

2.3 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΑΝΑΔΕΥΣΗΣ ΣΕ ΔΕΞΑΜΕΝΗ ΑΕΡΙΣΜΟΥ

Θέλουμε να επιτύχουμε ικανοποιητική ανάμιξη σε ένα κανάλι στο οποίο μεταφέρονται λύματα.

Για τον σκοπό αυτό τοποθετούμε διαχυτήρες στον πυθμένα του καναλιού από τους οποίους εξέρχονται φυσαλίδες αέρα διαμέτρου $D = 1mm$.

Η αποδοτικότητα του συστήματος είναι μέγιστη όταν η απόσταση L μεταξύ των διαχυτήρων είναι τέτοια ώστε όταν εισέρχονται από έναν διαχυτήρα οι φυσαλίδες στο κανάλι, οι φυσαλίδες από τον προηγούμενο διαχυτήρα να έχουν φθάσει την επιφάνεια του υγρού.

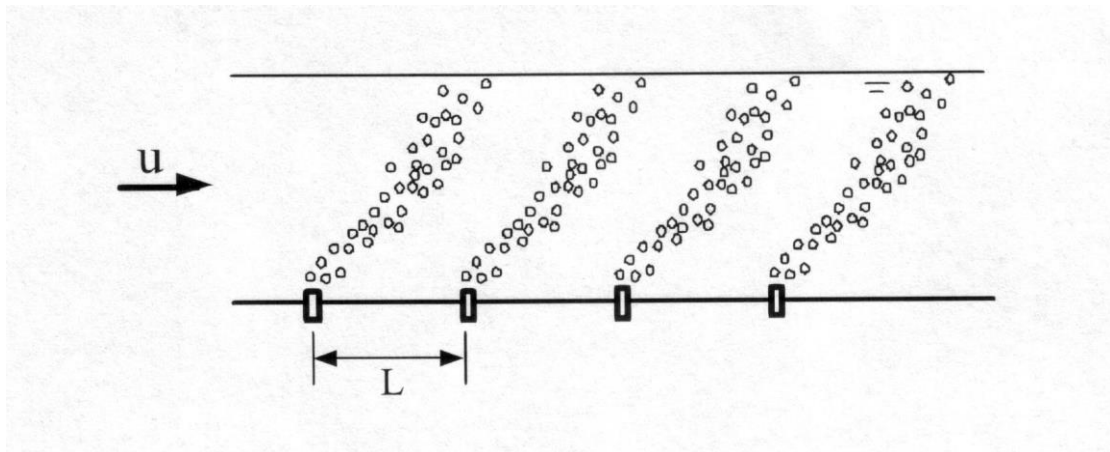
Η ροή στο κανάλι θεωρείται οριζόντια, η ταχύτητα των λυμάτων $u = 1m/s$ και το βάθος ροής ίσο με $h = 1m$.

Η πυκνότητα του αέρα θεωρείται ίση με $\rho_\phi = 1.4kgm^{-3}$, η πυκνότητα του νερού ίση με $\rho = 1000kgm^{-3}$ και το κινηματικό ιξώδες του νερού ίσο με $\nu = 10^{-6}m^2s^{-1}$.

Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των φυσαλίδων θεωρούνται αμελητέες.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{3}{\sqrt{Re}} + 0,34.$$



ΛΥΣΗ

Ονομάζω την ταχύτητα ανύψωσης των φυσαλίδων v_φ .

Ο χρόνος για να φτάσει μία φυσαλίδα στην επιφάνεια είναι ίσος με:

$$T_{av} = \frac{h}{v_\varphi} \quad (1)$$

Κατά την διάρκεια του χρόνου αυτού οι φυσαλίδες θα έχουν διατρέξει κατά την οριζόντια διεύθυνση απόσταση ίση με την απόσταση των διαχυτήρων:

$$L = uT_{av}, \quad (2)$$

Ή ισοδύναμα:

$$T_{av} = \frac{L}{u} \quad (2a)$$

Κατά συνέπεια η απόσταση μεταξύ των διαχυτήρων δίνεται από την σχέση:

$$L = u \frac{h}{v_\varphi} \quad (3)$$

Το μόνο άγνωστο μέγεθος στην παραπάνω σχέση είναι η ταχύτητα ανύψωσης v_φ .

