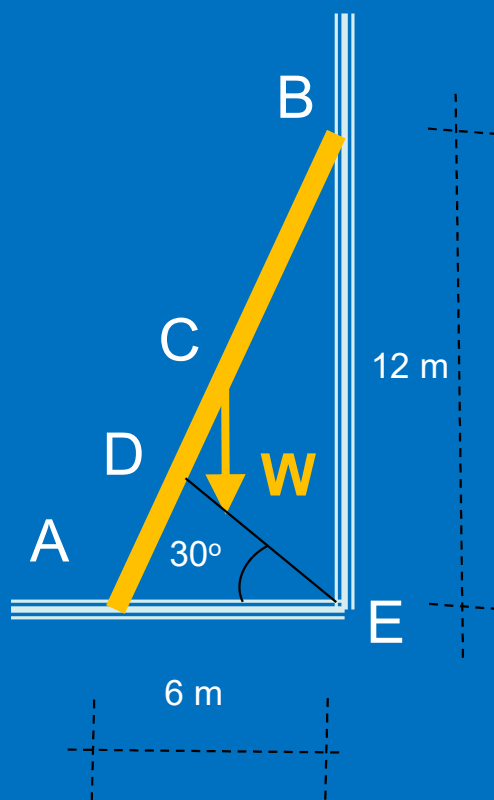
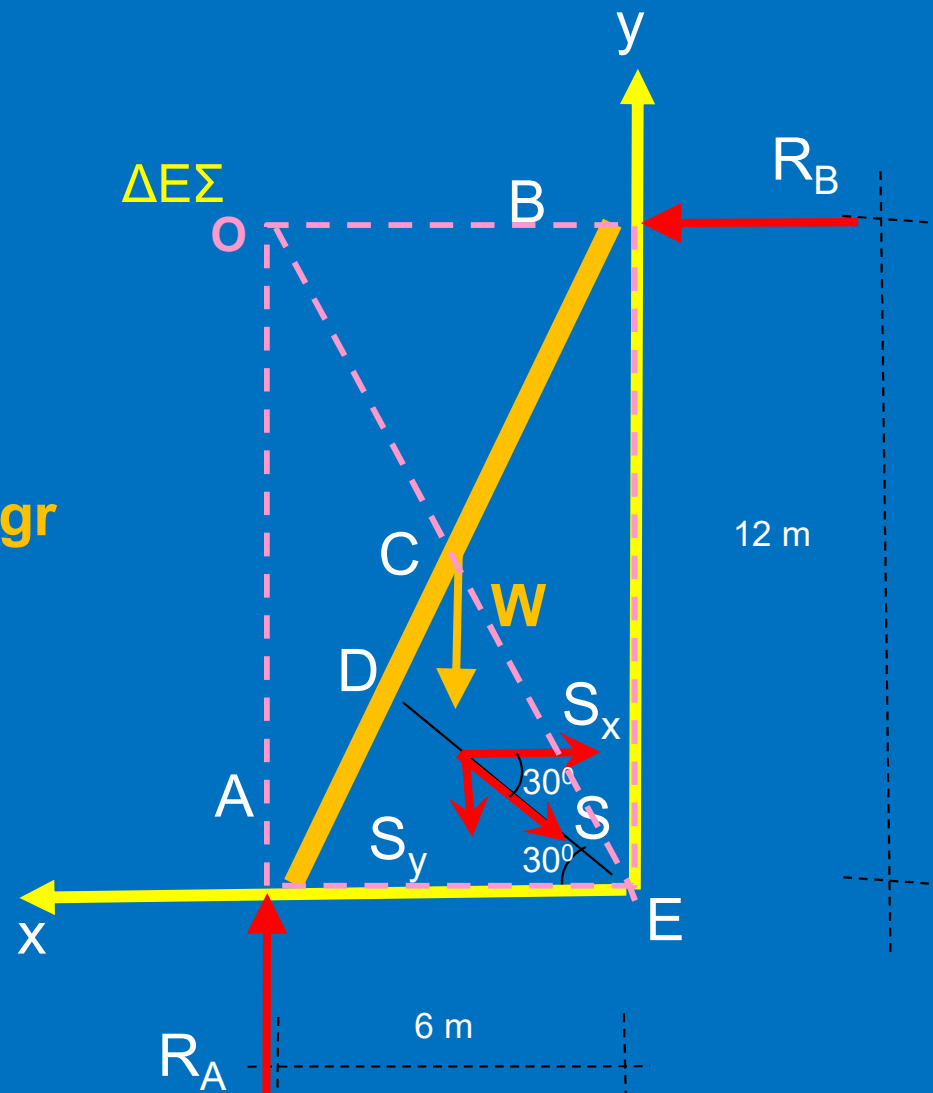


## Εφαρμογή

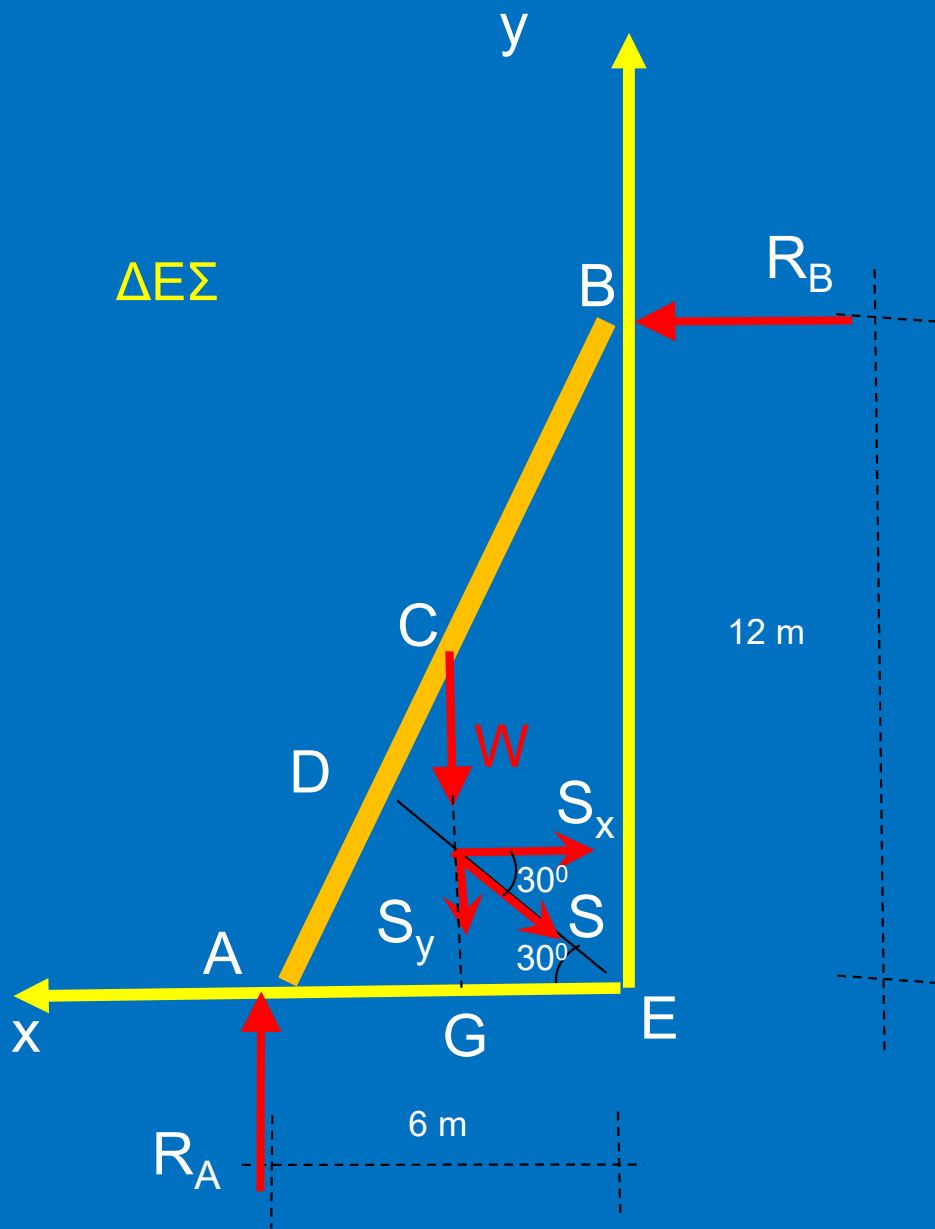
Μία ομοιογενής σκάλα συνολικού βάρους **25 Kgr** ακουμπάει χωρίς τριβή στα σημεία A και B του δαπέδου & ενός κατακόρυφου τοίχου αντίστοιχα. Η ολίσθηση της σκάλας εμποδίζεται με το σχοινί DE που σχηματίζει γωνία **30°** με το δάπεδο. Στο μεσαίο σκαλοπάτι της σκάλας βρίσκεται άνθρωπος βάρους **75 Kgr**. Να βρεθούν οι αντιδράσεις που αναπτύσσονται στα σημεία A και B καθώς και η τάση του σχοινιού.



$$W=25+75=100 \text{ Kgr}$$



Χωρίς σκονί ή με λάθος σύνδεση του σκονιού (π.χ. συνδεόμενου με το KB)  
→ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ( $\Sigma M_O \neq 0$ )



