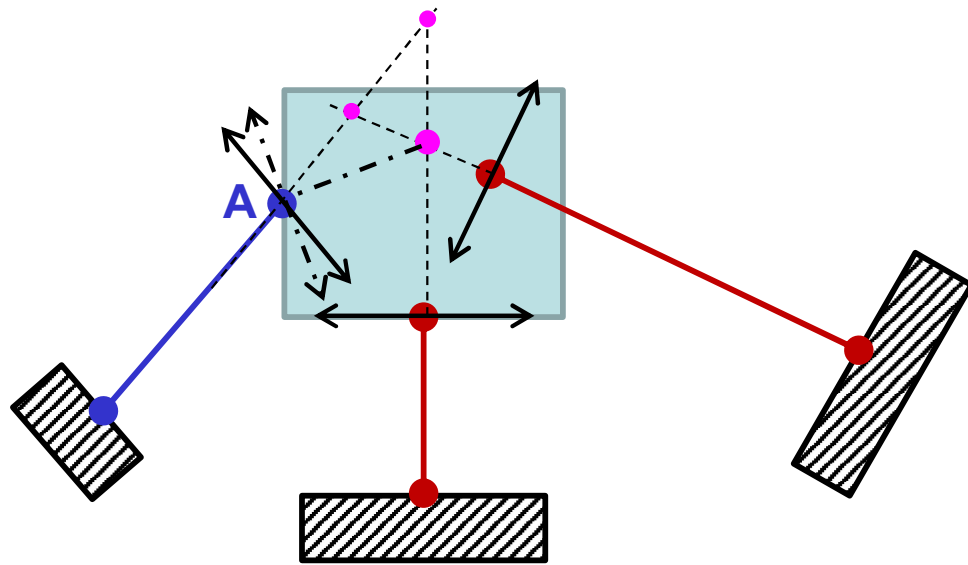


**ΑΚΙΝΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΦΟΡΕΑ = με 3 Δεσμικές Ράβδους (Δ.Ρ. ή  $\rho_{\sigma\tau}$ ) που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο  $\rightarrow$  ΣΤΕΡΕΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΗ στήριξη**

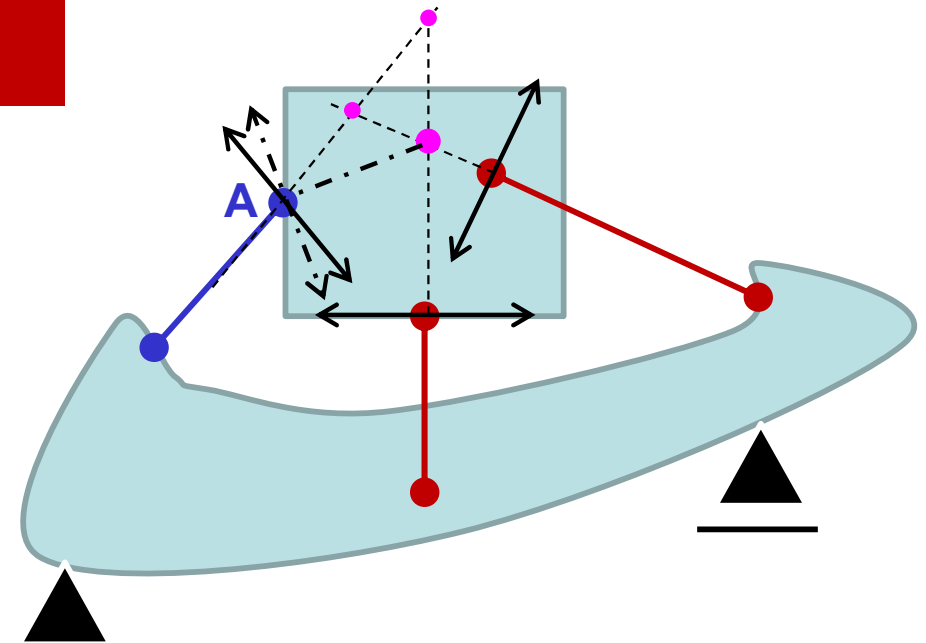


Για την ισοστατική στήριξη του συστήματος απαιτούνται  $\rho_{\sigma\tau}=3$ :  
 $\rho_{\epsilon\sigma} + \rho_{\sigma\tau} = 3(n-1) + 3 = 3n$

$$\rho = 3n$$

**$\rightarrow$  συνολικός αριθμός Δ.Ρ. για ισοστατικότητα**

**ΣΤΕΡΕΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ n φορέων (σύνθετοι φορείς)**



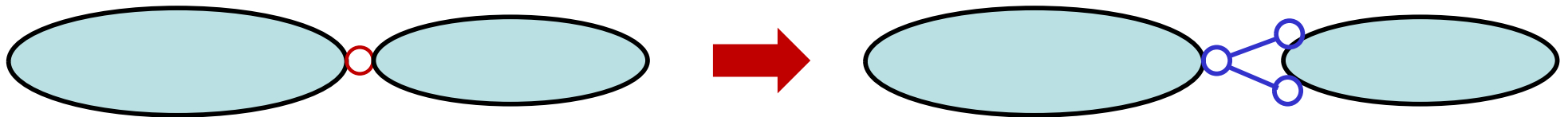
Π.χ. δύο φορείς που συνδέονται μεταξύ τους με 3 Δ.Ρ. και δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο

Εάν  $n$ =φορείς που ανά δύο συνδέονται με 3 Δ.Ρ. που δεν συντρέχουν, τότε ο ελάχιστος αριθμός  $\rho_{\epsilon\sigma}$  δεσμικών ράβδων του σχηματισμού είναι:  $\rho_{\epsilon\sigma} = 3(n-1)$   
 Π.χ. για τρεις φορείς  $\rightarrow \rho_{\epsilon\sigma} = 6$  Δ.Ρ.

# Σύνθετοι φορείς

**Σύνθετοι φορείς**: οι φορείς που αποτελούνται από δύο ή περισσότερους απλούς φορείς (δίσκους), που συνδέονται **μεταξύ τους** και με το **έδαφος** με διάφορα είδη συνδέσμων. Οι σύνδεσμοι με τους οποίους συνδέονται οι δίσκοι μεταξύ τους ονομάζονται **εσωτερικοί**, ενώ εκείνοι με τους οποίους συνδέονται με το έδαφος ονομάζονται **εξωτερικοί**.

**Εσωτερική άρθρωση**: αποτελεί εσωτερικό σύνδεσμο ανάμεσα σε δύο δίσκους και αντιστοιχεί σε **δύο τεμνόμενες δεσμικές ράβδους (δ.ρ.)**.



# Σύνθετοι φορείς

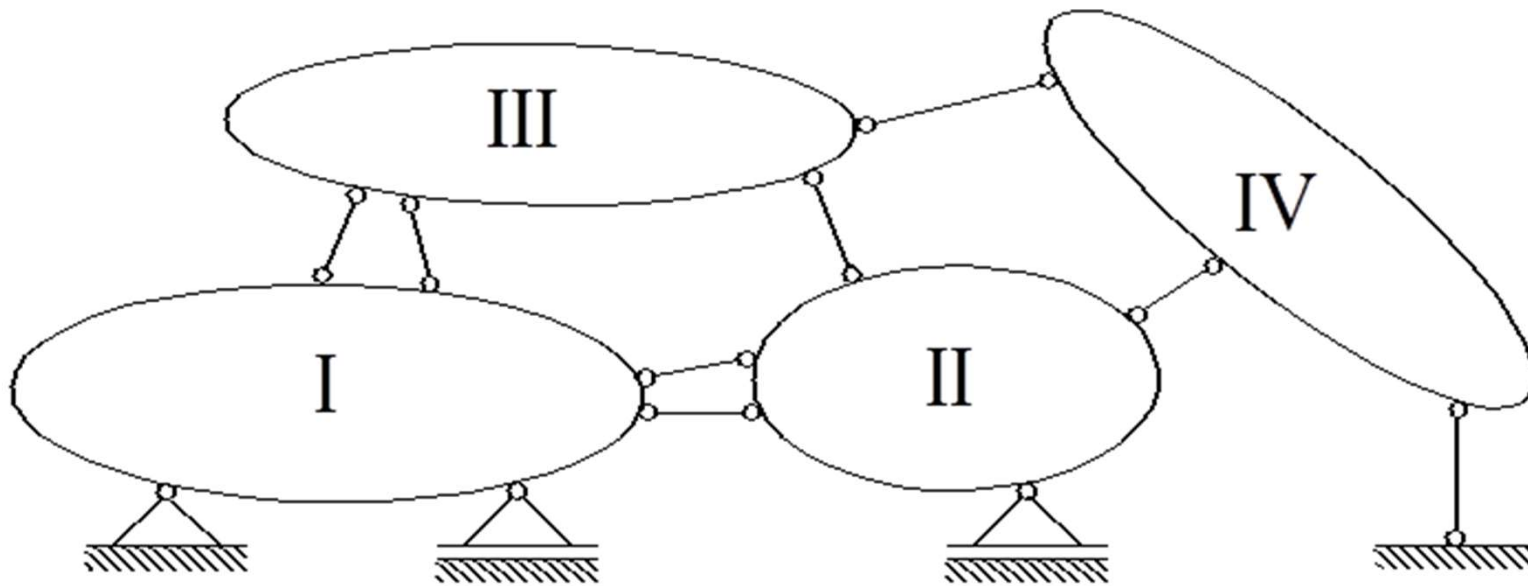
Νόμοι μόρφωσης σύνθετων φορέων: μέθοδοι σύνθεσης των φορέων έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η στερεότητα ( $u, v, \theta = 0$ ) και η ισοστατικότητα τους (3 Εξ. Ισορροπίας):

