



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 4.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε το σύνδεσμο: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ

Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Δρ. Βασίλης Μπέλλος

Εισαγωγή

- **Μαθηματική ανάλυση** → **θεωρία ορίων**
 - Διαφορικός λογισμός
 - Ολοκληρωτικός λογισμός
 - Θεωρία μέτρου
 - Συναρτησιακή ανάλυση
- **Αριθμητική ανάλυση** → **προσεγγιστικές λύσεις**

Εισαγωγή

- Μαθηματική ανάλυση → θεωρία ορίων
 - Διαφορικός λογισμός
 - Ολοκληρωτικός λογισμός
 - Θεωρία μέτρησης
 - Συνάρτησιακή ανάλυση
 - Αριθμητική ανάλυση → προσεγγιστικές λύσεις
- δε μας ενδιαφέρει η γενική σχέση και η αναλυτική λύση αλλά η πραγματική τιμή**

Αριθμητική ανάλυση

- **Κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών**
- **Επιστήμη του Μηχανικού**
 - Επίλυση ΜΔΕ
 - Βελτιστοποίηση
 - Παρεμβολή
 - ...
- **Επιστήμη της Πληροφορικής**
 - Επαναληπτική διαδικασία υπολογισμών
 - Αλγόριθμοι
 - Χρήση Η/Υ

Εργαλεία

- Σφάλματα
 - Αριθμητική προσέγγιση
 - Μέθοδος διχοτόμησης
 - Μέθοδος Newton-Raphson
 - Αριθμητική ολοκλήρωση
 - Μέθοδος τραπεζίου
 - Επίλυση αλγεβρικών συστημάτων
 - Μέθοδος Thomas
 - Μέθοδος Gauss-Seidel
 - Παρεμβολή
 - Παλινδρόμηση
 - Στοχαστικές διαδικασίες
- } Πρόβλεψη

Σφάλματα

- **Απόλυτο** $\sigma_a = x' - x$

- **Σχετικό** $\sigma_r = \frac{x' - x}{x}$

- **Αποκοπή**
 - *ρητός αριθμός* $\frac{5}{7} = 0.714285 \dots = 0.714285$
 - *άρρητος αριθμός* $\sqrt{2} = 1.4142135623731 = 1.414213$

- **Στρογγυλοποίηση**
 - *ρητός αριθμός* $\frac{5}{7} = 0.714285 \dots = 0.714286$
 - *άρρητος αριθμός* $\sqrt{2} = 1.4142135623731 = 1.414214$

Παράδειγμα I

υπολογισμός μόνιμης παροχής σε ορθογωνικό ανοιχτό αγωγό

- **Δεδομένα**

- Πλάτος διατομής → **$B=8 \text{ m}$**
- Βάθος νερού → **$h=1.5 \text{ m}$**
- Κλίση πυθμένα → **$S=1\text{‰}$**
- Συντελεστής τραχύτητας → **$n=0.02 \text{ s/m}^{1/3}$**

- **Βήματα υπολογισμών**

- Εμβαδό υγρής διατομής → **$A=Bh$**
- Υγρή περίμετρος → **$P=B+2h$**
- Υδραυλική ακτίνα → **$R=A/P$**
- Εξίσωση Manning → **$Q=(1/n)AR^{2/3}S^{1/2}$**

Παράδειγμα I

υπολογισμός μόνιμης παροχής σε ορθογωνικό ανοιχτό αγωγό

• Δεδομένα

• Πλάτος διατομής $\rightarrow B=8 \text{ m}$

• Βάθος νερού $\rightarrow y=1.5 \text{ m}$

• Κλίση πυθμένα $\rightarrow S=1\%$

• Συντελεστής τραχύτητας $\rightarrow n=0.02 \text{ s/m}^{1/3}$

σχετικό σφάλμα αν στρογγυλοποιήσουμε στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο $\rightarrow \sigma_r=0.55\%$

• Σημάτα υπολογισμών

• Εμβαδό υγρής διατομής $\rightarrow A=By$

• Υγρή περίμετρος $\rightarrow P=B+2y$

• Υδραυλική ακτίνα $\rightarrow R=A/P$

• Εξίσωση Manning $\rightarrow Q=(1/n)AR^{2/3}S^{1/2}$

Παράδειγμα II

συγκέντρωση ρύπου

- **Δεδομένα**

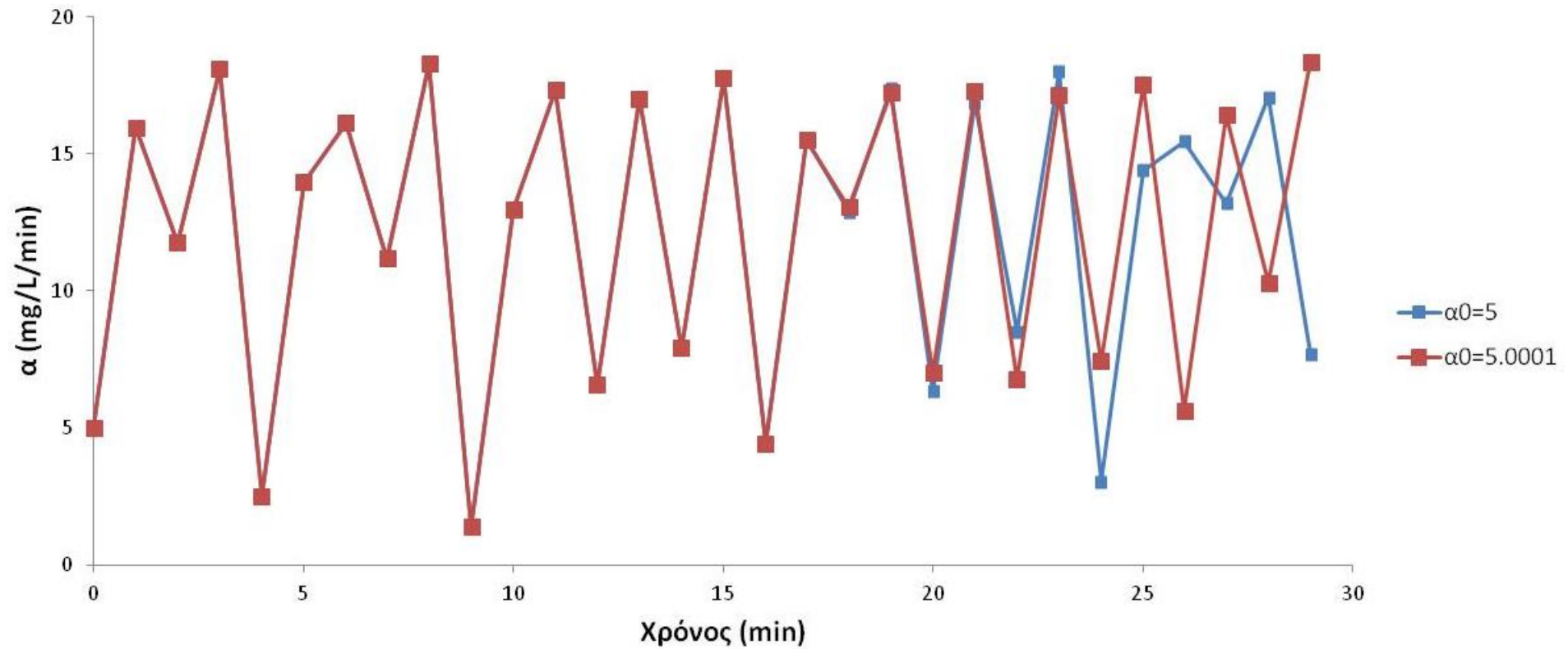
- Αρχική συγκέντρωση ρύπου → $\alpha=5 \text{ mg/L/min}$
- Σταθερή εισροή ρύπου → $I=12 \text{ mg/L/min}$
- Ρυθμός απομείωσης ρύπου → $O=0.3e^{0.25\alpha} \text{ mg/L/min}$

