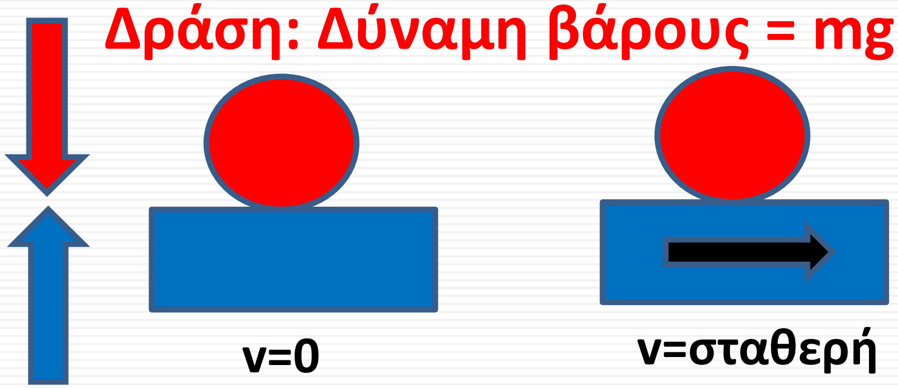
Ισορροπία

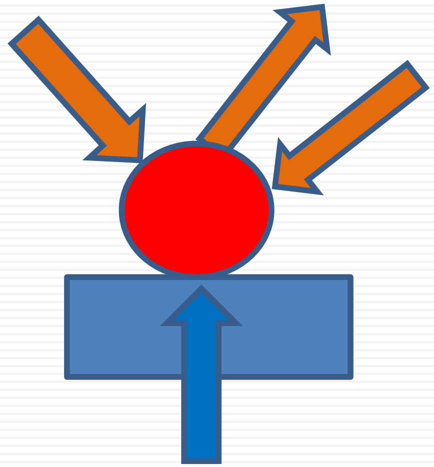
Δεν αλλάζει η κατάσταση του σώματος παρουσία δυνάμεων

- Ακίνητο σώμα (σε ηρεμία)
- όταν ένα σώμα κινείται ομαλά (**v**=σταθερή)

1ος N.N.: Αν σε ένα σώμα δεν ασκείται καμία δύναμη (**ΣF**=0) η ταχύτητα του σώματος δεν μπορεί να μεταβληθεί

Δράση: Δύναμη βάρους = mg



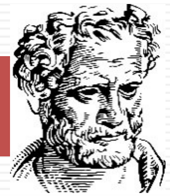


Αντίδραση = **Δράση** (3ος N.N.)

το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα που βρίσκεται σε ισορροπία πρέπει να μηδέν ➔ *ΣF=0*

Χρήση σε περίπτωση εύρεσης άγνωστων δυνάμεων που ασκούνται σε σώμα σε ισορροπία.

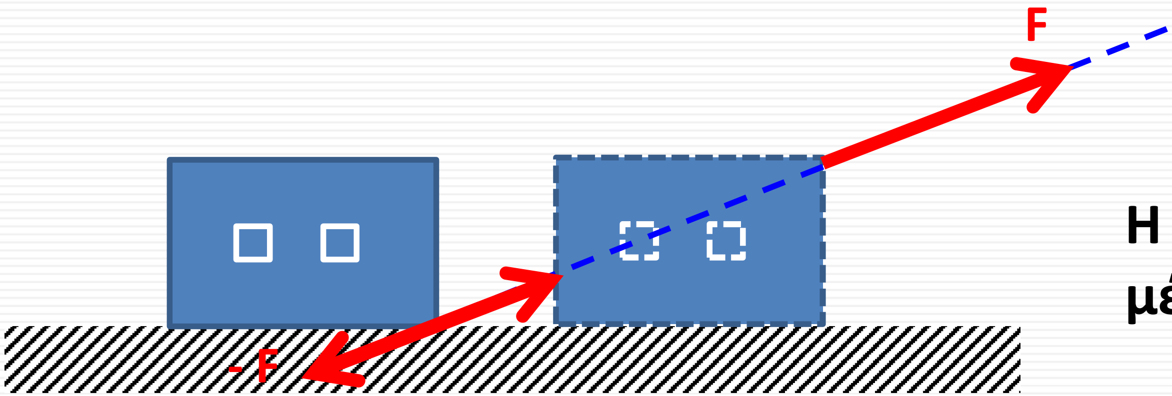
Άλγεβρα διανυσμάτων → διανυσματικός χαρακτήρας της δύναμης



Η δύναμη γίνεται αντιληπτή από το αποτέλεσμα: προκαλεί κίνηση/παραμόρφωση ενός υλικού σημείου ή σώματος

Μηχανική Στερεού σώματος

Παραδοχή: Το Στερεό σώμα αποτελείται από υλικά σημεία των οποίων οι σχετικές αποστάσεις δεν μεταβάλλονται, όταν στο σώμα, σε ένα σημείο του, ασκείται μία δύναμη F.



Φορέας δύναμης

Η δύναμη F ως διάνυσμα έχει μέτρο (π.χ. 10kN>0) και φορά

Δεν αλλάζει το αποτέλεσμα της δύναμης, όταν αυτή μετακινείται επί του άξονά της (φορέα της)

Εάν ασκούνται δυνάμεις σε ένα στερεό σώμα και αυτό βρίσκεται σε «ηρεμία», σημαίνει ότι η *ΣF=0* και τότε το σώμα βρίσκεται σε ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΜΗΚΟΣ

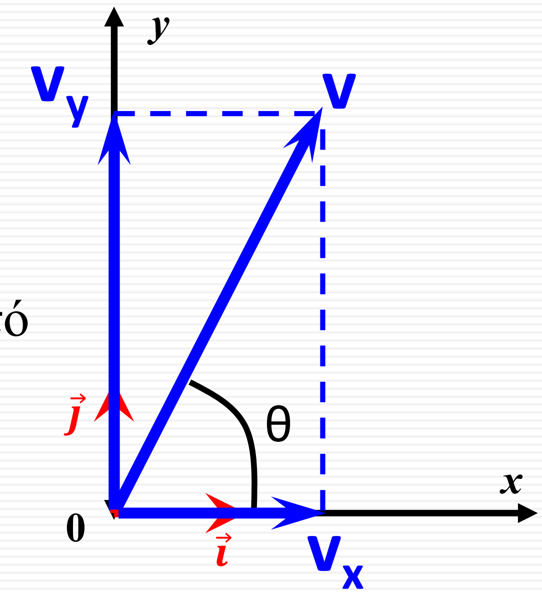
Έστω **διάνυσμα** στο επίπεδο: $\overrightarrow{v}$ (ή **v**)

με συνιστώσες (v_x,v_y): $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

$v_x = |\vec{v}|\cos\theta$

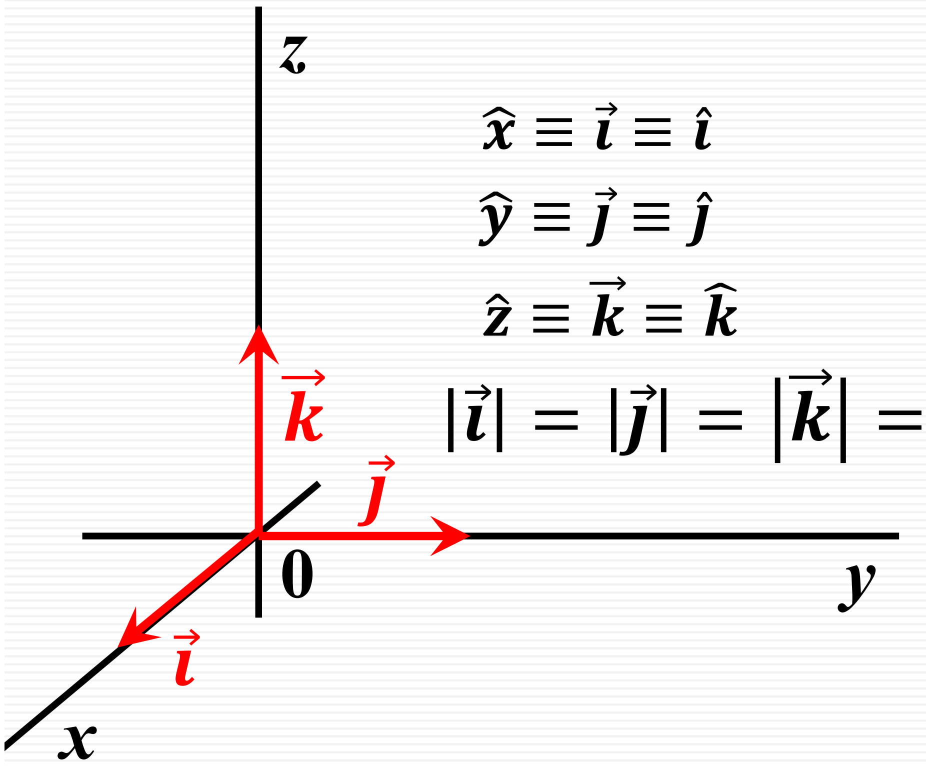
$v_y = |\vec{v}|\sin\theta$

$\tan\theta = v_y / v_x$



Το **φυσικό** ή **Ευκλείδειο μήκος** του διανύσματος (δηλαδή αυτό που θα μετρούσαμε αν απλώναμε μια μεζούρα κατά μήκος του με μονάδες μέτρησης ίδιες με αυτές των αξόνων) είναι:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \geq 0$$