1<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης → Δοκός Gerber

2<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης

3<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης: ΤΡΙΑΡΘΡΩΤΟ ΤΟΞΟ

# 1<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης



$$n=4$$

$$\rho_{\varepsilon\sigma.}=7$$

$$\rho_{\sigma\tau.}=5$$

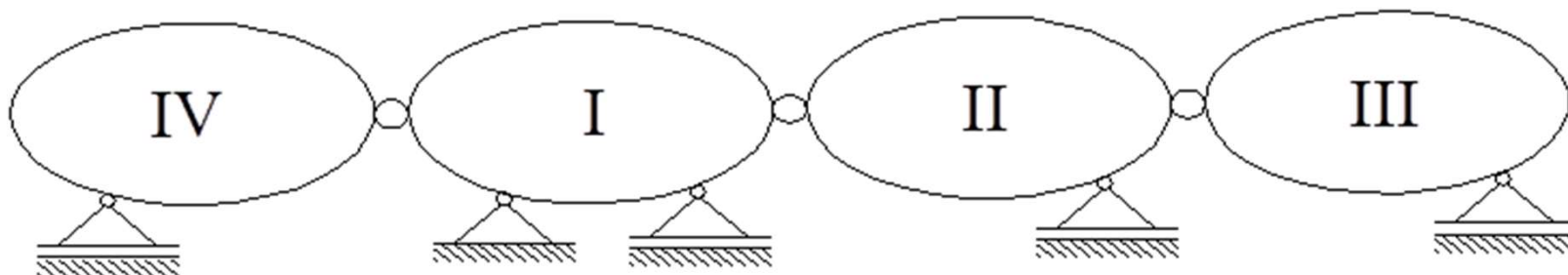
$$\rho=3n$$

$$7+5=3*4 \quad \checkmark$$

Ο δίσκος I στηρίζεται στερεά και ισοστατικά με το έδαφος. Προστίθεται στο σύστημα, ο επόμενος δίσκος II, και συνδέεται με τον I (ή ταυτόχρονα με τον I και το έδαφος) στερεά και ισοστατικά (δηλαδή μέσω τριών δ.ρ.) σχηματίζοντας έτσι **ένα** σύνθετο φορέα **(I-II)**. Κάθε επόμενος δίσκος (III, IV...κ.λ.π.) συνδέεται με τους προηγούμενους (ή/και με το έδαφος) με τρεις δεσμικές ράβδους ή με μια άρθρωση και μια κύλιση κ.λ.π. έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η στερεή και ισοστατική στήριξή του.

# Δοκός Gerber

**Η αρθρωτή δοκός ή δοκός Gerber** είναι ένας πολύ συνηθισμένος σύνθετος φορέας που βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στη γεφυροποιία και συντίθεται ακολουθώντας τον 1<sup>ο</sup> νόμο μόρφωσης.



$$n=4$$

$$\rho_{\text{εστ.}}=6$$

$$\rho_{\text{στ.}}=6$$

$$\rho=3n$$

$$6+6=3*4 \checkmark$$

Κύριο χαρακτηριστικό της δοκού Gerber είναι ότι αρχικά υπάρχει ένας δίσκος, ο I, που στηρίζεται στερεά και ισοστατικά με το έδαφος και **καθένας από τους επόμενους δίσκους** συνδέεται μέσω **εσωτερικής άρθρωσης** με ένα και μόνο προηγούμενο δίσκο και μέσω μιας **κύλισης** με το έδαφος.

## Η Επίλυση

**A) Η εύρεση των εξωτερικών αντιδράσεων** αρχίζει από τον **τελευταία συνδεόμενο δίσκο III**, αντίστροφα ως προς την κατασκευή, & εξίσωση ροπών στην εσωτερική του άρθρωση.

**Ακολουθως των δίσκων II-III και & εξίσωση ροπών στην επόμενη εσωτερική άρθρωση, μεταξύ I & II κλπ..**

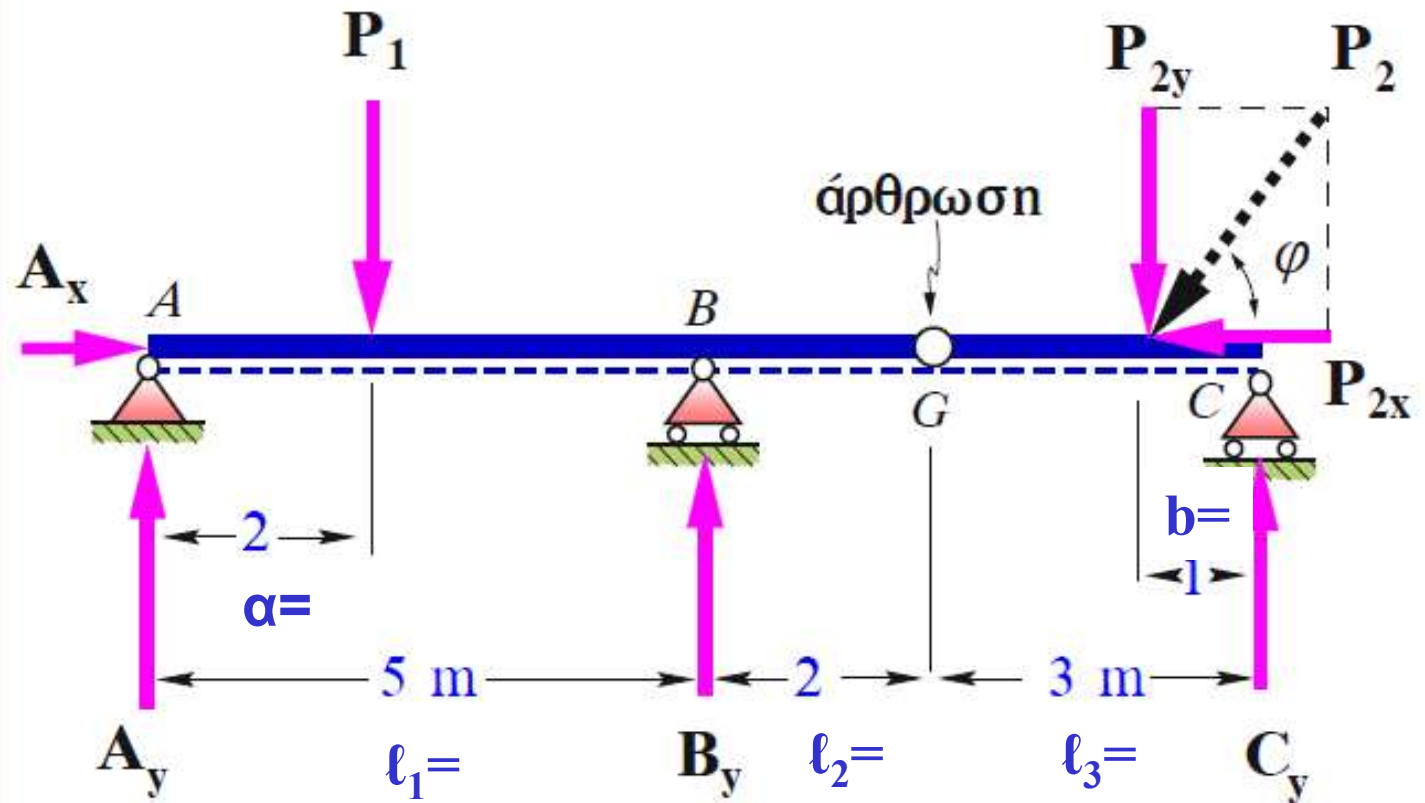
**B) Η εύρεση των εσωτερικών αντιδράσεων** γίνεται με αποσύνδεση της εσωτερικής άρθρωσης και ΔΕΣ των δύο τμημάτων (και 3<sup>ος</sup> Ν. Νεύτωνα ως προς την έννοια δράσης – αντίδρασης)

# Δοκοί με ενδιάμεσες αρθρώσεις - GERBER

$$P_1 = 10 \text{ kN} , P_2 = 20 \text{ kN} , \varphi = 60^\circ$$

1<sup>ος</sup> τρόπος  
μόρφωσης  
(στερεότητα)  
Ισοστατικότητα:  
 $\rho = 3n = 3 \times 2 = 6 \Delta.P.$