Ορθογώνιο σύστημα Exy

Στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

$$\sum M_{E|z} = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_x = \cos\varphi \cdot S = \sqrt{3}/2 \cdot S = 0.866 \cdot S$$

$$S_y = \sin\varphi \cdot S = 1/2 \cdot S = 0.5 \cdot S$$

$$\sum M_E = 0$$

$$\sum M_E = 12R_B + (EG)W - 6R_A = 0$$

$$R_A - 2R_B = 50$$

$$\sum F_x = 0 = S_x - R_B,$$

$$R_B = S_x = 0.866 \cdot S$$

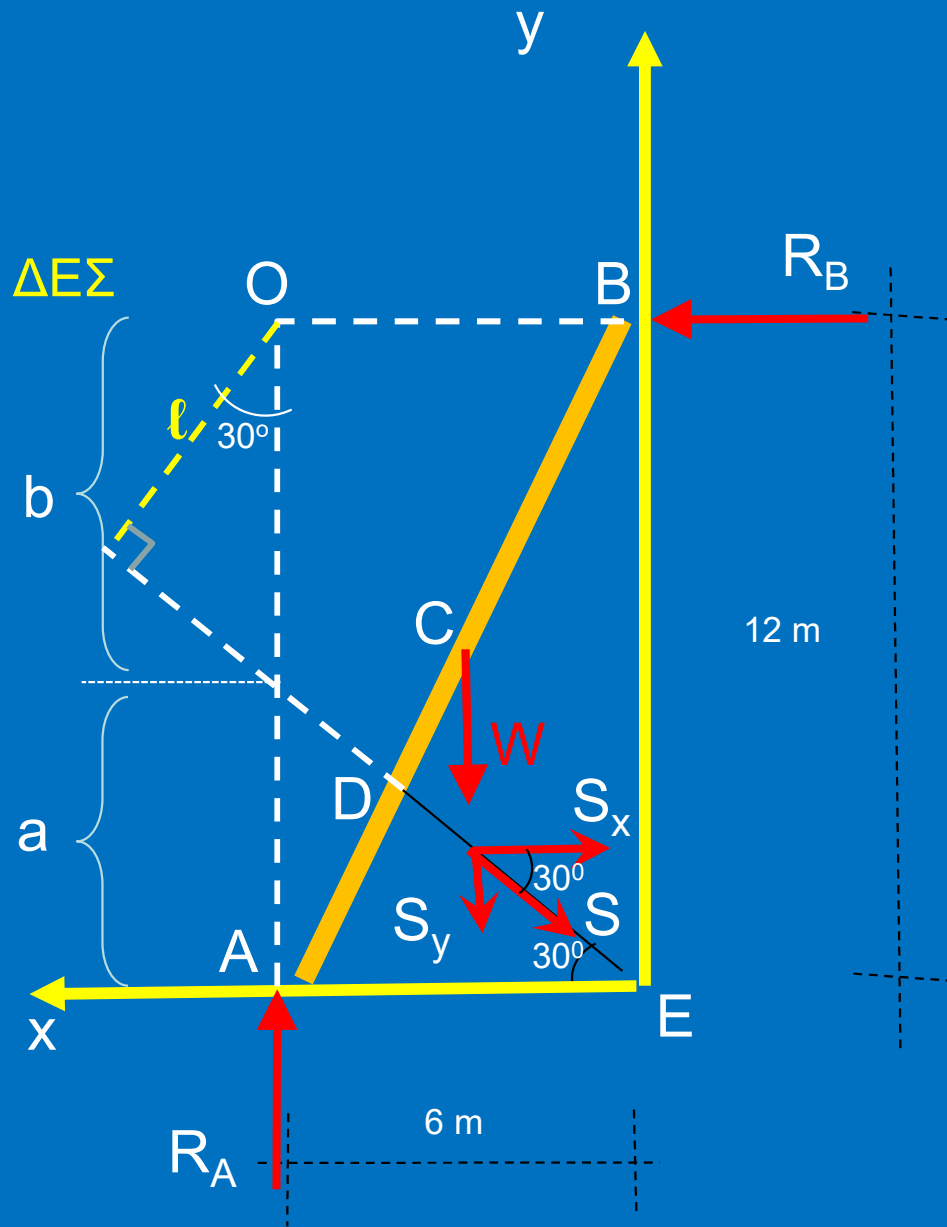
$$\sum F_y = 0 = R_A - S_y - W,$$

$$R_A = 100 + 0.5 \cdot S$$

Από 1<sup>η</sup> & 3<sup>η</sup> εξ.:  $100 + 0.5 \cdot S - 2 \cdot 0.866S = 50 \rightarrow S = 40,6 \text{ Kgr}$

$R_B = 35,2 \text{ Kgr}$  &  $R_A = 120,3 \text{ Kgr}$

Ορθογώνιο σύστημα Exy



**Εναλλακτικά:**

- $\Sigma M_O = 0$  (συντρέχουν οι  $R_A$  &  $R_B$ )  
οπότε οι ροπές θα προκύψουν από  
το  $W=100$  Kgr και το άγνωστο  $S$

Χρειαζόμαστε λίγη γεωμετρία...

$$\tan 30^\circ = a/6 \rightarrow a = 3.46 \text{ m}$$

$$b = 12 - 3.46 \rightarrow b = 8.54 \text{ m}$$

$$\rightarrow l = b \cdot \cos 30^\circ = 8.54 \cdot 0.866 \rightarrow l = 7.4 \text{ m}$$

$$\Sigma M_O = 0 \rightarrow l \cdot S - 3 \cdot W = 0$$

$$\rightarrow S = 300 / 7.4 \rightarrow$$

$$S = 40.6 \text{ Kgr}$$

$$S_x = \cos \varphi \cdot S = 0.866 \cdot S \rightarrow S_x = 35.2 \text{ Kgr}$$

$$S_y = \sin \varphi \cdot S = 0.5 \cdot S \rightarrow S_y = 20.3 \text{ Kgr}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 = S_x - R_B,$$

$$R_B = 35.2 \text{ Kgr}$$

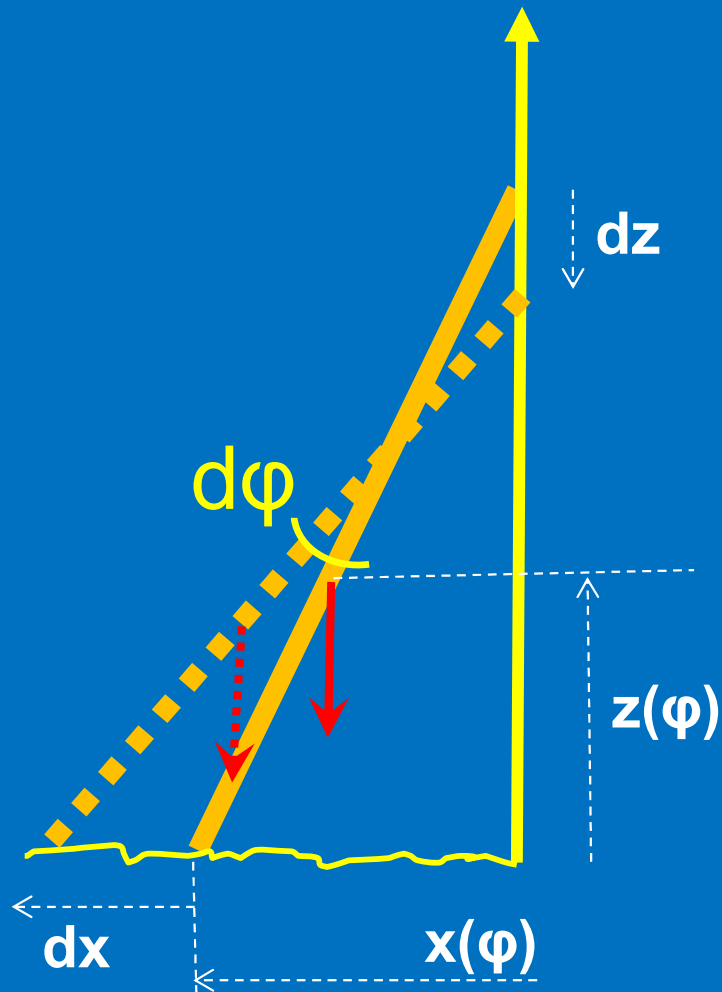
$$\rightarrow \Sigma F_y = 0 = R_A - S_y - W,$$

$$R_A = 100 + 20.3 = 120.3 \text{ Kgr}$$

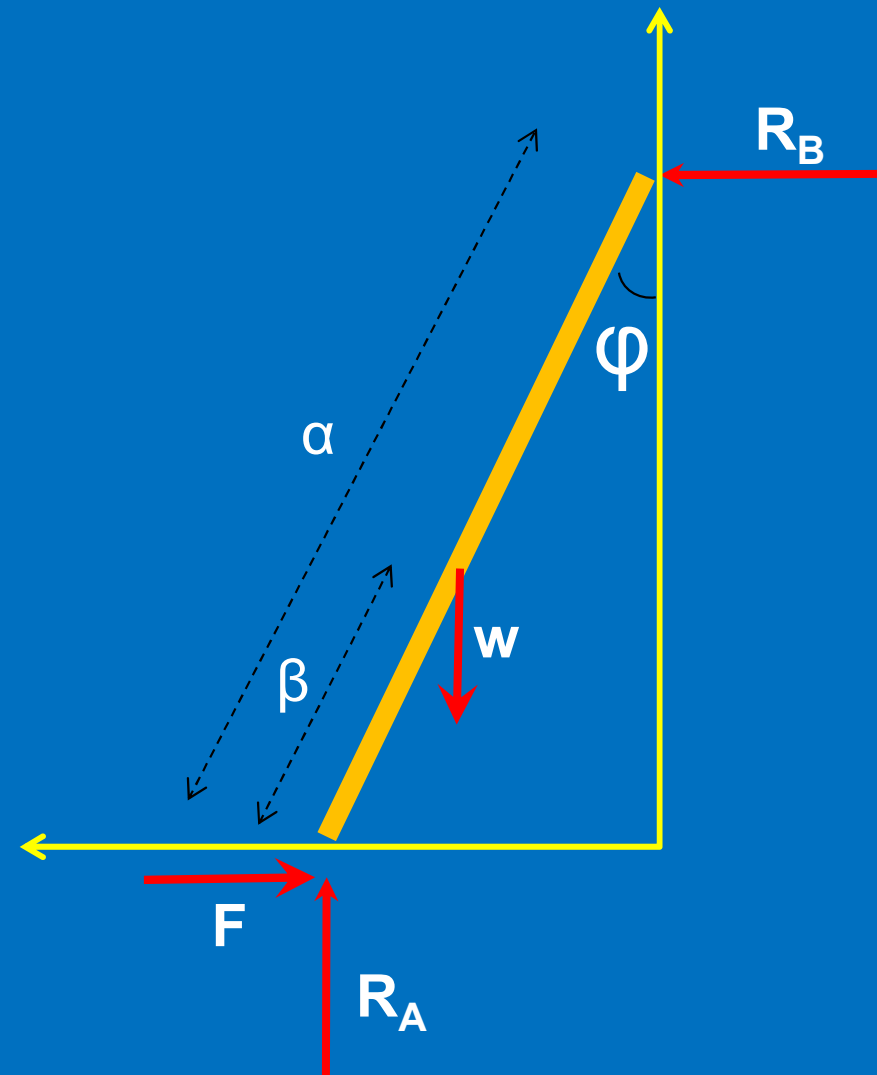
Αβαρής ράβδος μήκους  $\alpha$  με ασκούμενη δύναμη  $W$  σε θέση  $\beta$  στηρίζεται σε αδρό οριζόντιο έδαφος και λείο τοίχο (τρεις άγνωστες αντιδράσεις στηρίξεων).