$$\hat{x} \equiv \vec{i} \equiv \hat{\imath}$$

$$\hat{y} \equiv \vec{j} \equiv \hat{\jmath}$$

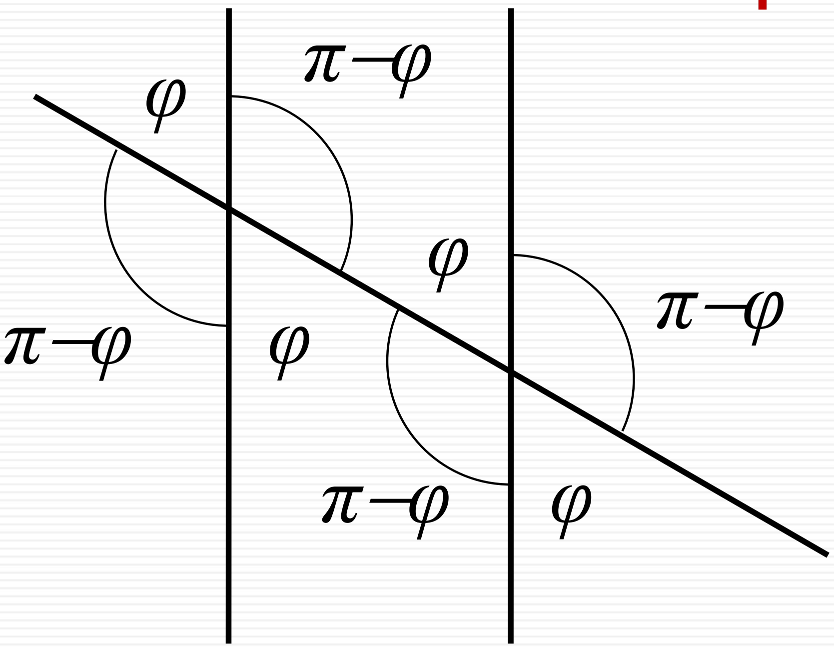
$$\hat{z} \equiv \vec{k} \equiv \hat{k}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Μηχανικοί χρησιμοποιούμε σχεδόν πάντα την εξαιρετικά βολική κατηγορία συστημάτων αναφοράς **ορθοκανονικά** (***orthonormal***, ***ON***), και απαρτίζονται από διανύσματα με μήκος 1 (**κανονικά**) και μεταξύ τους **ορθογώνια**

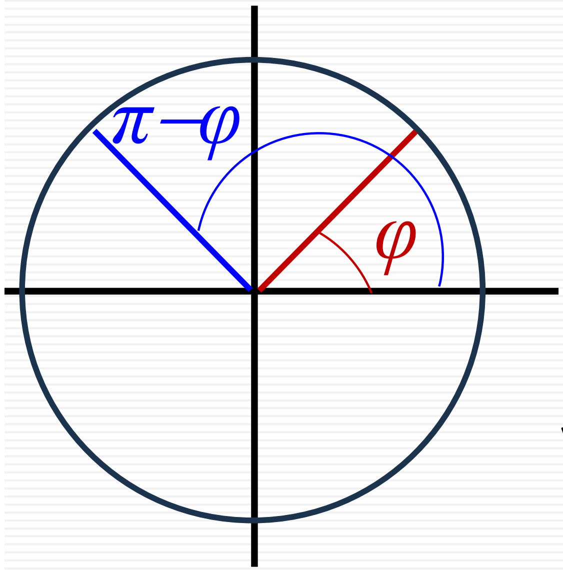
Υπονοούμενες Γνώσεις

Γεωμετρία – Τριγωνομετρία



Οι γωνίες είναι ίσες όταν είναι:

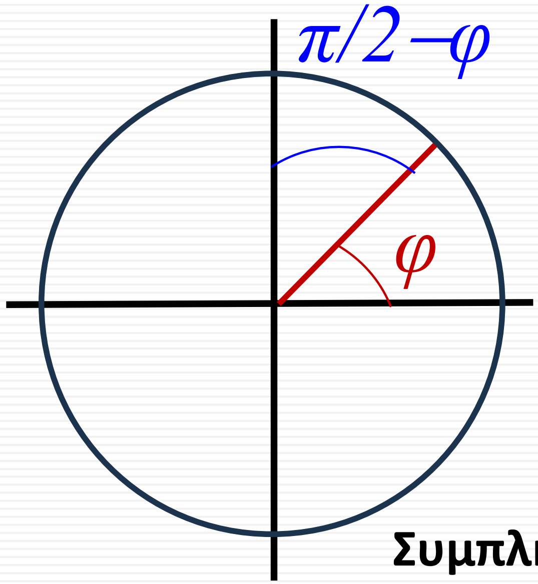
- **κατά κορυφήν**
- **εντός (ή εκτός) εναλλάξ**
- **εντός-εκτός και επί τα αυτά μέρη**



$$\sin(\pi-\varphi) \equiv \sin\varphi$$

$$\cos(\pi-\varphi) \equiv -\cos\varphi$$

Παραπληρωματικές γωνίες (άθροισμα 180ο)

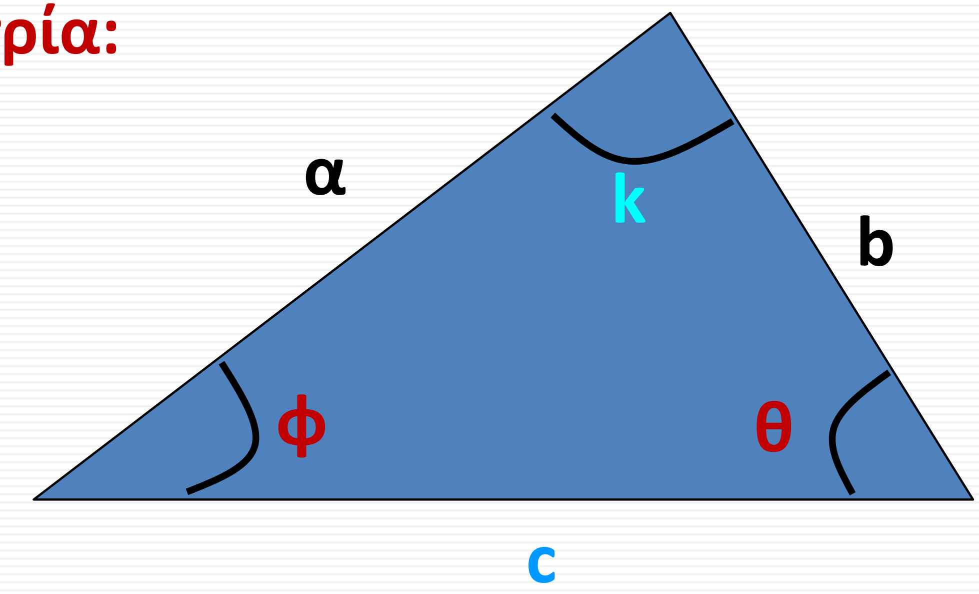


$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \equiv \cos\varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \equiv \sin\varphi$$

Συμπληρωματικές γωνίες (άθροισμα 90ο)

Από τριγωνομετρία:

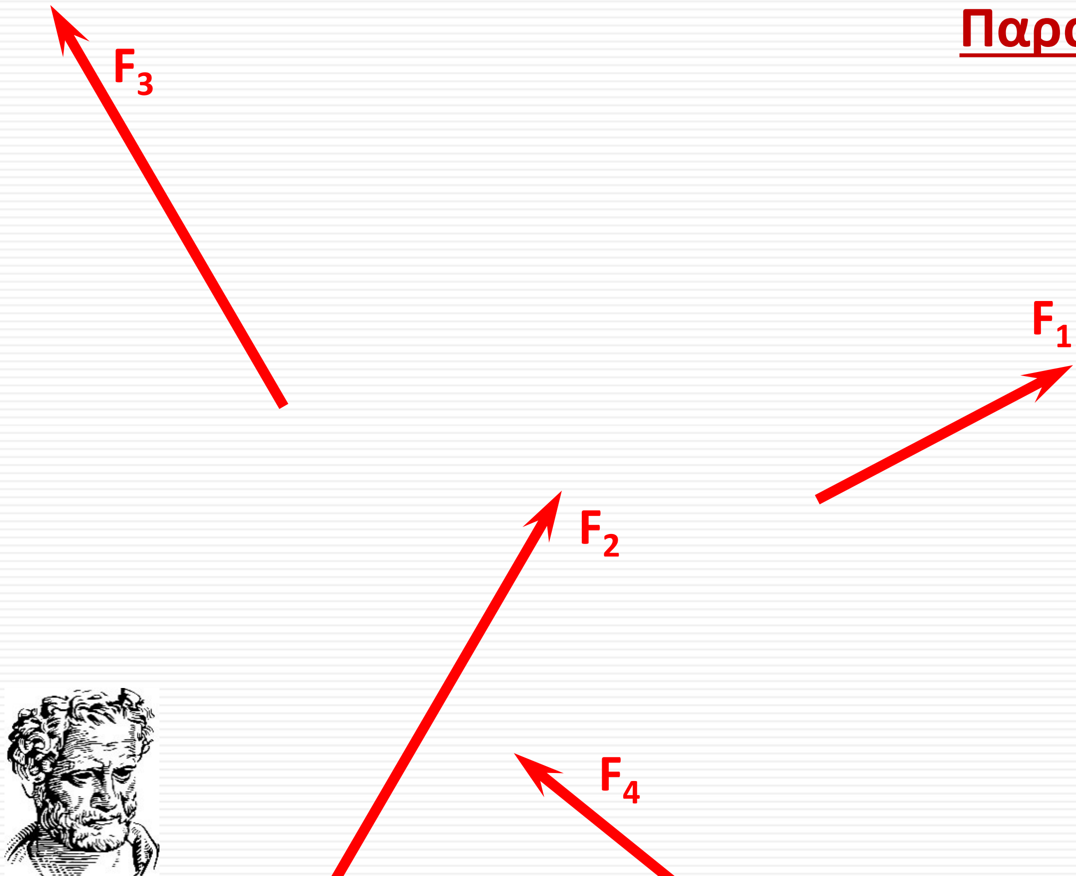


Νόμος των συνημίτονων: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos k$

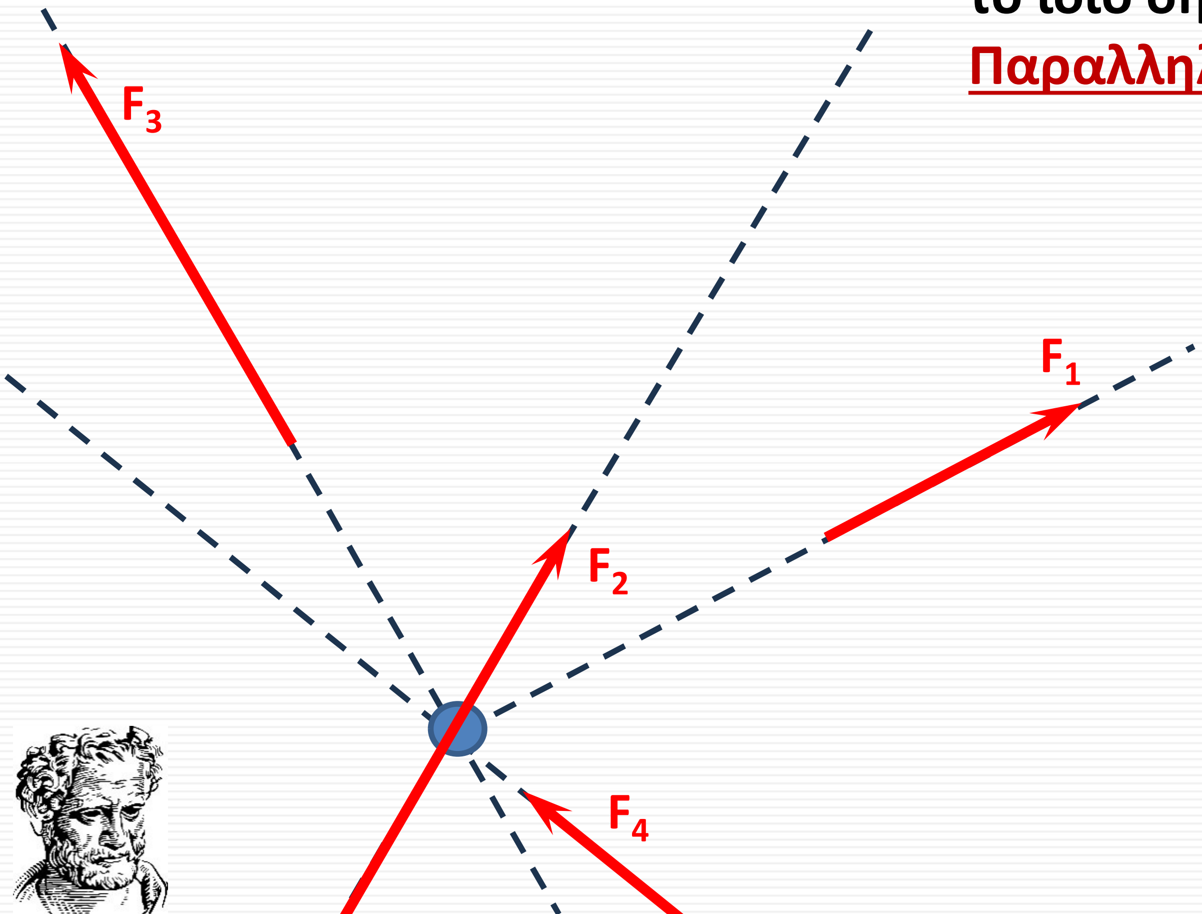
Νόμος των ημιτόνων: $\dfrac{\sin\varphi}{b} = \dfrac{\sin k}{c} = \dfrac{\sin\theta}{a}$

Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)

Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , i=1, 2, 3, 4 οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την Αρχή Παραλληλογράμμου (γραφική μέθοδος)

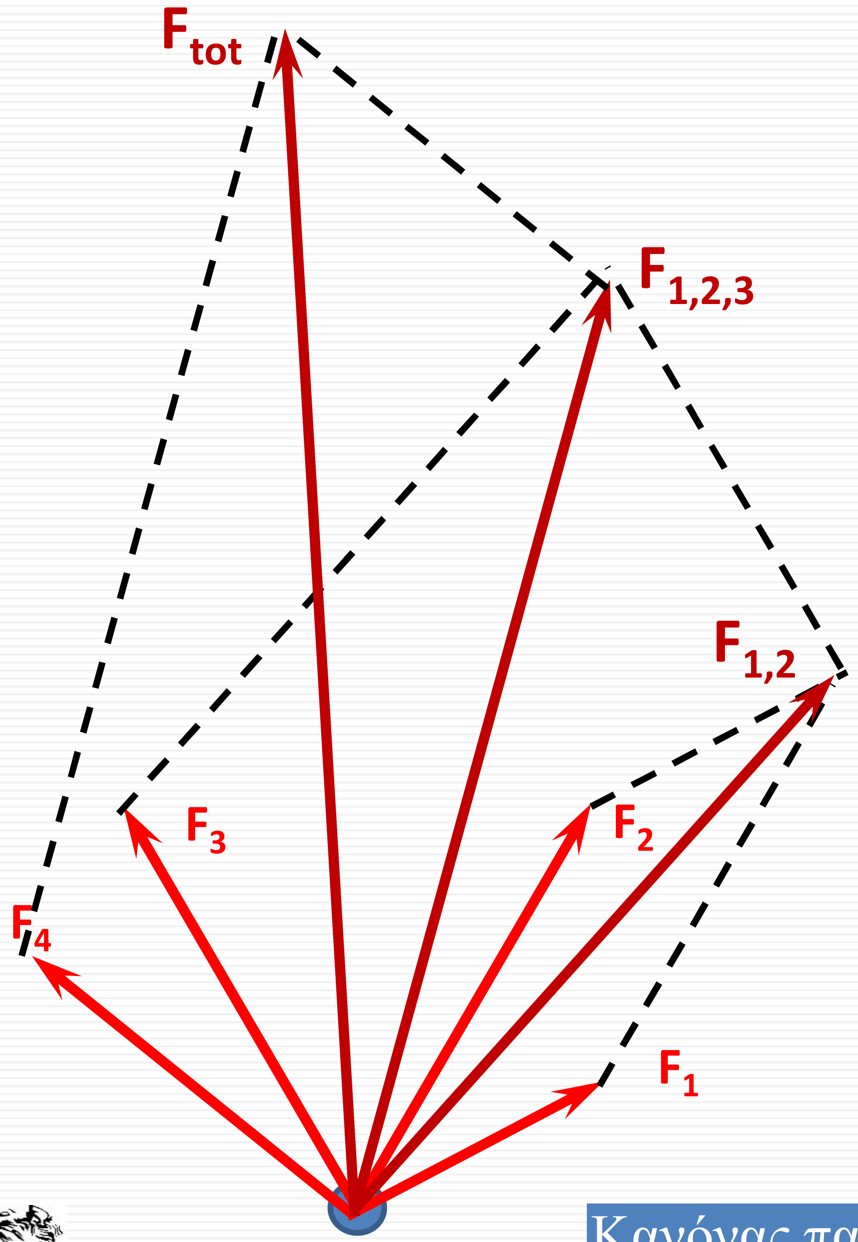


Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)



Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , i=1, 2, 3, 4 οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την Αρχή Παραλληλογράμμου (γραφική μέθοδος)

Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)



Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , i=1, 2, 3, 4 οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την Αρχή Παραλληλογράμμου (γραφική μέθοδος)

Συντίθενται αρχικά οι F_1 & F_2 ➔ $F_{1,2}$

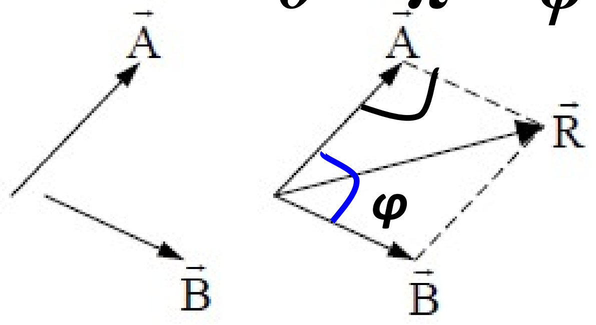
Ακολούθως οι $F_{1,2}$ & F_3 ➔ $F_{1,2,3}$

Τελικώς οι $F_{1,2,3}$ & F_4 ➔ F_{tot}

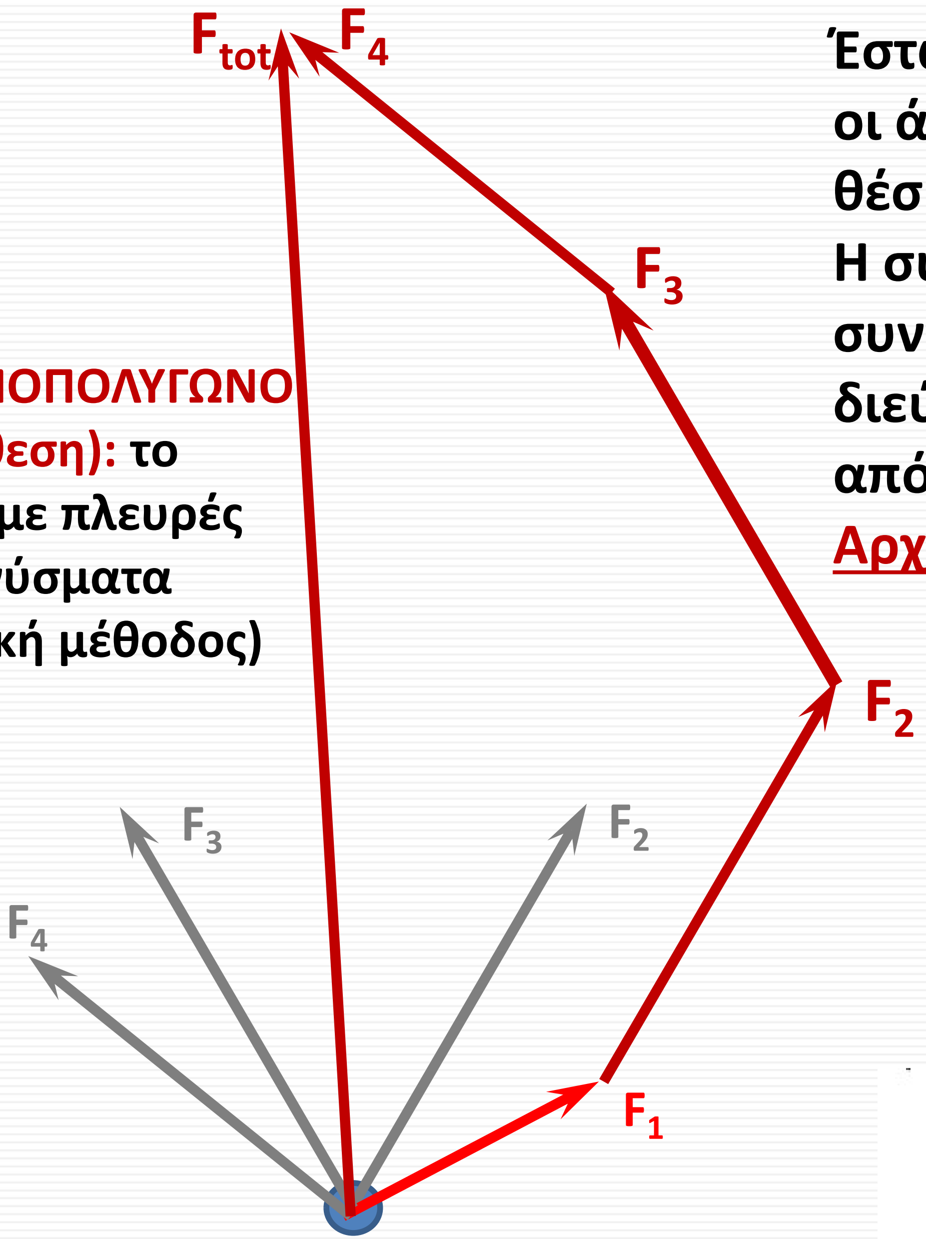
$$\theta \equiv \pi - \varphi$$

Κανόνας παραλληλογράμμου

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\varphi$$



Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση (γεωμετρία/τριγωνομετρία)



ΔΥΝΑΜΟΠΟΛΥΓΩΝΟ (παράθεση): το σχήμα με πλευρές τα διανύσματα (γραφική μέθοδος)

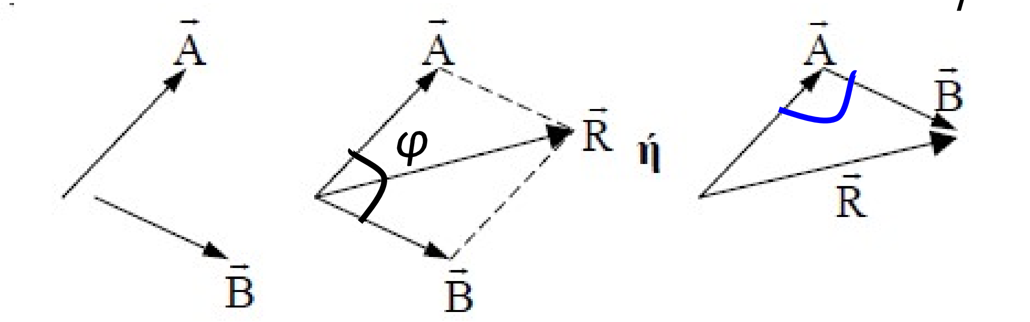
Έστω τέσσερα διανύσματα F_i , i=1, 2, 3, 4 οι άξονες των οποίων συντρέχουν σε μία θέση (π.χ. «υλικό σημείο» ενός σώματος). Η σύνθεση, δηλαδή η εύρεση του συνισταμένου F_{tot} (του μέτρου και της διεύθυνσής του) που προφανώς άγεται από το ίδιο σημείο μπορεί να γίνει με την <u>Αρχή παράθεσης (γραφική μέθοδος)</u>

Νόμος των συνημίτονων

<u>Κανόνας παράθεσης</u>

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

$$\theta \equiv \pi - \varphi$$



Ιδιότητες διανυσμάτων: Σύνθεση

Εάν τα διανύσματα δίδονται σε ΟΝ σύστημα συντεταγμένων τότε:

$$\overrightarrow{F_1} = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$$

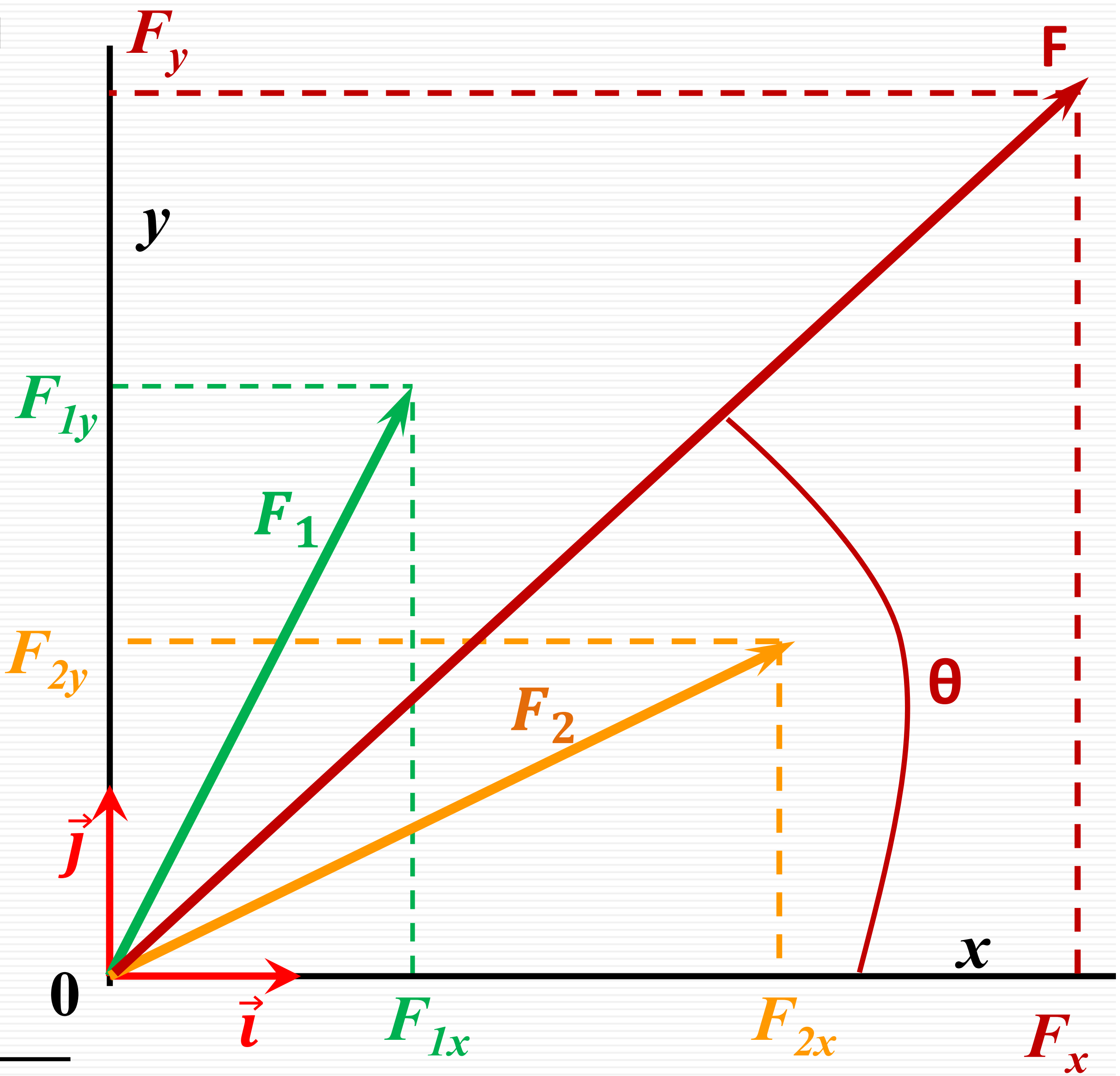
$$\overrightarrow{F_2} = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}$$

