2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

2.1 ΕΡΠΟΥΣΑ ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΦΑΙΡΑ

Εξετάζουμε την περίπτωση ροής γύρω από μία σφαίρα ακτίνας *R*.

Η σφαίρα θεωρείται ακίνητη. Θεωρούμε ότι μακριά από την σφαίρα το πεδίο ροής είναι σταθερό και παράλληλο στο άξονα z, και η ταχύτητα ίση με U_0.

Θεωρούμε τον αριθμό Reynolds $\mathrm{Re} = 2U_0 R/\nu$ "πολύ μικρό» ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να είναι αμελητέες ($\mathrm{Re} << 1$).

Η έρπουσα ροή (creeping flow) νευτώνειου ρευστού περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων με μορφή:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \vec{u} = 0 \qquad (2)$$

Απαλείφουμε την πίεση εφαρμόζοντας τον τελεστή $r\vec{o}t$ στην εξίσωση (1), παίρνοντας υπόψη μας την ιδιότητα:

$$r\vec{o}t\, gra\vec{d}() = 0 \qquad (3)$$

Ο τελεστής Stokes εκφράζεται από την σχέση:

$$\nabla^2 \vec{u} = gra\vec{d}\left(di\vec{v}\vec{u}\right) - r\vec{o}t\left(r\vec{o}t\,\vec{u}\right) \qquad (4)$$

και παίρνοντας υπόψη μας τις (2)και (3):

$$r\vec{o}t\left\{r\vec{o}t\left[r\vec{o}t\left(\vec{u}\right)\right]\right\} = 0 \qquad (5)$$

Αδιαστατοποιούμε όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται χρησιμοποιώντας σαν χαρακτηριστικό μήκος την ακτίνα της σφαίρας *R* και σαν σαν χαρακτηριστικό χρόνο το μέγεθος R/U_0.

Στην συνέχεια όλα μεγέθη δίνονται σε αδιάστατη μορφή, οι αστερίσκοι παραλείπονται για λόγους απλότητας

Για να λάβουμε υπόψη μας την οριακή συνθήκη μη ολίσθησης (no slip condition) στην επιφάνεια τα σφαίρας, χρησιμοποιούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες, θεωρώντας ότι η αρχή των συντεταγμένων συμπίπτει με το κέντρο της σφαίρας.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει των καρτεσιανών ως εξής:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\phi = \arctan(y / x), \theta = \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2} / z\right)$

Οι σφαιρικές συντεταγμένες μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

r	Δίνει την απόσταση του σημείου *Π* από το κέντρο της σφαίρας
ϕ	Ορίζει την θέση του σημείου *Π* ένα επίπεδο *xy* κάθετο στον άξονα *z*
θ	Ορίζει την γωνία που σχηματίζει η ευθεία που ενώνει το σημείο *Π* με την αρχή των αξόνων με τον άξονα z

Για το πρόβλημα που εξετάζουμε, λόγω της συμμετρίας εκ περιστροφής σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \phi} = 0, \; u_\phi = 0$$

Οι γραμμές ροής δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$u_r = \frac{1}{\sin \theta r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \tag{6α}$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{6β}$$

Οι οριακές συνθήκες μετατρέπονται σε:

Για $r = 1, \dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0, \dfrac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$

Για $r \to \infty, \Psi \to \dfrac{1}{2} \sin^2 \theta r^2$

Χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$\Psi = f(r) \sin^2 \theta \tag{7}$$

και παίρνοντας υπόψη μας τις εξισώσεις (5-6), εκφράζοντας τον τελεστή $\vec{rot}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες, καταλήγουμε σε μία κανονική διαφορική εξίσωση για την συνάρτηση $\boldsymbol{f}$.Επιλύοντας την και χρησιμοποιώντας την (7) προκύπτει το πεδίο ταχυτήτων σε αδιάστατη μορφή:

$$u_r = \left[1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right] \cos \vartheta \tag{8α}$$

$$u_\vartheta = -\left[1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3}\right] \sin \vartheta \tag{8β}$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο των ταχυτήτων είναι συμμετρικό στο επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο πεδίο ροής και διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