- **Αριθμητικό μοντέλο**

- $\alpha_t = \alpha_{t-1} + 12 - 0.3 \exp(0.25\alpha_{t-1})$

Παράδειγμα II

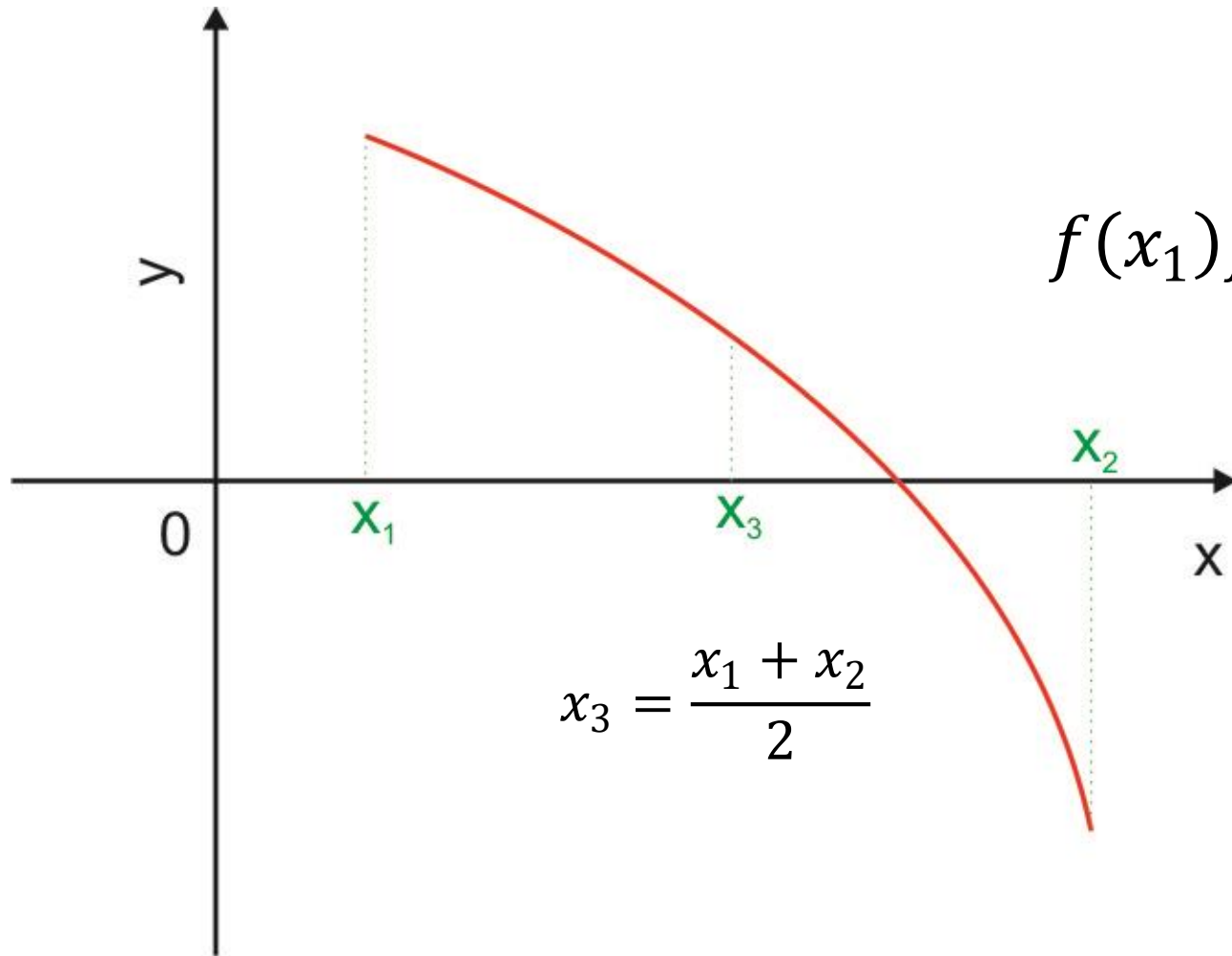
συγκέντρωση ρύπου



Αριθμητική προσέγγιση

- Επίλυση εξισώσεων → εύρεση πραγματικής ρίζας
- Αδυναμία αναλυτικής λύσης
- Διάφορες επαναληπτικές μέθοδοι
 - Μέθοδος διχοτόμησης
 - Μέθοδος Newton-Raphson
 - Μέθοδος Regula-Falsi
 - ...

Μέθοδος διχοτόμησης



$$f(x_1)f(x_3) = \begin{cases} > 0 \rightarrow \xi \in [x_3, x_2] \\ < 0 \rightarrow \xi \in [x_1, x_3] \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Αριθμητική προσέγγιση

Παράδειγμα

υπολογισμός βάθους νερού σε ορθογωνικό ανοιχτό αγωγό

- **Δεδομένα**

- Παροχή → **$25 \text{ m}^3/\text{s}$**
- Πλάτος διατομής → **$B=8 \text{ m}$**
- Κλίση πυθμένα → **$S=1\text{‰}$**
- Συντελεστής τραχύτητας → **$n=0.02 \text{ s/m}^{1/3}$**

Αριθμητική προσέγγιση

Μέθοδος Newton-Raphson

- Επαναληπτική διαδικασία
- Χρησιμοποιείται ευρέως
- Συγκλίνει πιο γρήγορα
- Πιο απαιτητική
 - Απαιτεί παραγωγή της συνάρτησης

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Παράδειγμα

υπολογισμός βάθους νερού σε ορθογωνικό ανοιχτό αγωγό

- **Δεδομένα**

- Παροχή $\rightarrow 25 \text{ m}^3/\text{s}$
- Πλάτος διατομής $\rightarrow B=8 \text{ m}$
- Κλίση πυθμένα $\rightarrow S=1\text{‰}$
- Συντελεστής τραχύτητας $\rightarrow n=0.02 \text{ s/m}^{1/3}$

Αριθμητική προσέγγιση

Παράδειγμα

υπολογισμός βάθους νερού σε ορθογωνικό ανοιχτό αγωγό

• Δεδομένα

- Παροχή → **25 m³/s**
- Πλάτος διατομής → **B=8 m**
- Κλίση πυθμένα → **S=1‰**
- Συντελεστής τραχύτητας → **n=0.02 s/m^{1/3}**

$$f(h) = 25 - \frac{S_0^{1/2}}{n} \frac{(Bh)^{5/3}}{(B + 2h)^{2/3}}$$

Αριθμητική προσέγγιση

Παράδειγμα

υπολογισμός βάθους νερού σε ορθογωνικό ανοιχτό αγωγό

• Δεδομένα

- Παροχή $\rightarrow 25 \text{ m}^3/\text{s}$
- Πλάτος διατομής $\rightarrow B=8 \text{ m}$
- Κλίση πυθμένα $\rightarrow S=1\text{‰}$
- Συντελεστής τραχύτητας $\rightarrow n=0.02 \text{ s/m}^{1/3}$

$$f(h) = 25 - \frac{S_0^{1/2}}{n} \frac{(Bh)^{5/3}}{(B + 2h)^{2/3}}$$

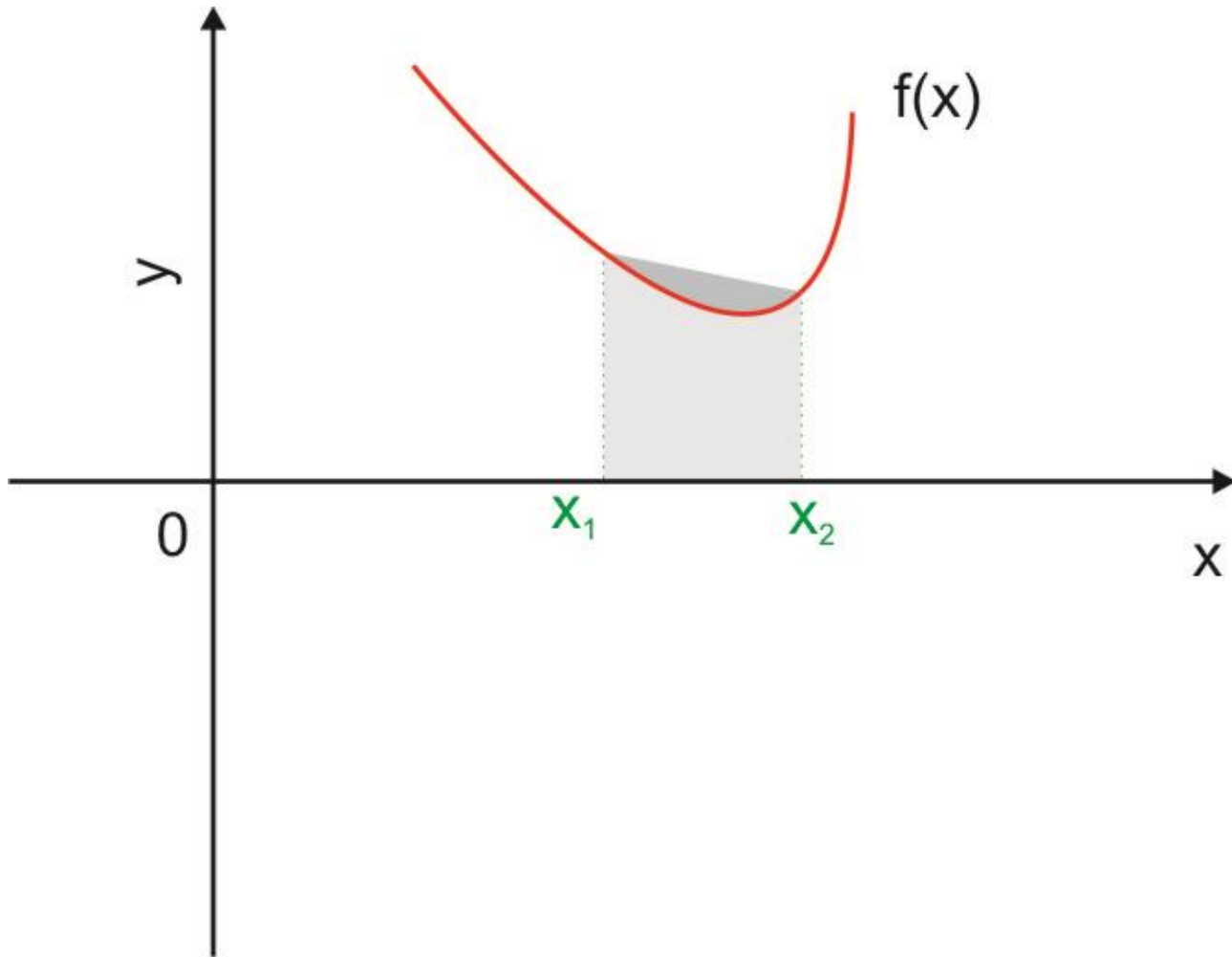
$$f'(h) = - \frac{S_0^{1/2}}{n} \frac{B(Bh)^{2/3}(5B + 6h)}{3(B + 2h)^{5/3}}$$