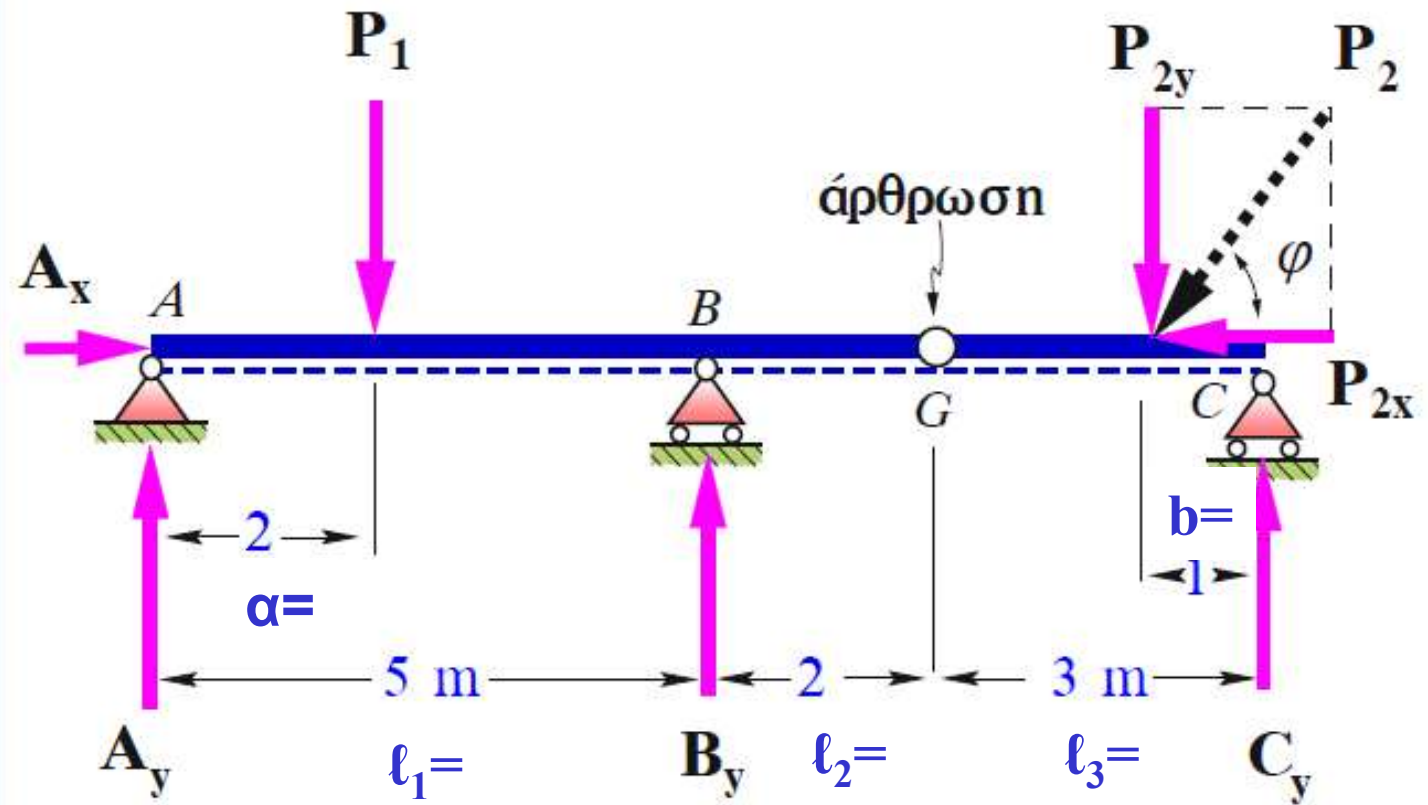
Ζητούνται οι  
εξωτερικές και οι  
εσωτερικές  
αντιδράσεις



- 4 εξωτερικές αντιδράσεις: απαιτούνται 4 εξισώσεις
- 3 Εξ. Ισορροπίας  $\rightarrow \Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_A = 0$  (ή  $\Sigma M_B = 0$ )
- & 1 εξίσωση από Μηδενισμό ροπής στο G του τελευταίου συνδεόμενου δίσκου ( $\Sigma M_G^{(\delta)} = 0$ )

# Δοκοί με ενδιάμεσες αρθρώσεις - GERBER

$$P_1 = 10 \text{ kN} , P_2 = 20 \text{ kN} , \varphi = 60^\circ$$



Διαλέγω την ευκολότερη που δίνει άμεσο αποτέλεσμα:  $C_y$  (Σημείωση: κοιτάω τον τελευταίο συνδεόμενο δίσκο)

Μπορώ να πάρω και εξίσωση μηδενισμού στο G με  $\Sigma M_G^{(\alpha)} = 0$  όμως εισάγω δύο άγνωστες

4 αντι  $\sum M_G^{(l)} = 0 : -A_y(\ell_1 + \ell_2) + P_1(\ell_1 - a + \ell_2) - B_y \ell_2 = 0$

3 Εξ. Ισορροπίας  $\rightarrow$

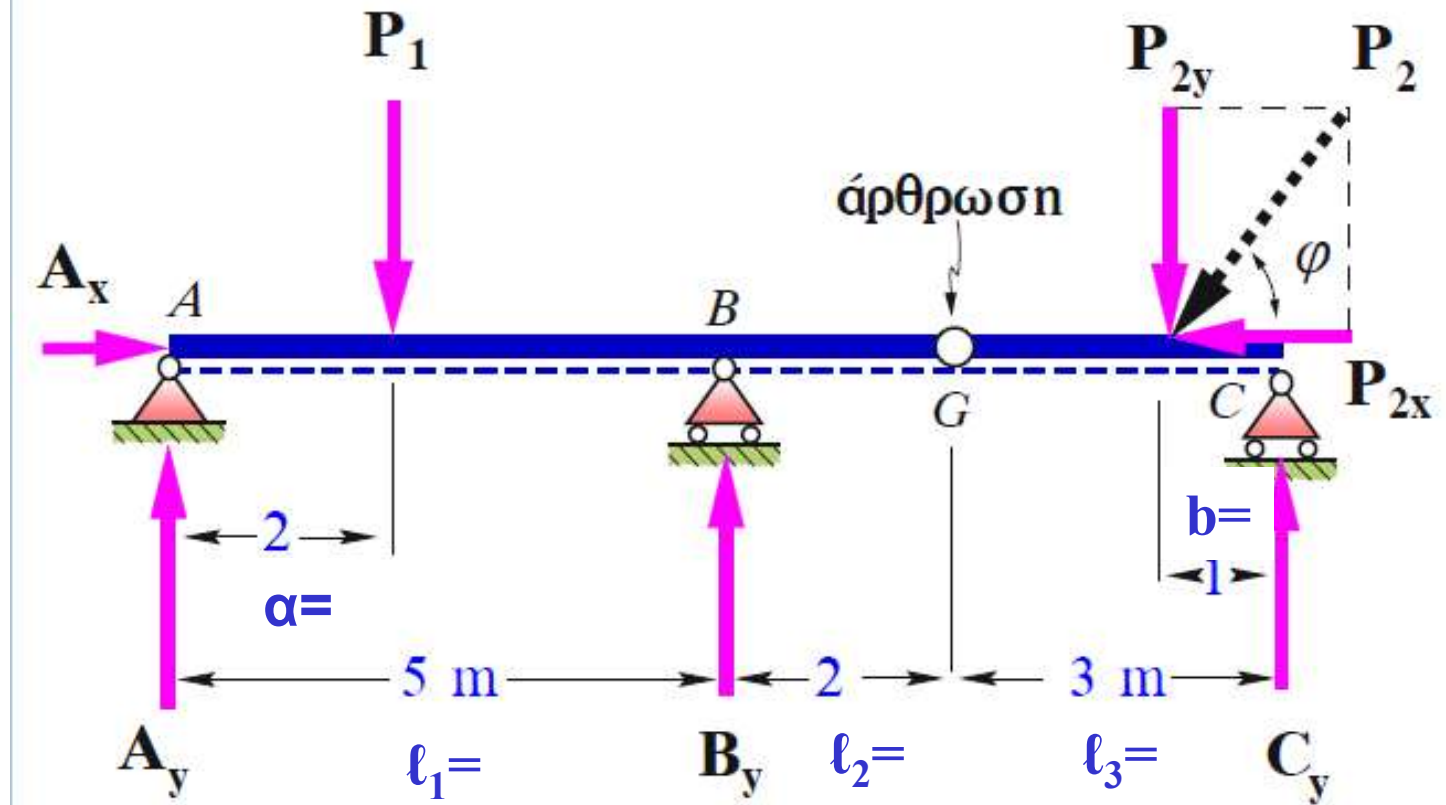
$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_A = 0$  (  $\sum M_G^{(r)} = 0 : -P_2 \sin \varphi \cdot (\ell_3 - b) + C_y \ell_3 = 0$   $\leftarrow$

& 1 εξίσωση από Μηδενισμό ροπής στο G ( $\Sigma M_G^{(\delta)} = 0$ )



# Δοκοί με ενδιάμεσες αρθρώσεις - GERBER

$$P_1 = 10 \text{ kN} , P_2 = 20 \text{ kN} , \varphi = 60^\circ$$



4 αντιδράσεις = 4 εξισώσεις

3 Εξ. Ισοροπίας →

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_A = 0 \text{ (ή } \Sigma M_B = 0)$$