πρόβλημα ενός βαθμού ελευθερίας κίνησης:  $\varphi$

## B) Ενεργειακή θεώρηση – Αρχή Δυνατών Έργων



## A) ΔΕΣ & εξισώσεις ισορροπίας



Αβαρής ράβδος μήκους  $\alpha$  με ασκούμενη δύναμη  $W$  σε θέση  $\beta$  στηρίζεται σε αδρό οριζόντιο έδαφος και λείο τοίχο (τρεις άγνωστες αντιδράσεις στηρίξεων).

$$\Sigma M_{A|Y} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

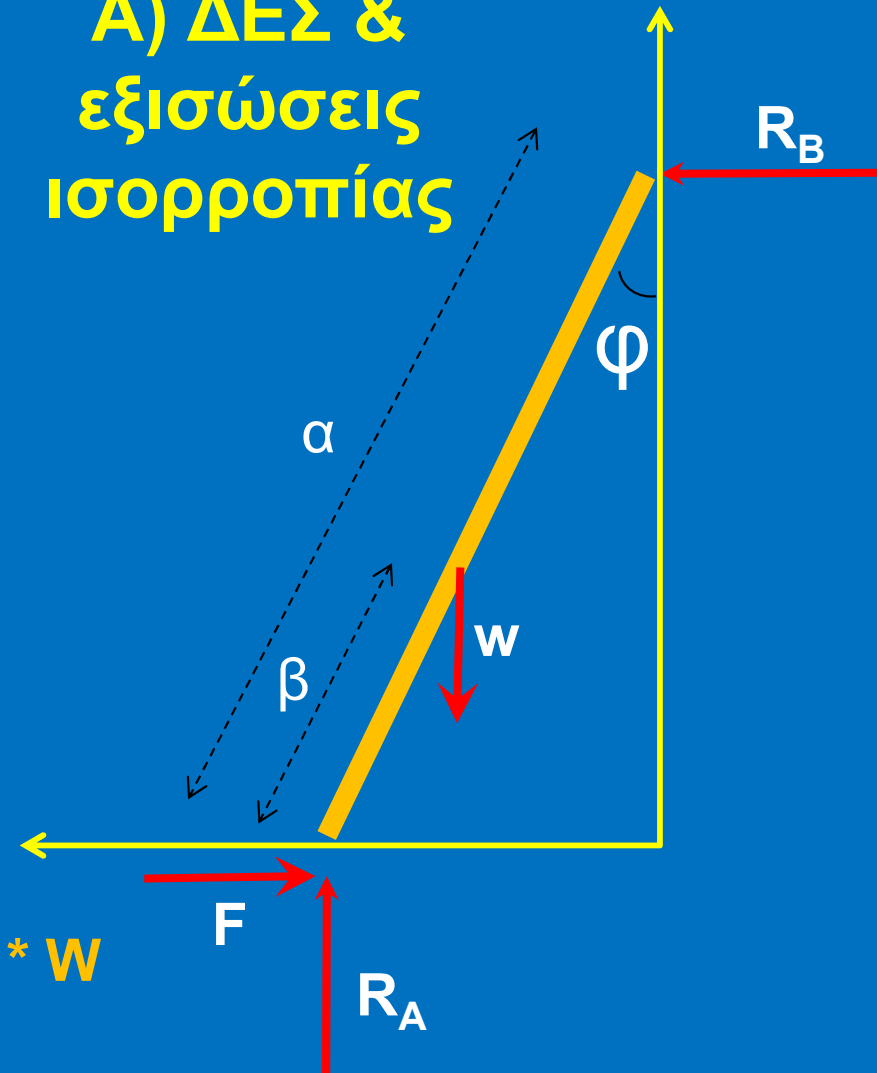
$$\overset{\curvearrowright}{\Sigma M_A} = 0$$

$$W * \beta * \sin\varphi - R_B * \alpha * \cos\varphi = 0 \rightarrow$$
$$R_B = \tan\varphi * \beta/\alpha * W$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F - R_B = 0 \rightarrow F = \tan\varphi * \beta/\alpha * W$$

$$\Sigma F_z = 0 \rightarrow R_A - W = 0 \rightarrow R_A = W$$

**A) ΔΕΣ & εξισώσεις ισορροπίας**



Αβαρής ράβδος μήκους  $\alpha$  με ασκούμενη δύναμη  $W$  σε θέση  $\beta$  στηρίζεται σε αδρό οριζόντιο έδαφος και λείο τοίχο (τρεις άγνωστες αντιδράσεις στηρίξεων).

πρόβλημα ενός βαθμού ελευθερίας κίνησης:  $\varphi$

## B) Ενεργειακή θεώρηση – Αρχή Δυνατών Έργων

Η κινητική ενέργεια δεν αλλάζει  $\rightarrow \Delta KE = \Sigma W = 0$

(Έργο =  $r \cdot F = rF \cos \theta$ )

Για μια στοιχειώδη περιστροφή  $d\varphi$  της ράβδου, συντελούνται οι μετατοπίσεις  $dx$  και  $dz$ .

Οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι:

$W$  και  $F$

οι  $R_B \perp dz$  και  $R_A \perp dx \rightarrow$  μηδενικό έργο

Αρχική θέση της  $W$ :  $z(\varphi) = \beta \times \cos \varphi$

$\rightarrow dz/d\varphi = -\beta \times \sin \varphi \rightarrow dz = -\beta \times \sin \varphi \times d\varphi$

Αρχική θέση της  $F$ :  $x(\varphi) = \alpha \times \sin \varphi$

$\rightarrow dx/d\varphi = \alpha \times \cos \varphi \rightarrow dx = \alpha \times \cos \varphi \times d\varphi$

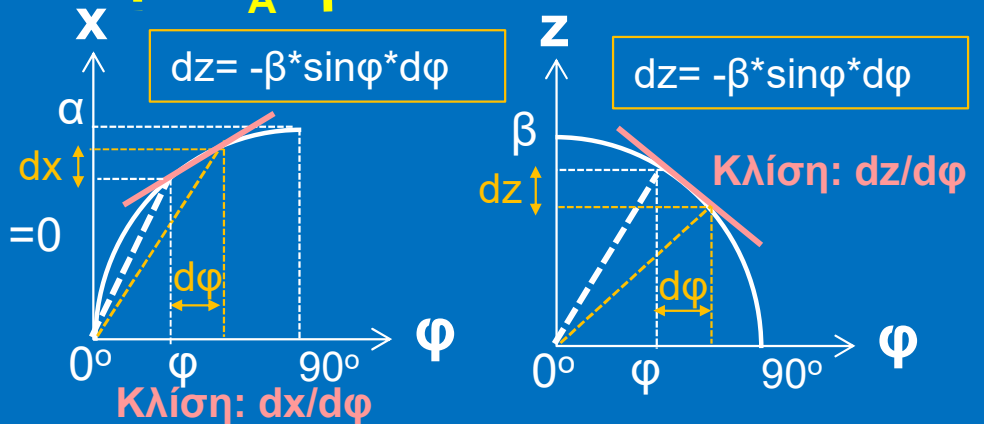
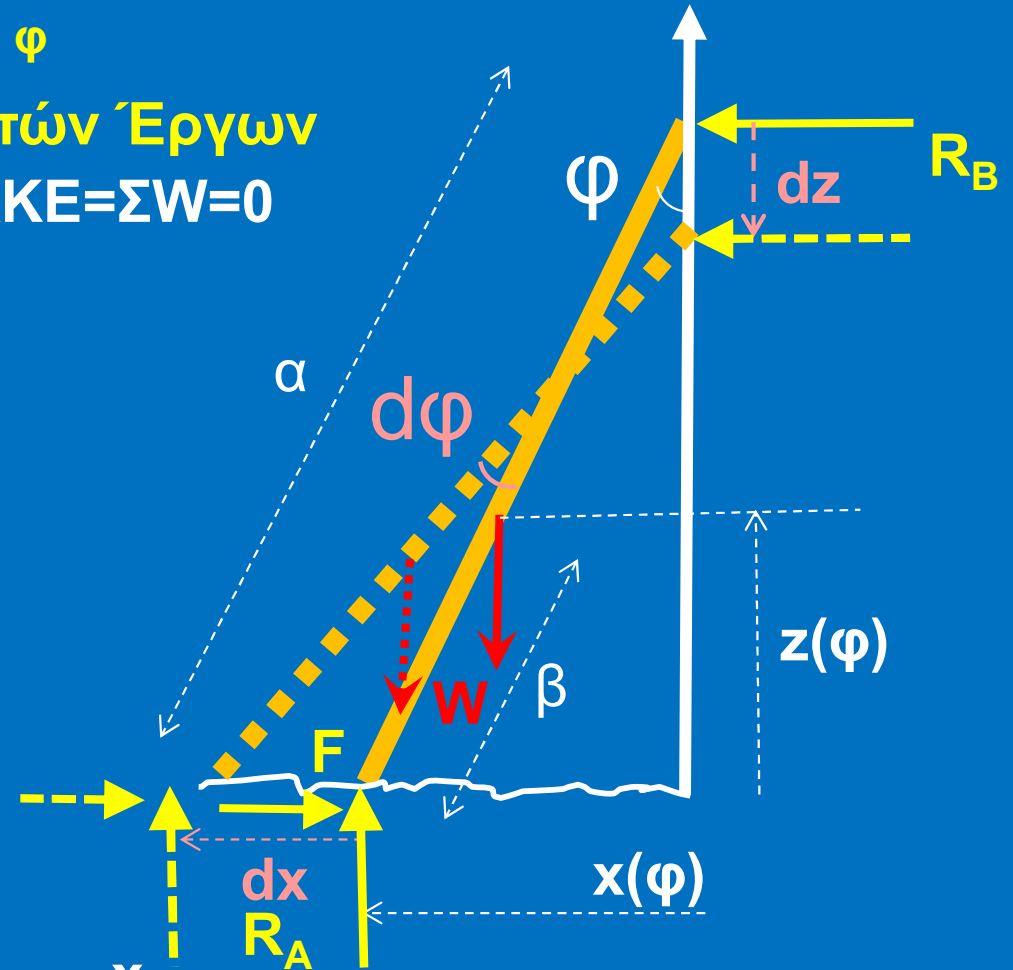
Δυνατό έργο  $dW_W = dz \times (-W) = \beta \times \sin \varphi \times d\varphi \times W$