Αριθμητική προσέγγιση

Αριθμητική ολοκλήρωση

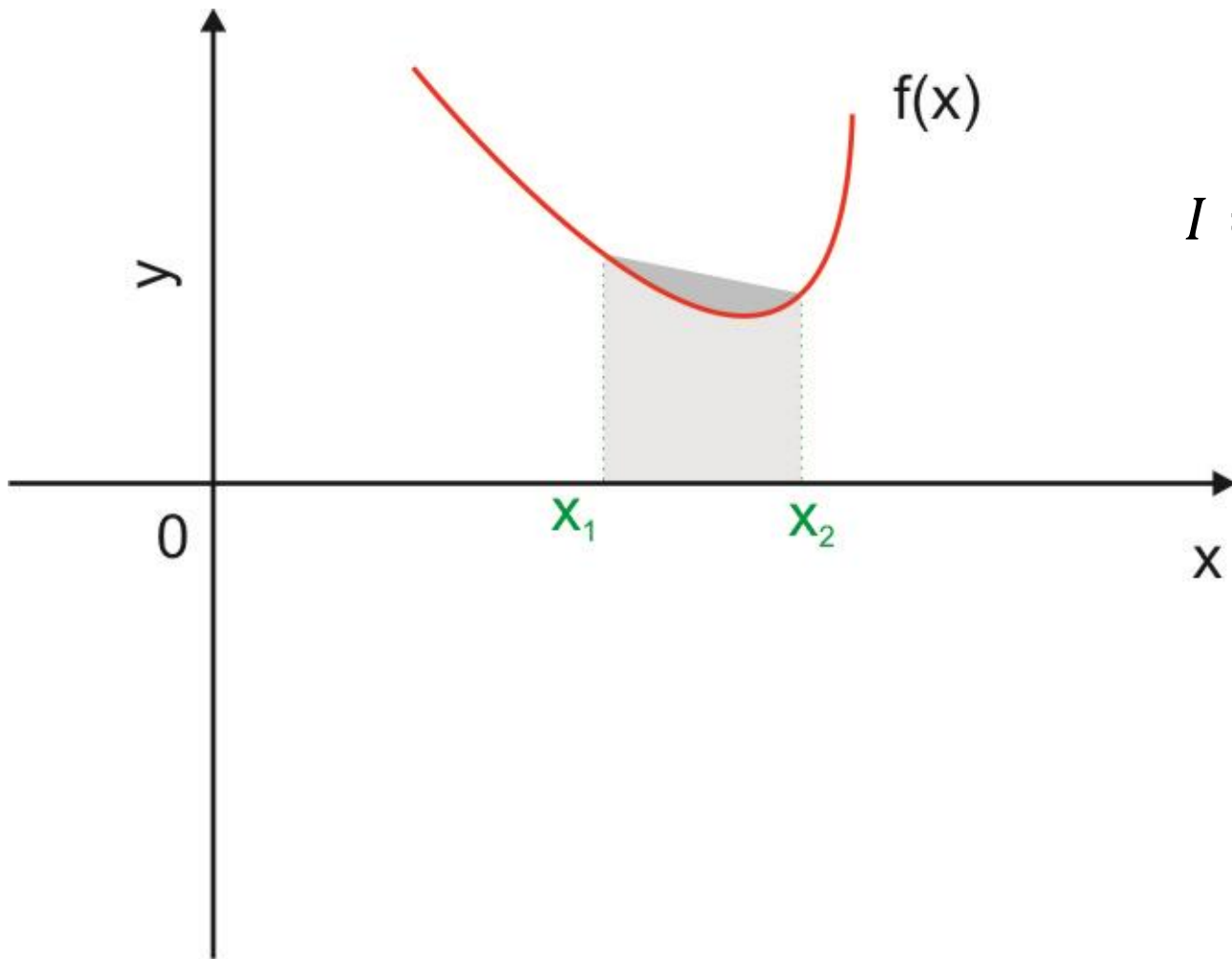
- Μέθοδος παραλληλογράμμου
- Μέθοδος τραπεζίου
- Μέθοδος Simpson
- Μέθοδος μέσου σημείου
- ...

Μέθοδος τραπεζίου



Αριθμητική ολοκλήρωση

Μέθοδος τραπεζίου



$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) = \frac{[f(x_1) + f(x_2)]}{2} (x_2 - x_1)$$

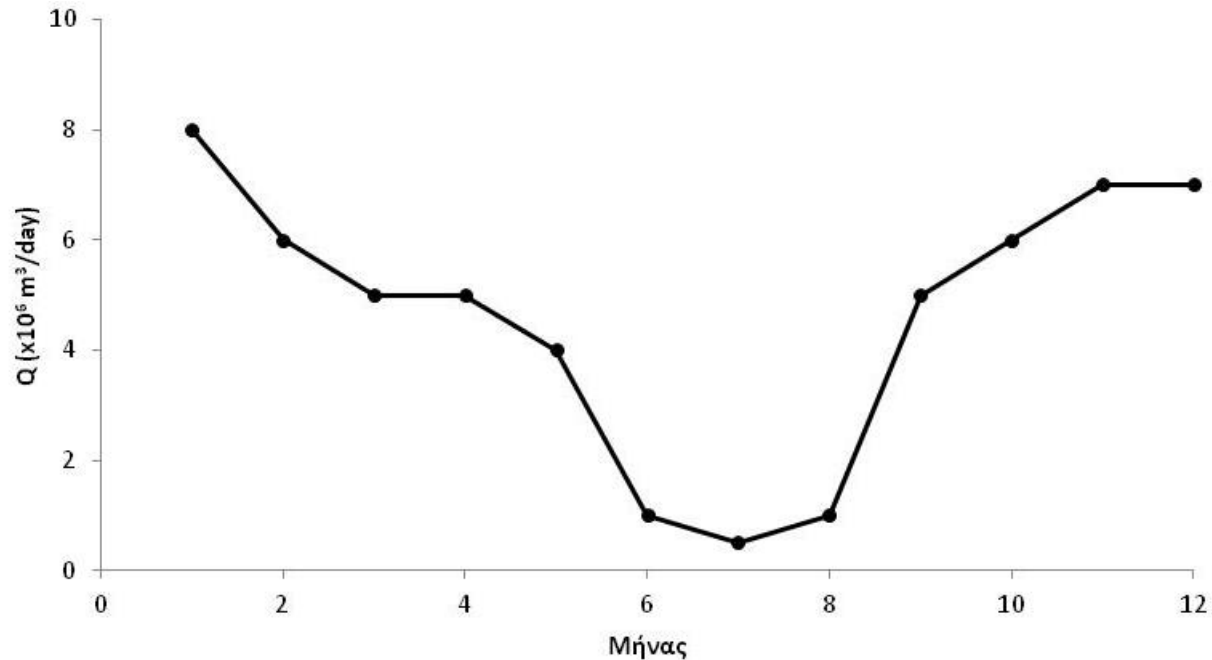
Αριθμητική ολοκλήρωση

Παράδειγμα

υπολογισμός ωφέλιμου όγκου

- **Δεδομένα**

- Χρονοσειρά εισροής σε ταμειυτήρα
- Μηνιαίο βήμα



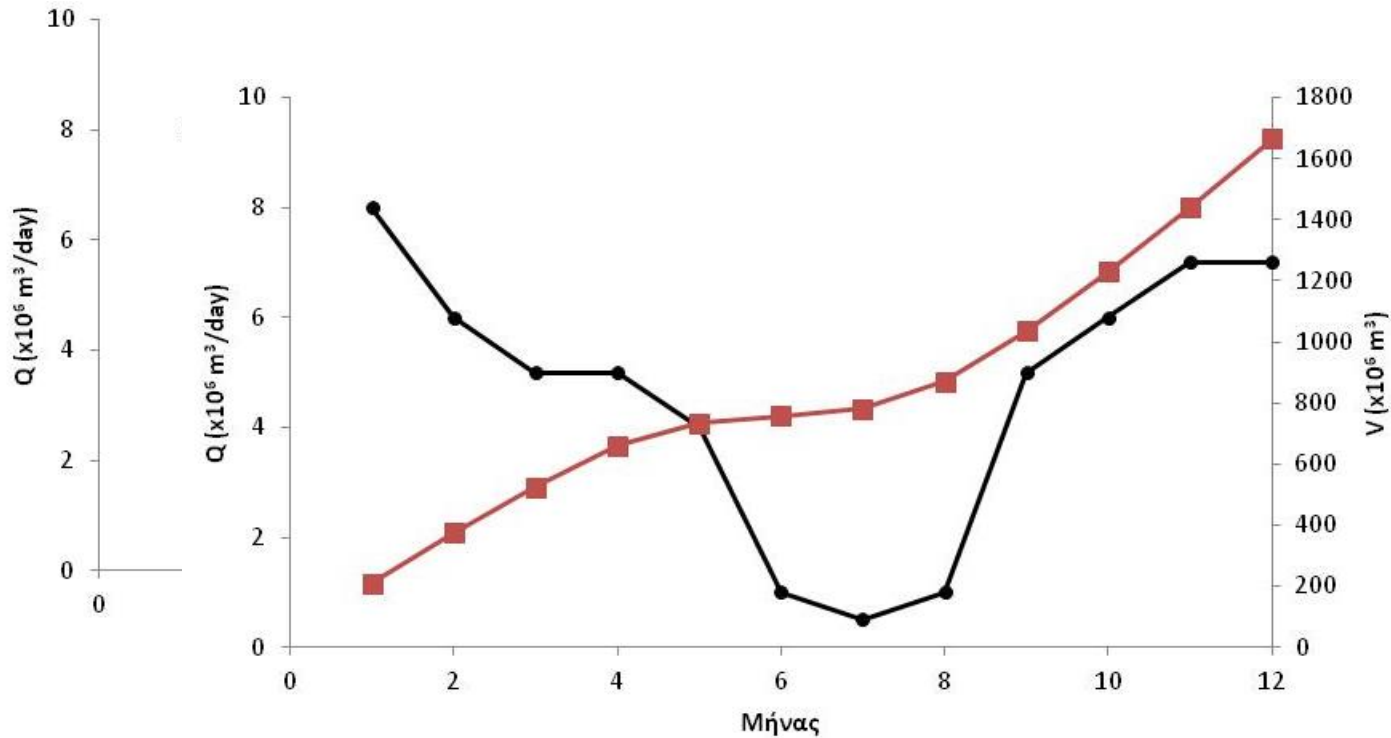
Αριθμητική ολοκλήρωση

Παράδειγμα

υπολογισμός ωφέλιμου όγκου

- **Δεδομένα**

- Χρονοσειρά εισροής σε ταμιευτήρα
- Μηνιαίο βήμα



Αριθμητική ολοκλήρωση

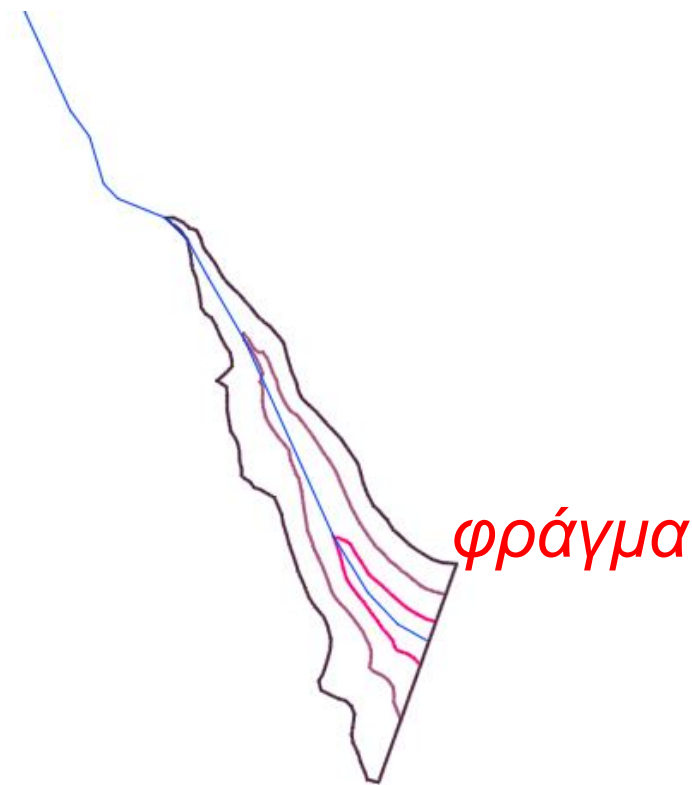
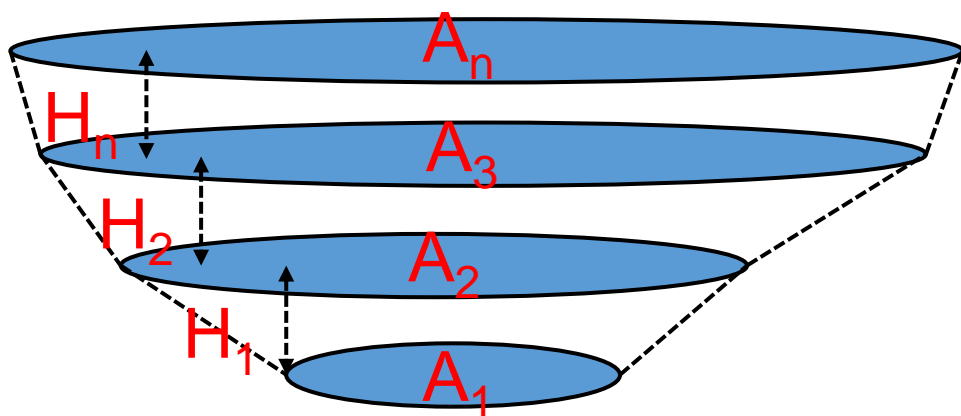
Παράδειγμα

