ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2019

ΟΜΑΔΑ Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΝΟΙΚΤΑ ΒΙΒΛΙΑ

2ο ΘΕΜΑ

(3 Μονάδες)

ΕΚΦΩΝΗΣΗ

Σε μία περιγραφή κατά Lagrange, οι συντεταγμένες των σωματιδίων σε τυχόν χρονικό σημείο t δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_1 = \xi_1 + \frac{1}{2}\cos^2[t] - \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \xi_2 + \frac{1}{2}\sin^2[t]$$

$$x_3 = \xi_3$$

όπου ξ_1, ξ_2 και ξ_3 είναι οι συντεταγμένες του ιδεατού σωματιδίου την χρονική στιγμή t=0.

Απαντήστε στις εξής ερωτήσεις:

α) Γράψτε την εξίσωση για τις τροχιές των σωματιδίων. (Σε αυτήν την εξίσωση δεν πρέπει να εμφανίζεται ο χρόνος). Κατά την γνώμη σας οι τροχιές έχουν τη μορφή ευθείας, κύκλου, έλλειψης, παραβολής, υπερβολής, ή έχουν άλλη μορφή;

β) Υπολογίστε τις τιμές για τις τρεις συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων

γ) Σχεδιάστε την τροχιά του σωματιδίου, το οποίο την χρονική στιγμή $t=0$ βρισκόταν στο σημείο ξ_1=0, ξ_2=0, ξ_3=0.

δ) Η ροή είναι μόνιμη ή μη μόνιμη;

2^o ΘΕΜΑ-ΛΥΣΗ

Ι. ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Α) Πρέπει να πάρουμε υπόψη μας ότι:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \tag{I-1}$$

αλλά επίσης ότι:

$$U_1 = U_x, \, U_2 = U_y. \, U_3 = U_z \tag{I-2}$$

Β) Η σχέση $x_3 = z = \xi_3$ σημαίνει ότι ένα σωματίδιο ρευστού το οποίο στο χρονικό σημείο t=0 βρίσκεται στο επίπεδο $z = \xi_3$ παραμένει σε αυτό και αλλάζουν μόνο οι συντεταγμένες x και y. Κατά συνέπεια η ροή είναι επίπεδη και λαμβάνει χώρα σε ένα επίπεδο x-y αφού το σωματίδιο παραμένει σε αυτό το επίπεδο για όλα τα χρονικά σημεία.

Γ) Εάν σε ορισμένες εξισώσεις της κινηματικής δεν εμφανίζονται οι παράμετροι ξ_1, ξ_2, ξ_3 μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτές είναι και σε μορφη Euler

Δ) Αν σε περίπτωση κατά την οποία ένα πεδίο ταχυτήτων αντιστοιχεί σε μορφή Euler και <u>καμία</u> από τις συνιστώσες του <u>δεν εξαρτάται από τον χρόνο t</u>, τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι η ροή την οποία περιγράφει είναι **μόνιμη**. Εάν όμως ένα πεδίο ταχυτήτων είναι γραμμένο σε μορφή Euler και <u>έστω μία</u> από τις συνιστώσες του <u>εξαρτάται από τον χρόνο</u>, τότε ότι η ροή την οποία περιγράφει είναι **μη μόνιμη.**

Ε) Το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι γραμμένο σε αδιάστατη μορφή

ΙΙ. ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΠΙ ΜΕΡΟΥΣ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

1) **<u>Απάντηση στο ερώτημα α)</u>**

Από την εκφώνηση δίνονται οι εξισώσεις για τις τροχιές των σωματιδίων

$$x_1 = \xi_1 + \frac{1}{2}\cos^2[t] - \frac{1}{2} \tag{1α}$$

$$x_2 = \xi_2 + \frac{1}{2}\sin^2[t] \tag{1β}$$

$$x_3 = \xi_3 \tag{1γ}$$

Ή επίσης παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση (Ι-1) (βλ. «γενικότητες») οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\mathrm{x} = \xi_1 + \frac{1}{2}\cos^2[t] - \frac{1}{2} \tag{2α}$$

$$\mathrm{y} = \xi_2 + \frac{1}{2}\sin^2[t] \tag{2β}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (2α) και (2β) γράφονται και:

$$\cos^2[t] = 2\mathrm{x} - 2\xi_1 + 1 \tag{3α}$$

$$\sin^2[t] = 2y - 2\xi_2 \tag{3β}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (3α) και (3β):

$$\cos^2[t] + \sin^2[t] = 2\mathrm{x} - 2\xi_1 + 1 + 2y - 2\xi_2 \tag{4α}$$

ή ισοδύναμα:

$$2\mathrm{x} - 2\xi_1 + 1 + 2y - 2\xi_2 = \cos^2[t] + \sin^2[t] \tag{4β}$$

Από την τριγωνομετρία ξέρουμε ότι:

$$\sin^2[t] + \cos^2[t] = 1 \tag{5}$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση (4β) γράφεται

$$2\mathrm{x} - 2\xi_1 + 1 + 2y - 2\xi_2 = 1 \tag{6α}$$

ή ισοδύναμα

$$y = -x + \xi_1 + \xi_2 \tag{6β}$$

Κατά συνέπεια οι εξισώσεις για τις τροχιές που εξετάζουμε έχουν την μορφή ευθείας, αφού η γενική μορφή για την ευθεία είναι :

$$y = ax + b \tag{6γ}$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα το οποίο εξετάζουμε ισχύει ότι:

$a = -1$ και $b = \xi_1 + \xi_2$

<u>Κατά συνέπεια οι τροχιές τις οποίες εξετάζουμε έχουν τη μορφή ευθείας</u>

2) Απάντηση στο ερώτημα β)

Λαμβάνουμε υπόψη μας τις εξισώσεις:

$$U_1 = U_x = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad (7α)$$

$$U_2 = U_y = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad (7β)$$

$$U_3 = U_z = \frac{dx_3}{dt} = \frac{dz}{dt} \quad (7γ)$$

Κατά συνέπεια λαμβάνοντας υπόψη μας τις παραπάνω εξισώσεις ή τις εξισώσεις (1α)-(1γ) ή (1δ) –(1ζ) και παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$$U_x = -\sin[t]\cos[t] \quad (8α)$$

$$U_y = \sin[t]\cos[t] \quad (8β)$$

$$U_z = 0 \quad (8γ)$$

3)Απάντηση στο ερώτημα γ)

Εφόσον ξ_1=0 και ξ_2=0 η εξίσωση (6) γράφεται:

$$y = -x \quad (9)$$

Η οποία είναι η εξίσωση για μία ευθεία η οποία περνάει από το κέντρο συμβολής των αξόνων (δηλ. το σημείο x=0 και $y = 0$) η οποία έχει αρνητική κλίση,

4)Απάντηση στο ερώτημα δ)

Παρατηρώντας τις εξισώσεις (8α) –(8γ) βλέπουμε ότι εφόσον δεν εμφανίζονται οι παράμετροι ξ_1, ξ_2, ξ_3 αντιστοιχεί σε μορφή Euler.
Εφόσον όμως δύο συνιστώσες εξαρτώνται από τον χρόνο ***<u>η ροή είναι μη μόνιμη</u>***