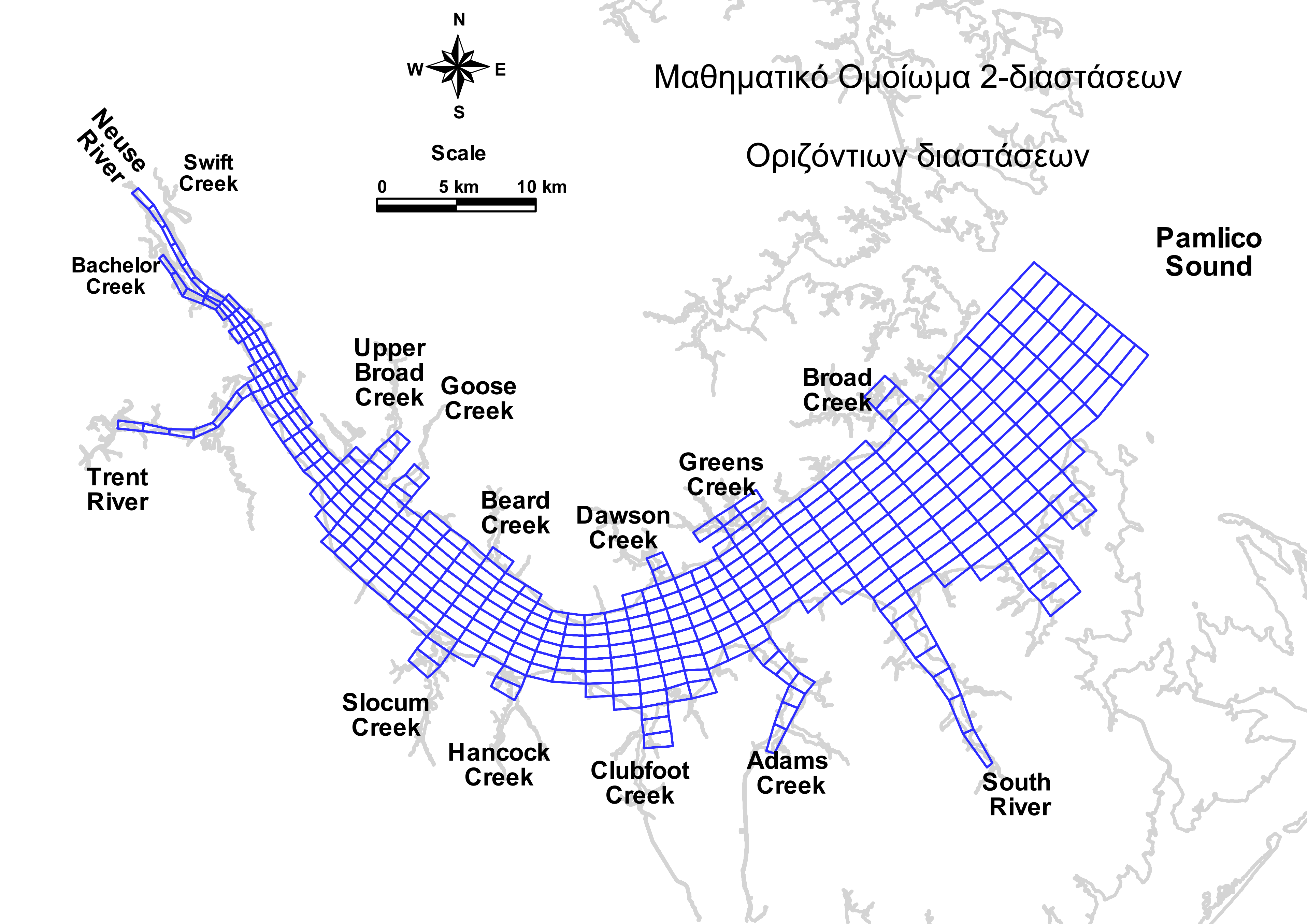


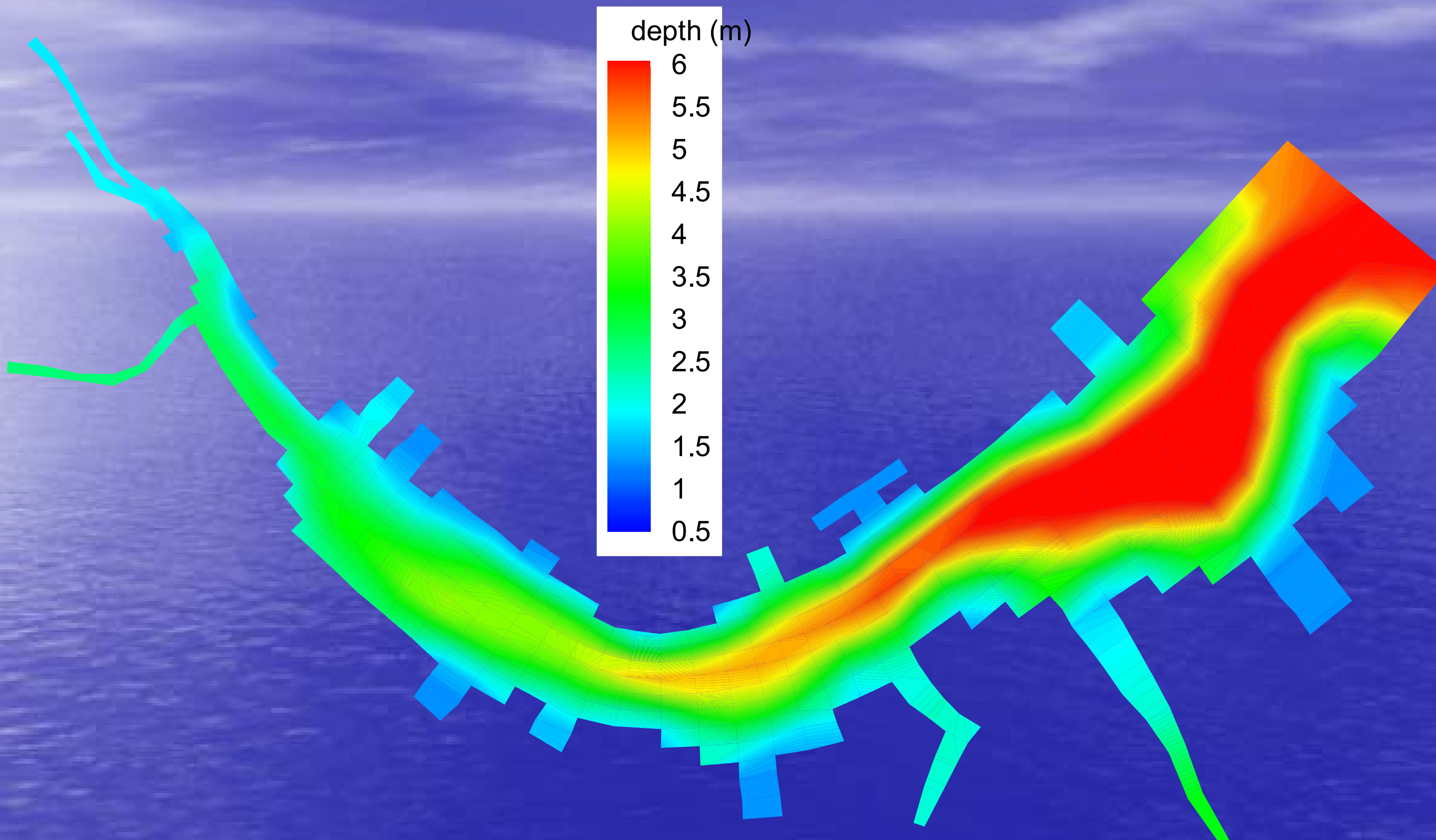
Μαθηματικό Ομοίωμα 1-διάστασης



Κατακόρυφη διάσταση

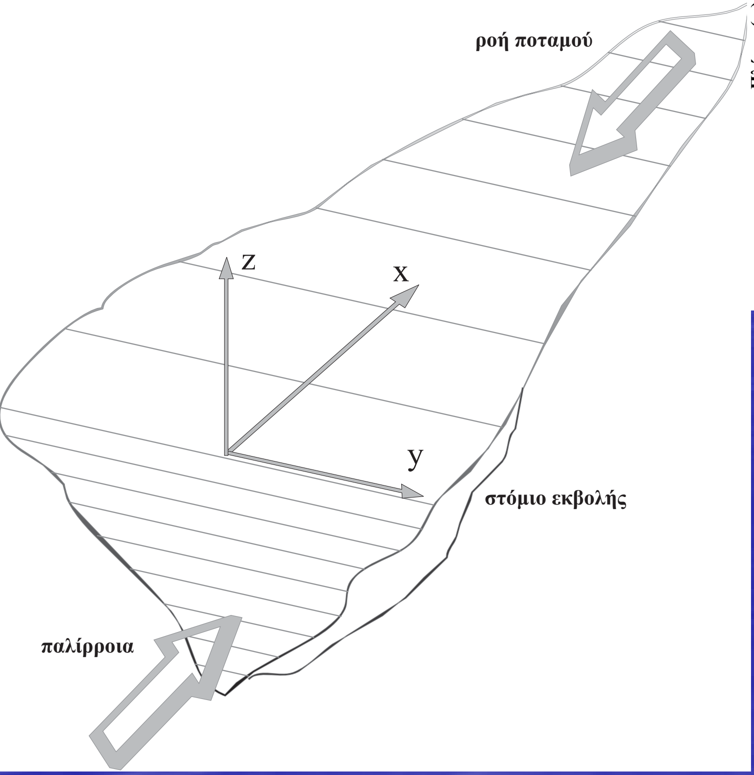
Χρονική μεταβολή στρωματοποίησης – αποστρωματοποίησης υδάτινης στήλης

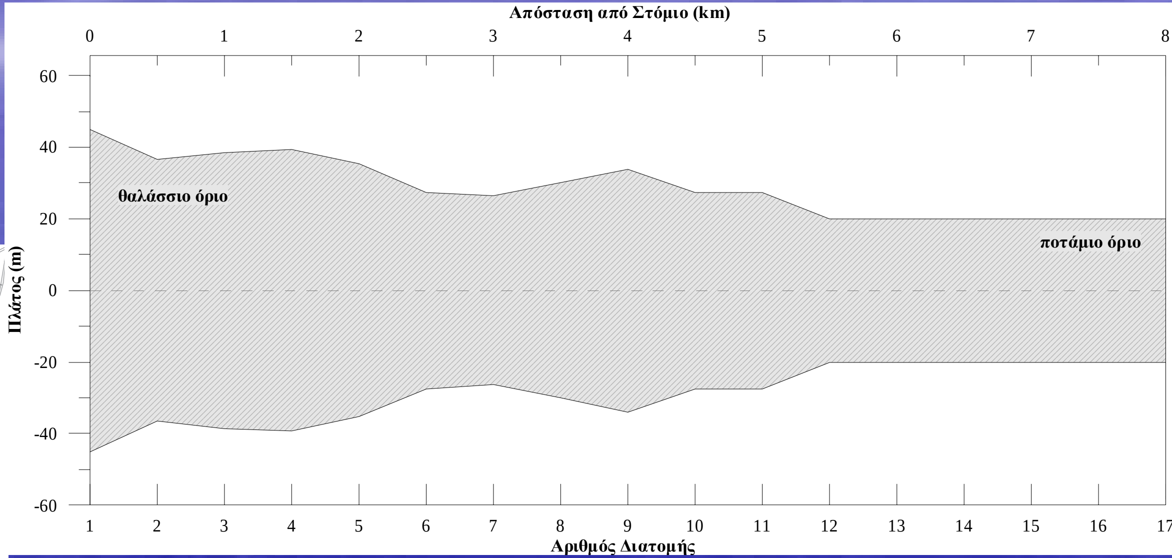

Μαθηματικό Ομοίωμα 2-διαστάσεων
Οριζόντιων διαστάσεων
N
W
E
S
Scale
0
5 km
10 km
Neuse River
Swift Creek
Bachelor Creek
Trent River
Upper Broad Creek
Goose Creek
Beard Creek
Dawson Creek
Greens Creek
Broad Creek
Pamlico Sound
Slocum Creek
Hancock Creek
Clubfoot Creek
Adams Creek
South River