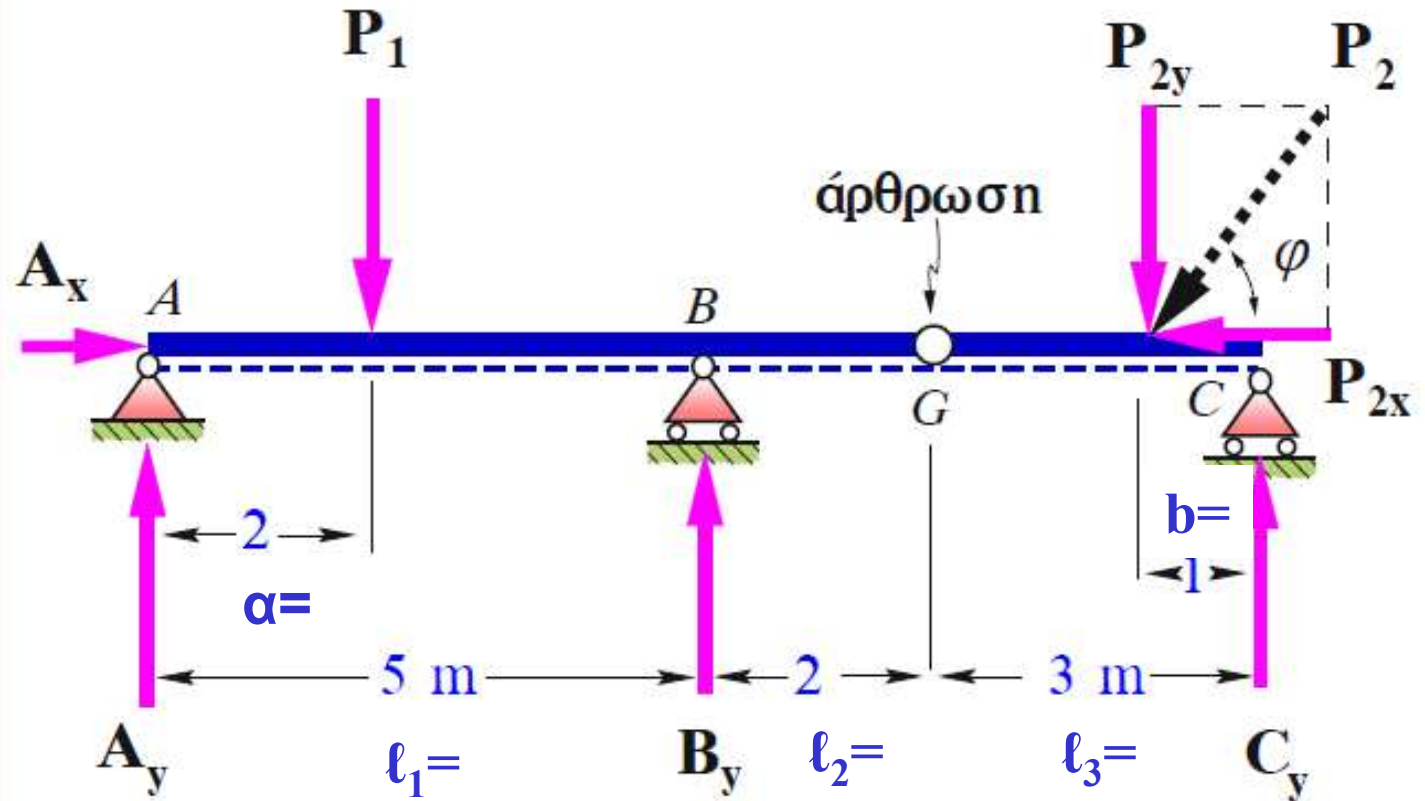
& 1 εξίσωση από Μηδενισμό ροπής στο G ( $\Sigma M_G^{(\alpha\rho)}$  ή  $\Sigma M_G^{(\delta)} = 0$ )

1. Από  $\Sigma M_A = 0 \rightarrow B_y$
2. Από  $\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y$
3. Από  $\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x$



# Δοκοί με ενδιάμεσες αρθρώσεις - GERBER

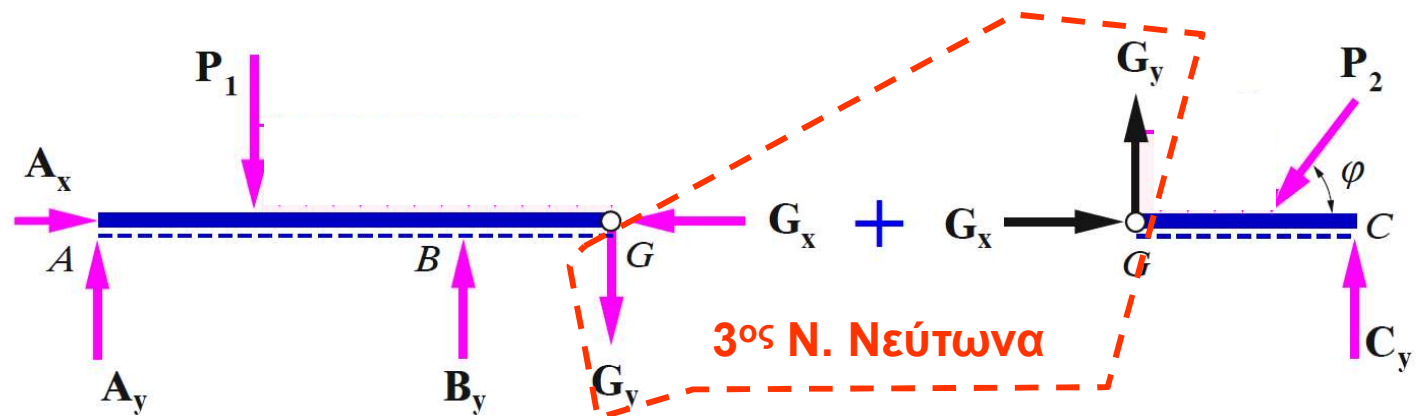
$$P_1 = 10 \text{ kN} , P_2 = 20 \text{ kN} , \varphi = 60^\circ$$



Ζητούνται οι εξωτερικές και οι εσωτερικές αντιδράσεις

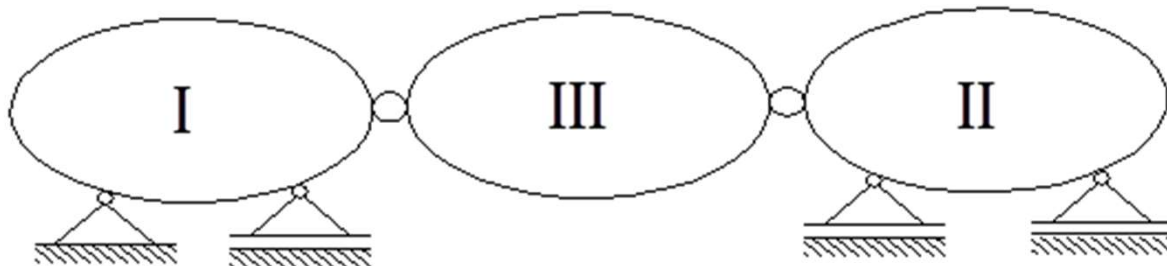
2 ΔΕΣ, επιλέγω το ευκολότερο

1. Από  $\Sigma F_y = 0 \rightarrow G_y$
2. Από  $\Sigma F_x = 0 \rightarrow G_x$



# Δοκός Gerber - παραλλαγές

- δύο, τρεις ή και περισσότεροι δίσκοι συνδέονται αρχικά με το έδαφος μέσω άρθρωσης και κύλισης ή/και δύο κυλίσεων



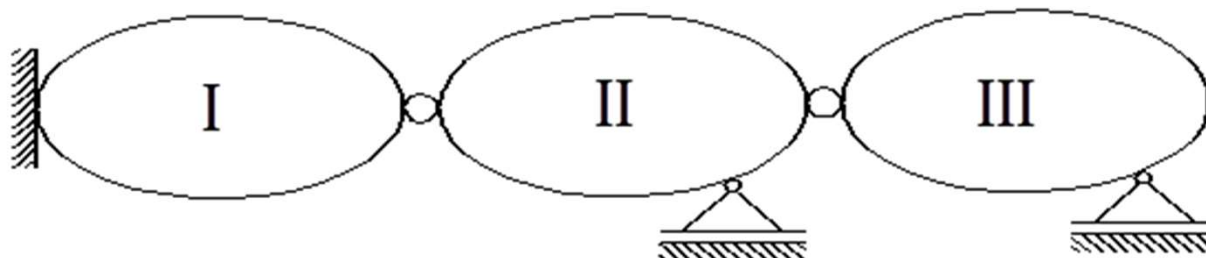
$$\rho = 3n$$

$$\rho_{\text{εστ.}} = 4$$

$$\rho_{\text{στ.}} = 5$$

- Ποιος είναι ο τελευταίος συνδεόμενος δίσκος κατασκευαστικά;
- Από αυτόν ξεκινώ την επίλυση!

- ο αρχικός δίσκος συνδέεται με το έδαφος μέσω πάκτωσης.

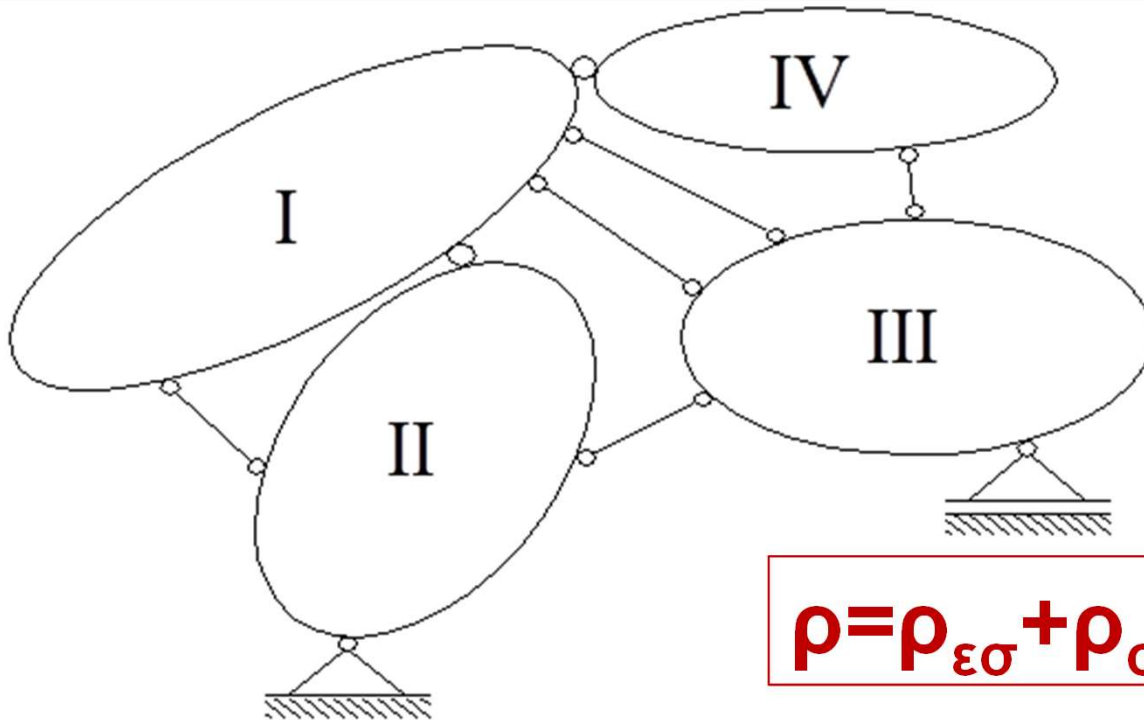


$$\rho = 3n$$

$$\rho_{\text{εστ.}} = 4$$

$$\rho_{\text{στ.}} = 5$$

## 2<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης



Εάν  $n$ =φορείς που ανά δύο συνδέονται με 3 Δ.Ρ. που δεν συντρέχουν, τότε ο ελάχιστος αριθμός  $\rho_{\epsilon\sigma}$  δεσμικών ράβδων του σχηματισμού είναι:  $\rho_{\epsilon\sigma}=3(n-1)$   
για 4 φορείς  $\rightarrow \rho_{\epsilon\sigma}=9$  Δ.Ρ.  
&  $\rho_{\sigma\tau}=3$  για ισοστατικότητα!