Δυνατό έργο  $dW_F = dx \times (-F) = -\alpha \times \cos \varphi \times d\varphi \times F$

$\Delta KE = \Sigma W = 0 \rightarrow \beta \times \sin \varphi \times d\varphi \times W - \alpha \times \cos \varphi \times d\varphi \times F = 0$

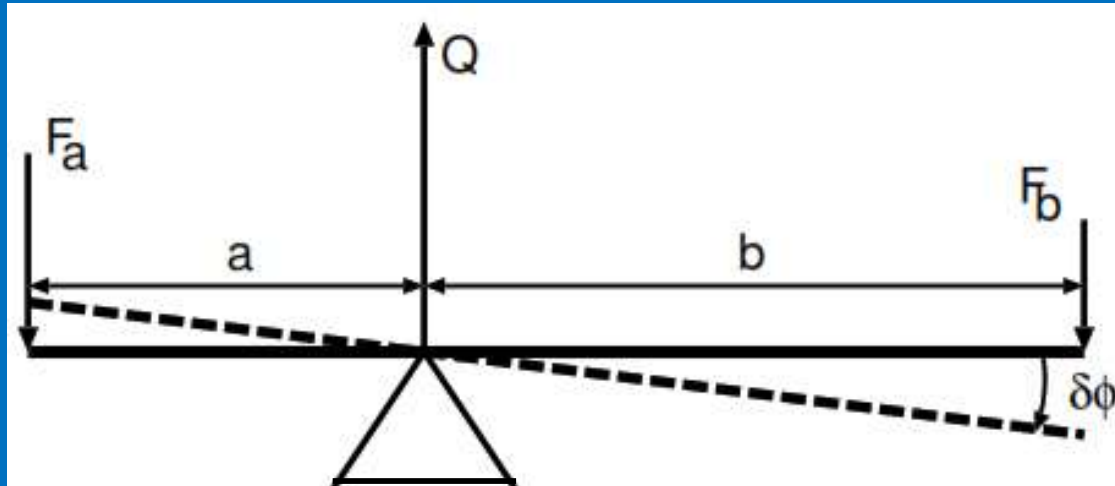
$\rightarrow F = \tan \varphi \times \beta / \alpha \times W$

ίδια εξίσωση με αυτή που προκύπτει από  $\Sigma M_A = 0$  και  $\Sigma F_X = 0$  από A)



## Άσκηση για το σπίτι

Αποδείξτε με την Αρχή Δυνατών Έργων (άθροισμα έργων δυνάμεων=Μεταβολή Κιν. Εν.=0) τις εξισώσεις ισοροπίας (δύναμης και ροπής) της τραμπάλας του σχήματος που ισορροπεί στην οριζόντια θέση.



**A) ΔΕΣ & εξισώσεις  
ισοροπίας  
( $\Sigma F_y=0$ ,  $\Sigma M_Q=0$ )**

**B) Ενεργειακή θεώρηση  
– Αρχή Δυνατών Έργων**

A περίπτωση: περιστροφή κατά  $\delta\phi$

B περίπτωση: ανύψωση κατά κοινό  $\delta u$

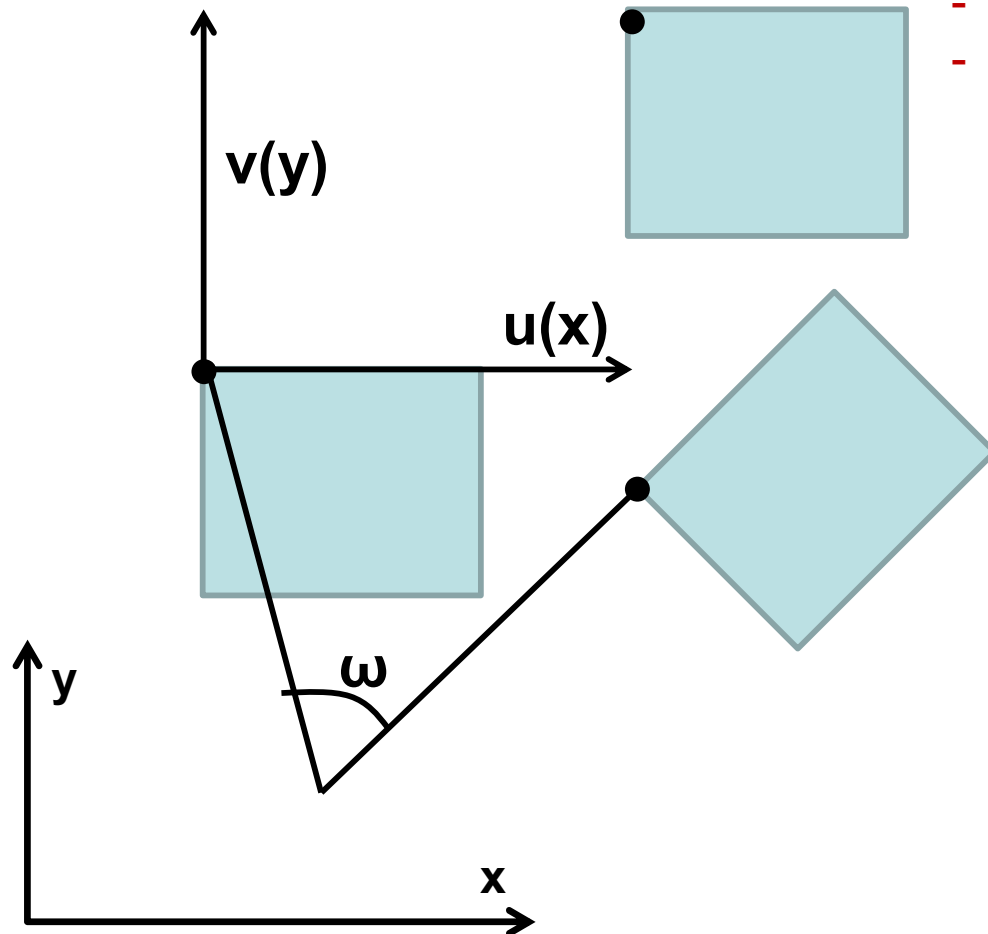
# Ισορροπία και βαθμοί ελευθερίας

Στο επίπεδο:

Σε τυχαία μετακίνηση: μετάθεση  $u(x) - v(y)$  και περιστροφή  $\omega \rightarrow 3$  βαθμοί ελευθερίας κίνησης

Σε ισορροπία:

- επιβάλλεται ένας εξωτερικός περιορισμός για κάθε βαθμό ελευθερίας
- ανεξάρτητοι μεταξύ τους οι περιορισμοί
- Υλοποιούνται με συνδέσμους μεταξύ του σώματος και του εδάφους



$$\Sigma F=0$$

$$u(x)=0$$

ΔΕΝ ΚΙΝΕΙΤΑΙ

$$v(y)=0$$

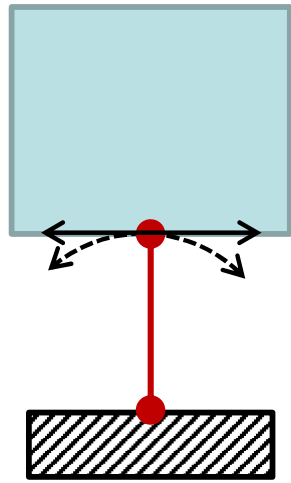
$$\Sigma M=0$$

$$\omega=0$$

ΔΕΝ ΣΤΡΕΦΕΤΑΙ



**Δεσμική ράβδος: απαγορεύει μετατόπιση στον άξονά της και αναπτύσσει αντίδραση στον άξονά της άγνωστου μέτρου και φοράς. Επιτρέπει απειροστή κίνηση κάθετα στον άξονά της!**



$$u \neq 0$$

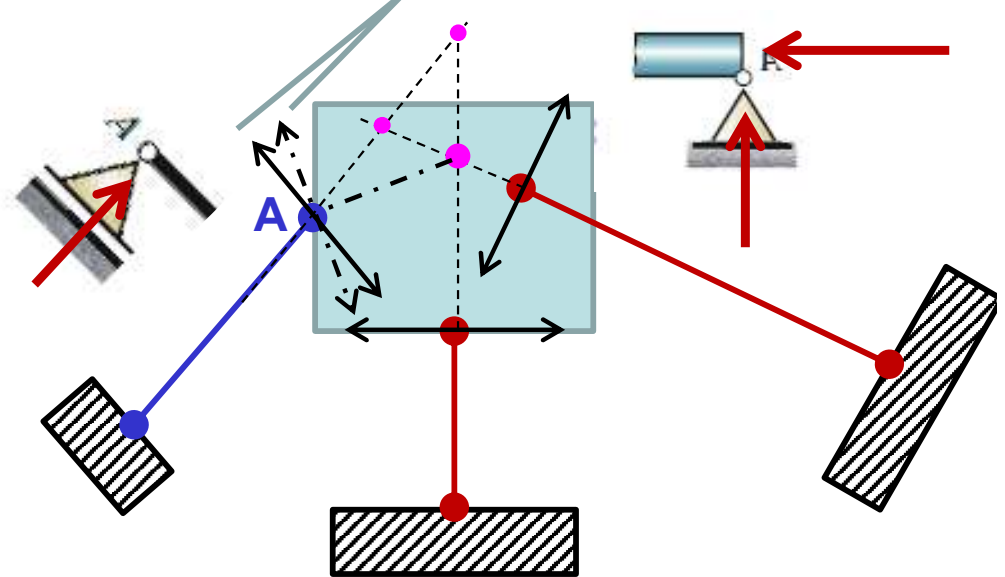
$$v = 0$$

$$\omega \neq 0$$

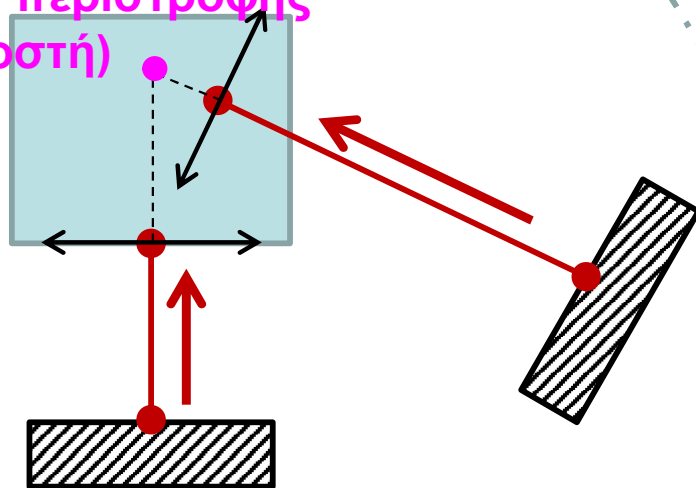


Μία δ. ράβδος = κύλιση

**Αδύνατον το σημείο A να διαγράψει ταυτόχρονα δύο τροχιές!**

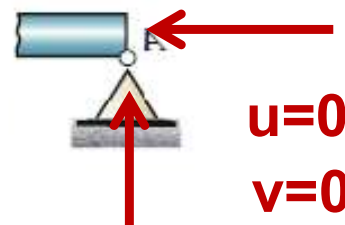


**Κέντρο περιστροφής (απειροστή)**



**ΑΚΙΝΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΦΟΡΕΑ = με 3 Δ.Ρ. που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο → ΣΤΕΡΕΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΗ στήριξη**