depth (m)
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5

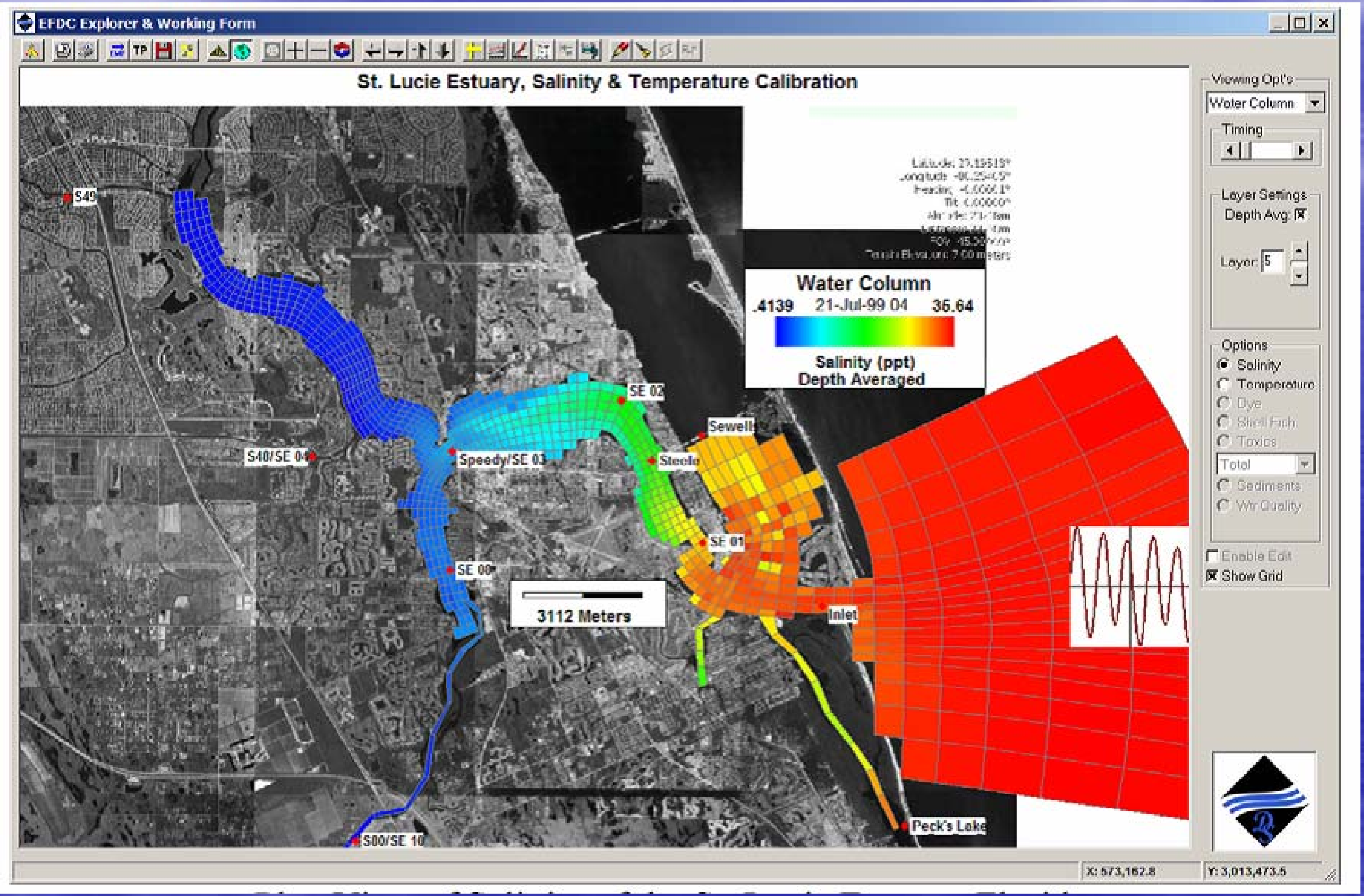
Μαθηματικό Ομοίωμα 2-διαστάσεων

Οριζόντιας Διαμήκους – Κατακόρυφης Διάστασης

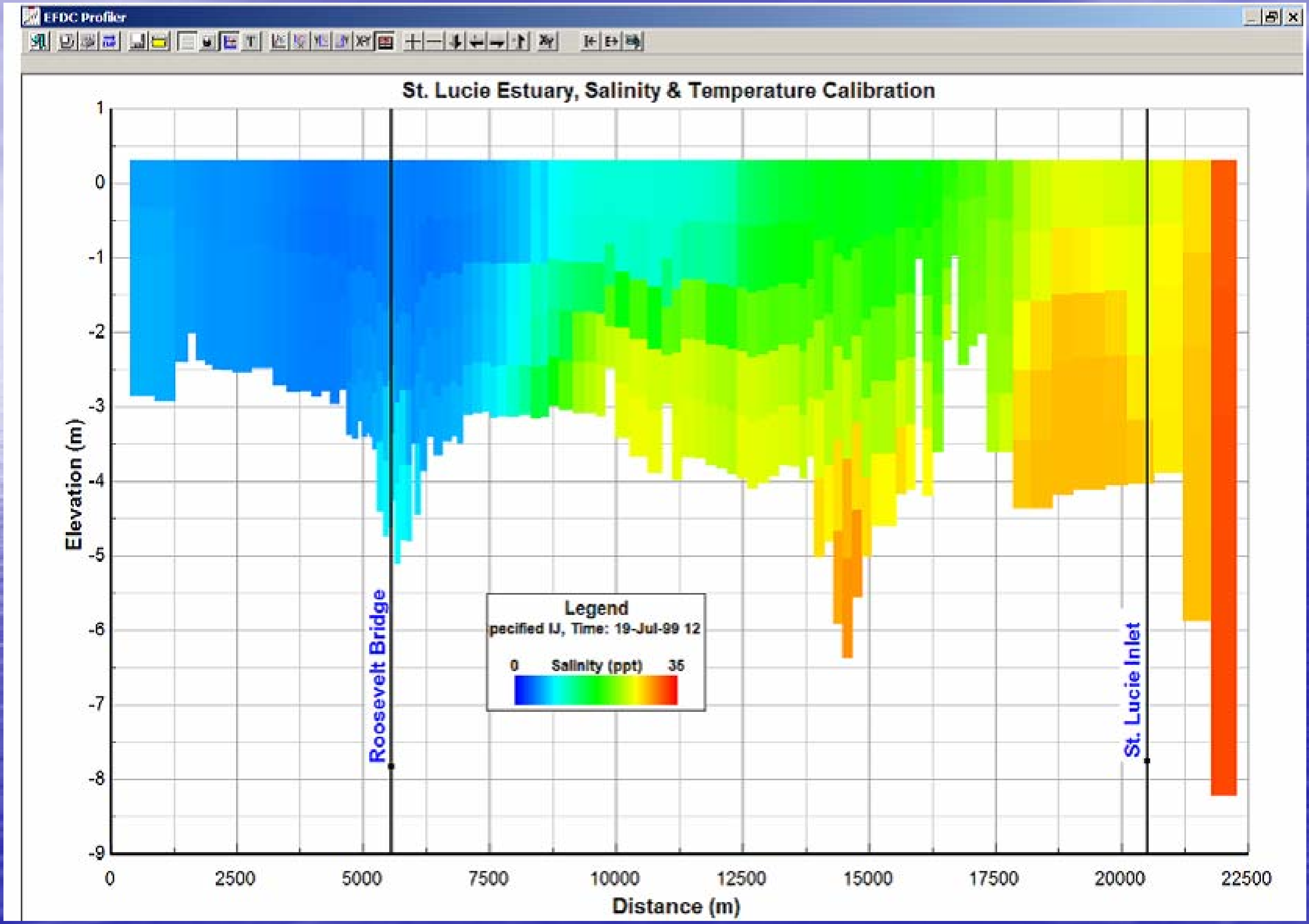




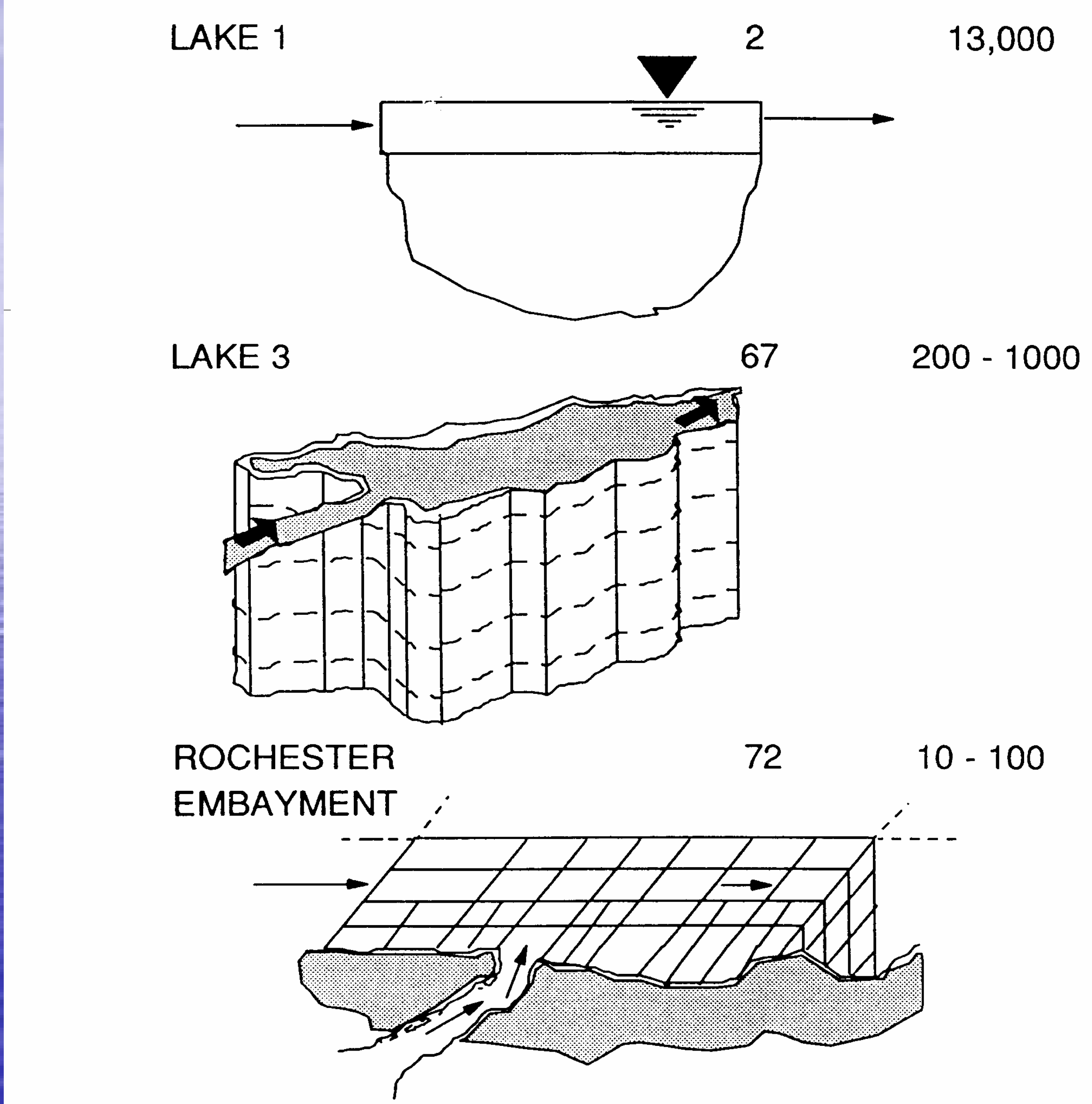
Μαθηματικό Ομοίωμα 3-διαστάσεων



Μαθηματικό Ομοίωμα 3-διαστάσεων



Τρισδιάστατο Μαθηματικό Ομοίωμα



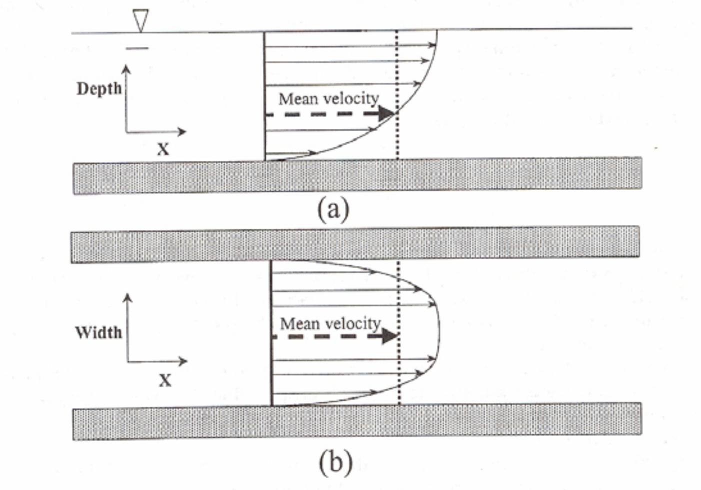
Βήμα 1

Χωρική Διακριτοποίηση

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

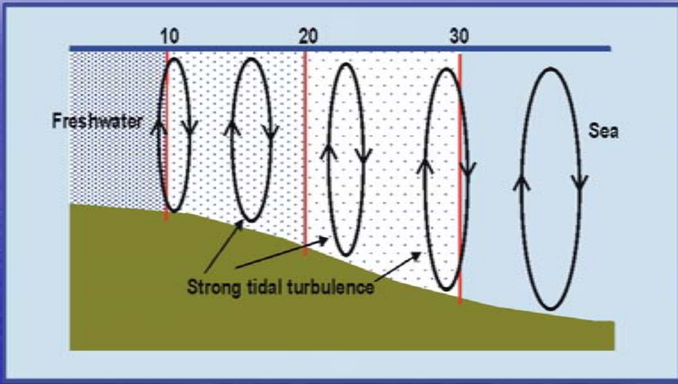
Μονοδιάστατη ροή - σύστημα:

- Όταν το σύστημα (ποτάμι – ποταμο-εκβολή) θεωρούνται επαρκώς αναμιγμένα τόσο κατά τη πλευρική όσο και κατά την κατακόρυφη διάσταση
- *Τα ποτάμια τυπικά εμφανίζουν μονοδιάσταστη συμπεριφορά*
- *Υπάρχουν διαμήκεις βαθμίδες στη ροή*
- *Οι ρύποι θεωρούνται πλήρως αναμεμιγμένοι σε κάθε διατομή*
- *Δεν υπάρχουν κατακόρυφες βαθμίδες θερμοκρασίας*



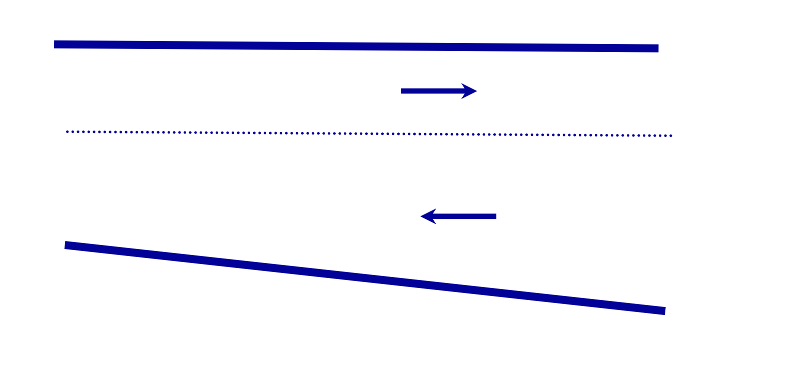
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Διδιάστατη ροή – σύστημα (Οριζόντια)



- *Θεωρούμε ότι το παράκτιο σύστημα είναι πλήρως αναμεμιγμένο*
- *Οι ρύποι είναι κατακόρυφα αναμιγμένοι*
- *Δεν υπάρχουν κατακόρυφες βαθμίδες θερμοκρασίας – αλατότητας - πυκνότητας*
- *Οι μεταβολές των παραμέτρων συμβαίνουν μόνο κατά το οριζόντιο επίπεδο σε όλη τη περιοχή μελέτης*
- *Η ταχύτητα ροής θεωρείται ομοιόμορφη με το βάθος*

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ



Διδιάστατη ροή – σύστημα (Κατακόρυφο)

- *Θεωρούμε ότι το παράκτιο σύστημα είναι κατακόρυφα στρωματοποιημένο*
- *Οι ρύποι δεν είναι κατακόρυφα αναμιγμένοι*
- *Υπάρχουν κατακόρυφες βαθμίδες θερμοκρασίας – αλατότητας - πυκνότητας*
- *Σημαντικές μεταβολές στην ένταση και τη διεύθυνση της ροής συμβαίνουν κατά το κατακόρυφο άξονα*

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τρισδιάστατες ροές - συστήματα:

- *Κατακόρυφα στρωματοποιημένα συστήματα*
- *Οι ρύποι δεν είναι πλήρως αναμιγμένοι κατά το κατακόρυφο άξονα*
- *Υπάρχουν κατακόρυφες βαθμίδες θραμοκρασίας – αλατότητας - πυκνότητας*
- *Υπάρχουν οριζόντιες βαθμίδες στις ταχύτητες ροής*
- *Υπάρχουν οριζόντιες και κατακόρυφες μεταβολές σε όλη τη περιοχή μελέτης*

Μαθηματική Προσομοίωση Παράκτιων Διεργασιών

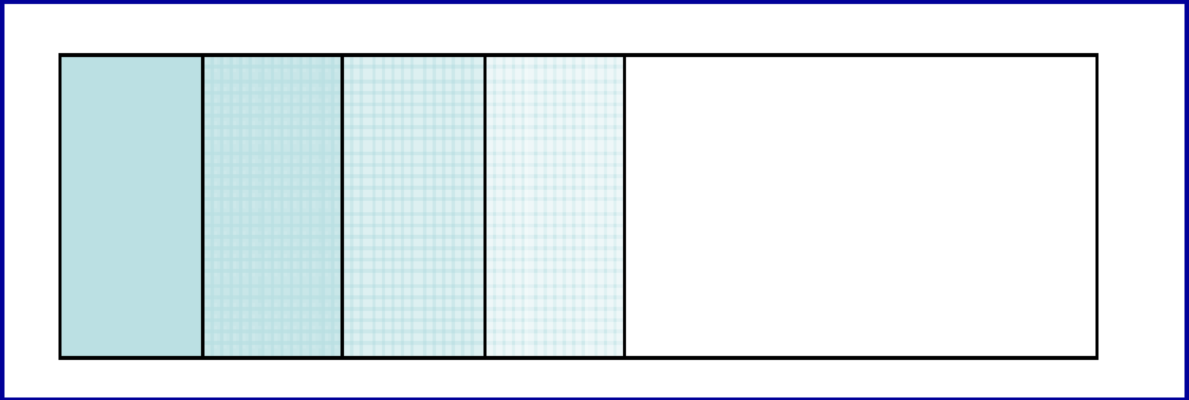
I. Μεταφορά και Διάχυση Ρύπου

ΔΙΑΧΥΣΗ ΡΥΠΩΝ – ΝΟΜΟΣ FICK

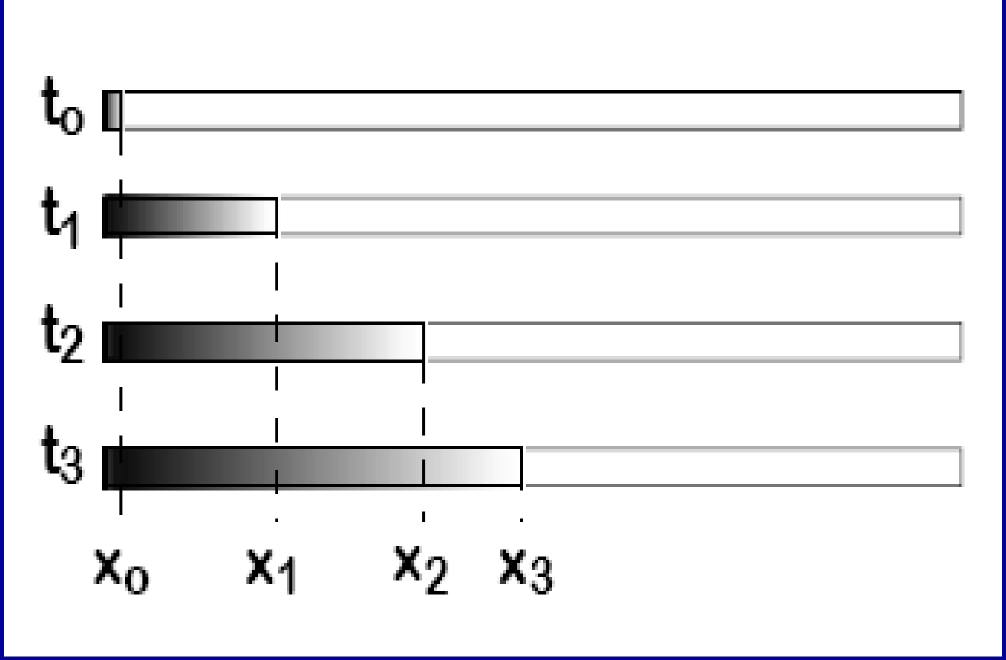
1ος Νόμος Fick:
Η ροή μάζας ενός ρύπου, δηλ. η συνολική μάζα του ρύπου που διέρχεται από μία μοναδιαία επιφάνεια, ανά μονάδα χρόνου, είναι ανάλογη της βαθμίδας συγκέντρωσης του ρύπου κατά τη διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια.

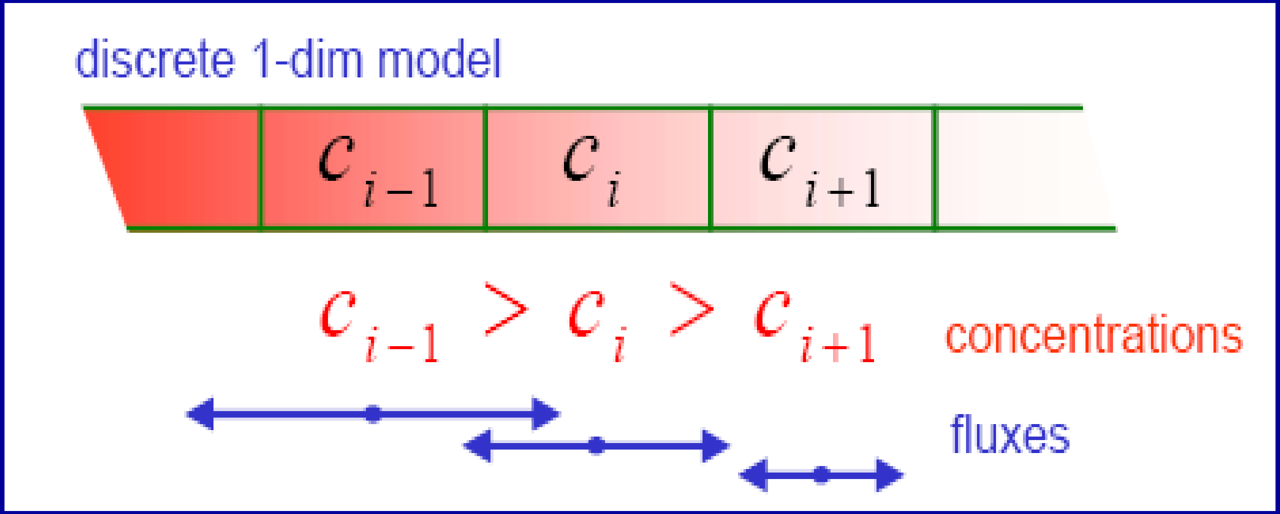
$$\boxed{q = -D\frac{\partial C}{\partial x}}$$

Όπου q είναι η ροή μάζας ($ML^{-2}T^{-1}$), δηλ. μάζα ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου, και
D είναι ο συντελεστής μοριακής διάχυσης (L^2/T) (Molecular Diffusion Coefficient)



