ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

Σε ορισμένες περιπτώσεις πριν κατασκευαστούν μεγάλα υδραυλικά έργα, κατακευάζονται αντίγραφα τους σε μικρότερη κλίμακα, ώστε να εξεταστεί η υδραυλική τους συμπεριφορά πριν την τελική κατασκευή. Έτσι μπορούν να μελετηθούν με οικονομικό τρόπο εναλλακτικά σενάρια και τροποποιήσεις στον αρχικό σχεδιασμό. Μερικές φορές η ίδια μεθοδολογία ακολουθείται και αφού κατασκευαστούν τα παραπάνω έργα, ή για περιπτώσεις οι οποίες δεν αφορούν κατασκευές π.χ. μελέτη ατυχήματος από διαρροή περελαίου από πλοίο κλπ.

Το έργο το οποίο θέλουμε να μελετήσουμε ονομάζεται ***πρωτότυπο***, ενώ το μοντέλο το οποίο κατακευάζεται υπό κλίμακα (κατά κανόνα υπό μικρότερη κλίμακα) ονομάζεται ***ομοίωμα.***

Το πώς πρέπει να κατασκευαστούν και να λειτουργήσουν τα παραπάνω ομοιώματα (τα οποία είναι στην ουσία πειραματικά μοντέλα) είναι αντικείμενο <u>**της θεωρίας των ομοιωμάτων**</u>.

Για να είναι ερμηνεύσιμα τα αποτελέσματα των ομοιωμάτων και να δίνουν πληροφορίες για τις συνθήκες οι οποίες θα επικρατήσουν στο πρωτότυπο, πρέπει να υπάρχει αντιστοιχία για τις δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στις δύο περιπτώσεις.

Στην θεωρία αυτό είναι δυνατόν να γίνει αν οι αδιάστατοι αριθμοί (Reynolds, Froude, Euler, Weber κλπ) είναι ίδιοι τόσο στο πρωτότυπο όσο και στο ομοίωμα. Στην πράξη όμως αυτό είναι αδύνατο ή τουλάχιστον πολύ δύσκολο, οπότε ο σχεδιασμός γίνεται ώστε να είναι ίδιος ο αδιάστατος αριθμός ο οποίος είναι ο πιο σημαντικός τόσο στο πρωτότυπο όσο στο ομοίωμα. Συχνά για ροές με ελεύθερη επιφάνεια (δηλαδή για αυτές στις οποίες παίζει σημαντικό ρόλο το βάθος ροής) ή για ροές για τις οποίες είναι σημαντικές οι διαφορές πυκνότητας του ρευστού ή των ρεστών, επιλέγουμε να είναι ταυτόσημος ο αριθμός *Froude*, Στην περίπτωση αυτή λέμε πως έχουμε <u>ομοιότητα κατά Froude</u>. Αν αντίθετα δεν ισχύουν τα παραπάνω, επιλέγεται συχνά να είναι ίδιος ο αριθμός *Reynolds*. Στην περίπτωση αυτή λέμε πως έχουμε <u>ομοιότητα κατά Reyynolds</u>.

Θα εξετάσουμε στην συνέχεια αυτές τις δύο περιπτώσεις, αφού αναφερθούμε σε κάποιες βασικές αρχές.

Τα μεγέθη τα οποία αναφέρονται στο πρωτότυπο συμβολίζονται με την δείκτη *π*, τα μεγέθη τα οποία αναφέρονται στο ομοίωμα συμβολίζονται με τον δείκτη *ο*, ενώ ο λόγος μεταξύ τους με τον δείκτη *R*.

Αν δηλαδή με το γράμμα *L* συμβολίζουμε ένα συγκεκριμμένο τυπικό μήκος, αυτό στο πρωτότυπο θα αντιστοιχεί στο $L_Π$ ενώ στο ομοίωμα στο Lo. Ο λόγος μεταξύ τους θα είναι ίσος με

$$L_R = \frac{L_\pi}{L_o}. \tag{1}$$

Το L_R ονομάζεται επίσης και κλίμακα της κατασκευής.

Η πιο συνηθισμένη επιλογή για την κατασκευή ομοιώματος είναι να έχουμε την αναλογία των μηκών ανάμεσα στο πρωτότυπο και στο ομοίωμα ίδια προς όλες τις διευθύνσεις, δηλ. προς το μήκος, πλάτος και ύψος. Ο τύπος αυτός των ονομάζονται *γραμμικά* ή *μη στρεβλά ομοιώματα* (*undistorted models*), ή απλώς ομοιώματα επειδή ακριβώς είναι η πιο συνηθισμένη επιλογή.

Στην περίπτωση λοιπόν των γραμμικών ομοιωμάτων ισχύουν λοιπόν οι παρακάτω σχέσεις:

$$A_R = \frac{A_\pi}{A_o} = \left(L_R\right)^2 \tag{2}$$

$$V_R = \frac{V_\pi}{V_o} = \left(L_R\right)^3 \tag{3}$$

Όπου *A* είναι το εμβαδόν της επιφάνειας και *V* ο όγκος ενός συγκεκριμμένου τμήματος αντίστοιχα της μελετούμενης κατασκευής

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τις συνθήκες οι οποίες ισχύουν όταν επιλεγεί μία ομοιότητα κατά Reynolds και αυτές οι οποίες ισχύουν όταν επιλεγεί μία ομοιότητα κατά Froude.