Δύο δ. ράβδοι = άρθρωση: επιτρέπει απειροστή περιστροφή ως προς Κ.Π. και μόνο!



$$u = 0$$

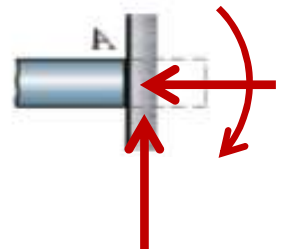
$$v = 0$$

$$\omega \neq 0$$

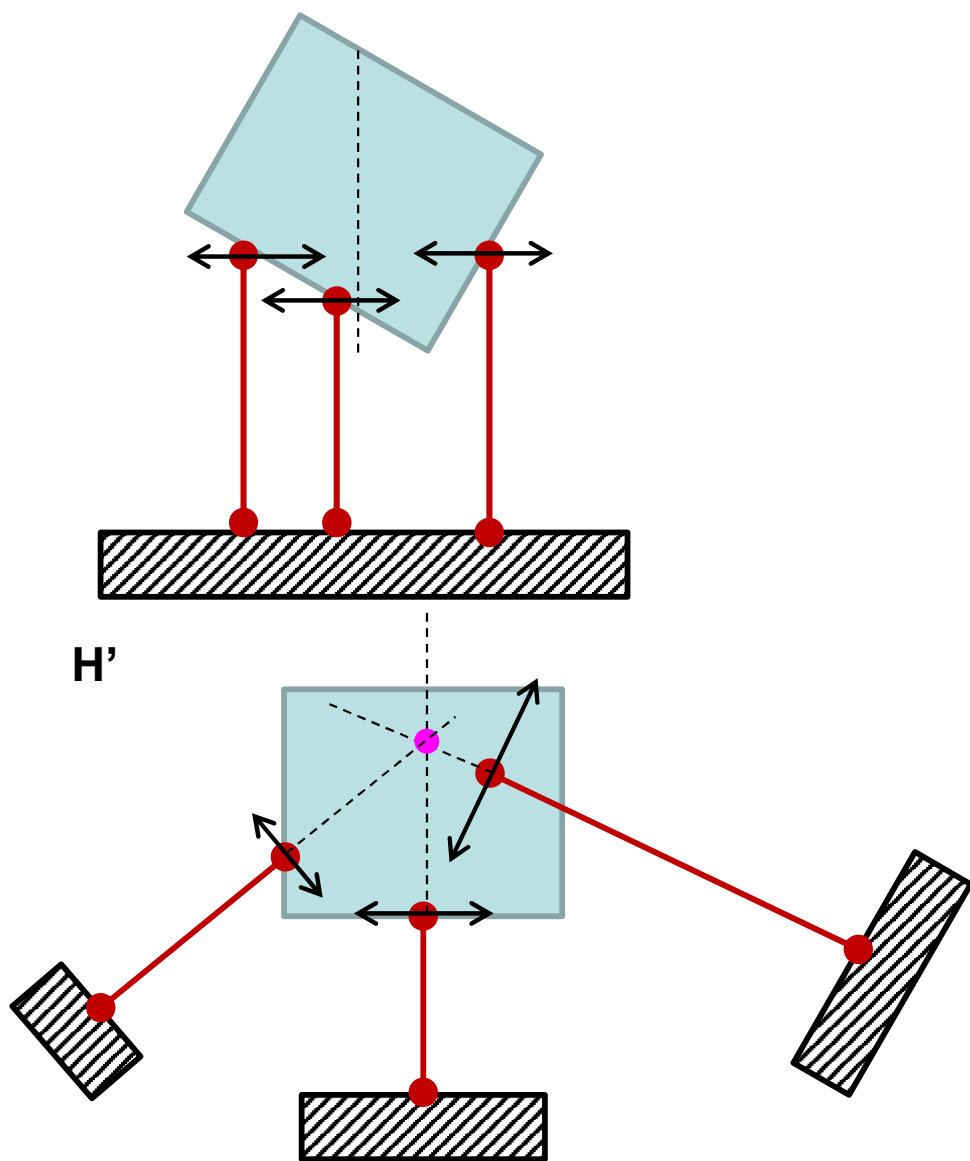
$$u = 0$$

$$v = 0$$

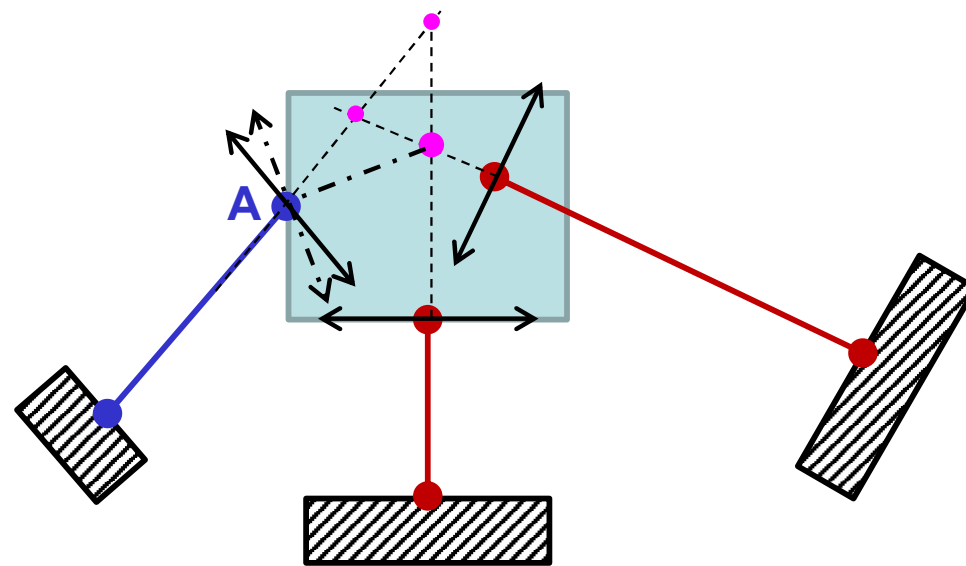
$$\omega = 0$$



**Δεσμική ράβδος: απαγορεύει μετατόπιση στον άξονά της και αναπτύσσει αντίδραση στον άξονά της άγνωστου μέτρου και φοράς. Επιτρέπει απειροστή κίνηση κάθετα στον άξονά της!**



**Αδύνατον το σημείο A να διαγράψει ταυτόχρονα δύο τροχιές!**



**ΑΚΙΝΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΦΟΡΕΑ = με 3 Δ.Ρ. που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο → ΣΤΕΡΕΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΗ στήριξη**

**Χαλαρή στήριξη ΦΟΡΕΑ: δυνατή η απειροστή περιστροφή: όταν οι 3 Δ.Ρ. συντρέχουν ή είναι παράλληλες → ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ**

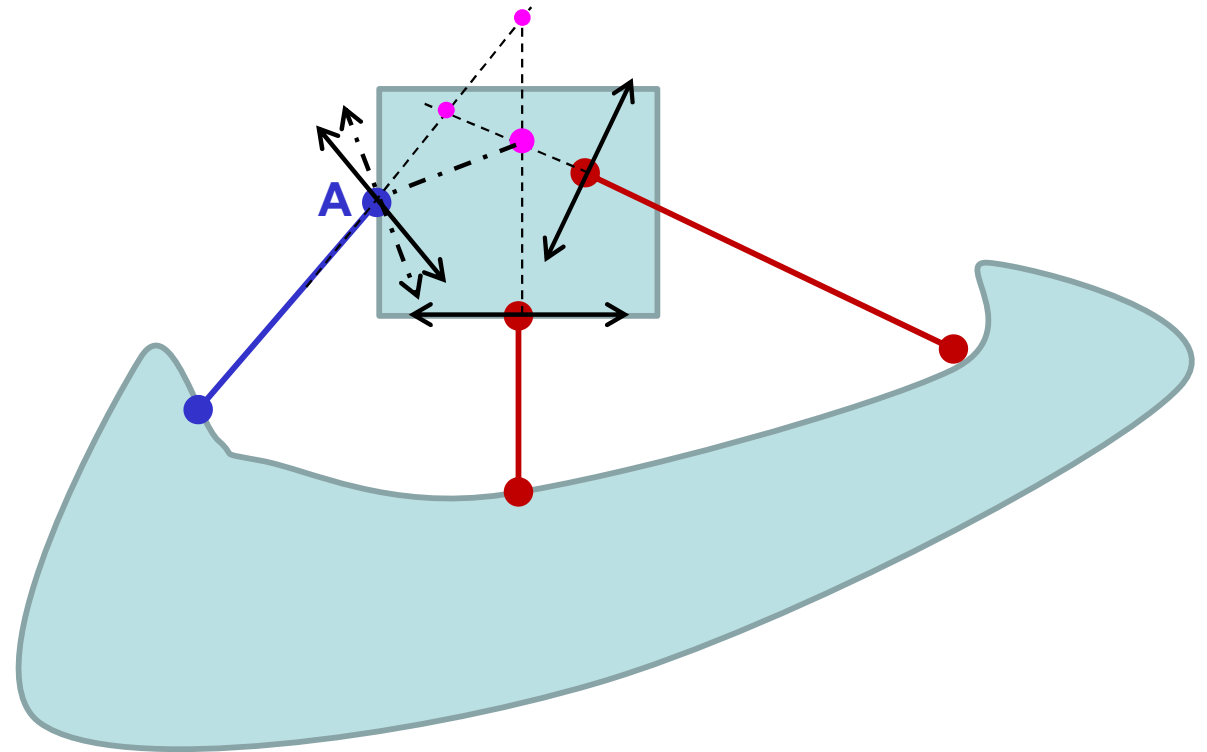
**← Όμως...**

# ΣΤΕΡΕΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ η δίσκων

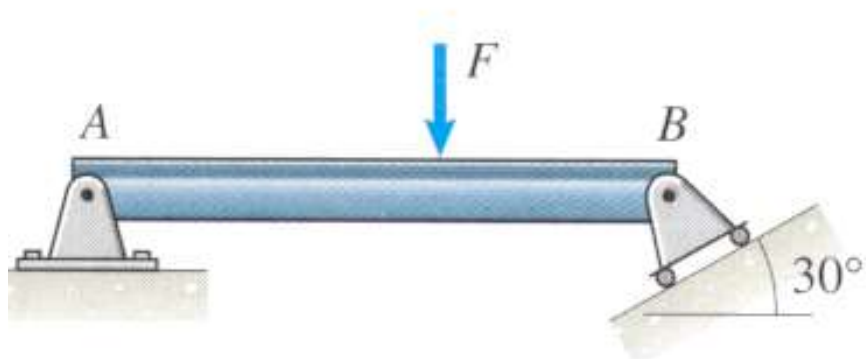
Δύο δίσκοι που συνδέονται  
μεταξύ τους με 3 Δ.Ρ. και δεν  
διέρχονται από το ίδιο  
σημείο