Η Βαθμίδα Συγκέντρωσης δημιουργεί Διάχυση





Όσο μεγαλύτερη είναι η βαθμίδα συγκέντρωσης, δηλ. η διαφορά συγκέντρωσης στο χώρο, τόσο μεγαλύτερη είναι και η ροή διάχυσης

Νόμος Fick στις τρεις διαστάσεις (3-D Fickian Diffusion)

$$\boxed{\vec{q} = -D\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)}$$

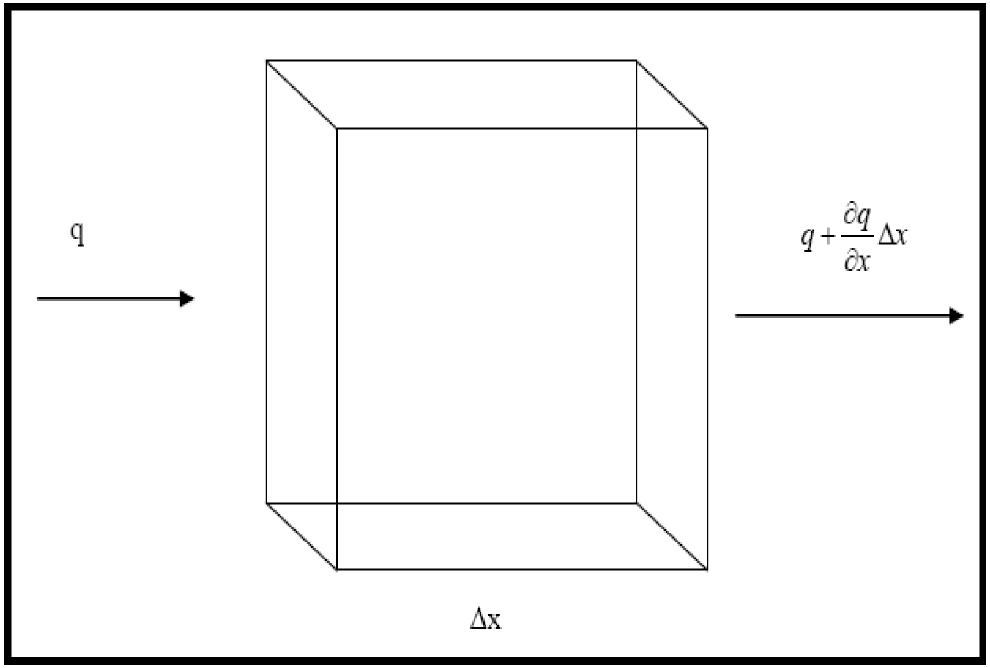
$$\boxed{\vec{q} = -D\nabla C}$$

Όπου $\vec{q}$ είναι το άνυσμα της ροής μάζας με συνιστώσες (q_x, q_y, q_z)

Συνεπώς, ο 1ος Νόμος του Fick συνδέει τη ροή μάζας μίας ουσίας με τη βαθμίδα συγκέντρωσης της ουσίας αυτής.

2ος Νόμος Fick:

Έστω μονοδιάστατη ροή μάζας κατά τη x-διεύθυνση, μέσα από στοιχειώδη όγκο πλευράς Δx.



Σχήμα 2. Μονοδιάστατη μεταφορά μάζας.

Ροή μάζας στη θέση x:

$$q(x,t)$$

Ροή μάζας στη θέση x+Δx:

$$q(x,t) + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\Delta x$$

Άρα, διαφορά ροής μάζας:

$$(\frac{\partial q}{\partial x})\Delta x$$

Εφόσον υπάρχει μεταβολή στη ροή μάζας κατά τη x-διεύθυνση, άρα υπάρχει και χρονική μεταβολή στη συγκέντρωση C του στοιχειώδους όγκου:

$$\frac{\partial C}{\partial t}\Delta x$$

Προκύπτει λοιπόν, ότι η διαφορά ροής μάζας είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της συκέντρωσης στο εσωτερικό του στοιχειώδους όγκου, δηλ.:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial t}=0}$$

Εξίσωση Διατήρησης Μάζας

Η εξίσωση διατήρησης μάζας συνδέει τη ροή μάζας με τη συγκέντρωση του ρύπου.

Άρα,

$$q = -D\frac{\partial C}{\partial x}$$

1ος Νόμος Fick

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Εξίσωση Διατήρησης Μάζας

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-D\frac{\partial C}{\partial x}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$

2ος Νόμος Fick

Επίσης, αν διαφορίσω την εξίσωση διατήρησης μάζας:

$$\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial t}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial t}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial C}{\partial x}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{q}{D})=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}-\frac{1}{D}(\frac{\partial q}{\partial t})=0$$

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t}=D\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}$$

2ος Νόμος Fick

Οι εξισώσεις Διάχυσης περιγράφουν τη μεταφορά μάζας λόγω διάχυσης Fick.

Υπάρχει μεγάλος αριθμός εφαρμογών των παραπάνω εξισώσεων (π.χ., q η ροή θερμότητας και T η θερμοκρασία)

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$

2ος Νόμος Fick – 1 Διάσταση

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)}$$

2ος Νόμος Fick – 3 Διαστάσεις

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C}$$

2ος Νόμος Fick – 3 Διαστάσεις

Άρα προκύπτει η βασική εξίσωση διάχυσης μάζας, χωρίς μέση ταχύτητα. Η διάχυση υπάρχει λόγω της ύπαρξης βαθμίδας συγκέντρωσης.

Η εξίσωση περιγράφει τη διάχυση μίας μάζας M = C dV που εισάγεται στο νερό στο σημείο (x,y,z) τη χρονική στιγμή t.

Αναλυτική Λύση Εξίσωσης Fick

Μονοδιάστατη Περίπτωση

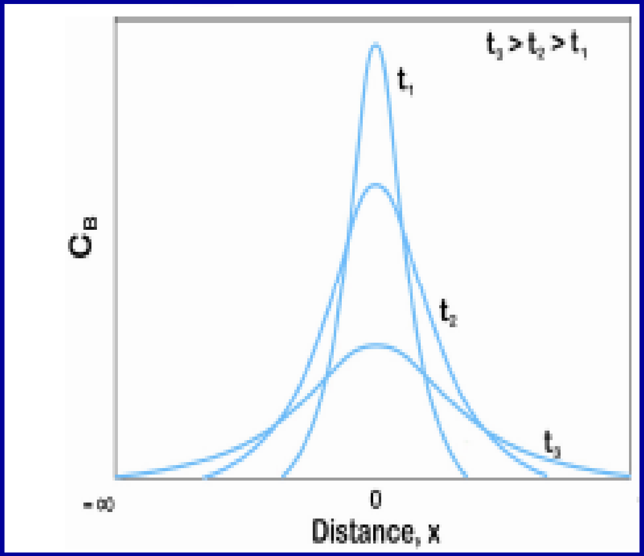
$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$

Παραβολική Μερική Διαφορική Εξίσωση

Η αναλυτική λύση της εξίσωσης:

$$\text{1-dim:}\quad c(x,t) = \frac{T}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-x^2/4Dt\right)$$

Ο παράγοντας 2 στο παρονομαστή δηλώνει ότι η διάχυση γίνεται και προς τι δύο κατευθύνσεις του x-άξονα



Η κατανομή της συγκέντρωσης ως προς το χρόνο είναι κανονική κατανομή Gauss

Αναλυτική Λύση Εξίσωσης Fick

Διδιάστατη Περίπτωση

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$$

2-dim: $c(x,y,t) = \frac{T}{4\pi Dt}\exp\left[-\left(x^2+y^2\right)/4Dt\right]$

Θεωρούμε το συντελεστή διάχυσης D να έχει ίσες τιμές και προς τις δύο διευθύνσεις

Αναλυτική Λύση Εξίσωσης Fick

Διδιάστατη Περίπτωση

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2})$$

$$c(x,y,t) = \frac{T}{4\pi\sqrt{D_x D_y t}} \exp\left[-\left(x^2/4D_x t + y^2/4D_y t\right)\right]$$

Θεωρούμε το συντελεστή διάχυσης D έχει διαφορετική τιμή ανά διεύθυνση διάχυσης

Αναλυτική Λύση Εξίσωσης Fick

Τρισδιάστατη Περίπτωση

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)$$

3-dim: $c(x,y,z,t) = \frac{T}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left[-\left(x^2+y^2+z^2\right)/4Dt\right]$

Θεωρούμε το συντελεστή διάχυσης D να έχει ίσες τιμές και προς τις τρεις διευθύνσεις

Αριθμητική Λύση Εξίσωσης Fick

Μονοδιάστατη Περίπτωση

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$

1. Αριθμητικό Σχήμα FTCS

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &\approx \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &\approx \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2}\end{aligned}\right\} \quad \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = D(\frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2})$$

$$C_i^{n+1} = C_i^n + (\frac{D\Delta t}{\Delta x^2})(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \Rightarrow$$

$$\boxed{C_i^{n+1} = C_i^n + d\,(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n)}$$

Όπου d ο αριθμός διάχυσης

$$C_i^{n+1} = C_i^n + \left(\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\right)\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{C_i^{n+1} = C_i^n + d\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n\right)}$$

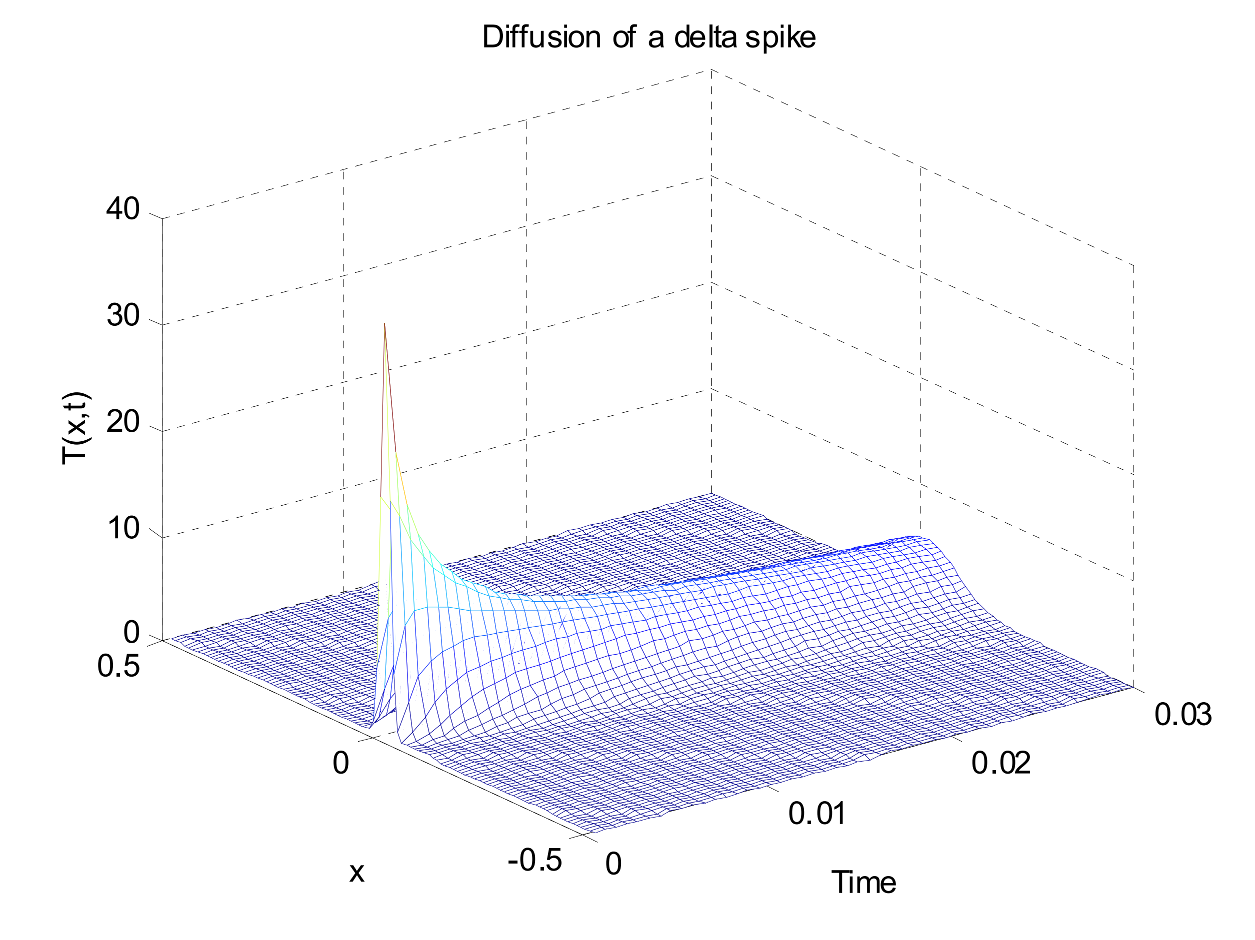
Για να είναι η αριθμητική λύση ευσταθής θα πρέπει να ισχύει:

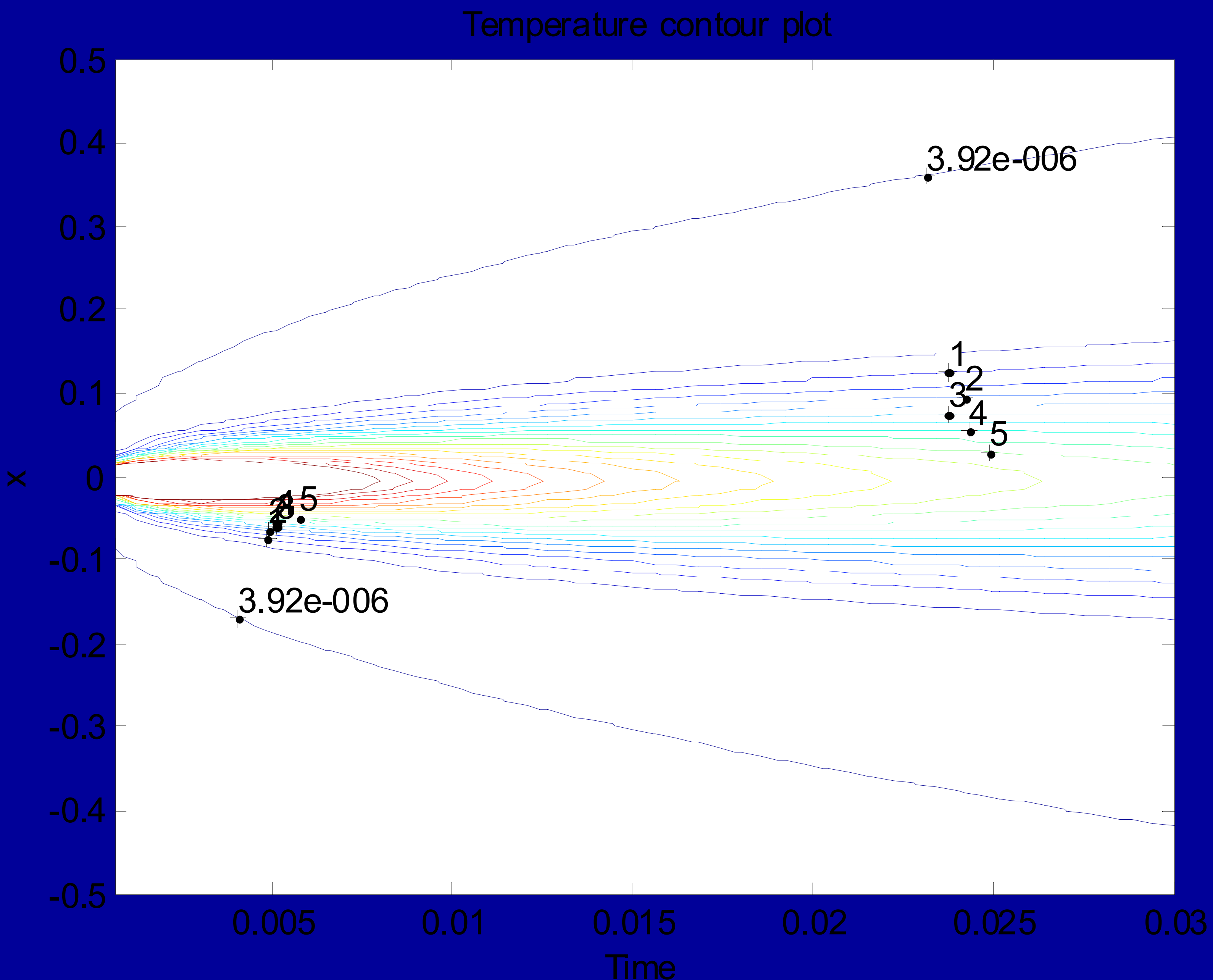
$$\boxed{d = \left(\frac{D\,\Delta t}{\Delta x^2}\right) \leq 0.5}$$

Υπολογίζω τη μονοδιάστατη διάχυση με τη χρήση του προγράμματος dftcs.m.

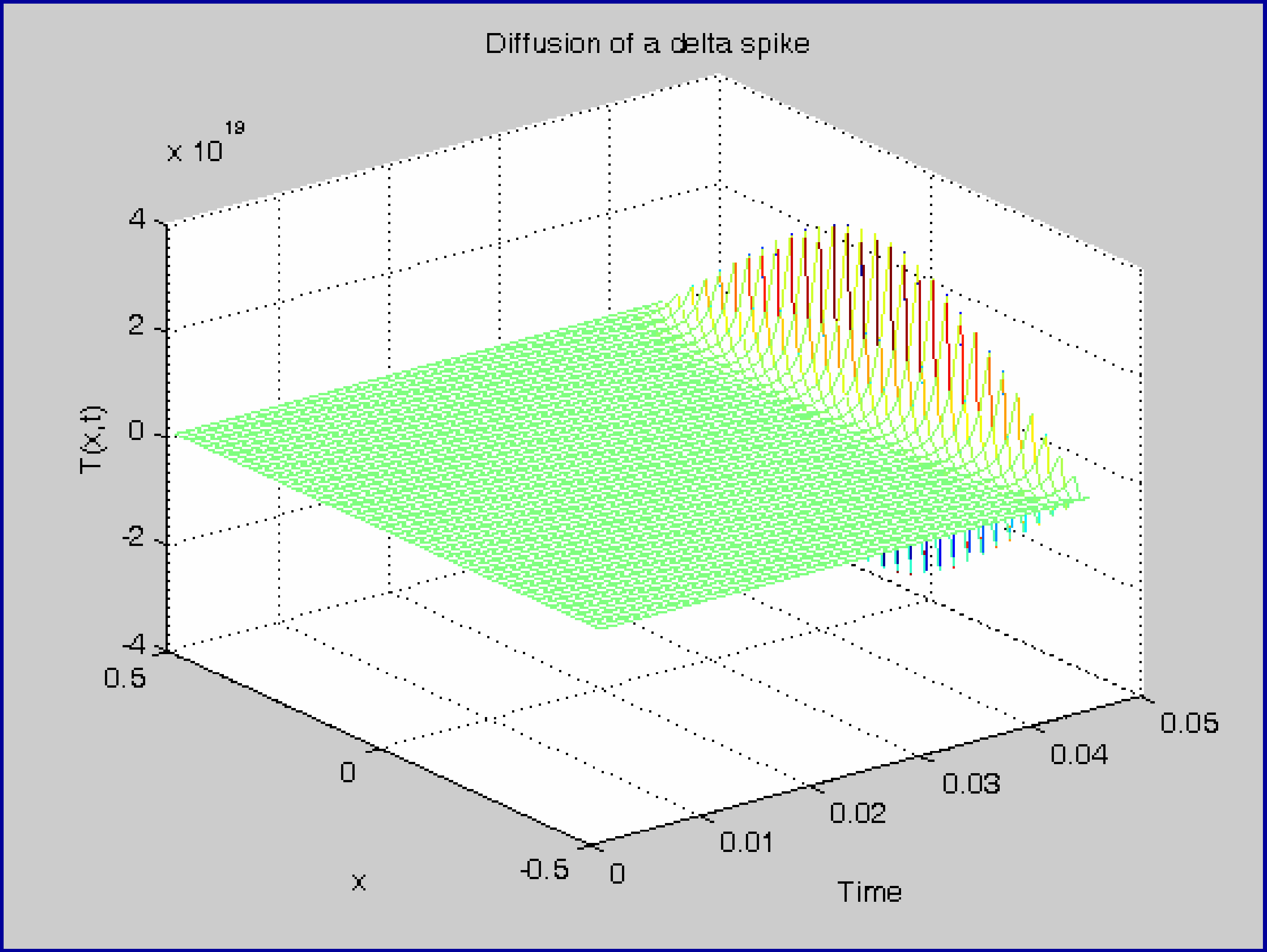
Ισχύουν: $L = 1$, $D = 0.1$

Για $N = 100$ και $\Delta t = 0.0001$ έχουμε $d = 0.09 < 0.5$ άρα αριθμητική ευστάθεια



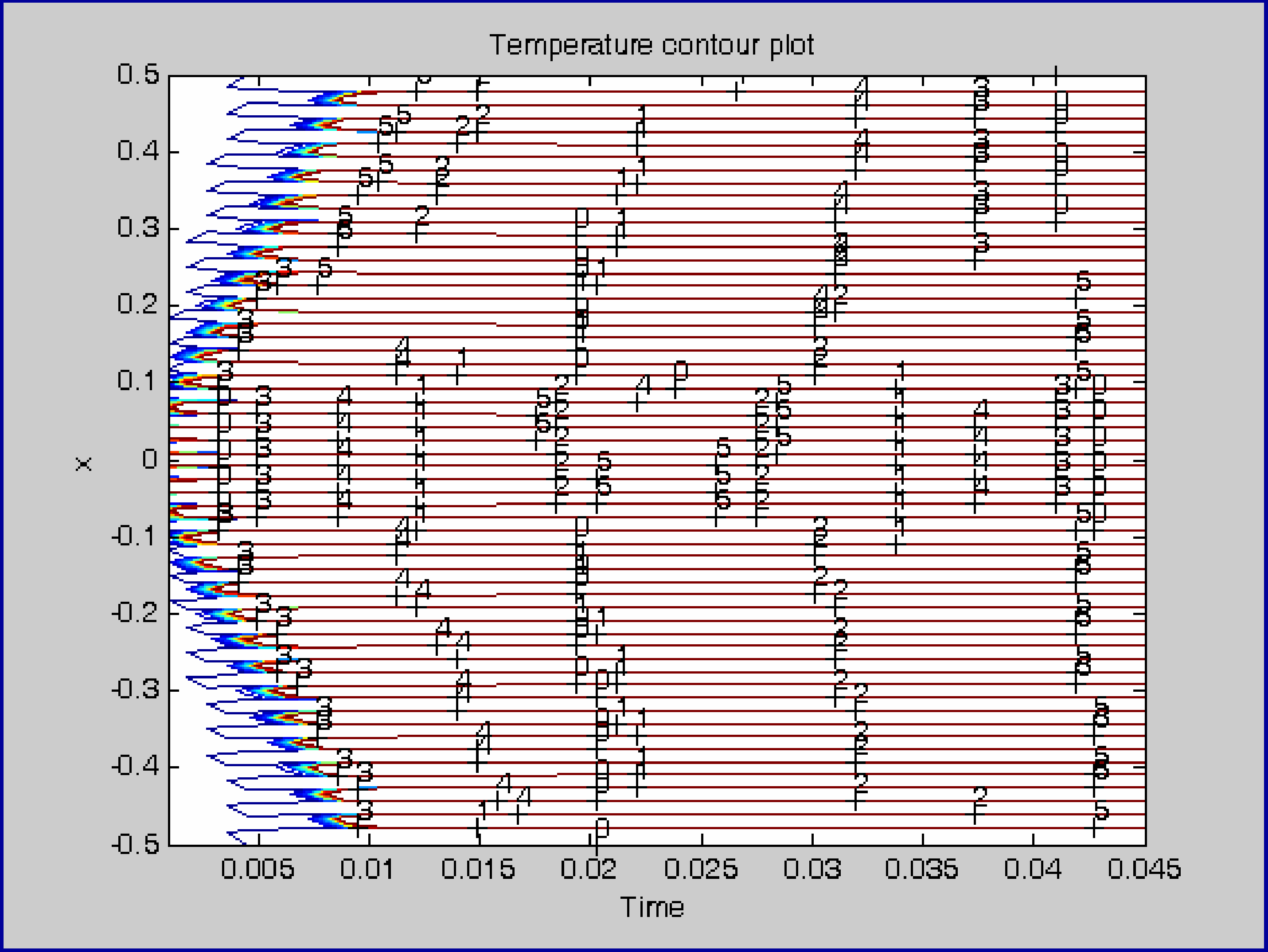

Temperature contour plot
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
x
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
Time
3.92e-006
3.92e-006
1
2
3
4
5

Τρέχουμε το πρόγραμμα dftcs.m
Dt = 0.00015; N=61



Τρέχουμε το πρόγραμμα dftcs.m

Dt = 0.00015; N=61



Οι ρύποι που εισέρχονται στο παράκτιο περιβάλλον διαχέονται (λόγω της παρουσίας της τύρβης) και μεταφέρονται λόγω των υπαρχόντων ρευμάτων (παλιρροιακά, ανεμογενή, γεωστροφικά, βαροκλινικά, υπολειπόμενα) προς διάφορες κατευθύνσεις.