$$\rho = \rho_{\epsilon\sigma} + \rho_{\sigma\tau} = 3(n-1) + 3 \rightarrow \rho = 3n$$

- ο δίσκος I συνδέεται με μια εσωτερική άρθρωση και μια δεσμική ράβδο με τον II. [συνδέονται στερεά και ισοστατικά και μαζί αποτελούν έναν μεγαλύτερο (σύνθετο) στερεό δίσκο.]
- Κάθε επόμενος δίσκος (III, IV...κ.λ.π.) συνδέεται με τους προηγούμενους στερεά και ισοστατικά, σχηματίζοντας έναν ολοένα και μεγαλύτερο στερεό δίσκο.
- Τέλος, το σύστημα των δίσκων που έχει δημιουργηθεί συνδέεται στερεά και ισοστατικά (δηλαδή με τρεις δ.ρ.) με το έδαφος δημιουργώντας έναν **σύνθετο στερεό και ισοστατικό** φορέα.

### Επίλυση:

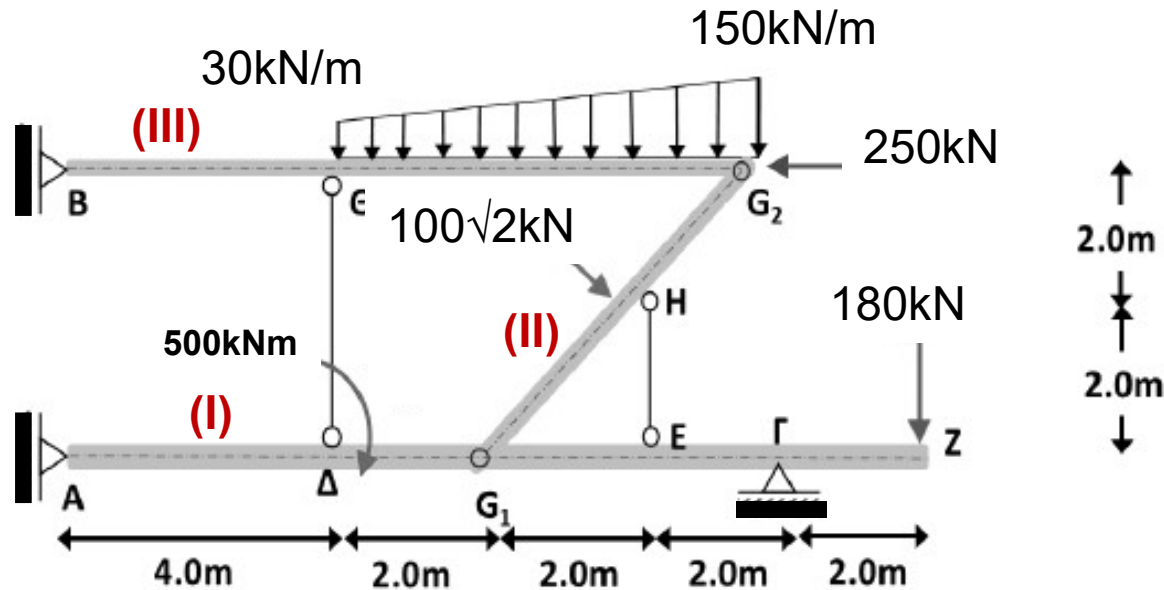
- με ΔΕΣ όλου του φορέα υπολογίζονται οι εξωτερικές αντιδράσεις
- Με ΔΕΣ του τελευταίου δίσκου που συνδέθηκε (εδώ ο IV) υπολογίζονται οι εσωτερικές αντιδράσεις

# 2<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης

Επίλυση:

-με ΔΕΣ όλου του φορέα υπολογίζονται οι εξωτερικές αντιδράσεις

-Με ΔΕΣ του τελευταίου δίσκου που συνδέθηκε (εδώ ο III) οι εσωτερικές αντιδράσεις



**Ισοστατικότητα:  $\rho = 3n = 9$**

Για  $n=3$  δίσκους τότε:

$\rho_{\langle\epsilon\sigma\rangle}$  δεσμικών ράβδων του στερεού σχηματισμού είναι:

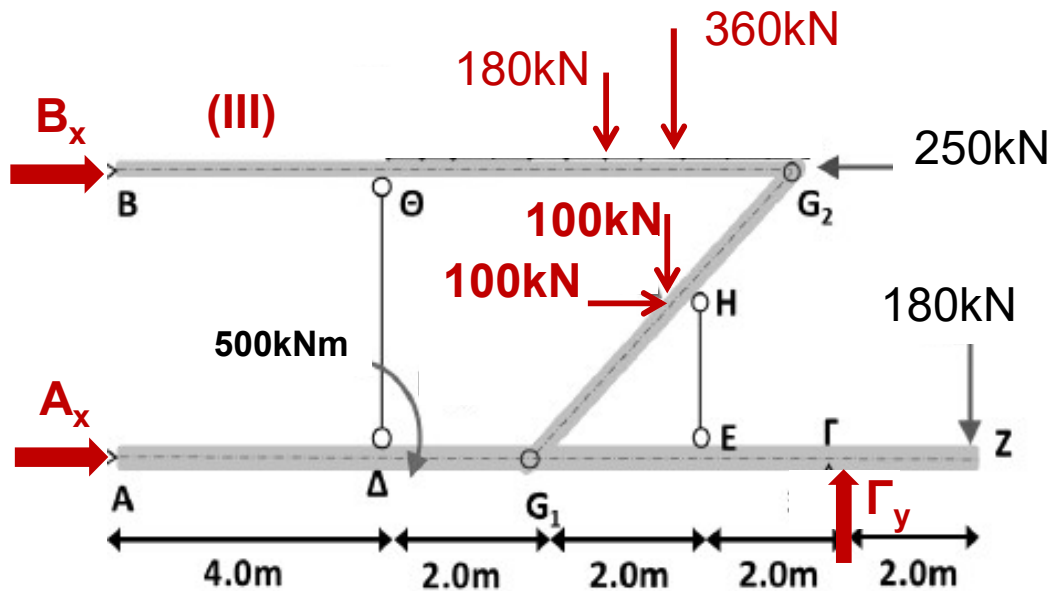
$$\rho_{\langle\epsilon\sigma\rangle} = 3(n-1) = 3(3-1) = 6$$

$$\rho_{\sigma\tau} = 3$$

# 2<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης

Επίλυση:

-με ΔΕΣ όλου του φορέα υπολογίζονται οι εξωτερικές αντιδράσεις



$\Sigma M_{\Gamma} = 0$  (τέμνονται οι δύο από τρεις άγνωστες αντιδράσεις)

$$500\text{kNm} + 4B_x + 2 \cdot 100 - 2 \cdot 100 - 3 \cdot 180 - 2 \cdot 360 - 4 \cdot 250 + 2 \cdot 180 = 0 \rightarrow \boxed{B_x = 350\text{kN}}$$

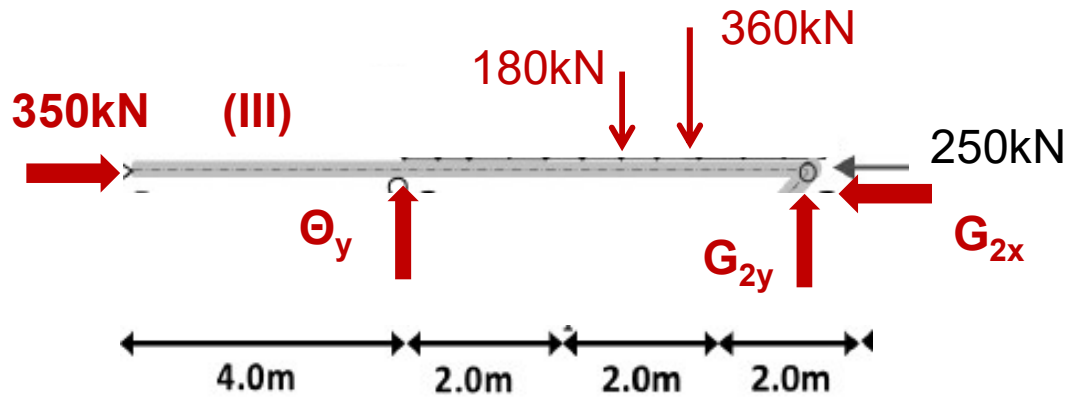
$\Sigma F_x = 0$

$$A_x + 350 + 100 - 250 = 0 \rightarrow \boxed{A_x = -200\text{kN}}$$

$\Sigma F_y = 0$

$$\Gamma_y - 180 - 360 - 100 - 180 = 0 \rightarrow \boxed{\Gamma_y = 820\text{kN}}$$