Εάν  $n$ =δίσκοι που ανά  
δύο συνδέονται με 3 Δ.Ρ.  
που δεν συντρέχουν,  
τότε ο ελάχιστος  
αριθμός  $\rho$  δεσμικών  
ράβδων του  
σχηματισμού είναι:

$$\rho=3(n-1)$$



**ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΦΟΡΕΑΣ:** όταν στηρίζεται με 3 Δ.Σ. που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο



Το στερεό (ή φορέας) με τις δράσεις και τις στηρίξεις (άρθρωση & κύλιση)

**ΔΕΣ:**

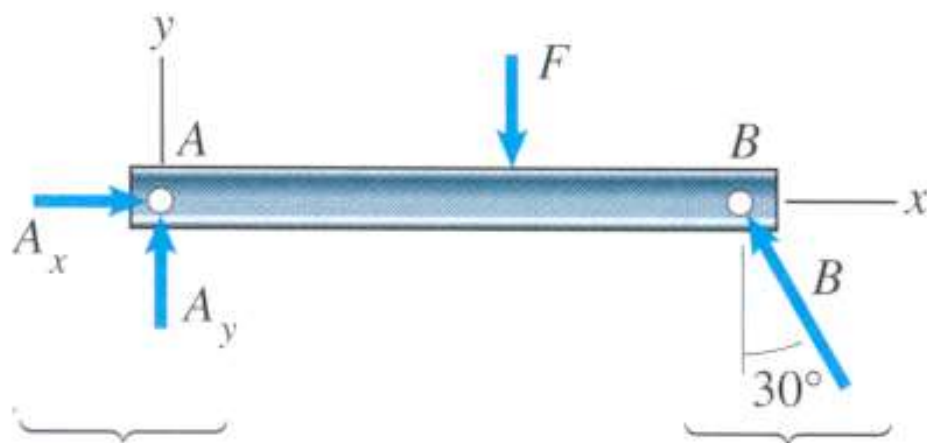
- Τρεις άγνωστες αντιδράσεις:  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B$

- τρεις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\Sigma F_x=0, \Sigma F_y=0$$

$$\Sigma M_{z(O)}=0 \text{ ως προς οποιοδήποτε σημείο}$$

→ Το πρόβλημα έχει λύση

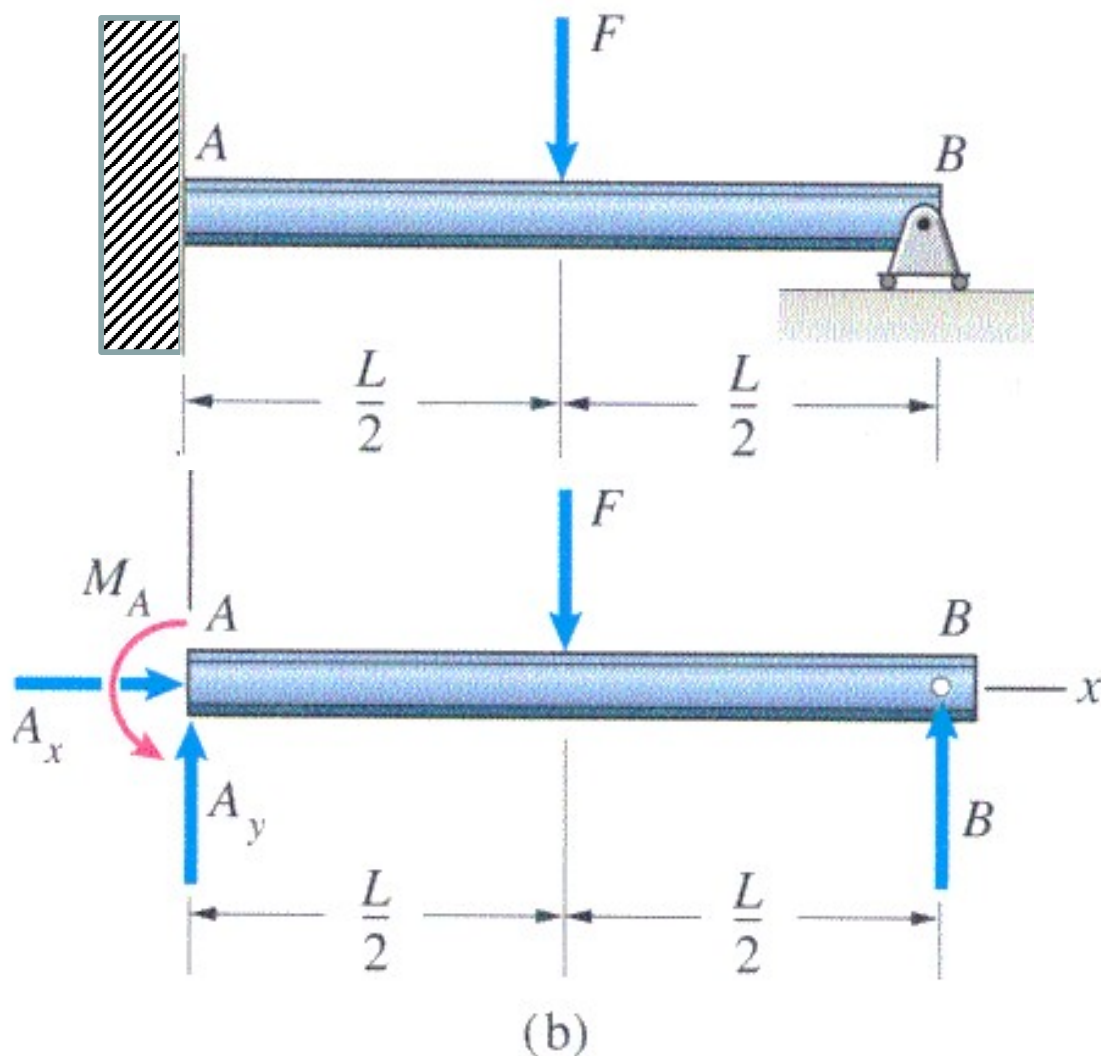


Αντιδράσεις της άρθρωσης

Αντίδραση της κύλισης

**ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΟΣ ΦΟΡΕΑΣ: όταν στηρίζεται με  $\gg 3$  Δ.Σ.**

υπάρχουν περισσότερες στηρίξεις από τρεις σε ένα 2D πρόβλημα (ενώ διαθέτω τρεις εξισώσεις – εργαλεία),



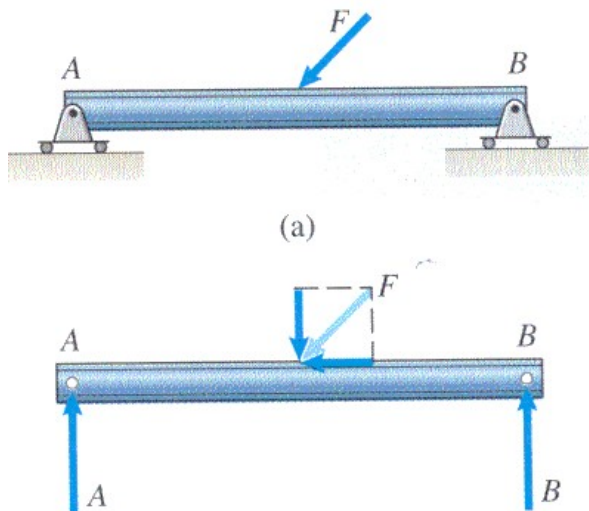
**4 Αντιδράσεις - 3 Ανεξάρτητες  
Εξισώσεις ισορροπίας  
= 1 Βαθμός Αοριστίας  
(1 φορά υπερστατικός φορέας)**

# Στατικώς απροσδιόριστα προβλήματα

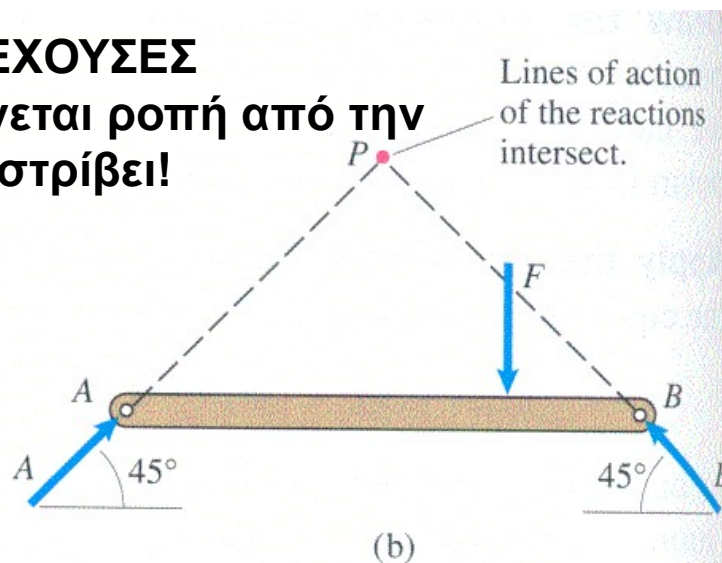
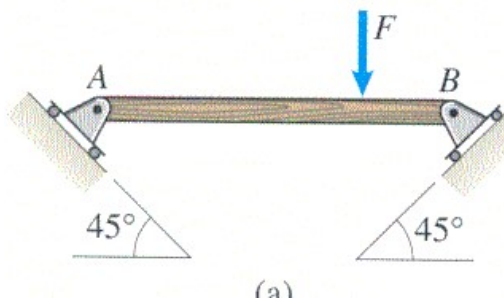
οι λιγότερες στηρίξεις: δεν προσφέρουν ισορροπία στο στερεό

- 2 ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ

μπορεί να κινηθεί  $\leftarrow \rightarrow$ :  
 $\Sigma F_x \neq 0$   
ΚΙΝΗΤΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ή ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ



ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ  $\rightarrow$  παράγεται ροπή από την δράση F και ο φορέας στρίβει!