Το μέτρο/μήκος των διανυσμάτων κατά x, y: αλγεβρικό άθροισμα

$$\mathrm{F_x} = F_{1x} + F_{2x}$$

$$\mathrm{F_y} = F_{1y} + F_{2y}$$

$$\vec{\mathrm{F}} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

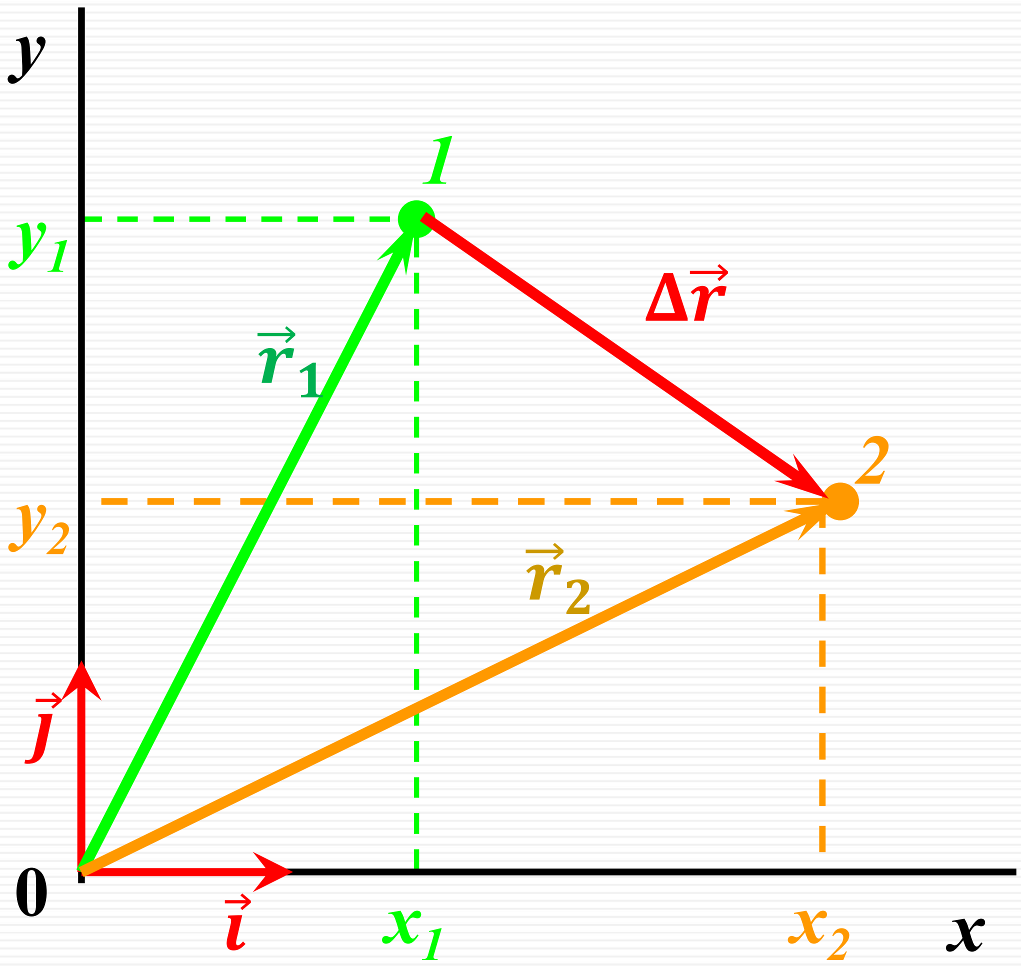


Το μέτρο/μήκος τότε: $|\mathrm{F}| = \sqrt{\mathrm{F_x}^2 + F_y^2}$

Η διεύθυνση: $\tan\theta = F_y/F_x = (F_{1y}+F_{2y})/(F_{1x}+F_{2x})$

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

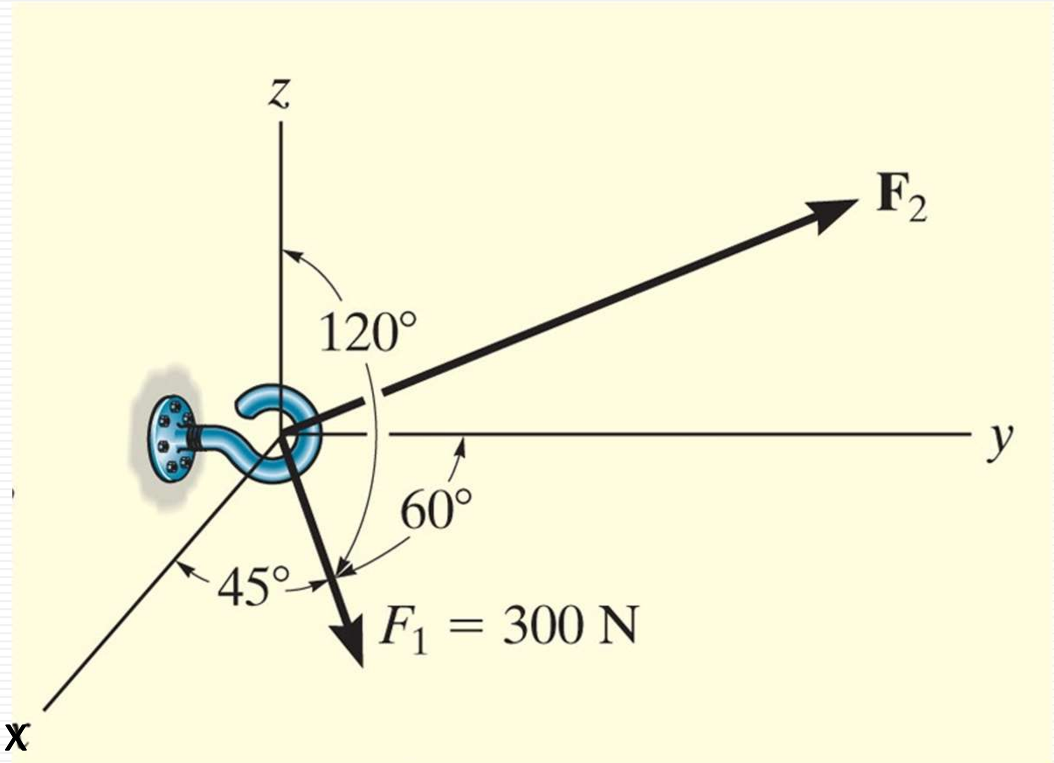


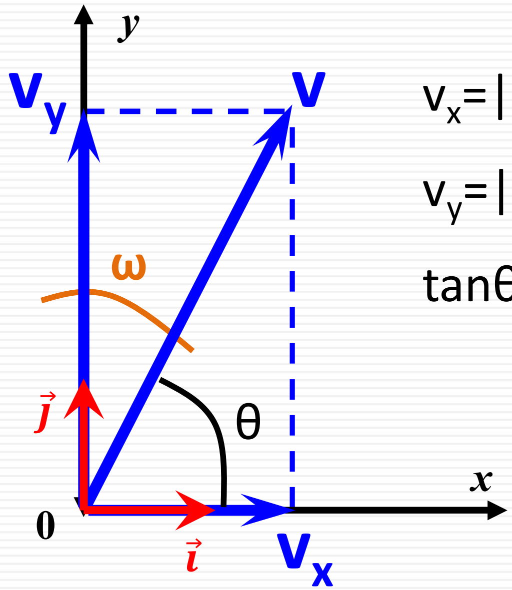
Αφαίρεση διανυσμάτων

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \;\; or \;\; \vec{r}_1 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_2$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

Συνημίτονα κατεύθυνσης διανύσματος ως προς άξονα





$v_x = |\vec{v}|\cos\theta$

$v_y = |\vec{v}|\sin\theta$

$\tan\theta = v_y/v_x$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$\vec{v} = |\vec{v}|\cos\theta\vec{i} + |\vec{v}|\sin\theta\vec{j}$$

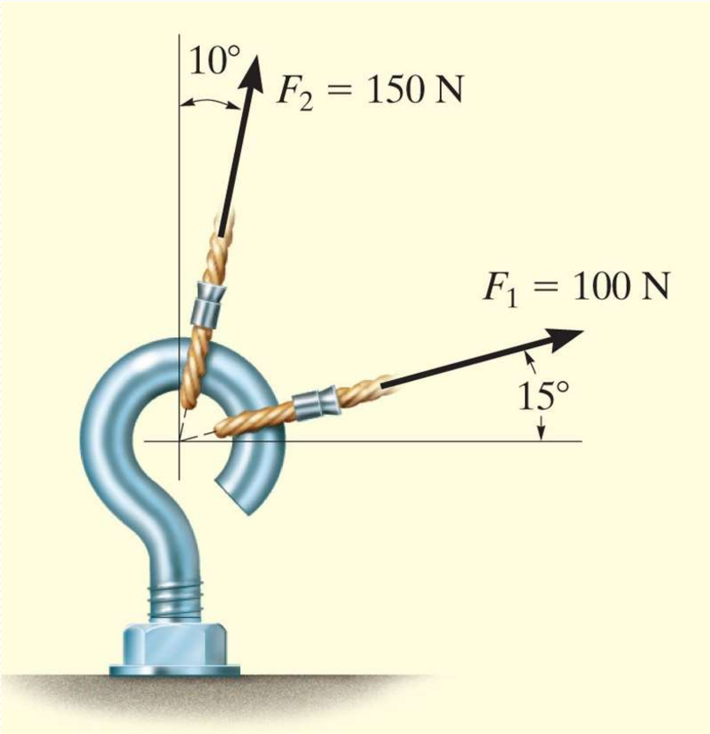
$$\vec{v} = |\vec{v}|\cos\theta\vec{i} + |\vec{v}|\cos\omega\vec{j}$$

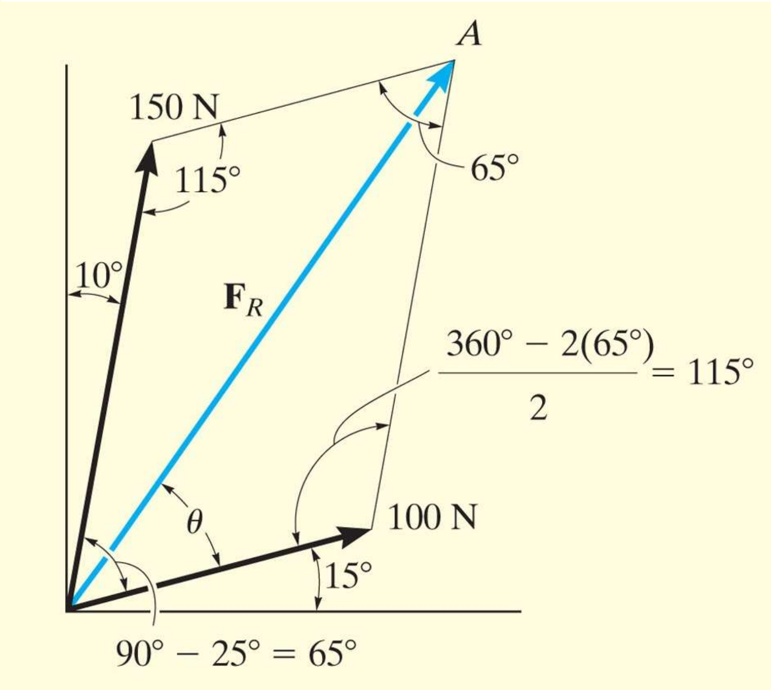
$\overrightarrow{F1} =$;

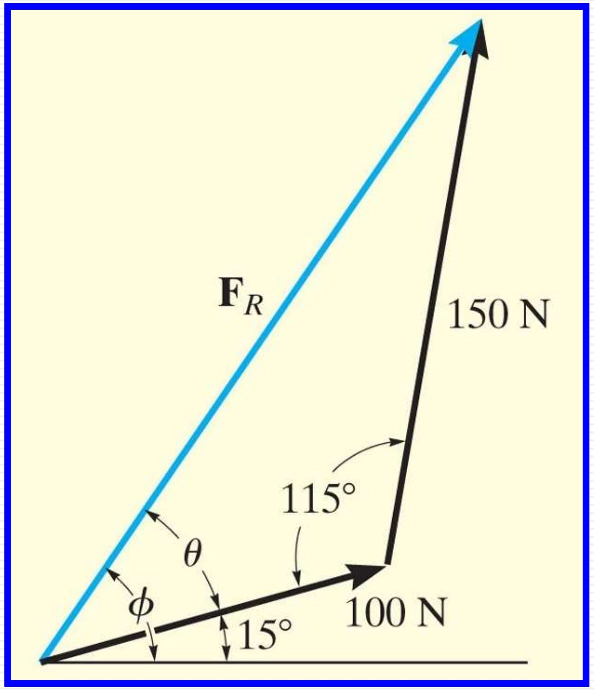
$$\overrightarrow{F1} = 300(\mathrm{N})\cos45^{o}\vec{i} + 300(\mathrm{N})\cos60^{o}\vec{j} + 300(\mathrm{N})\cos160^{o}\vec{k}$$

Σύνθεση Δυνάμεων στο Επίπεδο

Ζητούμενο το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης $\mathbf{F_R}$ ως προς τον άξονα της $\mathbf{F_1}$ και ως προς τον οριζόντιο άξονα







Κανόνας παραλληλογράμμου: αναγκαία η μεταξύ των $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ γωνία

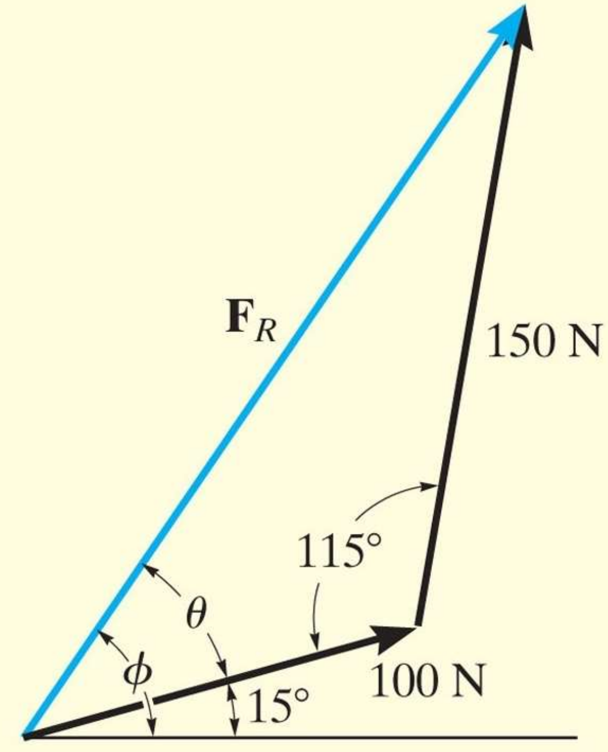
Κανόνας παράθεσης: αναγκαία η παραπληρωματική της μεταξύ των $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ γωνία

