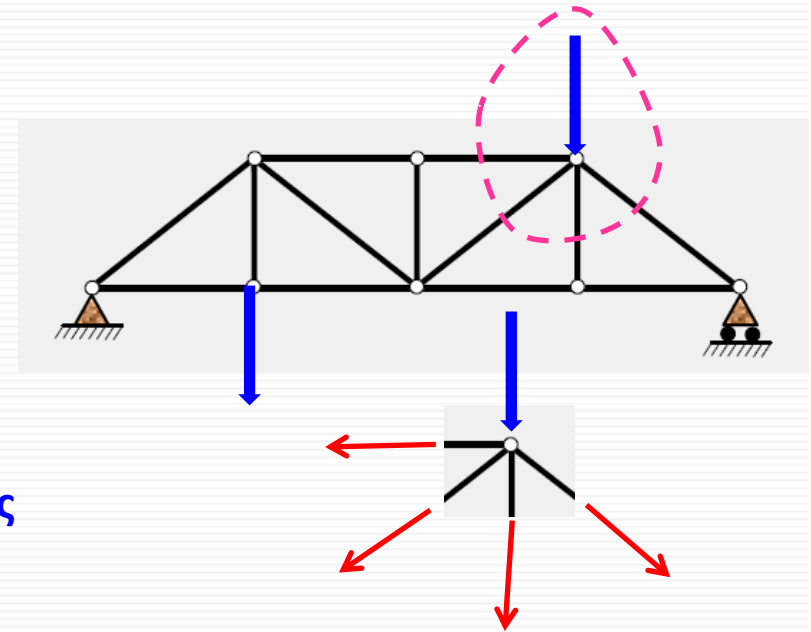
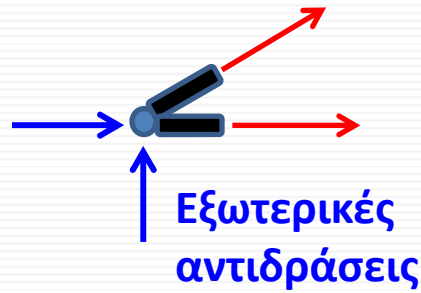
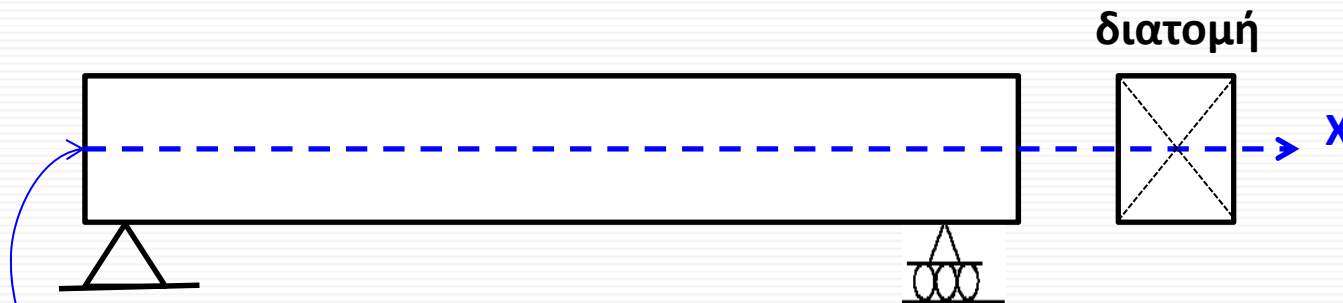


Στα δικτυώματα: οι ράβδοι καταπονούνται καθ' όλο το μήκος τους με **εσωτερικές, αξονικές δυνάμεις** (θλιπτικές ή εφελκυστικές)