Ομοιότητα κατά Reyynolds

Αν ορίσουμε με *U* μία χαρακτηριστική ταχύτητα της ροής και με ν το κινηματικό ιξώδες, ο αριθμός Reynolds στο πρωτότυπο ορίζεται από την σχέση:

$$\left(\mathrm{Re}\right)_{\pi} = \frac{U_{\pi} L_{\pi}}{\nu_{\pi}} \tag{4}$$

ενώ ο ίδιος αριθμσ στο ομοίωμα από την σχέση:

$$\left(\mathrm{Re}\right)_{o} = \frac{U_{o} L_{o}}{\nu_{o}} \tag{5}$$

Η ομοιότητα κατά Reynolds συνεπάγεται ότι ισχύει η σχέση:

$$\left(\mathrm{Re}\right)_{\pi} = \left(\mathrm{Re}\right)_{o} \tag{6}$$

Κατά συνέπεια παίρνοντας υπόψη μας τις εξισώσεις (4), (5) και (6):

$$\frac{U_{\pi} L_{\pi}}{\nu_{\pi}} = \frac{U_{o} L_{o}}{\nu_{o}} \tag{7}$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{U_{\pi}}{U_{o}} = \frac{\nu_{\pi}}{\nu_{o}} \frac{L_{o}}{L_{\pi}} \tag{7α}$$

Κατά συνέπεια:

$$U_{R} = \frac{\nu_{R}}{L_{R}} \tag{7β}$$

Όπου προφανώς:

$U_R = \dfrac{U_\pi}{U_o}$, $\nu_R = \dfrac{\nu_\pi}{\nu_o}$, ενώ το μέγεθος L_R έχει οριστεί από την εξίσωση (1).

Όταν χρησιμοποιούμε το ίδιο ρευστό για τα πειράματα στο ομοίωμα με αυτό το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στο πρωτότυπο, ισχύει προφανώς ότι $\nu_\pi = \nu_o$ και $\nu_R = 1$. Κατά συνέπεια στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (7β) γράφεται:

$$U_R = \frac{1}{L_R}. \tag{8}$$

Σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε τον χρόνο T ο οποίος απατείται για μία διεργασία, όπως π.χ. το άδειασμα ενός φράγματος (ολικό, ή μέχρι ενός συγκεκριμμένου σημείου) κλπ.

Για το πρωτότυπο ο χρόνος ο οποίος απαιτείται για μία διεργασία δίνεται από την σχέση:

$$T_\pi = \frac{L_\pi}{U_\pi} \tag{9α}$$

Ενώ για το ομοίωμα αντίστοιχα από την σχέση:

$$T_o = \frac{L_o}{U_o} \tag{9β}$$

Κατά συνέπεια:

$$T_R = \frac{T_\pi}{T_o} = \frac{L_\pi / U_\pi}{L_o / U_o} \tag{9γ}$$

Οπότε ισχύει η σχέση:

$$T_R = \frac{L_R}{U_R} \tag{9δ}$$

Παίροντας υπόψη μου την εξίσωση (7β) και εισαγάγοντας την στην εξίσωση (9δ):

$$T_R = \frac{\left(L_R\right)^2}{\nu_R} \qquad (10α)$$

Ενώ για την ειδική περίπτωση κατά την οποία χρησιμοποιώ το ίδιο ρευστό στο πρωτότυπο και στο ομοίωμα οπότε $\nu_R = 1$, η εξισωση (10α) γράφεται:

$$T_R = \left(L_R\right)^2 \qquad (10β)$$

<u>Ομοιότητα κατά Froude</u>

,Ο αριθμός Froude στο πρωτότυπο ορίζεται από την σχέση:

$$\left(F_r\right)_\pi = \frac{U_\pi}{\sqrt{g_\pi L_\pi}} \qquad (11)$$

Όπου τα μεγέθη *U* και *L* έχουν ηδη οριστεί, ενώ g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Αντίστοιχα για το ομοίωμα έχουμε:

$$\left(Fr\right)_o = \frac{U_o}{\sqrt{g_o L_o}} \qquad (12)$$

Για να έχουμε ομοιότητα κατά Froude πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\left(Fr\right)_\pi = \left(Fr\right)_o \qquad (13)$$

Παίρνοντας υπόψη μου τις εξισώσεις (11), (12) και (13):

$$\frac{U_{\pi}}{\sqrt{g_{\pi}L_{\pi}}} = \frac{U_{o}}{\sqrt{g_{o}L_{o}}} \qquad (14)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$U_R = \frac{U_{\pi}}{U_o} = \frac{\sqrt{g_{\pi}L_{\pi}}}{\sqrt{g_{o}L_{o}}} \qquad (14\alpha)$$

\

Επειδή η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι πρακτικά σταθερή ισχύει ότι:

$g_{\pi} = g_o = g$.

Παίρνοντας επιπλέον υπόψη μου την εξίσωση (1):

$$U_R = \sqrt{L_R} \qquad (15)$$

Παίρνοντας υπόψη μου τις τις εξισώσεις (9δ) και (15) προκύπτει ότι ηια την περίπτωση της ομοιότητας Froude μπορώ να γράψω:

$$T_R = \sqrt{L_R} \qquad (16)$$

Συγκρίνοντας λοιπόν τις εξισώσεις (8) και (15), αλλά και (10β) και (16) προκύπτει ότι για την περίπτωση κατά την οποία χρησιμοποιήσουμε το ίδιο ρευστό στο πρωτότυπο και στο ομοίωμα **δεν είναι δυνατόν να έχουμε ταυτόχρονα ομοιότητα κατά Reynolds και κατά Froude**, αφού είναι διαφορετικές οι τιμές για τα U_R και T_R

Για να εξάγουμε το παραπάνω συνπέρασμα πήραμε υπόψη μας ότι η τιμή της κλίμακας L_R είναι διαφορετική της μονάδας.