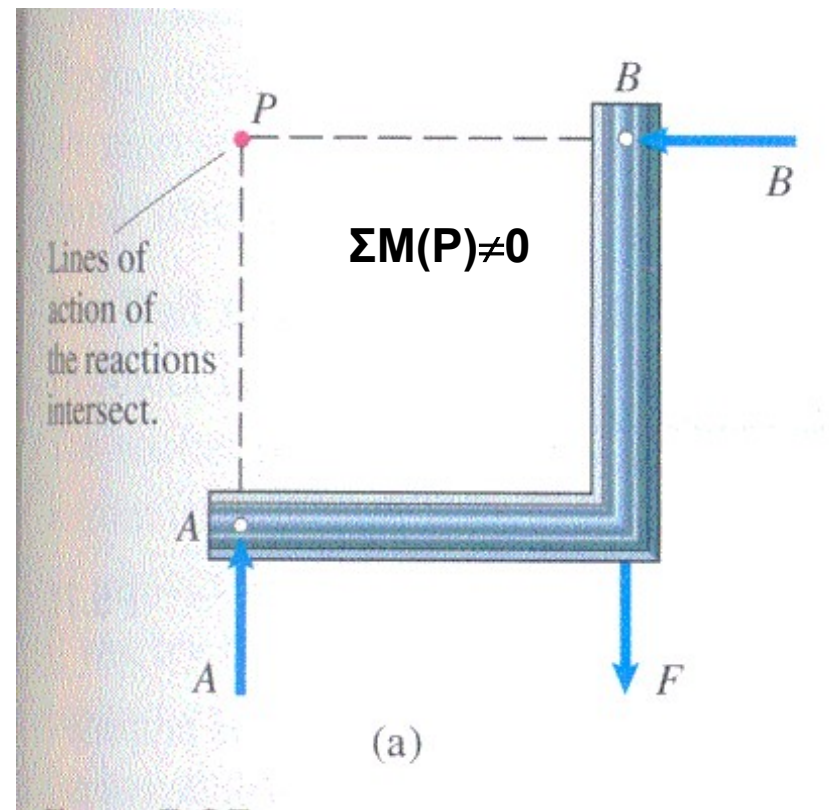
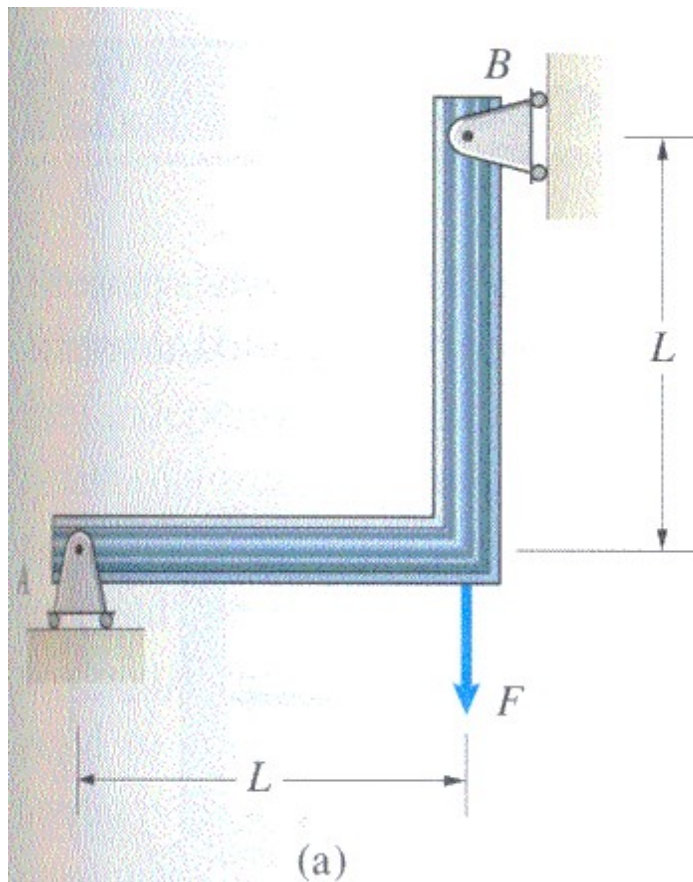


$\Sigma M(P) \neq 0$

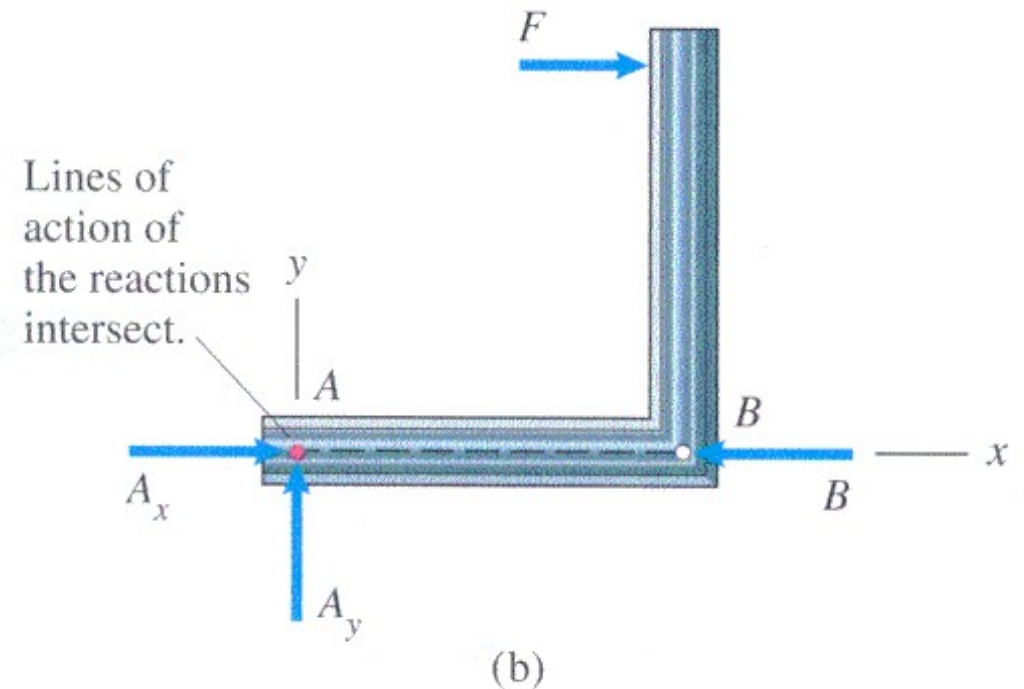
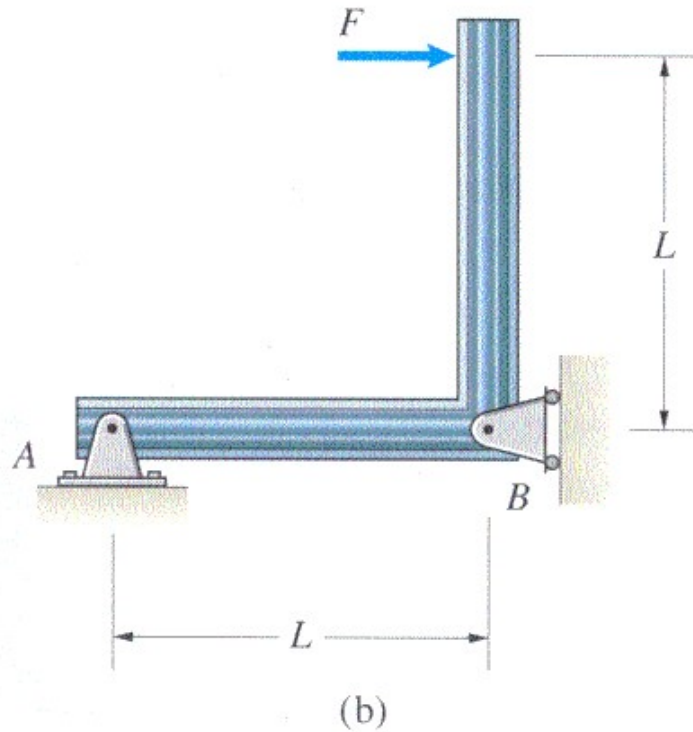


οι λιγότερες στηρίξεις: δεν προσφέρουν ισορροπία στο στερεό

- Οι άξονες ενέργειας των αντιδράσεων συντρέχουν στο σημείο  $P$ , το φορτίο  $F$  ασκεί ροπή στο  $P$
- Ο φορέας έχει δυνατότητα κίνησης (ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ)



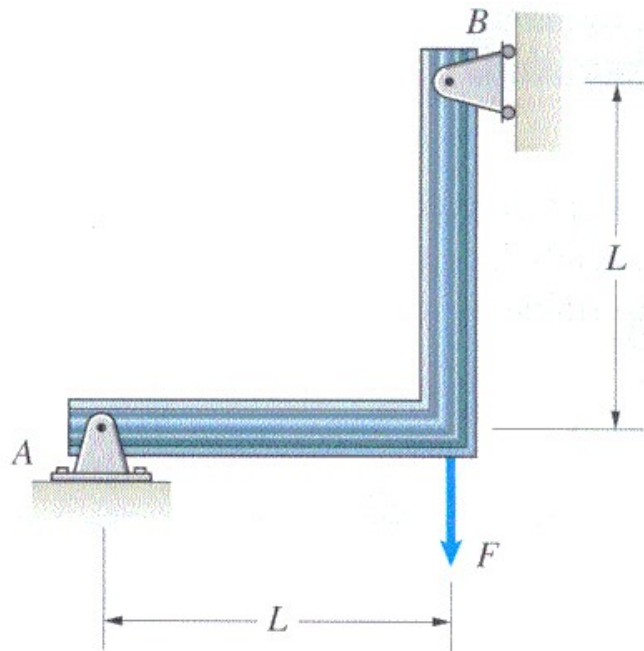
## Λάθος τοποθέτηση στηρίξεων με $\Delta.P.=3$ :