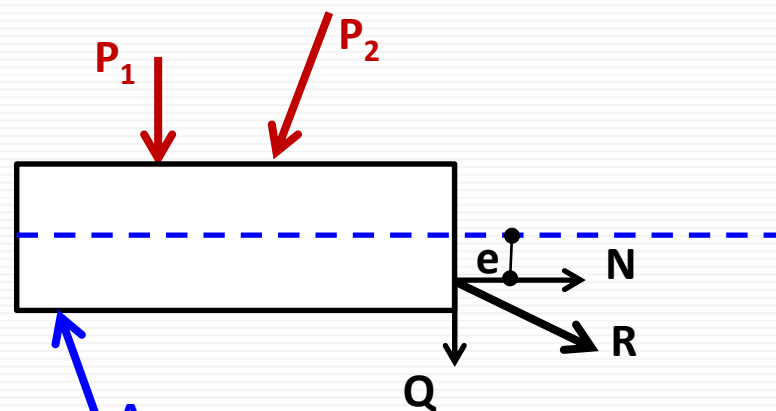


ΟΛΟΣΩΜΟΙ ΦΟΡΕΙΣ – ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

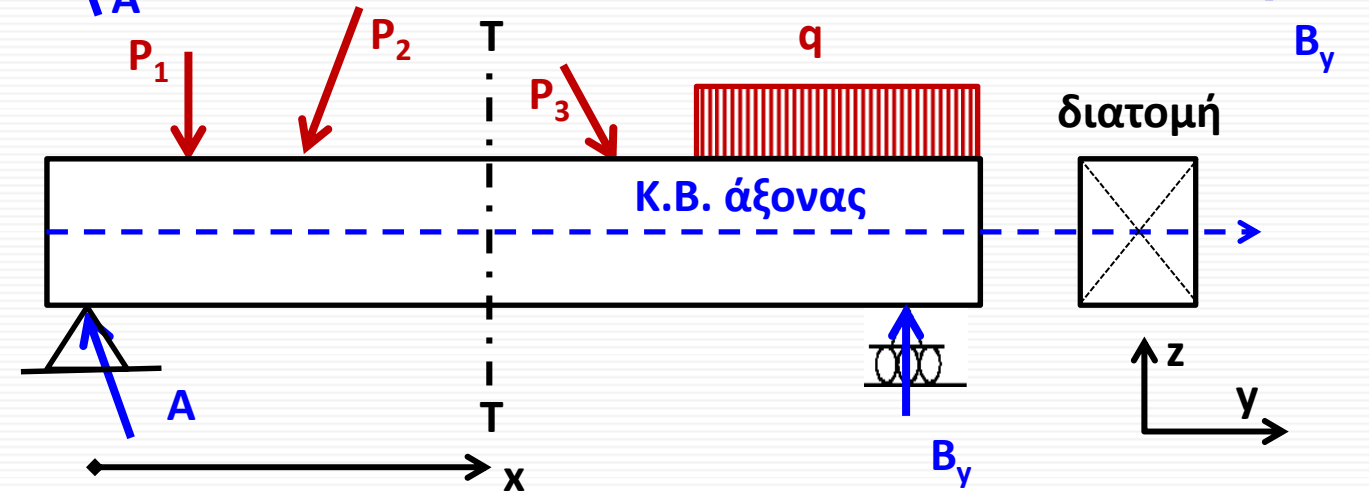
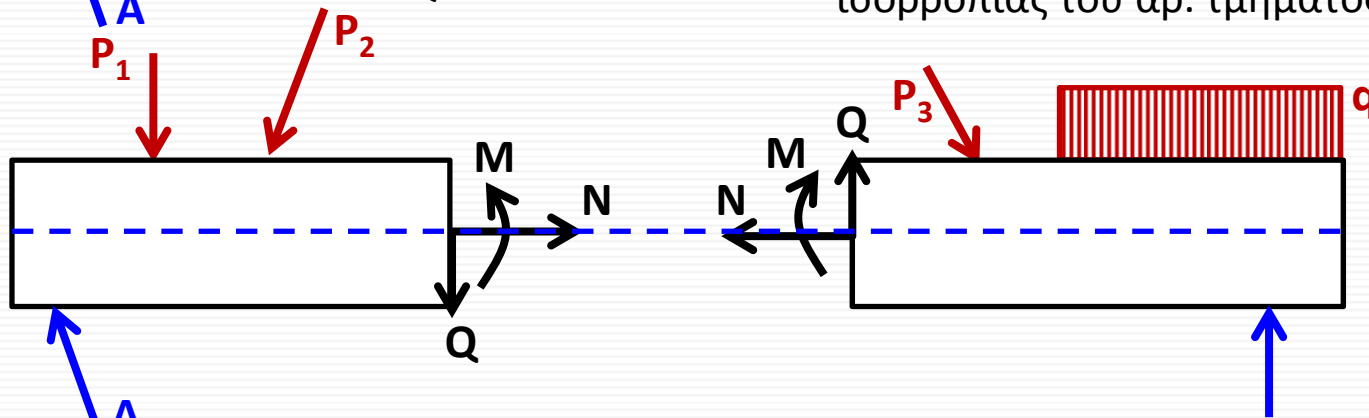


Κεντροβαρικός άξονας: γραμμή που συνδέει τα σημεία κέντρου βάρους όλων των διατομών μιας δοκού (μπορεί να μην είναι ευθεία, εάν αλλάξει η διατομή κατά μήκος!)

ΟΛΟΣΩΜΟΙ ΦΟΡΕΙΣ – ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ



Το αριστερό τμήμα ισορροπεί υπό την επίδραση των εξωτερικών φορτίων (δράσεων), των αντιδράσεων στήριξης και των **ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ** που ασκούνται στην διατομή της τομής T-T από το δεξιό τμήμα της δοκού (3^ο Ν.Ν.): αυτές κατανέμονται στην διατομή (Αντοχή των Υλικών) και θεωρούνται για την εξέταση ισορροπίας του αρ. τμήματος ως «εξωτερικές»



Εσωτερικά εντατικά μεγέθη:

N : αξονική δυν.

Q : τέμνουσα ή διατμητική δυν.