Διάχυση ρύπων

Μεταφορά και διάχυση λόγω παλιρροιακών ρευμάτων

Επίδραση υπολειπόμενων ρευμάτων στη μεταφορά και διάχυση ρύπων

Μεταφορά ρύπων σε γειτονικές παράκτιες περιοχές λόγω ανεμογενούς επίδρασης

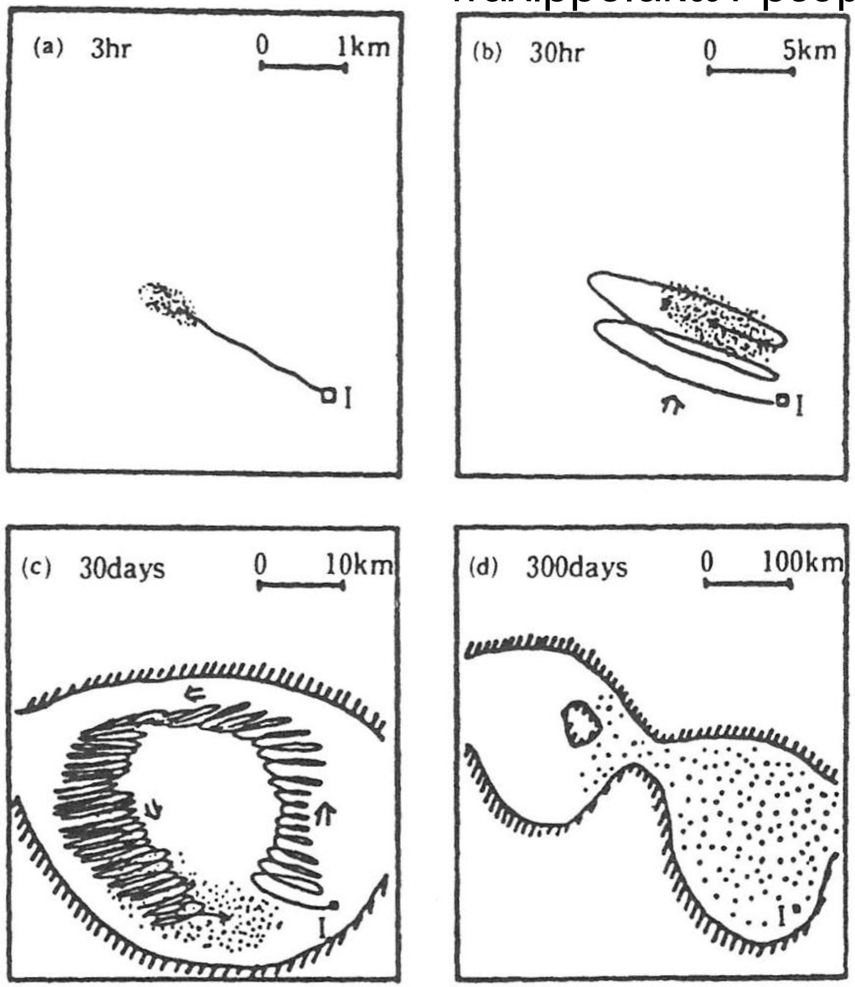


Figure 2.1: Schematic representation of material advection and dispersion injected at Stn.I in the coastal sea. The full line denotes the track of center of material and the white arrow the residual flow. See the text for details.

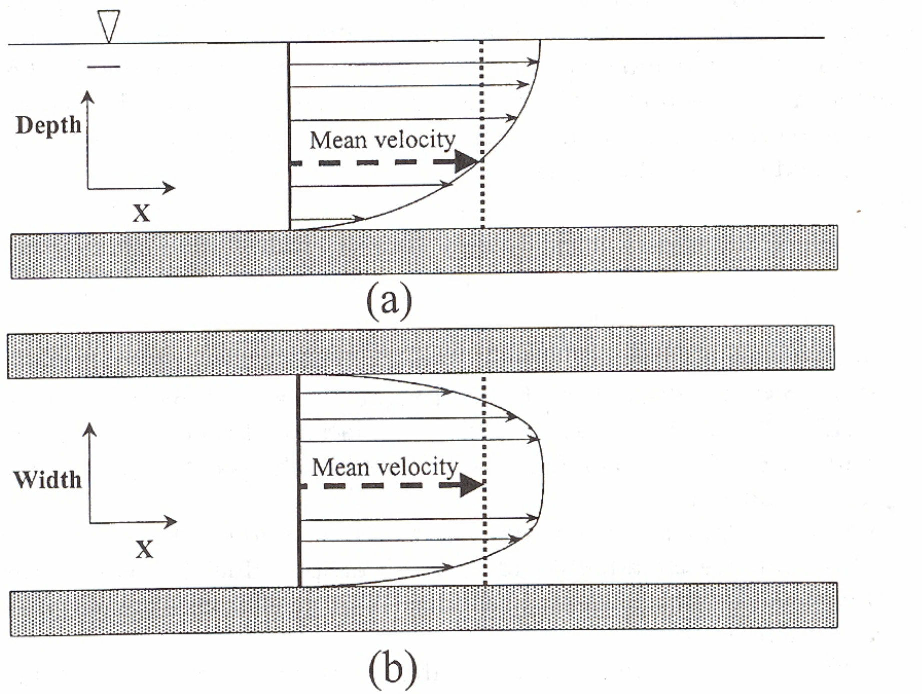
Ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης του ρύπου σε κάθε σημείο της παράκτιας θάλασσας περιγράφεται από την εξίσωση μεταφοράς – διάχυσης (advection – diffusion equation).

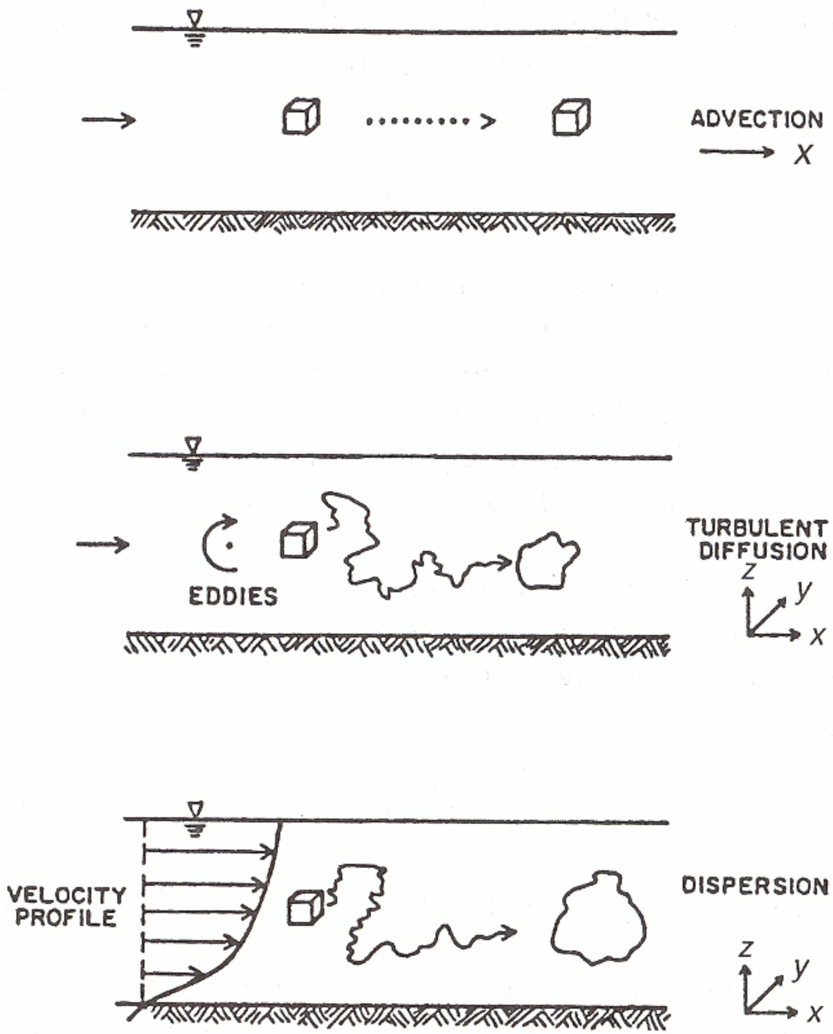
Η τρισδιάστατη εξίσωση μεταφοράς – διάχυσης γράφεται:

$$\underbrace{\frac{\partial C}{\partial t}}_{\substack{\text{Τοπικός}\\\text{Όρος}}}+\underbrace{U\frac{\partial C}{\partial x}+V\frac{\partial C}{\partial y}+W\frac{\partial C}{\partial z}}_{\substack{\text{Όροι μεταφοράς}\\\text{ρύπου}}}=\underbrace{K_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}}_{\substack{\text{Όροι οριζόντιας}\\\text{διάχυσης}}}+\underbrace{K_v\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}}_{\substack{\text{Όρος}\\\text{κατακόρυφης}\\\text{διάχυσης}}}+\underbrace{w_o\frac{\partial C}{\partial z}}_{\substack{\text{Όρος}\\\text{Κατακόρυφης}\\\text{βύθισης}}}+\underbrace{P-B}_{\substack{\text{Όροι παραγωγής ή}\\\text{απώλειας μάζας ρύπου}\\\text{λόγω βιογεωχημικών}\\\text{διεργασιών}}}$$

Ο όρος κατακόρυφης βύθισης και οι όροι παραγωγής – κατανάλωσης μάζας έχουν ισχύ μόνο σε μη-συντηρητικούς ρύπους. Σε περίπτωση συντηρητικών ουσιών, όπως η αλατότητα S, οι όροι αυτοί μηδενίζονται.

Μεταφορά Μάζας Ρύπου





Υπάρχουν δύο κύριες διεργασίες με τις οποίες η μάζα ενός ρύπου μετακινείται στο παράκτιο περιβάλλον. Η μεταφορά (advection) και η διάχυση (diffusion).