# 2<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης



-Με ΔΕΣ του τελευταίου δίσκου που συνδέθηκε (εδώ ο III) οι εσωτερικές αντιδράσεις

$$\Sigma M_{G_2} = 0$$

$$2 \cdot 360 + 3 \cdot 180 - 6 \cdot \Theta_y = 0 \rightarrow \Theta_y = 210 \text{ kN}$$

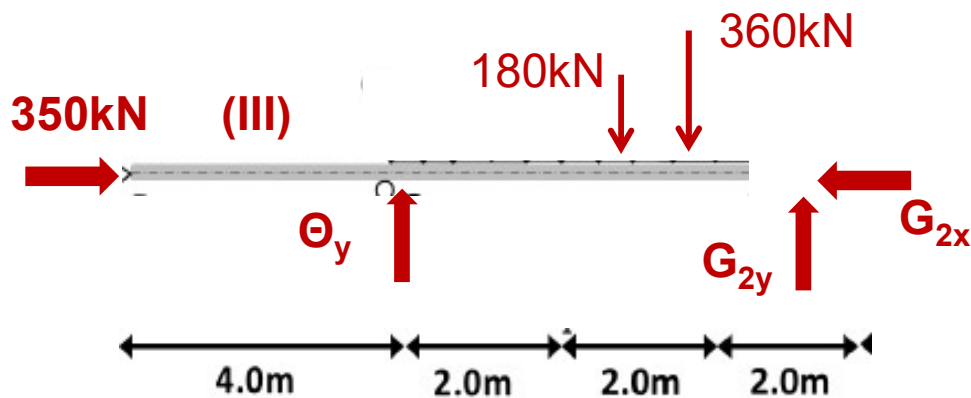
Ίδια και για τα δύο ΔΕΣ

$$\Sigma F_y = 0$$

$$210 + G_{2y} - 180 - 360 = 0 \rightarrow G_{2y} = 330 \text{ kN}$$

Ίδια και για τα δύο ΔΕΣ

& για την διακύμανση της  $G_{2x}$



-  $\Sigma F_x$  (με 250kN) = 0 (κόβω κάτω από  $G_2$ )

$$G_{2x} + 250 - 350 = 0 \rightarrow G_{2x(\mu\epsilon)} = 100 \text{ kN}$$

-  $\Sigma F_x$  (χωρίς 250kN) = 0 (κόβω πριν το  $G_2$ )

$$G_{2x} - 350 = 0 \rightarrow G_{2x(\chi\omega\rho\rho\rho\rho)} = 350 \text{ kN}$$

$$100 \text{ kN} < G_{2x} < 350 \text{ kN}$$

$$G_{2y} = 330 \text{ kN}$$

Ισορροπία

350kN



250kN

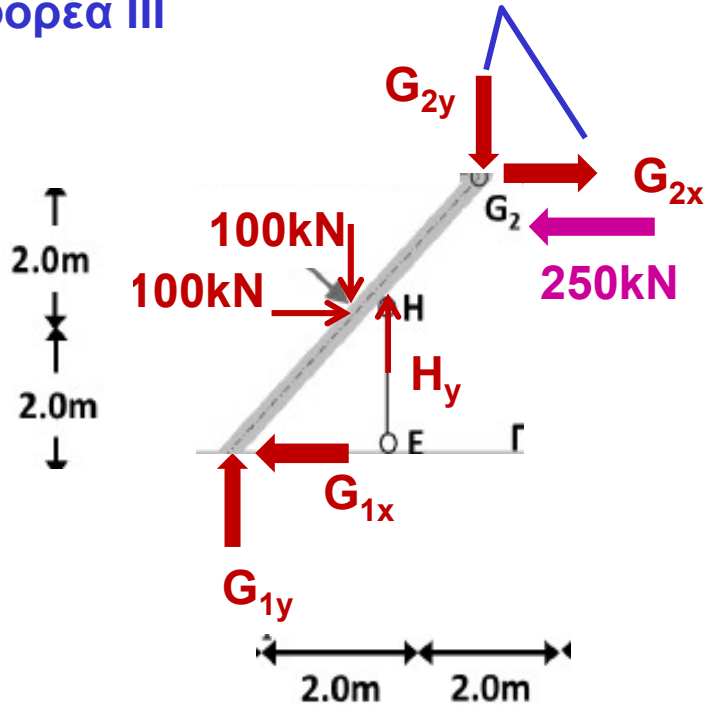


100kN



# 2<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης

Με αντίθετη φορά τα διανύσματα των  $G_{2x}$ ,  $G_{2y}$  σε σχέση με του φορέα III



-Με ΔΕΣ του δίσκου II

Εάν βάλω τις τιμές της  $G_2$  που υπολόγισα με την παρουσία των 250kN τότε τα 250 kN δεν εμφανίζονται στο ΔΕΣ.

Εάν βάλω τις τιμές της  $G_2$  που υπολόγισα χωρίς την παρουσία των 250kN τότε τα 250 kN εμφανίζονται στο ΔΕΣ.

Εδώ έστω η πρώτη περίπτωση:  
 $G_{2x}=100\text{kN}$  &  $G_{2y}=330\text{kN}$

Εάν η δεύτερη περίπτωση:  
 $G_{2x}=350\text{kN}$  &  $G_{2y}=330\text{kN}$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{G_1} &= 0 \\ 2 \cdot H_y - 2 \cdot 100 - 2 \cdot 100 - 4 \cdot 330 - 4 \cdot 350 + 4 \cdot 250 &= 0 \\ \rightarrow H_y &= 1060\text{kN} \end{aligned}$$

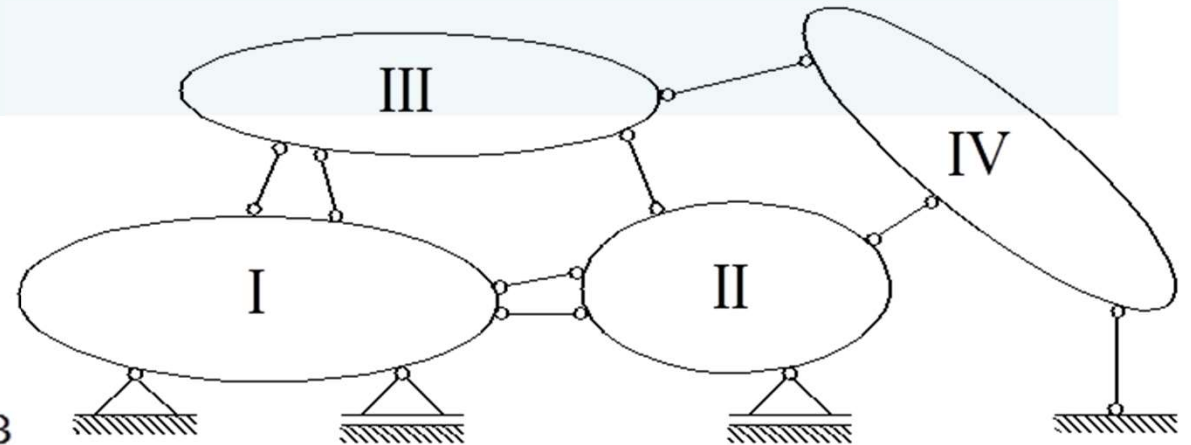
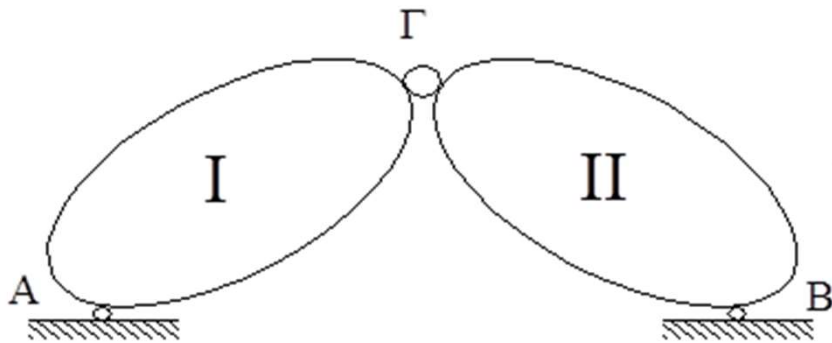
$$\begin{aligned} \Sigma M_{G_1} &= 0 \\ 2 \cdot H_y - 2 \cdot 100 - 2 \cdot 100 - 4 \cdot 330 - 4 \cdot 100 &= 0 \rightarrow \\ H_y &= 1060\text{kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \Sigma F_x &= 0 \\ 100 + 100 - G_{1x} &= 0 \rightarrow G_{1x} = 200\text{kN} \end{aligned}$$

