Διανυσματική ανάλυση και τελεστές

1 Βασικές έννοιες διανυσματικής ανάλυσης

Σαν $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ή $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) είναι τα μοναδιαία διανύσματα ,παράλληλα στους άξονες x, y, z, με την αρχή τους τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων. (*Μοναδιαίο διάνυσμα ονομάζεται το διάνυσμα με μέτρο ίσο με τη μονάδα).*

Τα βαθμωτά μεγέθη A_x, A_y, A_z είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων κατά τις διευθύνσεις x, y, z (x_1, y_1, z_1) .

2 Ορισμός τελεστών

Ο τελεστής $gr\vec{a}d$ (βαθμίδα) εφαρμόζεται επί ενός βαθμωτού μεγέθους και ορίζεται σαν:

$$gr\vec{a}df = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Ο τελεστής div (απόκλιση) εφαρμόζεται επί ενός διανυσματικού μεγέθους και ορίζεται σαν:

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ο τελεστής Nabla ορίζεται σαν: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

Προφανώς ο τελεστής Nabla είναι διάνυσμα.

Ακολουθώντας τις συμβάσεις που είχαμε εισαγάγει:

$$\nabla f = gr\vec{a}df = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Κατά συνέπεια ο τελεστής $\nabla\Phi$ αντιστοιχεί στην βαθμίδα ή στην απόκλιση ανάλογα με το αν ο Φ είναι βαθμωτό μέγεθος ή διάνυσμα.

Ο τελεστής $\nabla^2\Phi$ ορίζεται σαν $\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi$

Ακολουθώντας τις προηγούμενες συμβάσεις, βρίσκουμε ότι εάν ο τελεστής αυτός εφαρμοσθεί σε βαθμωτό μέγεθος ισούται με:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Laplace.

Όταν ο τελεστής $\nabla^2\Phi$ εφαρμόζεται σε ένα διάνυσμα ισούται με:

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Stokes.