Σύνθεση Δυνάμεων στο Επίπεδο

Ζητούμενο το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης $\mathbf{F_R}$ ως προς τον άξονα της $\mathbf{F_1}$ και ως προς τον οριζόντιο άξονα

$$F_R = \sqrt{(100\text{ N})^2 + (150\text{ N})^2 - 2(100\text{ N})(150\text{ N})\cos 115^\circ}$$
$$= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6\text{ N}$$
$$= 213\text{ N}$$

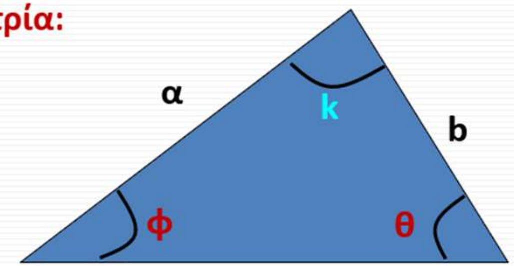
$$\frac{150\text{ N}}{\sin\theta} = \frac{212.6\text{ N}}{\sin 115^\circ} \qquad \sin\theta = \frac{150\text{ N}}{212.6\text{ N}}(\sin 115^\circ)$$
$$\theta = 39.8^\circ$$



(c)

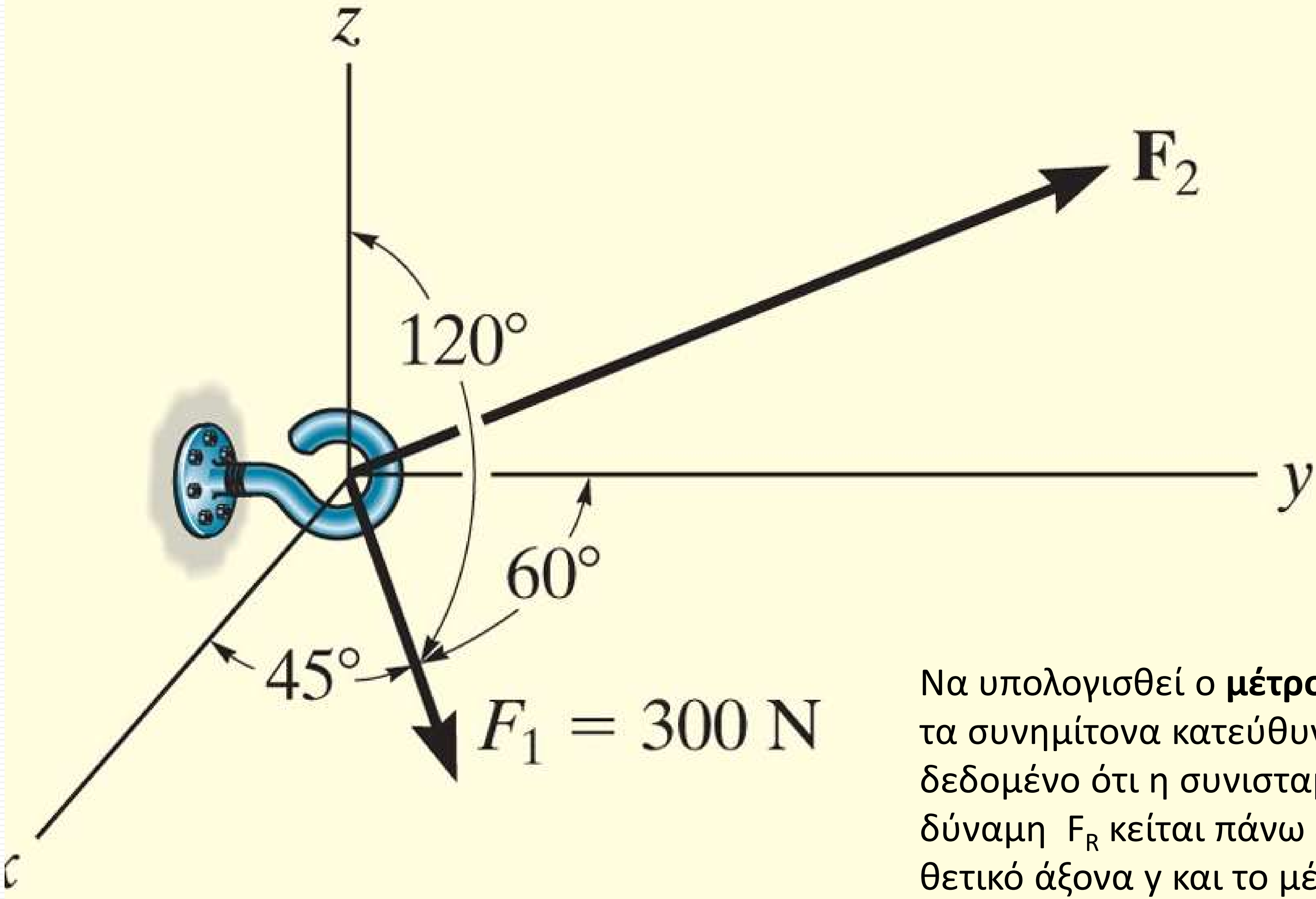
$$\phi = 39.8^\circ + 15.0^\circ = 54.8^\circ$$

Από τριγωνομετρία:



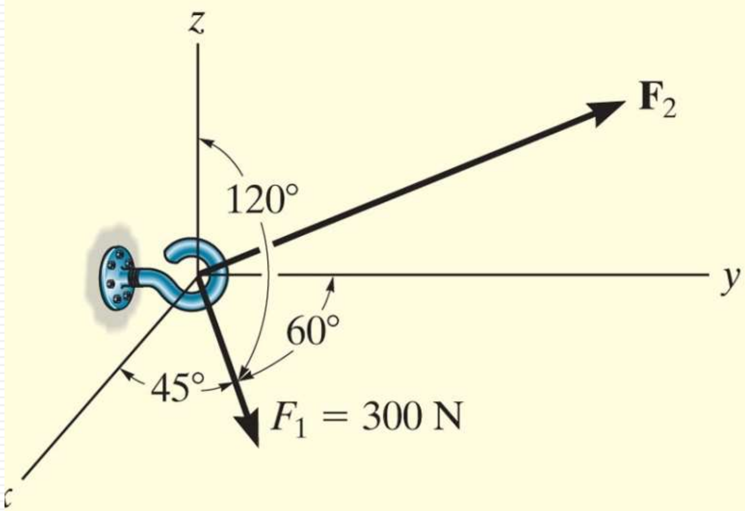
Νόμος των συνημίτονων: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos k$

Νόμος των ημιτόνων: $\frac{\sin\varphi}{b} = \frac{\sin k}{c} = \frac{\sin\theta}{a}$



(a)

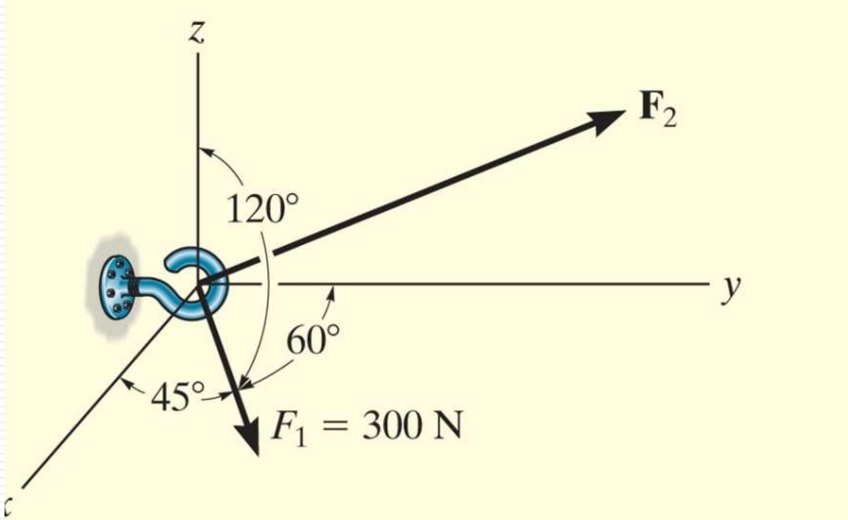
Να υπολογισθεί ο **μέτρο της $\mathbf{F_2}$** και τα συνημίτονα κατεύθυνσης με δεδομένο ότι η συνισταμένη δύναμη F_R κείται πάνω στον θετικό άξονα y και το μέτρο της είναι 800N