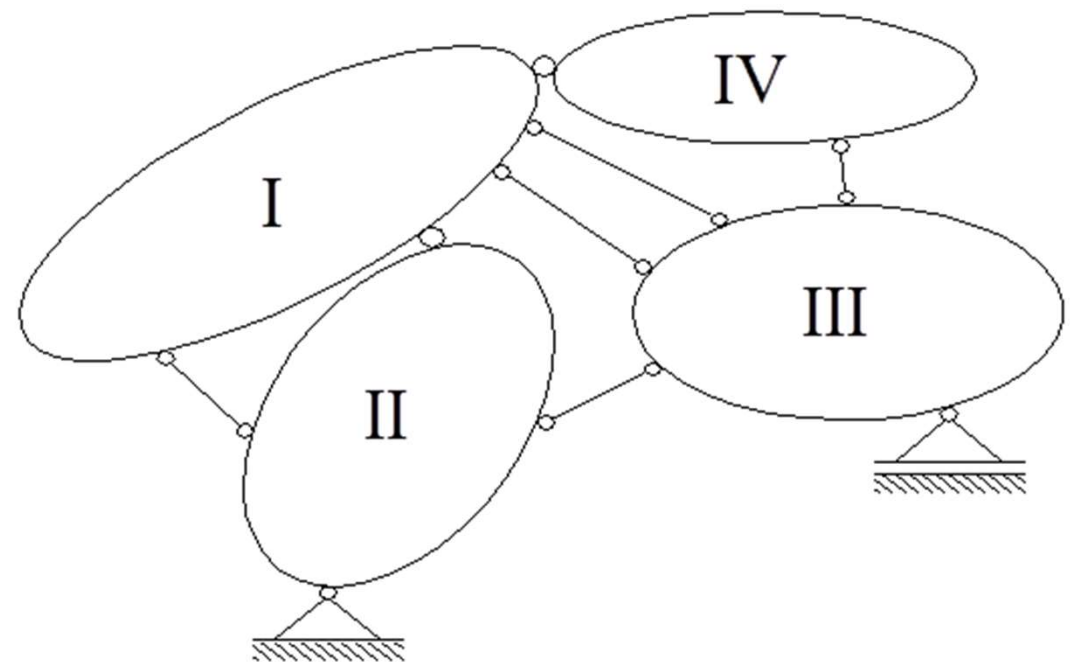
$$\begin{aligned} - \Sigma F_y &= 0 \\ G_{1y} + 1060 - 100 - 330 &= 0 \rightarrow G_{1y} = -630\text{kN} \end{aligned}$$



# 1<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης

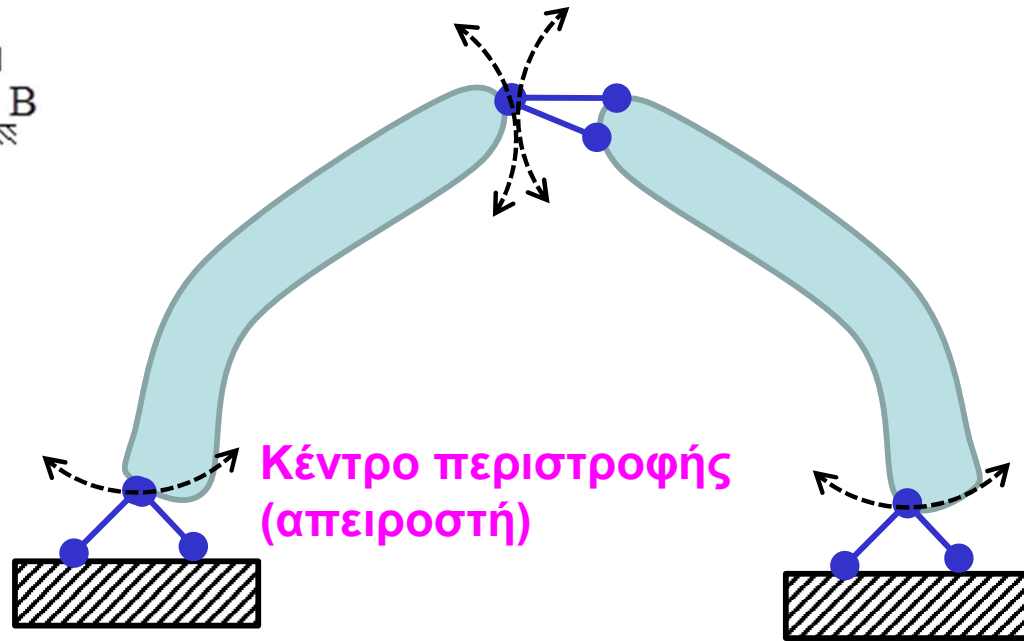
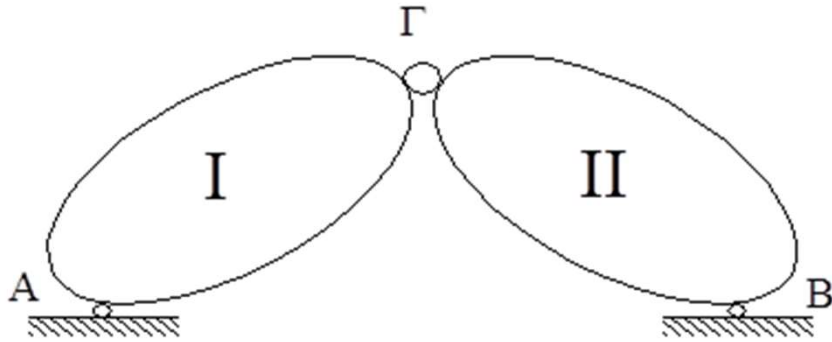


# 2<sup>ος</sup> νόμος μόρφωσης



# Τριαρθρωτό τόξο

ισοστατικός σύνθετος φορέας, ο οποίος μορφώνεται από δύο απλούς φορείς που συνδέονται, τόσο μεταξύ τους, όσο και με το έδαφος με **τρεις** αρθρώσεις.



**συνολικός αριθμός Δ.Ρ.  
για ισοστατικότητα**

$$\rho = 3n$$



**Ισοστατικότητα:  $\rho = 3n = 3 \times 2 = 6$  Δ.Ρ.**

$$\rho_{\epsilon\sigma} = 3(n-1)$$

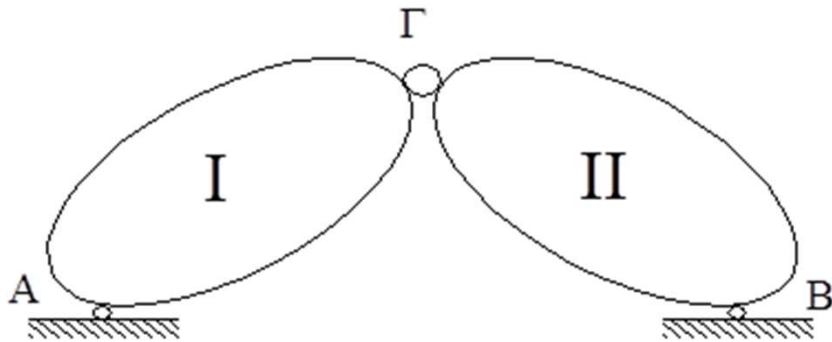


$\rho_{\epsilon\sigma} = 2 \neq 3(n-1) = 3$  δεν συνδέονται μεταξύ τους στέρεα...

$$\rho_{\epsilon\xi} = 3$$

# Τριαρθρωτό τόξο

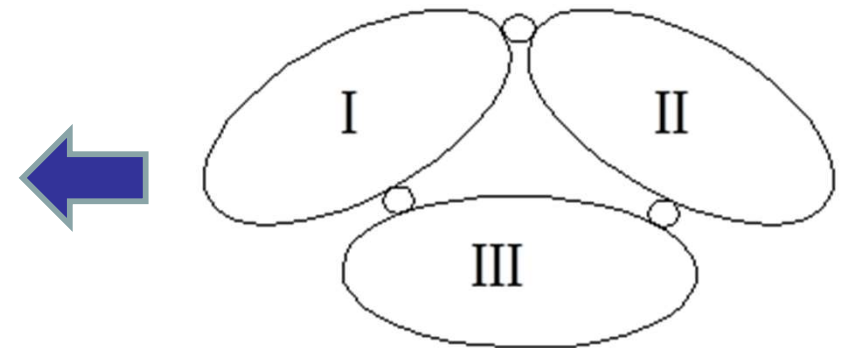
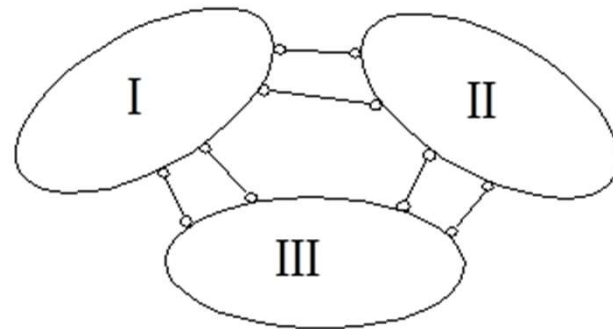
ισοστατικός σύνθετος φορέας, ο οποίος μορφώνεται από δύο απλούς φορείς που συνδέονται, τόσο μεταξύ τους, όσο και με το έδαφος με **τρεις** αρθρώσεις.