Με βάση το πεδίο ταχυτήτων μπορώ να υπολογίσω τις τάσεις και το πεδίο πίεσης, και να υπολογίσω στην συνέχεια την δύναμη η οποία ασκείται απάνω στην σφαίρα:

$$F = 6R\pi\mu U_0 \qquad (9)$$

Η (9) δίνεται σε διαστατική μορφή. Προφανώς η δύναμη είναι παράλληλη στον άξονα z.

Με βάση την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε την σχέση ανάμεσα στον αριθμό Reynolds και τον συντελεστή υδροδυναμικής αντίστασης C_D.

$$C_D = 24/\mathrm{Re}$$

Για περίπτωση σφαίρας η οποία κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ρευστό το οποίο ήταν αρχικά σε ισορροπία χρησιμοποιούμε την ίδια μεθοδολογία, αλλά σαν οριακές συνθήκες ότι το ρευστό ηρεμεί σε «άπειρη» απόσταση από την σφαίρα και ότι στην επιφάνεια της σφαίρας η ταχύτητα του ρευστού πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα της σφαίρας.

Προφανώς το πεδίο ταχυτήτων στις δύο περιπτώσεις θα είναι διαφορετικό αν εκφραστεί σε σύστημα συντεταγμένων Euler, η δύναμη όμως η οποία ασκείται απάνω στην σφαίρα είναι ίδια. *(Βλέπε Ν. Κωτσοβίνος, Ρευστομηχανική, Εκδόσεις Δ.Π.Θ. 2003).*

Η εξήγηση είναι απλή: αν χρησιμοποιήσουμε ένα κινητό σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο ο παρατηρητής κινείται με την ταχύτητα της σφαίρας, η σφαίρα φαίνεται ακίνητη και το ρευστό στο άπειρο να κινείται με ταχύτητα U_0.

Παρότι έγινε η υπόθεση ότι $\mathrm{Re} << 1$ οι σχέσεις που που προέκυψαν ισχύουν με καλή ακρίβεια για αριθμούς Reynolds έως 0,5-1.

Επίσης είναι δεν είναι αυτονόητο ότι η λύση που περιγράφουμε ισχύει για όλη την εξεταζόμενη περιοχή.

Μπορούμε να υπολογίσουμε και το πεδίο ροής για έρπουσα ροή γύρω από κύλινδρο, ακολουθώντας ανάλογη μεθοδολογία με αυτήν που περιγράψαμε (Χρησιμοποιούμε τον τελεστή $\vec{rot}$, εισαγάγουμε τις γραμμές ροής σε κυλονδρικές συντεταγμένες, παίρνουμε μία κανονική διαφορική εξίσωση εκφράζοντας τις με την σχέση $\Psi = g(\tilde{\vartheta})\tilde{f}(\rho)$ κλπ.)

Η παραπάνω λύση δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για περιοχές κοντά στην σφαίρα, δεν συγκλίνει για μεγάλη απόσταση από την σφαίρα: Για $\rho \to \infty$ η λύση συμπεριφέρται σαν $\approx \ln\rho$, λύση η οποία δεν είναι αποδεκτή τόσο γιατό οδηγεί σε μη φυσικό αποτέλεσμα αλλά και επειδή έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι οι δυνάμεις αδρανείας είναι αμελητέες.

Η εξήγηση είναι ότι ακόμα και για πολύ χαμηλούς αριθμούς Reynolds, οι δυνάμεις αδρανείας δεν είναι αμελητέες μακριά από την στερεό αντικείμενο (στην περιοχή αυτή λόγω των χαμηλών κλίσεων οι όροι του ιξώδους γίνονται λιγώτερο σημαντικοί).