καμπύλη στάθμης-όγκου

- **Δεδομένα**

- Στάθμες
- Εμβαδά επιφάνειας

$$V = \left[\frac{A(H_i) + A(H_{i+1})}{2} \right] (H_{i+1} - H_i)$$



Αριθμητική ολοκλήρωση

Λύση αλγεβρικών συστημάτων

$$A\vec{x} = \vec{B}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad \vec{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix} \quad \vec{B} = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}$$

Επίλυση αλγεβρικών συστημάτων

Λύση αλγεβρικών συστημάτων

- Μέθοδος Thomas
- Μέθοδος Gauss-Jordan
- Μέθοδος Crout
- Μέθοδος Gauss-Seidel
- ...

Μέθοδος Thomas

- Τετραγωνικός πίνακας (3διαγώνιος ή 5διαγώνιος)
- Κριτήριο $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$

Μέθοδος Thomas

$$\begin{array}{cccccccc} | & b_1 & c_1 & & & & & & | & x_1 & | & d_1 \\ | & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & | & x_1 & | & d_1 \\ | & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & | & \cdot & | & \cdot \\ | & & & a_i & b_i & c_i & & & | & x_i & = & d_i \\ | & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & | & \cdot & | & \cdot \\ | & & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & | & x_{n-1} & | & d_{n-1} \\ | & & & & & & a_n & b_n & | & x_n & | & d_n \end{array}$$

Επίλυση αλγεβρικών συστημάτων

Μέθοδος Thomas

$$\begin{array}{cccccccc}
 \left| \begin{array}{c} b_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_i \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ a_n \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} c_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ c_2 \\ \cdot \\ c_i \\ \cdot \\ c_{n-1} \\ b_n \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \cdot \\ c_2 \\ \cdot \\ b_i \\ \cdot \\ c_i \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \cdot \\ b_i \\ \cdot \\ c_i \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \cdot \\ c_i \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \cdot \\ c_i \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \cdot \\ c_i \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \cdot \\ c_i \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{array} \right. \\
 \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_1 \\ \cdot \\ x_i \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \right| & = & \left| \begin{array}{c} d_1 \\ d_1 \\ \cdot \\ d_i \\ \cdot \\ d_{n-1} \\ d_n \end{array} \right| & \longrightarrow & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} c'_1 \\ c'_2 \\ \cdot \\ c'_i \\ \cdot \\ c'_{n-1} \\ 1 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \cdot \\ c'_2 \\ \cdot \\ c'_i \\ \cdot \\ c'_{n-1} \\ 1 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \cdot \\ c'_2 \\ \cdot \\ c'_i \\ \cdot \\ c'_{n-1} \\ 1 \end{array} \right. \\
 \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_1 \\ \cdot \\ x_i \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \right| & = & \left| \begin{array}{c} d'_1 \\ d'_2 \\ \cdot \\ d'_i \\ \cdot \\ d'_{n-1} \\ d'_n \end{array} \right|
 \end{array}$$

Επίλυση αλγεβρικών συστημάτων

Μέθοδος Thomas

$$\begin{array}{cccccccc|cccc|}
 b_1 & c_1 & & & & & & & x_1 & d_1 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & x_1 & d_1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\
 & & a_i & b_i & c_i & & & & x_i & d_i \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\
 & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & & x_{n-1} & d_{n-1} \\
 & & & & & a_n & b_n & & x_n & d_n
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{cccccccc|cccc|}
 1 & c'_1 & & & & & & & x_1 & d'_1 \\
 & 1 & c'_2 & & & & & & x_1 & d'_2 \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
 & & & & 1 & c'_i & & & x_i & d'_i \\
 & & & & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & 1 & c'_{n-1} \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array}$$

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}$$

$$d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}$$

$$x_i = d'_i - x_{i+1} c'_i$$

Επίλυση αλγεβρικών συστημάτων

Παράδειγμα

επίλυση συστήματος

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \vec{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{vmatrix} \quad \vec{B} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Επίλυση αλγεβρικών συστημάτων

Μέθοδος Gauss-Seidel

- τετραγωνικός πίνακας

- κριτήριο υπεροχής $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, m$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} x_j^k \right), i = 1, 2, \dots, m$$

Επίλυση αλγεβρικών συστημάτων

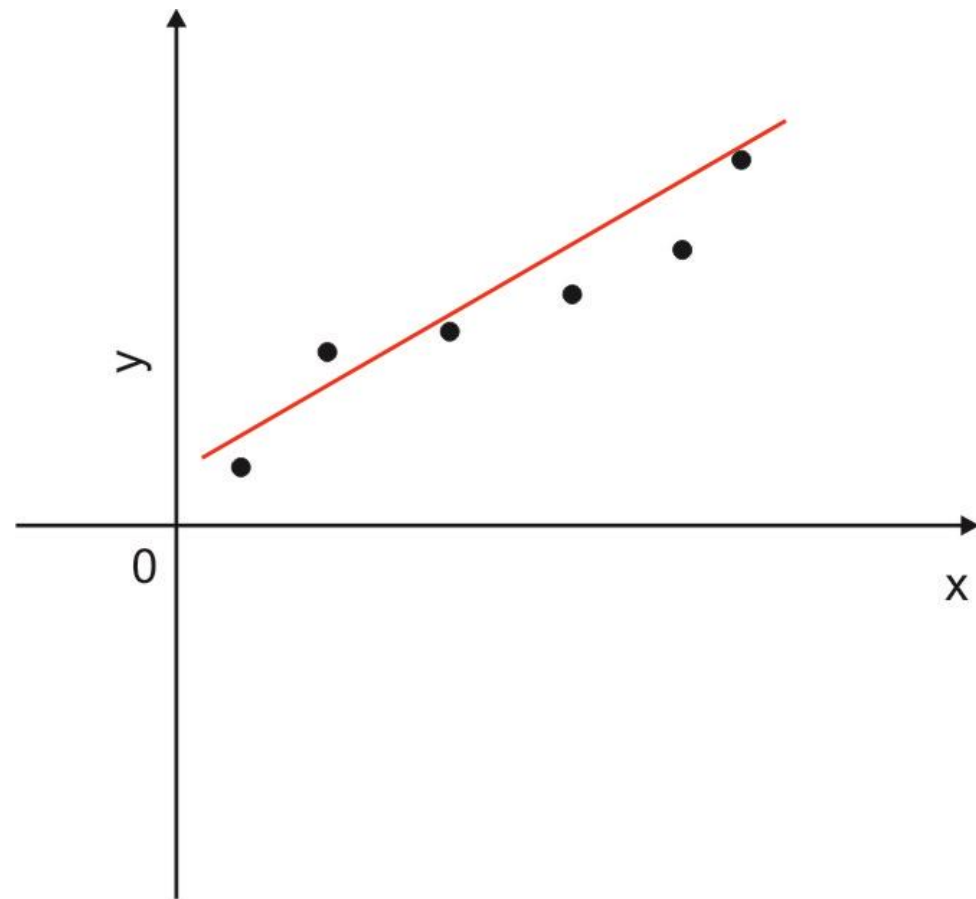
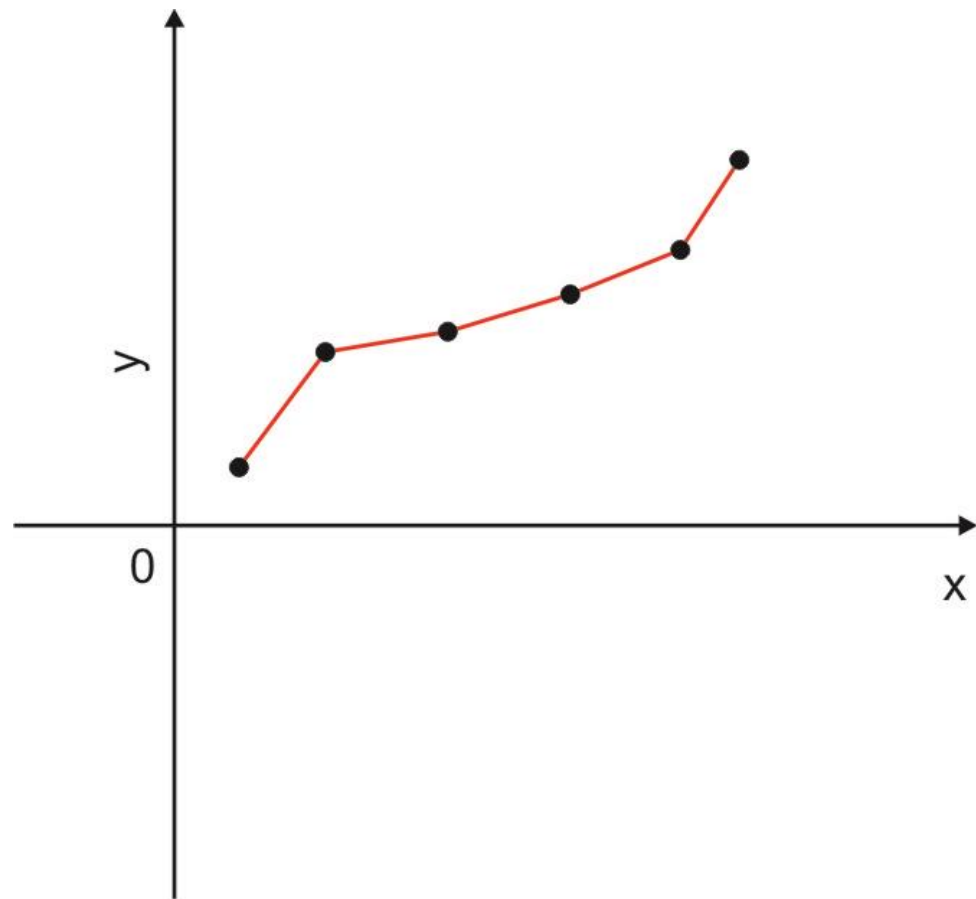
Παράδειγμα

