

Η ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

Η εξίσωση *Bernoulli* παίρνει υπόψη της το ισοζύγιο ενέργειας σε δύο σημεία, ή δύο περιοχές, Για να την εφαρμόσουμε σε ένα συγκεκριμένο σημείο μία περιοχή πρέπει τοπικά οι γραμμές ροής να είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Σε πολλές εφαρμογές μηχανικού είναι σκόπιμο να την γράψουμε με τέτοιο τρόπο ώστε ο κάθε όρος να έχει διαστάσεις μήκους:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (1)$$

όπου u η ταχύτητα, p η πίεση, z το γεωδαιτικό ύψος του σημείου που εξετάζουμε, ενώ g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και γ το ειδικό βάρος.

Ο δείκτης συμβολίζει το σημείο ή την τομή στον χώρο (η οποία ονομάζεται συχνά κι διατομή). Κατά συνέπεια u_1 , p_1 , z_1 είναι αντίστοιχα η ταχύτητα, η πίεση και το γεωδαιτικό ύψος στο σημείο 1, ενώ με u_2 , p_2 , z_2 συμβολίζουμε αντίστοιχα την ταχύτητα, την πίεση και το γεωδαιτικό ύψος στο σημείο 2

Η παραπάνω εξίσωση (1) εκφράζει το ισοζύγιο ενέργειας ανάμεσα σε δύο σημεία. Στην μορφή με την οποία είναι γραμμένη θεωρεί πως δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας ανάμεσα στα δύο σημεία 1 και 2, μία υπόθεση η οποία είναι επιτρεπτή όταν το ρευστό διανύει σχετικά μικρές αποστάσεις. Η συνιστώσες της ενέργειας σε ένα σημείο είναι η κινητική ενέργεια $u^2 / 2g$, η διαθέσιμη ενέργεια λόγω πίεσης p / γ και η γεωδαιτική ενέργεια z .

Οι εφαρμογές στις επιστήμες του μηχανικού είναι πολλές, θα αναφερθούμε στην συνέχεια στις ροές σε αγωγούς υπό πίεση.

Στην περίπτωση ροών σε αγωγούς, μπορούμε να εφαρμόσουμε συχνά την εξίσωση *Bernoulli*, αφού όμως πάρουμε υπόψη μας τις απώλειες ενέργειας Δh

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta h \quad (1)$$

όπου u η ταχύτητα, p η πίεση, z το γεωδαιτικό ύψος στον άξονα του αγωγού Δh το συνολικό ύψος των ενεργειακών απωλειών ανάμεσα στις διατομές 1 και 2. Στην περίπτωση μας η διατομή 2 βρίσκεται κατάντη της διατομής 1.
και:

$$\Delta h = h_f + \Sigma h_T \quad (1a)$$

Οι απώλειες είναι οι γραμμικές h_T και οι τοπικές Σh_T .

Στην συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση των ροών υπό πίεση, κατά την οποία οι πρώτες (οι γραμμικές) εξαρτώνται γραμμικά από το μήκος αγωγού (σταθερής διατομής και παροχής) και υπολογίζονται με την εξίσωση *Darcy-Weissbach*:

$$h_T = f \frac{L}{D} \frac{u^2}{2g} \quad (2)$$

όπου L είναι το μήκος του αγωγού, D η εσωτερική διάμετρος, u η μέση ταχύτητα, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και f ένας συντελεστής ο οποίος εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds και από τον λόγο k/D , όπου k η ισοδύναμη υδραυλική τραχύτητα του αγωγού. Ο συντελεστής f μπορεί να υπολογισθεί επαναληπτικά (δηλ. με μία επαναληπτική διαδικασία) ή από το διάγραμμα του Moody.

Προφανώς αν τα χαρακτηριστικά του αγωγού δεν είναι σταθερά, εξετάζουμε επιμέρους τμήματα με και προσθέτουμε τις απώλειες οι οποίες είχαν υπολογιστεί με τον παραπάνω τρόπο.

Όσο αφορά τις τοπικές απώλειες αυτές οφείλονται στην ύπαρξη γωνιών στους αγωγούς σε απότομες διευρύνσεις ή στενώσεις της διατομής, και μπορούν να υπολογισθούν για την περίπτωση τυρβώδους ροής με την χρήση της γενικής εξίσωσης:

$$h_T = K_T \frac{u^2}{2g} \quad (3)$$

Κατάλληλες τιμές για τον αδιάστατο συντελεστή K_T μπορούν να βρεθούν στην βιβλιογραφία.

Συχνά η εξίσωση *Bernoulli* χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την εξίσωση της διατήρησης της μάζας, η οποία για την ίδια γεωμετρική κλίμακα και με την υπόθεση της μόνιμης ροής δηλώνει ότι η παροχή Q σε διατομές είναι ίδια, κατά συνέπεια:

$$Q = u_1 A_1 = u_2 A_2 \quad (4)$$

Όπου A είναι το εμβαδόν της διατομής το οποίο είναι κάθετο στην ροή. (Για την περίπτωση των κλασσικών σωλήνων κυλινδρικής διατομής $A = \pi D^2 / 4$, όπου D είναι η εσωτερική διάμετρος του αγωγού, όπως άλλωστε έχει αναφερθεί ήδη).

Κατά συνέπεια για την περίπτωση σταθερής παροχής, στα τμήματα στα οποία η διάμετρος είναι μικρή, έχουμε αυξημένη ταχύτητα.

Οι συνέπειες μπορεί να είναι π.χ. αυξημένες απώλειες

- Να είναι αυξημένες οι απώλειες Δh βλ. εξισώσεις (2) και (3)

- Λόγω της αυξημένης κινητικής ενέργειας $u^2 / 2g$ και δεδομένου ότι η συνολική διαθέσιμη ενέργεια παραμένει ίδια, έχουμε χαμηλότερη ενέργεια πίεσης και κατά

συνέπεια μικρότερες τιμές της πίεσης. Σε ορισμένες περιπτώσεις αυτό μπορεί να οδηγήσει στο φαινόμενο της σπληλαιώσης, δηλ αλλαγή φάσης από την υγρή στην αέρια, υπο κανονικές θερμοκρασίας. Το φαινόμενο αυτό έχει συχνά αρνητικές επιπτώσεις στους αγωγούς, βλ. π.χ. υποκεφάλαιο 5.5, σελίδα 5-22, στο βιβλίο Ρευστομηχανική του Ν. Κωτσοβίνου.