## Νόμος μόρφωσης τριαρθρωτού τόξου (στερεότητα)

εάν το έδαφος θεωρηθεί ένας τρίτος δίσκος, τότε οι τρεις δίσκοι θα πρέπει να συνδέονται ανά δύο μεταξύ τους με μια άρθρωση και οι τρεις αρθρώσεις να μη βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

**Ισοστατικότητα**  
 $\rho=3n=6$



Επίσης, καθώς η κάθε εσωτερική άρθρωση αντιστοιχεί σε δύο δ.ρ., μπορούν οι τρεις δίσκοι να ενώνονται ανά δύο μεταξύ τους με ένα ζεύγος δ.ρ. και θα πρέπει τα σημεία τομής των ράβδων αυτών να μη βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Εάν  $n=3$  τότε:

$\rho_{\text{«εσ»}}$  δεσμικών ράβδων του στερεού σχηματισμού είναι:  
 $\rho_{\text{«εσ»}}=3(n-1)=3(3-1)=6$  ( $\rho_{\text{στ}}=0$ )



# Τριαρθρωτό τόξο

**Κατασκευή: με την βοήθεια ικριωμάτων – βοηθητικών κατασκευών**  
**Χωρίς αυτά το βάρος του κάθε σκέλους θα προκαλούσε ροπή στην στήριξη, η οποία είναι άρθρωση!**

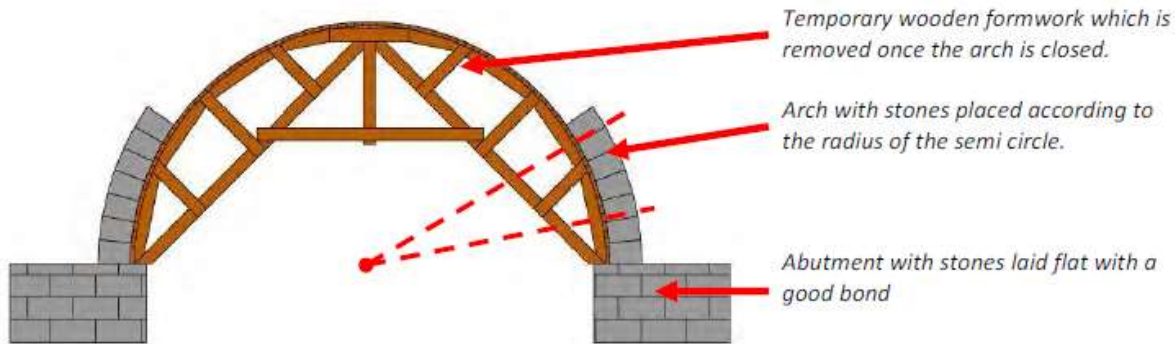


Fig 8: Basic elements of arch bridge construction. The arch is constructed symmetrically over a temporary formwork. Note that the arrangement of the stones differs entirely between the arch and the abutment. Stones of



# Επίλυση τριαρθρωτού τόξου

4 εξ. αντιδράσεις  $\rightarrow$  4 εξισώσεις

3 Εξ. Ισορροπίας  $\rightarrow$   
 $\Sigma F_x=0, \Sigma F_y=0, \Sigma M_A=0$  (ή  $\Sigma M_B=0$ )

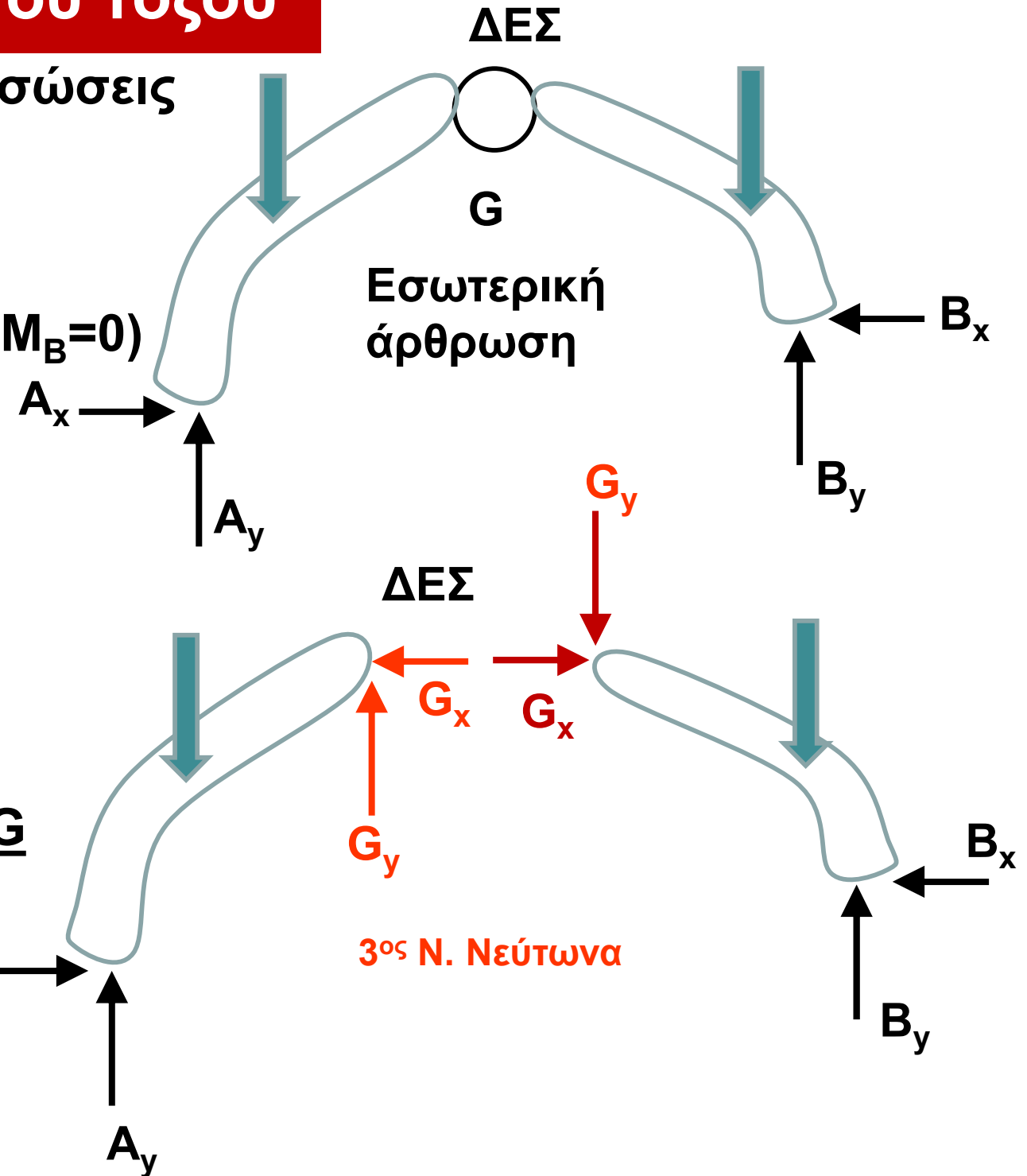
2<sup>ο</sup> βήμα:  $\Sigma M_B$  όλου του ΔΕΣ  
ώστε να προκύπτει 2<sup>η</sup>  
συσχέτιση μεταξύ  $A_x$  και  $A_y$   
3<sup>ο</sup> βήμα:  $\Sigma F=0 \rightarrow B_x, B_y$ .

& 1 εξίσωση από:

1<sup>ο</sup> βήμα: συσχετίζει π.χ.  $A_x$  με  $A_y$   
**Μηδενισμός ροπής στο G**  
( $\Sigma M_G^{(\alpha\rho)}$  ή  $\Sigma M_G^{(\delta)} = 0$ )

4<sup>ο</sup> βήμα: ΔΕΣ ενός τμήματος και  
 $\Sigma F_x=0, \Sigma F_y=0 \rightarrow G_x, G_y$ .

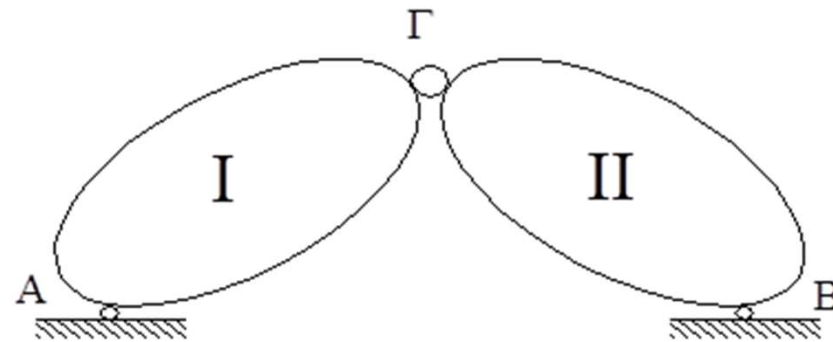
5<sup>ο</sup> βήμα: Η  $\Sigma M_A$  για επαλήθευση!



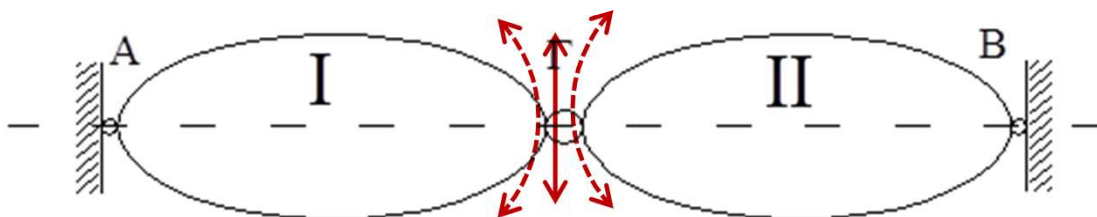


# Τριαρθρωτό τόξο

ισοστατικός σύνθετος φορέας, ο οποίος μορφώνεται από δύο απλούς φορείς που συνδέονται, τόσο μεταξύ τους, όσο και με το έδαφος με **τρεις** αρθρώσεις.



Το τριαρθρωτό τόξο αποδεικνύεται ότι είναι στερεός φορέας **μόνο όταν** τα σημεία των τριών αρθρώσεων **A, B, και Γ δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία**. Στην αντίθετη περίπτωση αποτελεί μια κατασκευή που παρουσιάζει απειροστή κινητότητα.



**Απόδειξη!**

Διερεύνηση ως προς την συμμετρική Γεωμετρία (ισοσκελές τρίγωνο με L άνοιγμα και H ύψος ή ημικυκλικό)