επίλυση συστήματος

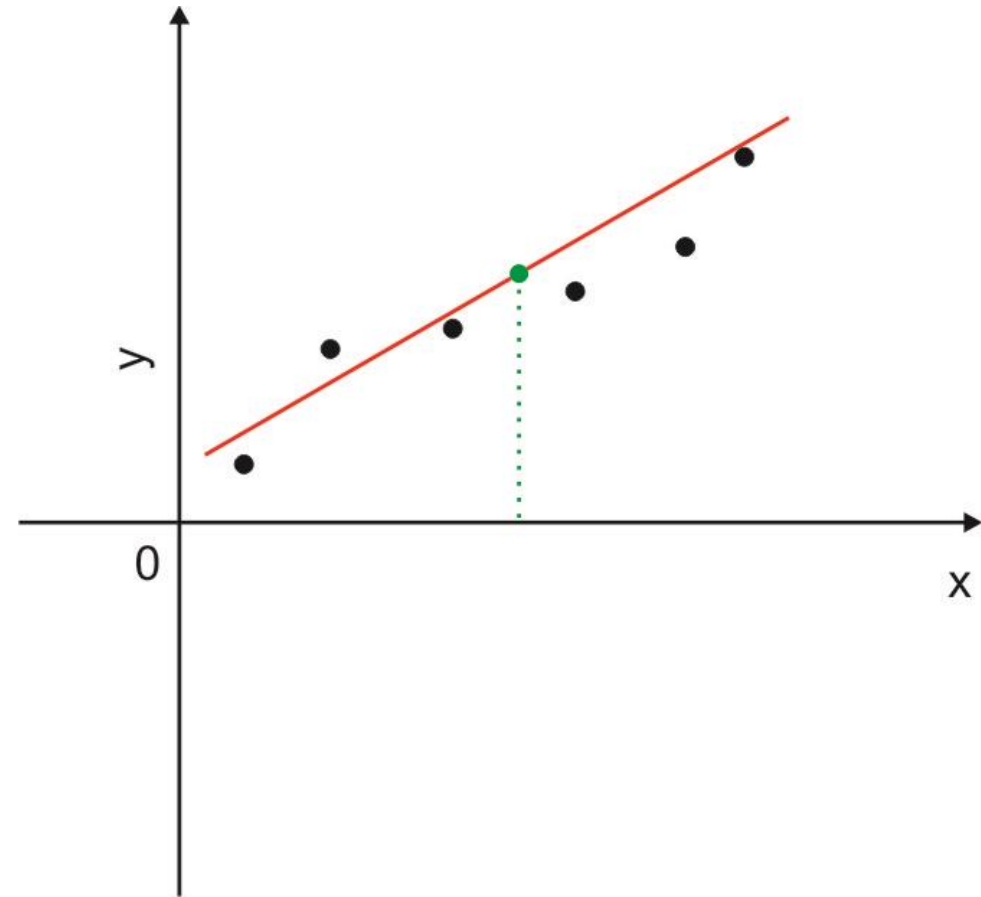
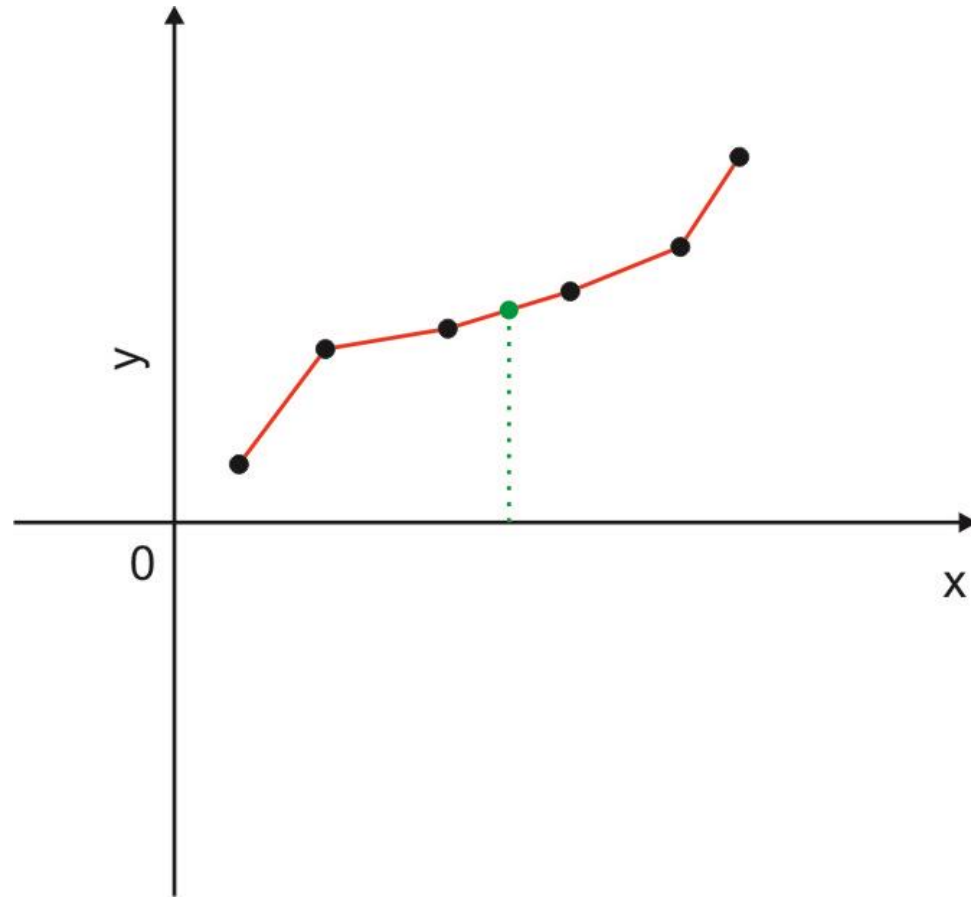
$$A = \begin{vmatrix} 4.0 & 1.5 & 0.7 & 1.2 & 0.5 \\ 1.0 & 6.0 & 0.9 & 1.4 & 0.7 \\ 0.5 & 1.0 & 3.9 & 3.2 & 0.9 \\ 0.2 & 2.0 & 0.2 & 7.5 & 1.9 \\ 1.7 & 0.9 & 1.2 & 2.3 & 4.9 \end{vmatrix} \quad \vec{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} \quad \vec{B} = \begin{vmatrix} 5.0 \\ 6.0 \\ 7.0 \\ 8.0 \\ 9.0 \end{vmatrix}$$