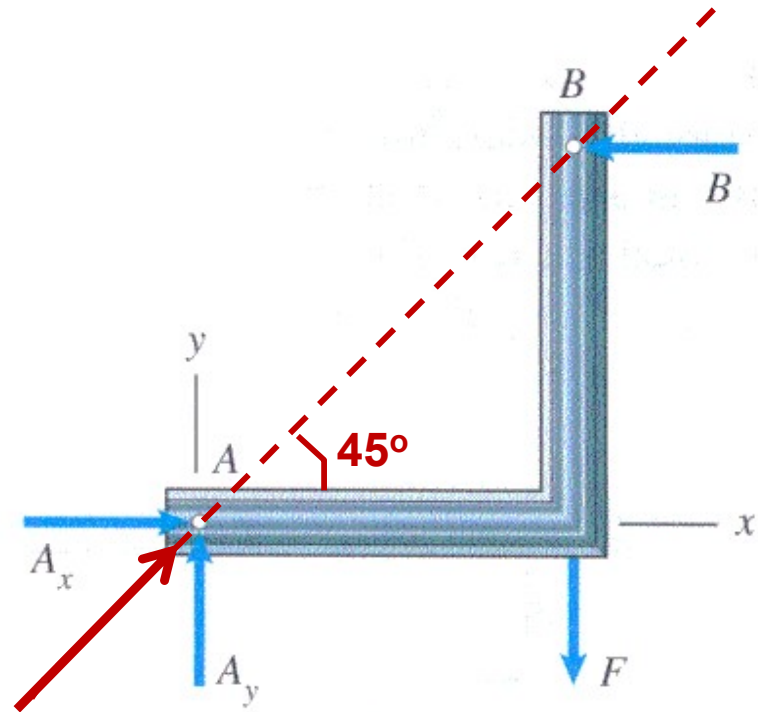
- Οι άξονες ενέργειας των αντιδράσεων συντρέχουν στο σημείο A, το φορτίο  $F$  ασκεί ροπή στο A
- Ο φορέας δεν στηρίζεται στερεά και αποτελεί μηχανισμό. Επομένως δεν ισορροπεί



$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow A_x L - A_y L = 0 \Rightarrow A_x = A_y$$



(c)



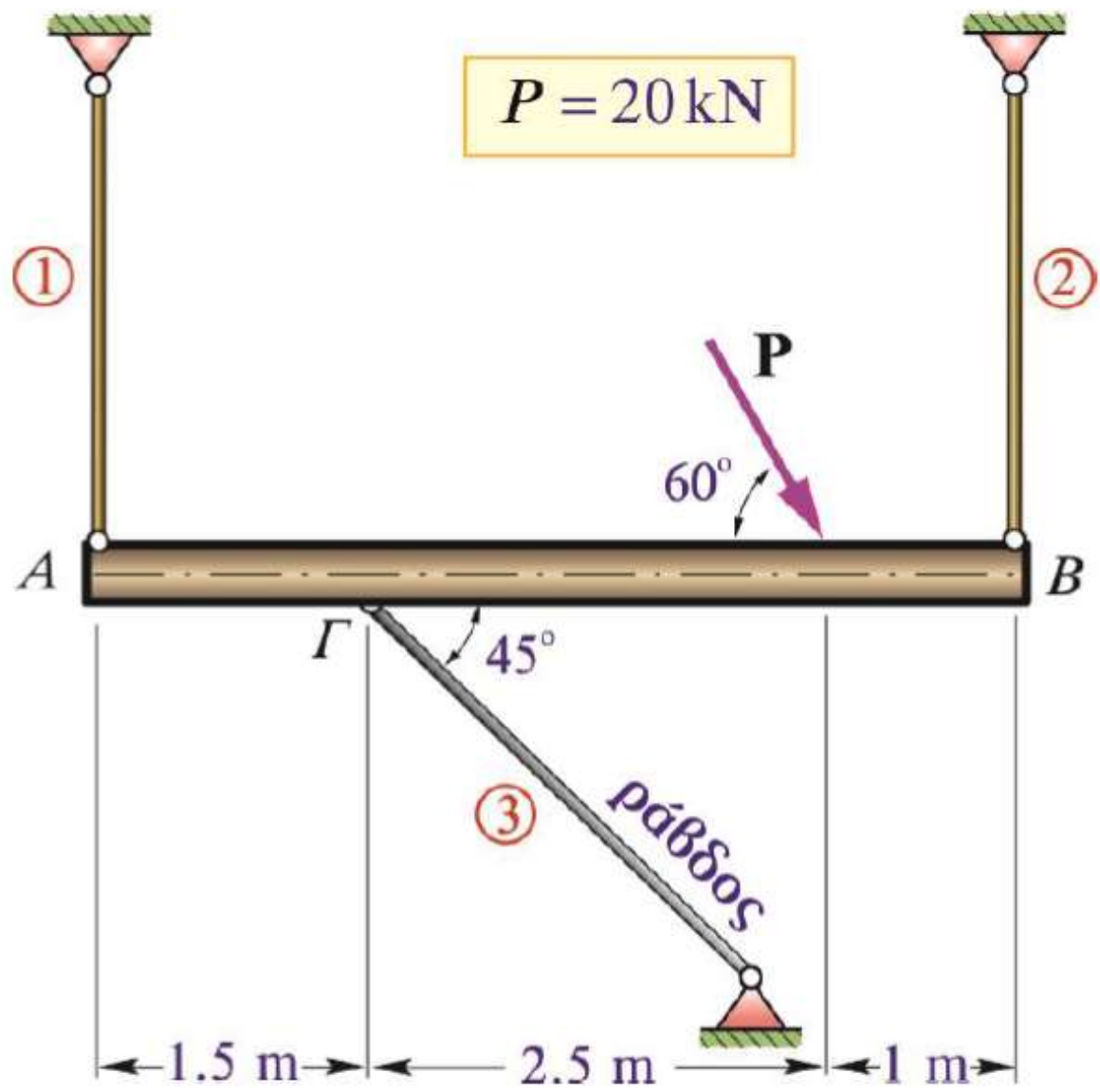
(c)

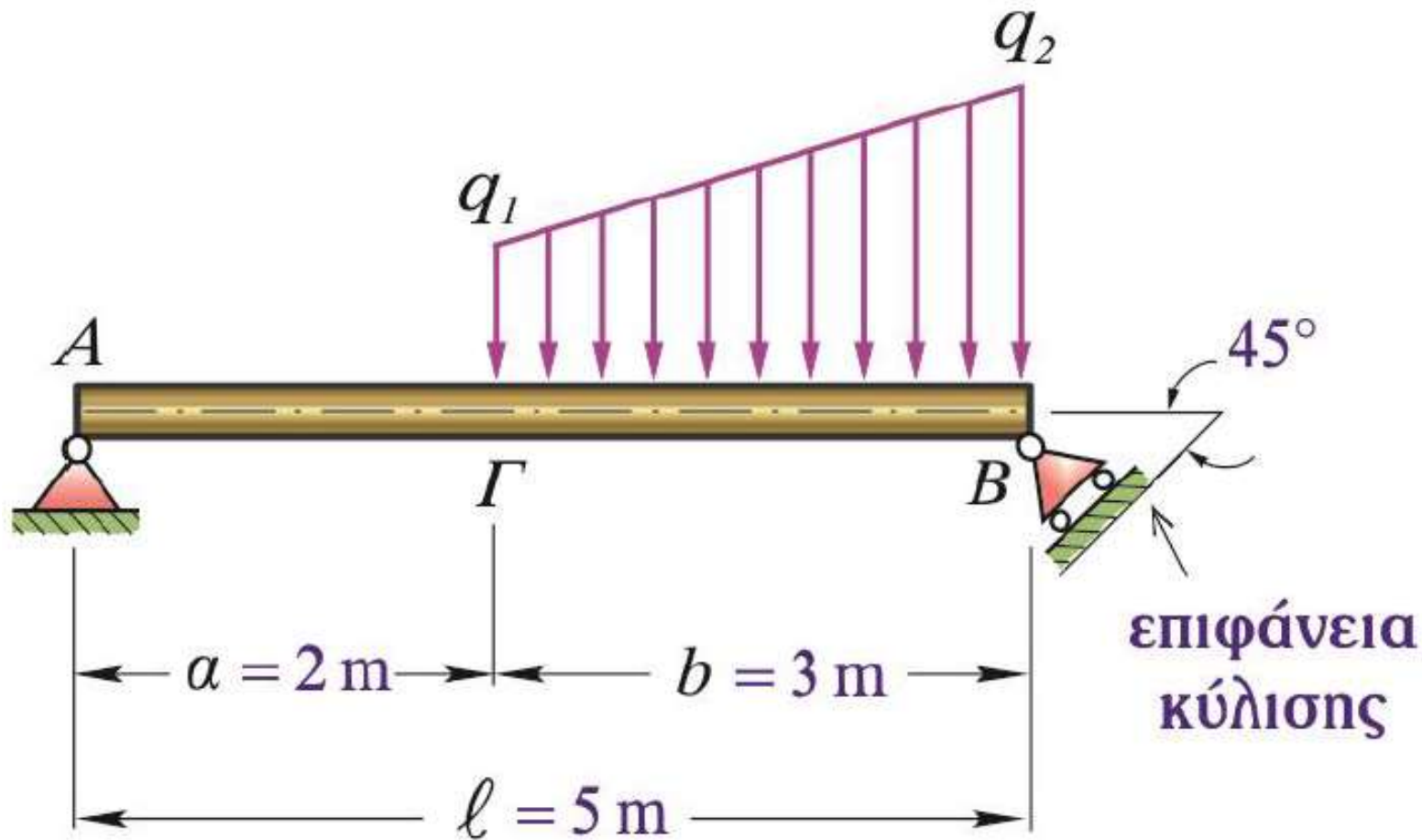
- Όταν οι άξονες ενέργειας των αντιδράσεων και το φορτίο  $F$  συντρέχουν στο σημείο  $B$ , δεν ασκείται ροπή στο  $B$

(  $\Sigma M_B = 0$  )

- Η δοκός στηρίζεται ισοστατικά και ισορροπεί

Ζητούνται οι δυνάμεις που ασκούν οι ράβδοι ①, ②, ③ στη δοκό.





$$q_1 = 20 \text{ kN/m} , \quad q_2 = 50 \text{ kN/m}$$

Να βρεθούν οι αντιδράσεις των στηρίξεων.