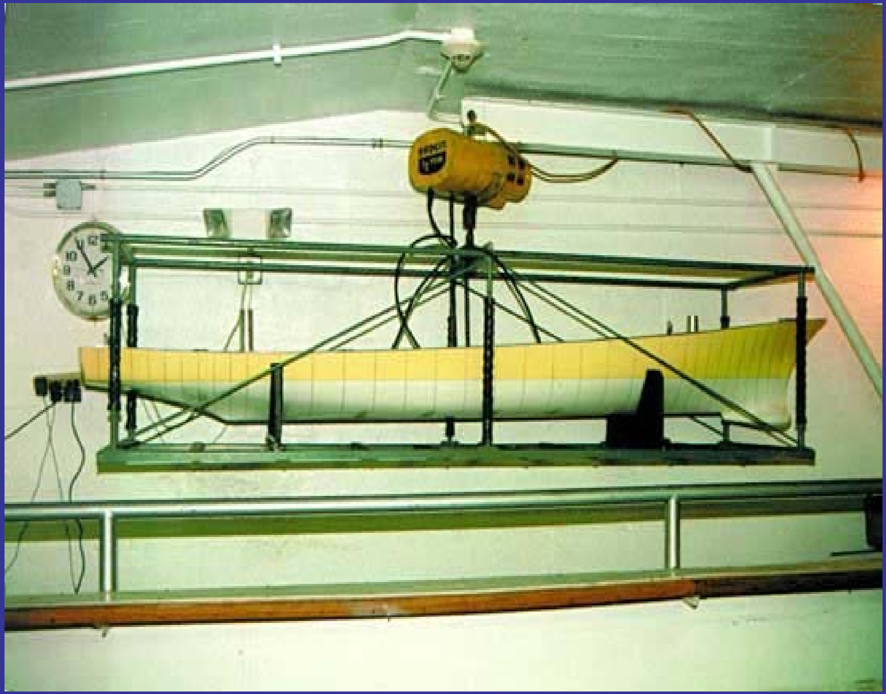
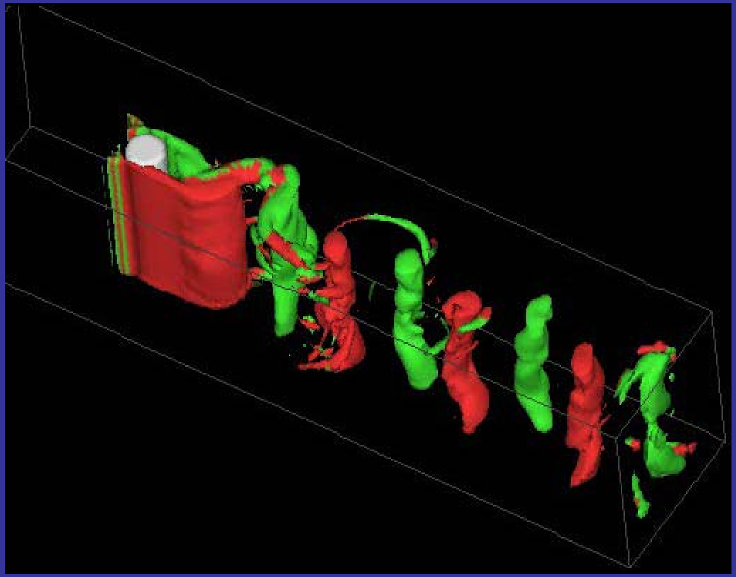
Αν η μεταφορά μάζας υπερτερεί της διάχυσης, τότε ο ρύπος κινείται κατά μήκος της ισοροϊκής καμπύλης. Αν η διάχυση ή η διασπορά υπερτερεί, τότε ο ρύπος κινείται κάθετα προς την ισοροϊκή καμπύλη.

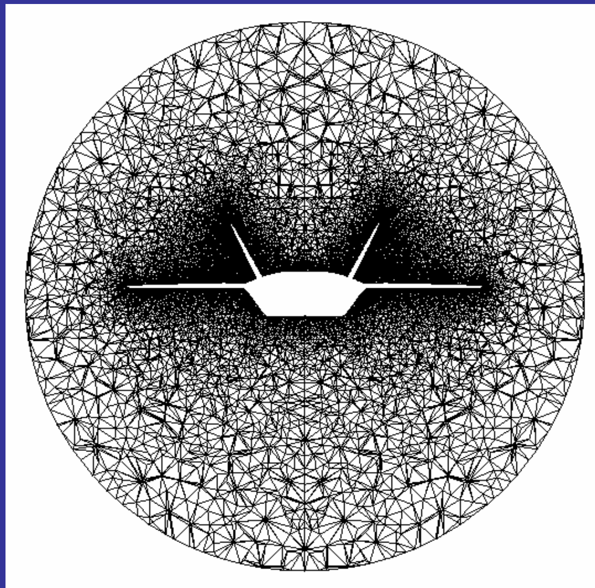
Ο λόγος των όρων που εκφράζουν οι δύο αυτές διεργασίες καλείται αριθμός Peclet.

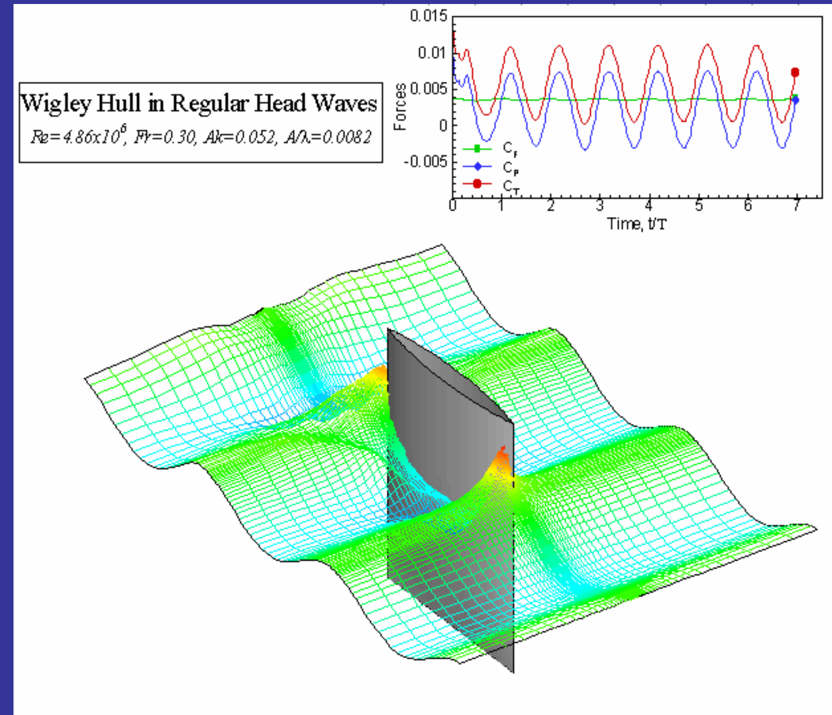
$$Pe = \frac{(UC + VC + WC)}{(K_x \frac{\partial C}{\partial x} + K_y \frac{\partial C}{\partial y} + K_v \frac{\partial C}{\partial z})}$$

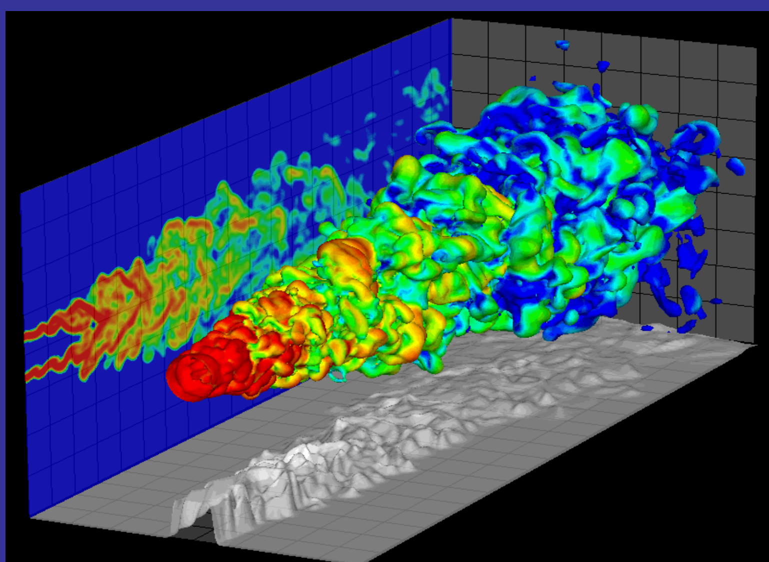
Η εξίσωση μεταφοράς – διάχυσης δείχνει ότι η συγκέντρωση σε ένα σημείο της παράκτιας θάλασσας θα μειωθεί, αν η ροή μάζας λόγω μεταφοράς και η ροής μάζας λόγω διάχυσης αποκλίνουν.

Αντίθετα, η συγκέντρωση σε ένα σημείο της παράκτιας θάλασσας θα αυξηθεί, αν η ροή μάζας λόγω μεταφοράς και η ροής μάζας λόγω διάχυσης συγκλίνουν.




Wigley Hull in Regular Head Waves
Re=4.86x10^6, Fr=0.30, Ak=0.052, A/λ=0.0082
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
Forces
C_f
C_p
C_T
0
1
2
3
4
5
6
7
Time, t/T



Μελέτη τυρβώδους διάχυσης στο στόμιο ενός ποταμού

Μεταφορά και διάχυση ρύπου που εκρέει σε ποταμό

Διεύθυνση ροής

Εκροή υγρών αποβλήτων από διαχυτήρα εργοστασίου

Συμβολή ροής δύο ποταμών με διαφορετικά χαρακτηριστικά

Ρεύματα Οριζόντιας Μεταφοράς Μάζας

Εξισώσεις Κίνησης

$$\vec{\gamma} = \frac{F}{m}$$

Επιτάχυνση = [Πίεση + Βαρύτητα + Τριβή + Παλίρροια]/ μονάδα μάζας

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\alpha \nabla p - 2\Omega \times V + g + F$$

Πίεση Coriolis Βαρύτητα Άλλες Δυνάμεις

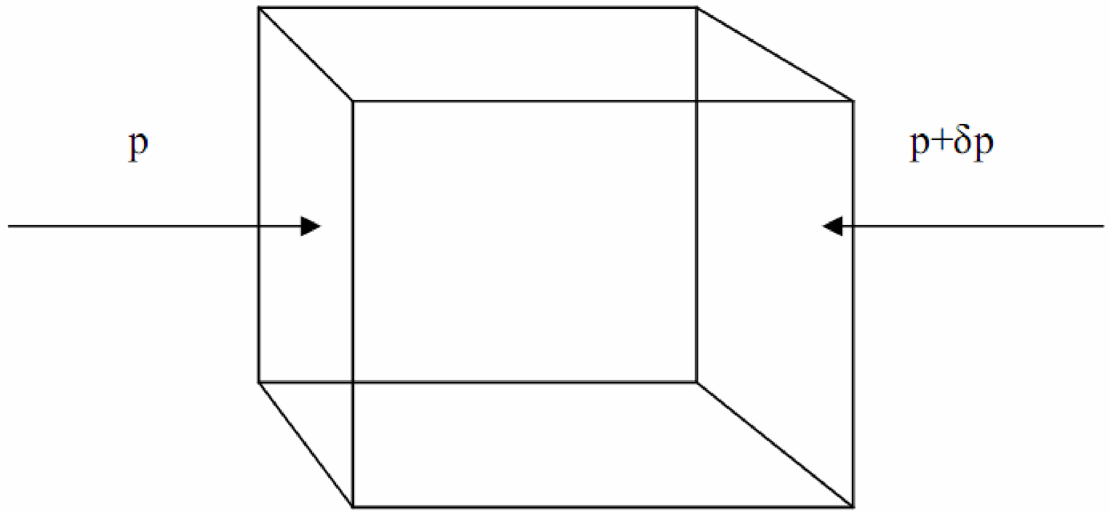
Συνιστώσες εξίσωσης κίνησης :

(x) $\rightarrow \dfrac{du}{dt} = -\alpha \dfrac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega \sin\phi\, v - 2\Omega \cos\phi\, w + F_x$

(y) $\rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -\alpha \dfrac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega \sin\phi\, u + F_y$

(z) $\rightarrow \dfrac{dw}{dt} = -\alpha \dfrac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega \cos\phi\, u - g + F_z$

Όρος Πίεσης



Υδροστατική Πίεση

Αριστερή έδρα $\rightarrow$ + p δy δz

Δεξιά έδρα $\rightarrow$ - (p + δp) δy δz

Καθαρή Πίεση κατά τη x-διεύθυνση : -i δp δy δz = -i (∂p/∂x) δx δy δz = -i (∂p/∂x) ανά μονάδα όγκου και -i (∂p/∂x) (1/ρ) = -i α (∂p/∂x) ανά μονάδα μάζας, όπου i το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη x -διεύθυνση.