Μπορώ να την υπολογίσω το μέγεθος αυτό αν θεωρήσω το ισοζύγιο μεταξύ των δυνάμεων άνωσης, βαρύτητας και αντίστασης στην ροή (η διαδικασία υπολογισμού είναι αντίστοιχη με αυτή του υπολογισμού της ταχύτητας καθίζησης.)

Καταρχάς θεωρώ ότι η ροή είναι έρπουσα (creeping flow). Λαμβάνοντας υπόψη πως η φορά της ταχύτητας είναι αντίστροφη από αυτήν για την περίπτωση της καθίζησης (δηλαδή αντίθετη στην φορά την επιτάχυνσης της ταχύτητας), μπορώ να υπολογίσω την ταχύτητα ανύψωσης από την σχέση:

$$v_\varphi = \frac{2}{9} \frac{R^2 g}{\nu} \left(1 - \frac{\rho_\varphi}{\rho} \right) = \frac{2}{9} \frac{(0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 9,81 \text{ ms}^{-2}}{10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}} \left(1 - \frac{1,4 \text{ kgm}^{-3}}{1000 \text{ kgm}^{-3}} \right) = 0,54 \text{ ms}^{-1}$$

Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται σε:

$$\text{Re} = \frac{v_\varphi d}{\nu} = \frac{0,54 \text{ ms}^{-1} 10^{-3} \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}} = 540 \gg 1. \text{ Προφανώς η υπόθεση της έρπουσας ροής δεν ισχύει.}$$

Η ταχύτητα πρέπει να υπολογιστεί επαναληπτικά με διαδοχικές προσεγγίσεις.

Υποθέτω ότι $\text{Re}_0 = 540$. Ο συντελεστής αντίστασης εκτιμάται σε:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{3}{\sqrt{\text{Re}}} + 0,34 = \frac{24}{540} + \frac{3}{\sqrt{540}} + 0,34 = 0,51$$

Μία καινούργια εκτίμηση της ταχύτητας ανύψωσης δίνεται από την σχέση:

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{8g(\rho - \rho_\varphi)}{3C_D \rho} R} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9,81 \cdot (1000 - 1,4)}{3 \cdot 0,51 \cdot 1000} 0,5 \cdot 10^{-3}} = 0,16 \text{ m/s}$$

Κατά συνέπεια ο αριθμός Reynolds ο οποίος αντιστοιχεί στην νέα αυτή εκτίμηση είναι $\text{Re}_1 = 160$.

Προφανώς: $\text{Re}_1 \neq \text{Re}_0$

Η δεύτερη επανάληψη δίνει:

$$C_{D2} = \frac{24}{160} + \frac{3}{\sqrt{160}} + 0,34 = 0,73$$

Η ταχύτητα ανύψωσης υπολογίζεται σε $v_\varphi = 0,13 \text{ m/s}$.

Ο αριθμός Reynolds μπορεί να εκτιμηθεί εκ νέου σε:

$$\text{Re}_2 = \frac{v_\varphi d}{\nu} = \frac{0,13 \text{ m/s} \cdot 10^{-3} \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}} = 130$$

Το σφάλμα ανάμεσα στις δύο τελευταίες επαναλήψεις είναι:

$$\varepsilon = \left| \frac{\text{Re}_i - \text{Re}_{i-1}}{\text{Re}_i} \right| = \left| \frac{130 - 160}{130} \right| \cong 23\% > 10\%$$

Συνεχίζοντας την διαδικασία βρίσκω:

$$C_{D3} = \frac{24}{130} + \frac{3}{\sqrt{130}} + 0,34 = 0,79, v_\varphi \cong 0,13 \text{ m/s} \text{ και } \text{Re}_3 = 130.$$

Προφανώς μπορώ να θεωρήσω ότι έχει επιτευχθεί σύγκλιση και να θεωρήσω την τιμή της ταχύτητας ανύψωσης ίση με $v_\varphi = 0,13 \text{ m/s}$.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1) υπολογίζω την επιθυμητή απόσταση μεταξύ των διαχυτήρων σε:

$$L = u \frac{h}{v_\varphi} = 1 \text{ m/s} \frac{1 \text{ m}}{0,13 \text{ m/s}} = 7,69 \text{ m}$$