Επίλυση αλγεβρικών συστημάτων

Παρεμβολή vs. Παλινδρόμηση

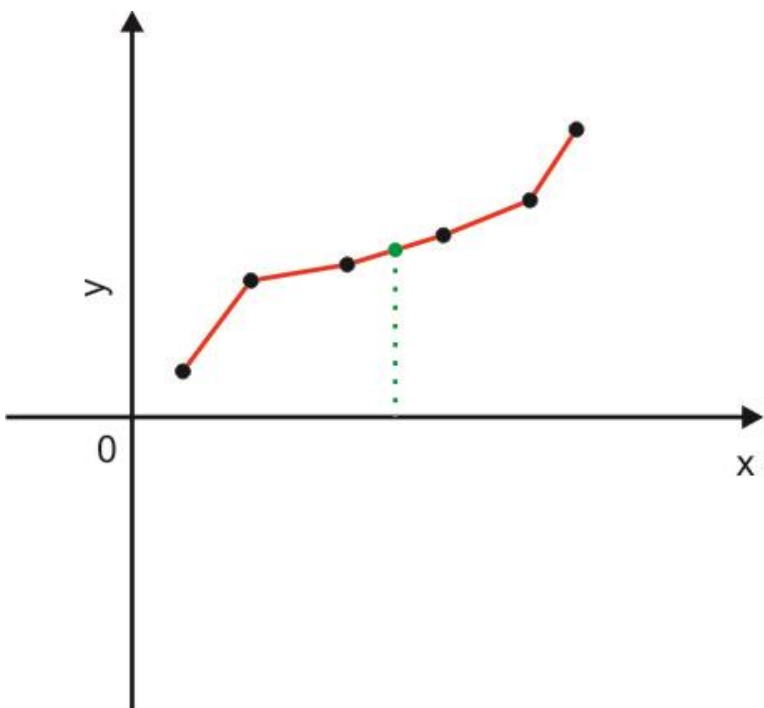


Παρεμβολή vs. Παλινδρόμηση

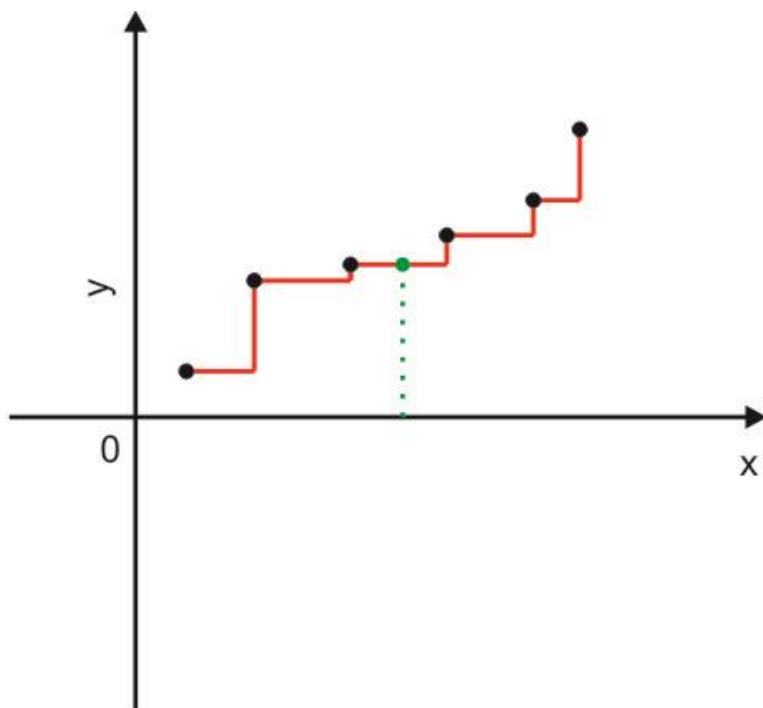


Τύποι παρεμβολής

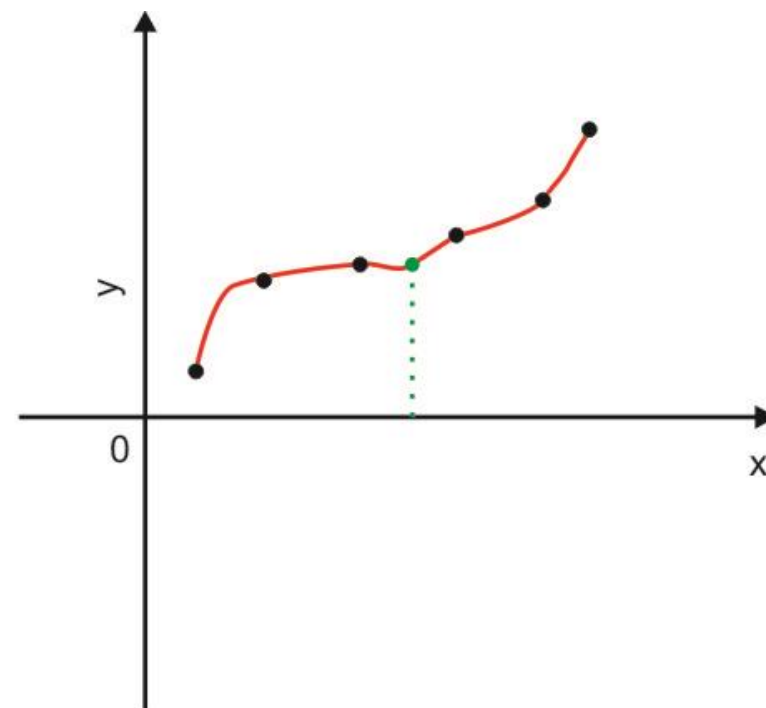
γραμμική



nearest neighbour

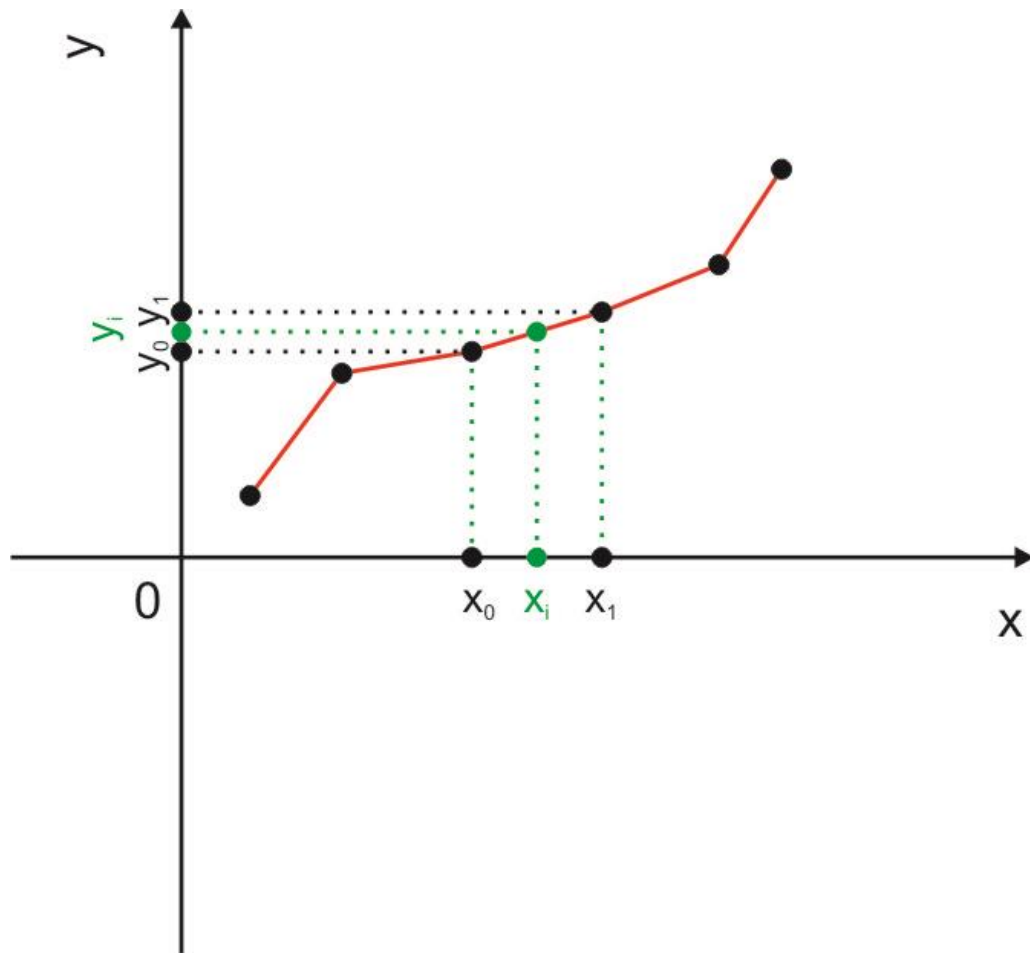


μη γραμμική

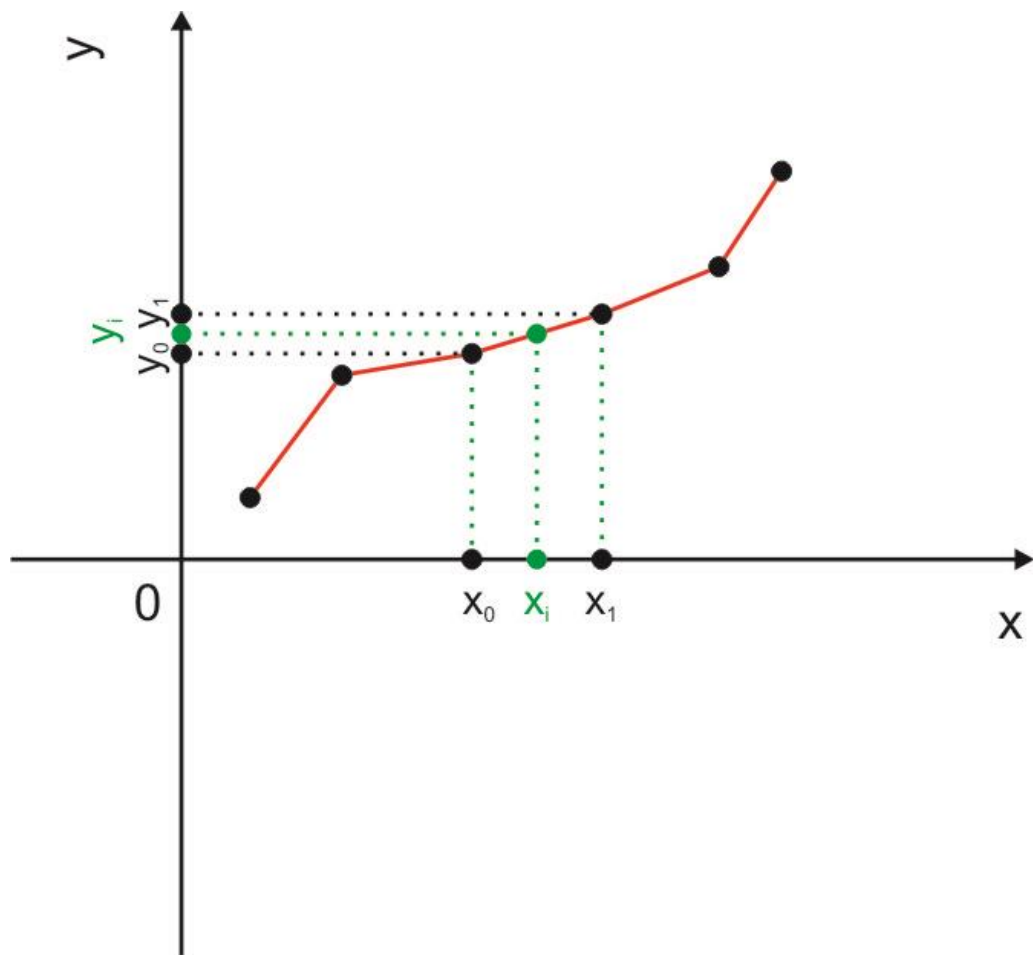


Παρεμβολή

Γραμμική παρεμβολή

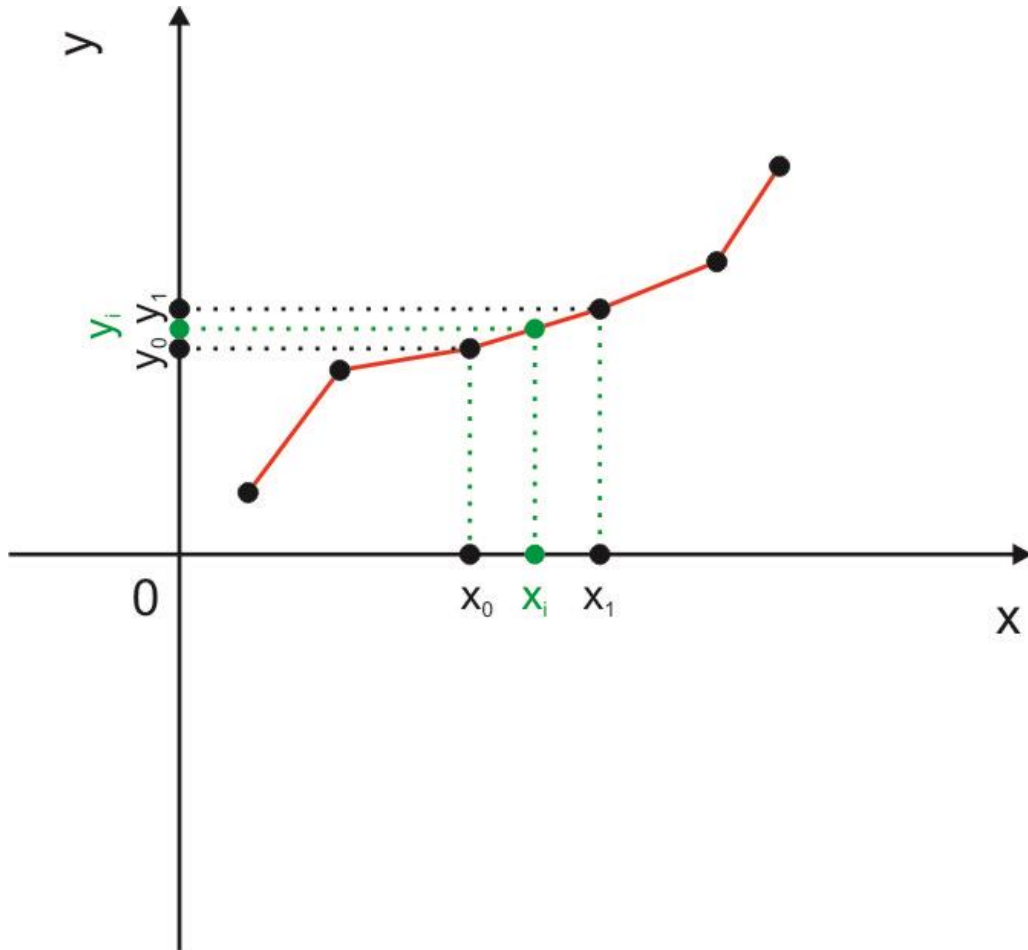


Γραμμική παρεμβολή



$$\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Γραμμική παρεμβολή

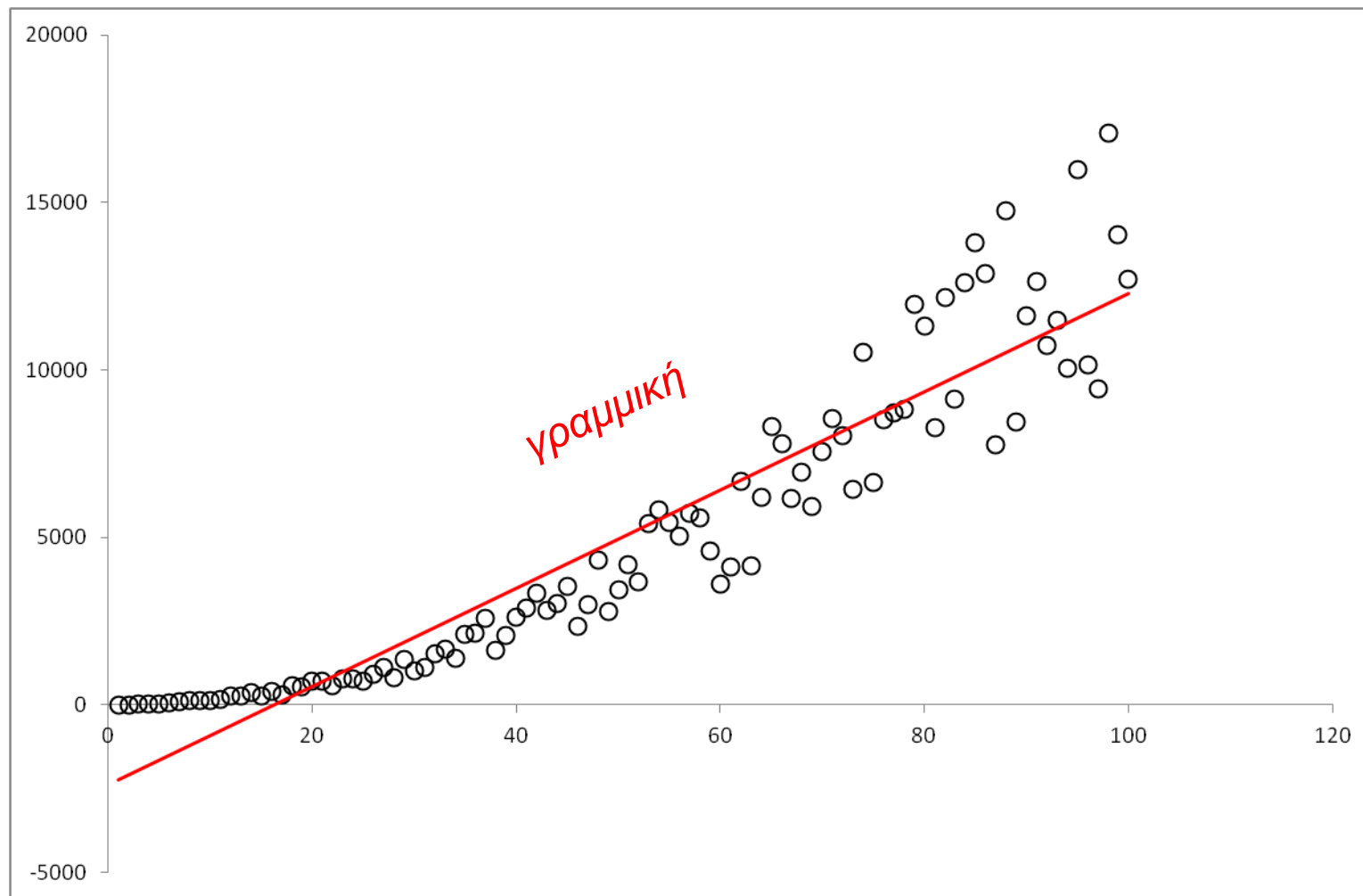


$$\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