Αν θεωρήσουμε τις τρεις διευθύνσεις, η ολική πίεση γράφεται :

$$-\alpha\left(\vec{i}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial y}\right)=-\,\alpha\nabla\,p$$

όπου

$$\nabla\equiv\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial\,x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial\,y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial\,z}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι αν υπάρχει αυξημένη υδροστατική πίεση στα δεξιά του όγκου, τότε δημιουργείται δύναμη πίεσης προς τα αριστερά.

Όρος Coriolis

Ο όρος αυτός προκύπτει από τη περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της.

Όταν γίνει ο μετασχηματισμός στους άξονες της περιστρεφόμενης Γης με τη χρήση της παραπάνω εξίσωσης, έχουμε :

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_e = -\alpha \nabla p \underbrace{- 2\Omega \times V}_{\text{Επιτάχυνση Coriolis}} + g_f \underbrace{- \Omega \times (\Omega \times R)}_{\text{Φυγόκεντρος Επιτάχυνση}} + F$$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = g_f - \Omega \times (\Omega \times R)$ εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος. Έχει τη μέγιστη τιμή στους Πόλους όπου η φυγόκεντρος επιτάχυνση μηδενίζεται και την ελάχιστη τιμή στον Ισημερινό όπου η φυγόκεντρος επιτάχυνση παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Η διαφορά αυτή ωστόσο είναι μικρότερη του 0,5% της τιμής του g και θεωρείται αμελητέα.

Συνιστώσες εξίσωσης κίνησης :

$$(x) \rightarrow \frac{du}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega \sin\phi\, v - 2\Omega \cos\phi\, w + F_x$$

$$(y) \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega \sin\phi\, u + F_y$$

$$(z) \rightarrow \frac{dw}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega \cos\phi\, u - g + F_z$$

Αναλύοντας τον όρο της επιτάχυνσης Coriolis έχουμε:

$2\Omega \cos\varphi w$ ο οποίος είναι αμελητέος

Εξίσωση κίνησης x-διεύθυνσης

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + fv - 2\Omega\cos\phi + A_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Εξίσωση κίνησης y-διεύθυνσης

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} =$$

$$= -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - fu + A_x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Εξίσωση κίνησης z-διεύθυνσης

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} =$$

$$= -\alpha\frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega\cos\phi + A_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

Απλοποίηση Εξισώσεων Κίνησης

x-συνιστώσα :

$$0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + f v$$

y-συνιστώσα :

$$0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - f u$$

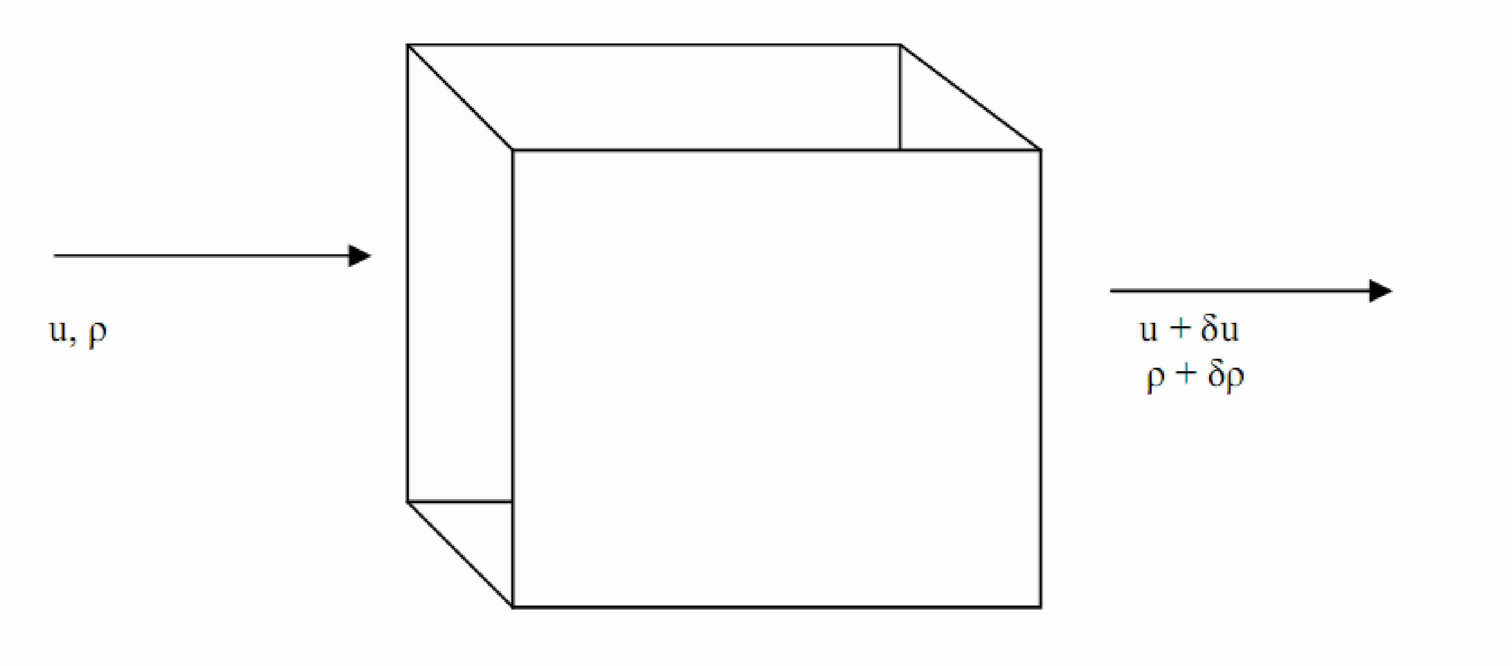
Γεωστροφικές Εξισώσεις

z-συνιστώσα :

$$0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Υδροστατική Εξίσωση

Εξίσωση Συνέχειας



Εισροή νερού : ρ u δy δz

Εκροή νερού : $(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\delta x)(u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x)\delta y\ \delta z$

Άρα, η καθαρή ροή έξω από το στοιχειώδη όγκο κατά τη x - διεύθυνση είναι :

$$[u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}]\delta x\ \delta y\ \delta z = [\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + 0(\delta x)]\delta x\ \delta y\ \delta z$$

όπου δx → 0

Η ολική εκροή από το στοιχειώδη όγκο :

$$total\ outflow = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] \delta x\, \delta y\, \delta z$$

Έτσι η συνολική χωροχρονική μεταβολή δίνεται :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας στο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα **u** ρευστό είναι :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Σε συνδυασμό με την εξίσωση :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

προκύπτει :

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0}$$

$$\boxed{\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0}$$

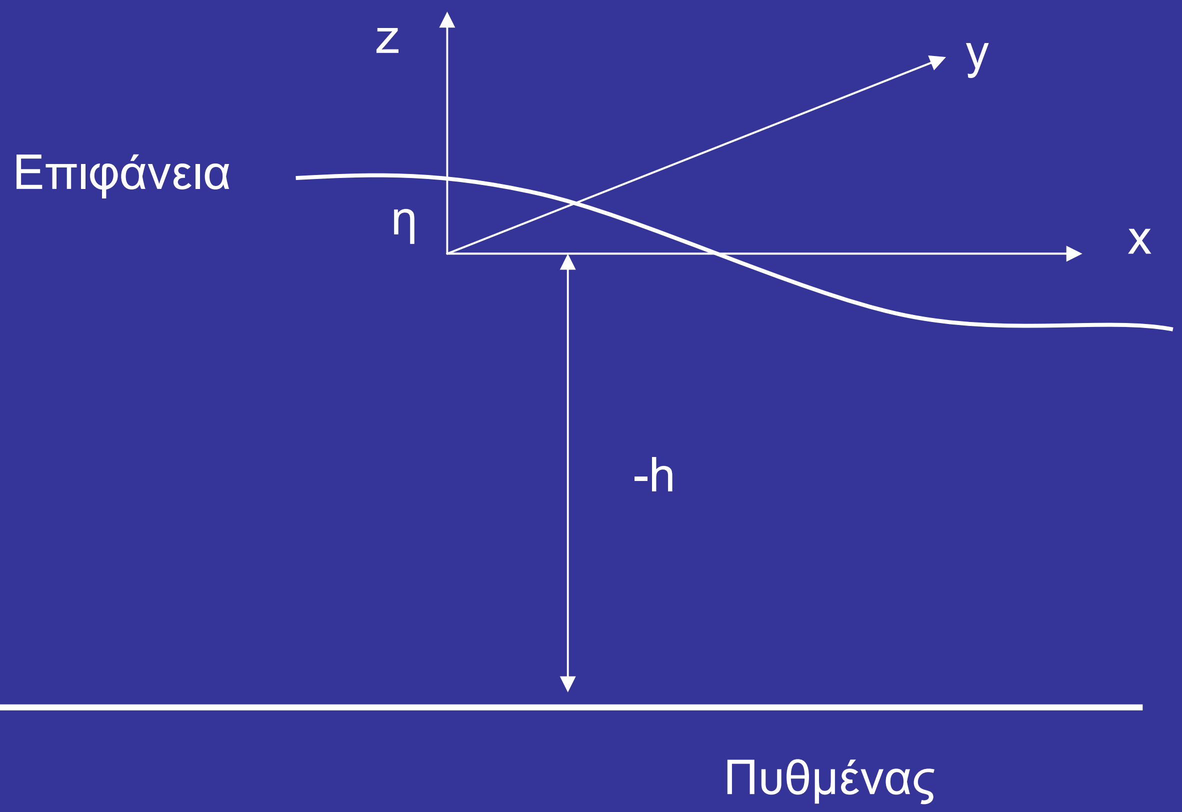
Εξίσωση Συνέχειας

$$\frac{U}{L}=\frac{W}{D}\Rightarrow W=\frac{UD}{L}$$

Ο αδιάστατος λόγος D/L/ καλείται 'λόγος κλίμακας' (aspect ratio) και η τιμή του στη θάλασσα είναι της τάξης του 10^{-3} γεγονός που δείχνει τη τάξη μεγέθους των κατακόρυφων ρευμάτων, όταν τα οριζόντια ρεύματα είναι γνωστά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Για παράκτια περιοχή όπου εφαρμόζουμε σύστημα συντεταγμένων:



Συνολικό Σύστημα Εξισώσεων Μεταφοράς Μάζας

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+W\frac{\partial U}{\partial z}-fV=-\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(A_x\frac{\partial U}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(A_y\frac{\partial U}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(A_z\frac{\partial U}{\partial z})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+W\frac{\partial V}{\partial z}+fU=-\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(A_x\frac{\partial V}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(A_y\frac{\partial V}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(A_z\frac{\partial V}{\partial z})$$

$$P=\rho_0 g\eta+\rho_0\int_{-z}^{0}Bdz$$

$$B=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}g$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}+U\frac{\partial B}{\partial x}+V\frac{\partial B}{\partial y}+W\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(K_x\frac{\partial B}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(K_y\frac{\partial B}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(K_z\frac{\partial B}{\partial z})$$

Οριακές Συνθήκες Συστήματος (z=η)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0$$

$$p = P_0$$

$$-K_v \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{gQ}{\alpha \rho_0 C_p}$$

$$\rho_0 \left(A_v \frac{\partial U_s}{\partial z}, A_v \frac{\partial V_s}{\partial z}\right) = (\tau_x^s, \tau_y^s)$$

$$(\tau_x^s, \tau_y^s) = \rho_a C_d \left(W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}, W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2}\right)$$

Οριακές Συνθήκες Συστήματος (z=-h)

$$u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+w=0$$

$$K_h\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y}\right)+K_v\frac{\partial B}{\partial z}=0$$

$$\rho_0\left(A_v\frac{\partial U_b}{\partial z},A_v\frac{\partial V_b}{\partial z}\right)=(\tau_x^b,\tau_y^b)$$

$$(\tau_x^b,\tau_y^b)=\rho_o C_b\left(U_b\sqrt{U_b^2+V_b^2},V_b\sqrt{U_b^2+V_b^2}\right)$$