(a)

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \cos \alpha_1 \mathbf{i} + F_1 \cos \beta_1 \mathbf{j} + F_1 \cos \gamma_1 \mathbf{k}$$
$$= 300 \cos 45^\circ\, \mathbf{i} + 300 \cos 60^\circ\, \mathbf{j} + 300 \cos 120^\circ\, \mathbf{k}$$
$$= \{212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k}\}\text{N}$$
$$\mathbf{F}_2 = F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_R = (800\text{ N})(+\mathbf{j}) = \{800\mathbf{j}\}\text{ N}$$



(a)

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$800\mathbf{j} = 212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k} + F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k}$$

$$800\mathbf{j} = (212.1 + F_{2x})\mathbf{i} + (150 + F_{2y})\mathbf{j} + (-150 + F_{2z})\mathbf{k}$$

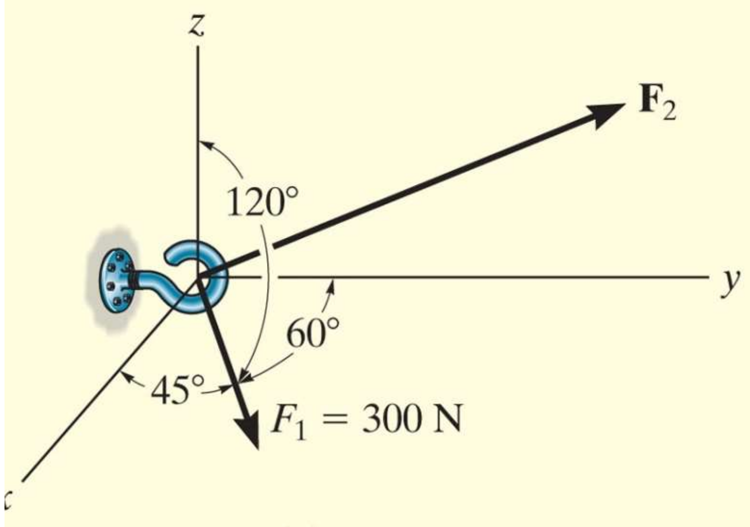
$$0 = 212.1 + F_{2x} \qquad F_{2x} = -212.1\text{ N}$$

$$800 = 150 + F_{2y} \qquad F_{2y} = 650\text{ N}$$

$$0 = -150 + F_{2z} \qquad F_{2z} = 150\text{ N}$$

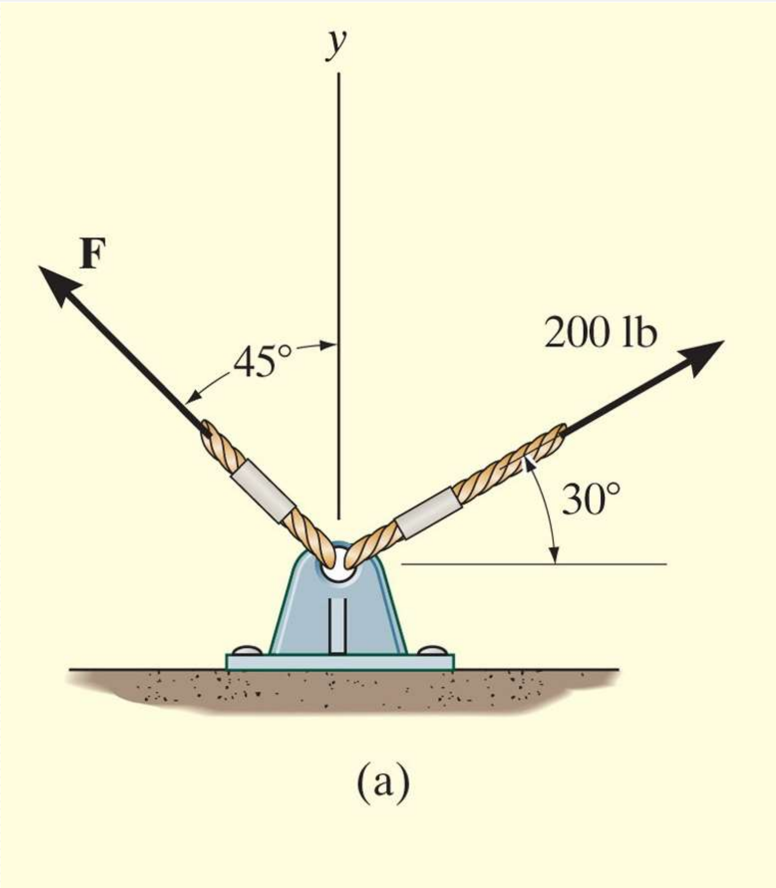
$$F_2 = \sqrt{(-212.1\text{ N})^2 + (650\text{ N})^2 + (150\text{ N})^2}$$
$$= 700\text{ N}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{-212.1}{700}; \qquad \alpha_2 = 108^\circ$$
$$\cos\beta_2 = \frac{650}{700}; \qquad \beta_2 = 21.8^\circ$$
$$\cos\gamma_2 = \frac{150}{700}; \qquad \gamma_2 = 77.6^\circ$$



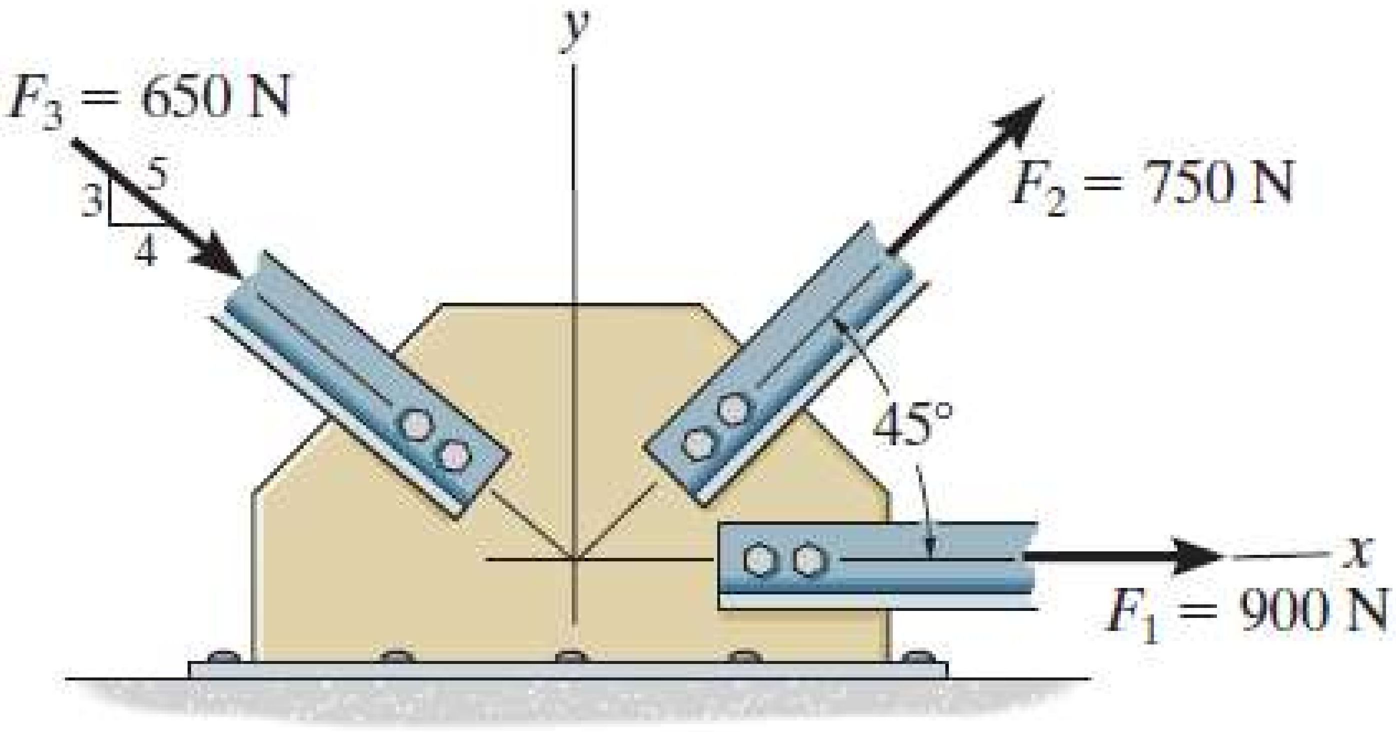
(a)

Ασκήσεις για το σπίτι



Να υπολογισθεί η F και η F_R
Η F_R κείται επί του άξονα y

Ασκήσεις για την τάξη



Να βρεθούν οι διανυσματικές εκφράσεις των δυνάμεων του σχήματος.
Ακολούθως να υπολογισθεί το μέτρο της συνισταμένης και η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των x