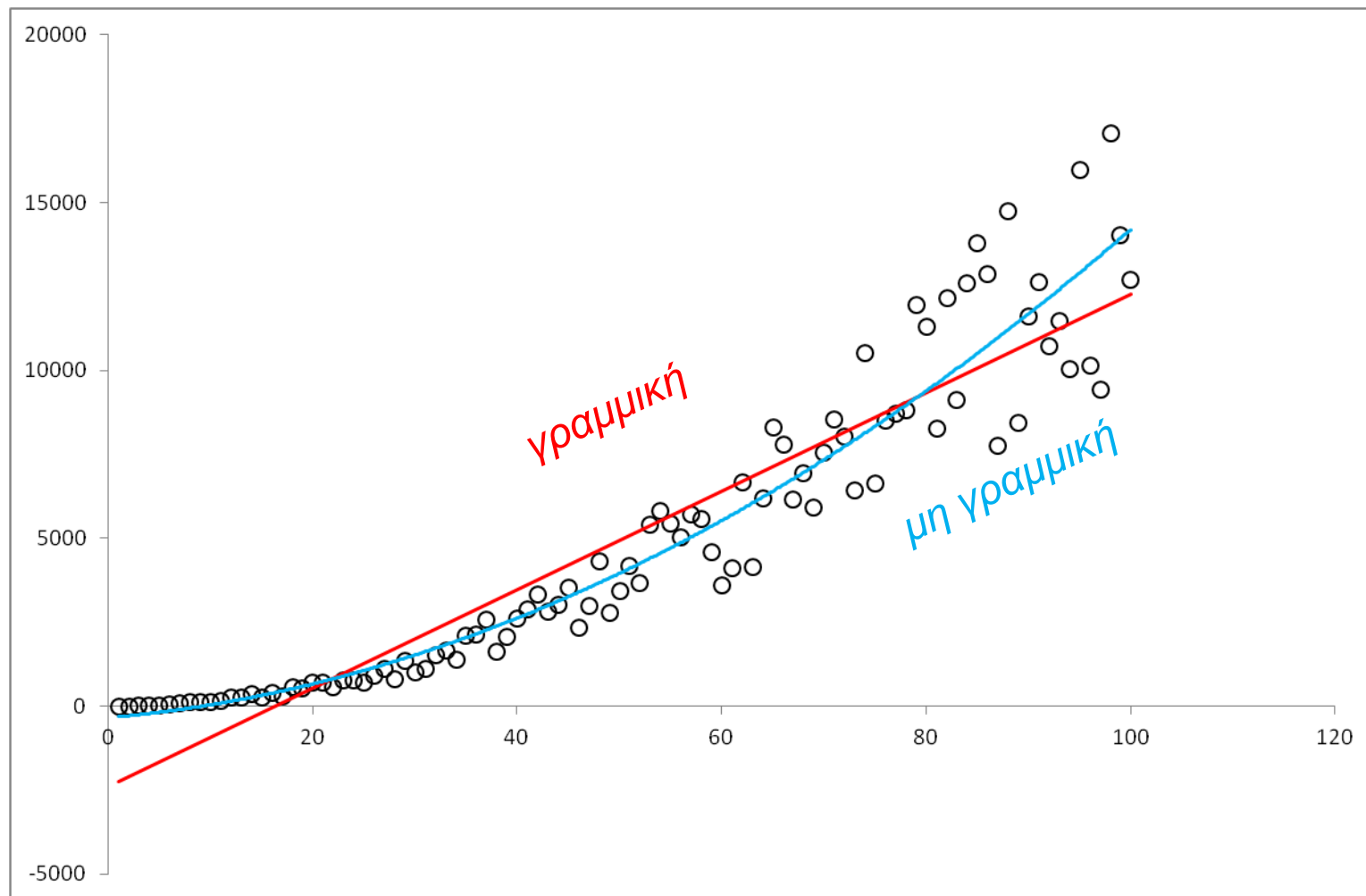


$$y_i = y_0 + (x_i - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

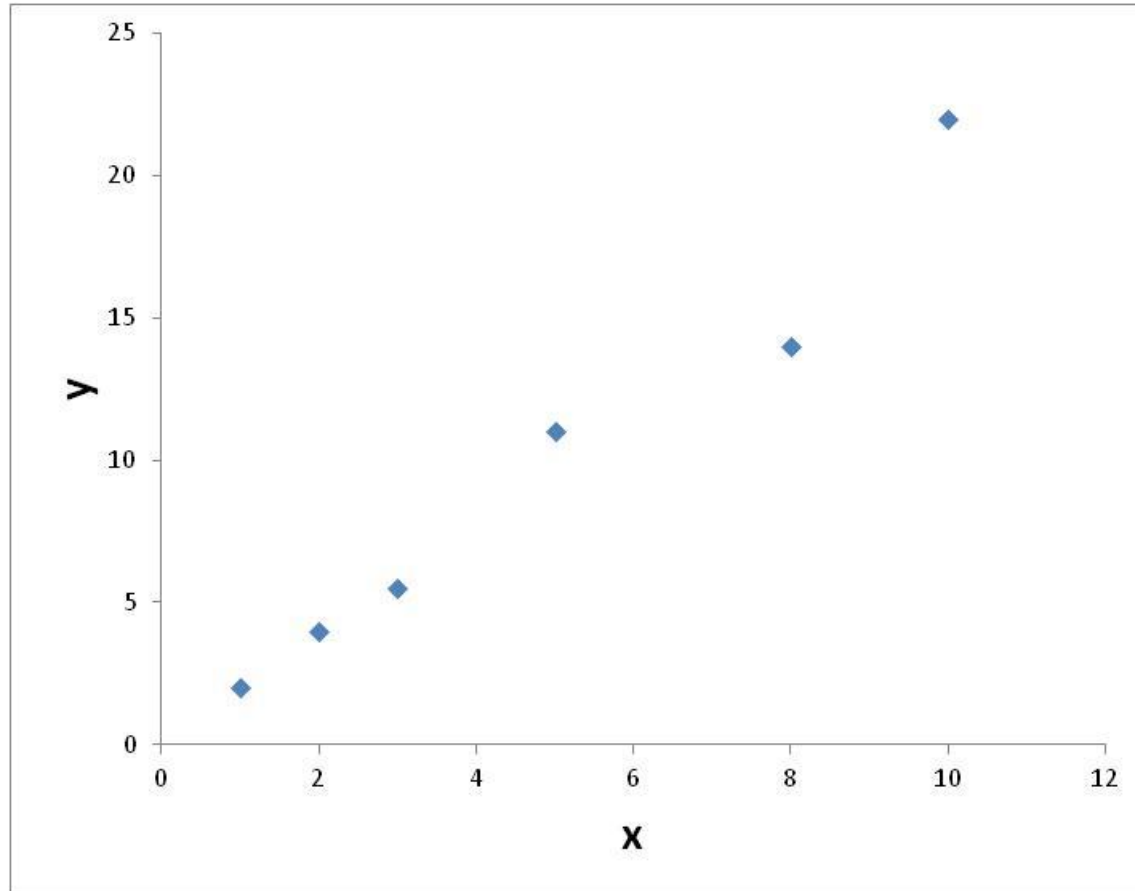
Τύποι παλινδρόμησης



Τύποι παλινδρόμησης

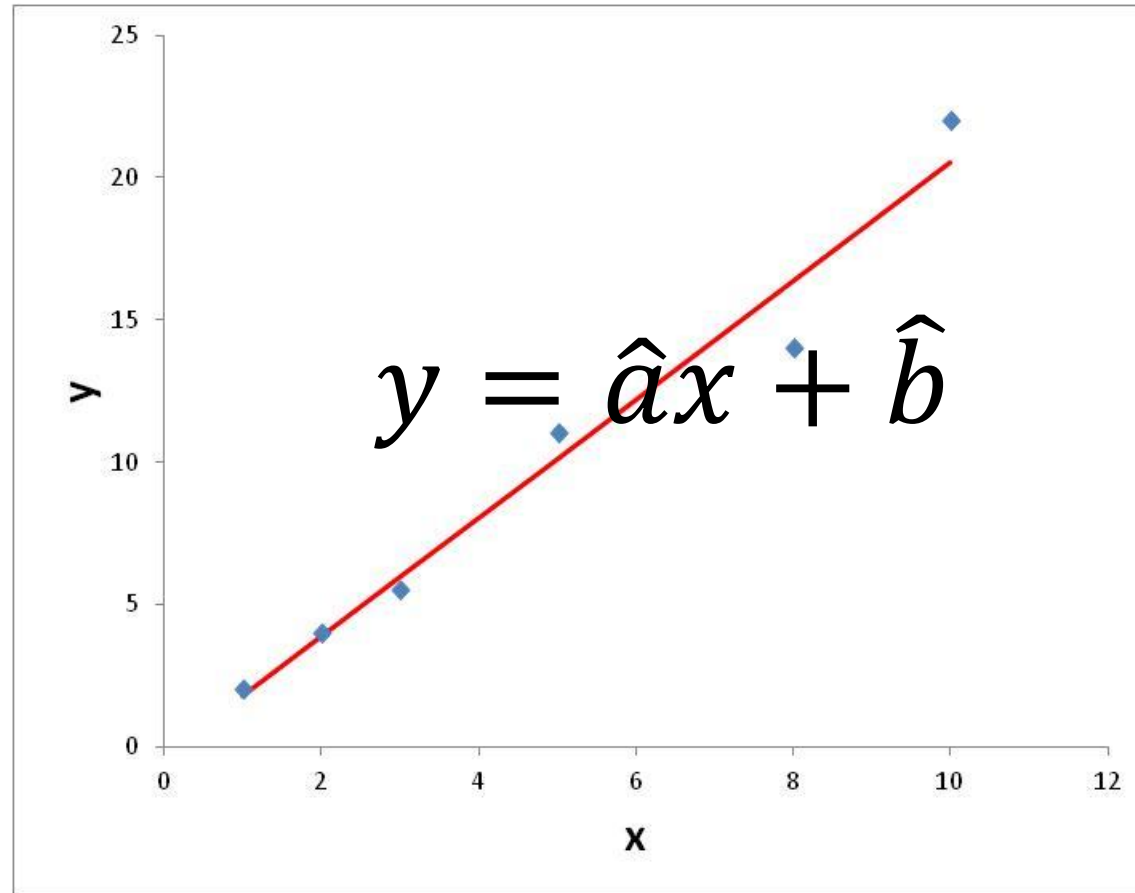


Γραμμική παλινδρόμηση

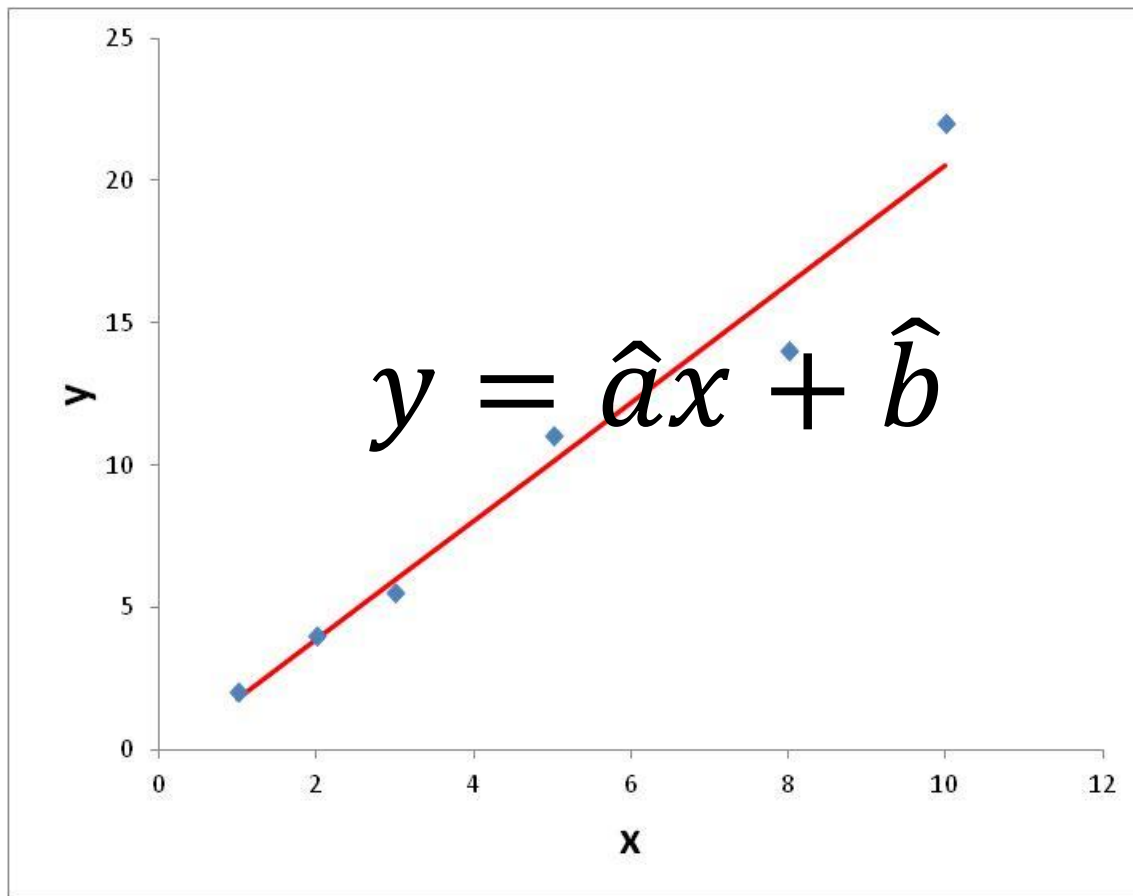


Παλινδρόμηση

Γραμμική παλινδρόμηση



Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων



$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$$

Στοχαστικές διαδικασίες

- Η εκτίμηση μίας μεταβλητής/παραμέτρου με βάση το νόμο των μεγάλων αριθμών
 - Η μέση τιμή ενός δείγματος τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν μία κοινή κατανομή συγκλίνει προς το θεωρητικό μέσο της κατανομής
- Παράδειγμα → υπολογισμός αριθμού π

Η παρούσα διάλεξη πήρε έμπνευση και παραδείγματα από το βιβλίο «Υπολογιστική Υδραυλική» του Χ. Κουτίτα (2005, Εκδόσεις Επίκεντρο).

Επίσης, από τις διαλέξεις των μαθημάτων του ΔΠΜΣ Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων του ΕΜΠ:

α) *Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Παράκτια Ζώνη*

(Δρ Η. Παπακωνσταντής)

β) *Βελτιστοποίηση Συστημάτων Υδατικών Πόρων – Υδροπληροφορική*

(Δρ Χ. Μακρόπουλος & Δρ Α. Ευστρατιάδης)

γ) *Διαχείριση Υδατικών Πόρων*

(Δρ Δ. Κουτσογιάννης & Δρ Α. Ευστρατιάδης)