Μια λύση του προβλήματος έδωσε ο Oseen ο οποίος για $\rho \to \infty$ χρησιμοποίησε την προσέγγιση $\vec{u}\nabla\vec{u} \cong \vec{U}\nabla\vec{u}$ όπου $\vec{U}$ είναι η ταχύτητα για $\rho \to \infty$ η οποία μπορεί και να εκφραστεί ως: $\vec{U} = 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + U_0\vec{e}_z$

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις επιλύονται με μεθόδους ασυμπτωτικής ανάλυσης.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η παραδοχή ότι τα εξεταζόμενα σωματίδια είναι σφαιρικά σε εφαρμογές που ενδιαφέρουν τους Μηχανικούς Περιβάλλοντος δίνει καλά αποτελέσματα τόσο για την περίπτωση κόκκων άμμου, όσο για την περίπτωση φυσαλίδων αέρα κλπ.

Η παραδοχή δεν ισχύει όμως για τη μελέτη της καθίζησης σε αριθμό προβλημάτων που ενδιαφέρουν τους Μηχανικούς Περιβάλλοντος (π.χ. Δεξαμενές Δευτεροβάθμιας Καθίζησης σε Ε.Ε.Λ.): το σχήμα των σωματιδίων μοιάζει μάλλον με περισσότερο και οι τροχιές τους είναι δυνατόν να παρομοιαστούν σε μερικές περιπτώσεις με φύλλο που πέφτει από δέντρο. Η απόκλιση είναι μεγαλύτερη για σημαντικές τιμές του αριθμού Reynolds.

Μορφή η οποία δεν μπορεί να προσομοιωθεί με σφαιρική έχουν επίσης σωματίδια από άργιλο κλπ.

Η υδροδυναμική συμπεριφορά σφαιρικών σωματιδίων για την περίπτωση μη αμελητέων δυνάμεων αδρανείας περιγράφεται στην Ρευστομηχανική του Κωτσοβίνου.

Τόσο για την περίπτωση έρπουσας ροής όσο και για την περίπτωση μη αμελητέων όρων αδρανείας η ταχύτητα καθίζησης μπορεί να υπολογιστεί από το ισοζύγιο των δυνάμεων που ασκούνται στην σφαίρα. (Βλέπε Ν. Κωτσοβίνος, Ρευστομηχανική)

Ως εδώ έγινε η υπόθεση ότι τα σωματίδια κινούνται σε «άπειρο» ρευστό. Για την περίπτωση ομάδων σωματιδίων η υπόθεση αυτή δεν ισχύει. Για χαμηλούς αριθμούς Reynolds και χαμηλή «συγκέντρωση» των σωματιδίων, οι αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων είναι δυνατόν να ληφθούν υπόψη «διορθώνοντας» το ιξώδες. Πληροφορίες για την υδροδυναμική σε περίπτωση μεγαλύτερων συγκεντρώσεων δίνονται π.χ. στο βιβλίο *Low Number Hydrodynamics* των *J. Happel και H. Brenner Prentice-Hall 1965.*

Το πρόβλημα της υδροδυναμικής συμπεριφοράς για ομάδες σωματιδίων για την περίπτωση μη αμελητέων όρων αδράνειας εξετάζεται σε εξειδικευμένες δημοσιεύσεις (βλέπε π.χ. D.L. Koch & A. J.C. Ladd, (1997) Moderate Reynolds number flows through periodic and random arrays of alligned cylinders, *J. Fluid Mech.*, vol. 349, pp. 31-66).

Μία συνηθισμένη ερευνητική προσέγγιση του προβλήματος είναι η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes με συμβατικές (μέθοδος πεπερασμένων όγκων ελέγχου, πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων) ή μη συμβατικών μεθόδων (μέθοδος lattice-Boltzmann).

Πάντως ακόμα και σήμερα σε πολλές προσομοιώσεις προσομοιώσεις τα σωματίδια θεωρούνται κυλινδρικά, επειδή η υπολογιστική ισχύς και επιτρέπει (για τις περισσότερες περιπτώσεις) την επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes μόνο για την περίπτωση της δισδιάστατης ροής.