M : ροπή κάμψης επίπεδο $zx \rightarrow M_y$

ΟΛΟΣΩΜΟΙ ΦΟΡΕΙΣ – ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

→ γραφική απεικόνιση: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ N, Q, M

- τα θετικά N, Q σχεδιάζονται άνω της ίνας αναφοράς
- τα θετικά M σχεδιάζονται κάτω της ίνας αναφοράς

Εσωτερικά εντατικά μεγέθη:

N: αξονική δυν.

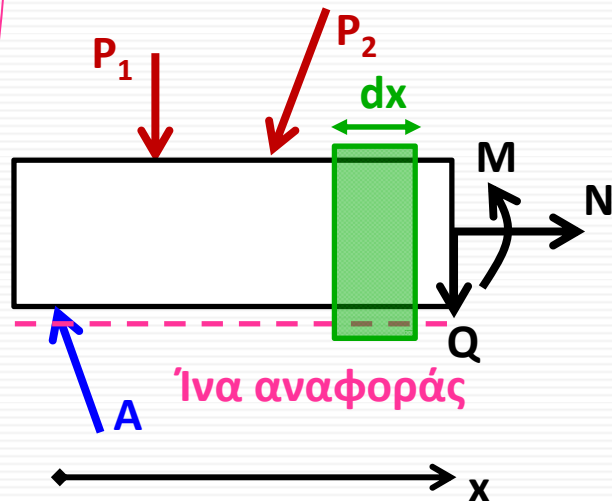
$$N + \sum F_x^{\text{εξ}} = 0 \rightarrow N = \sum F_x^{\text{εξ}}$$

Q: τέμνουσα ή διατμητική δυν.

$$Q + \sum F_y^{\text{εξ}} = 0 \rightarrow Q = \sum F_y^{\text{εξ}}$$

M: ροπή κάμψης

$$M + \sum M^{\text{εξ}} = 0 \rightarrow M = \sum M^{\text{εξ}}$$

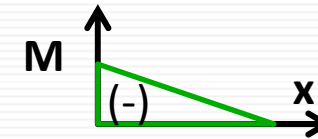
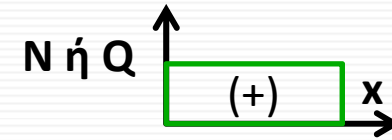
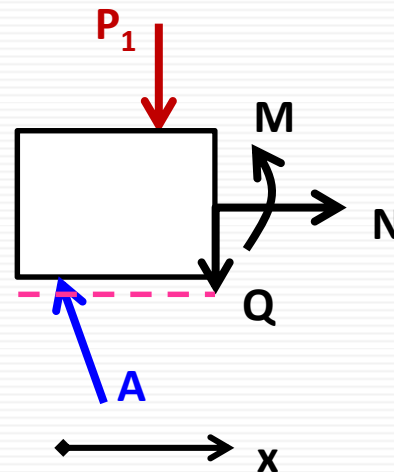


Ίνα αναφοράς

Τα N, Q, M σχετίζονται με την απόσταση x:

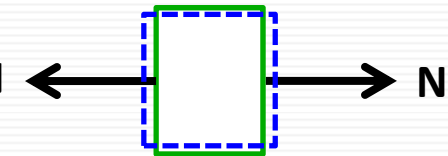
Κατανομές N(x), Q(x), M(x)

→ άμεση εποπτεία σε όλο το μήκος ως προς την καταπόνηση, με έμφαση στις θέσεις μεγίστων

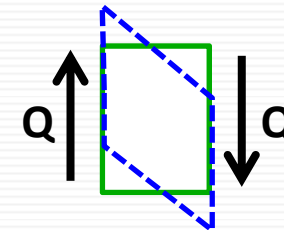


Αντοχή των Υλικών

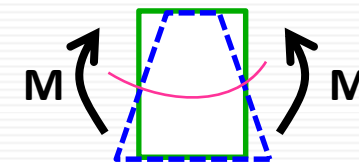
Θετική σήμανση



Οι N: επιμηκύνουν

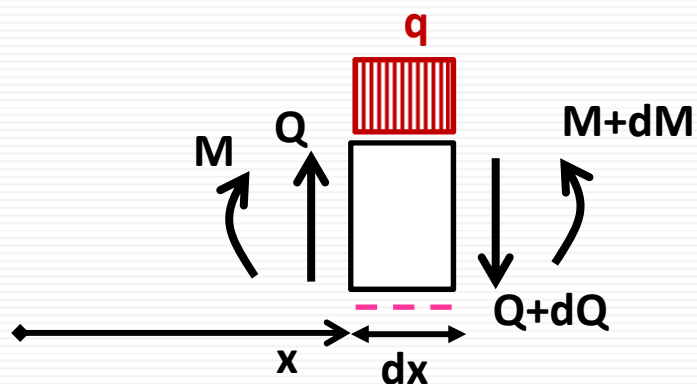


Οι Q: δεξιόστροφο ζεύγος



Οι M: Κ.Β. κοίλα άνω

Σχέσεις μεταξύ M, Q, q



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

$$Q_2 - Q_1 = - \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$$

$$Q_2 = Q_1 - \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$$

$$\sum M = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

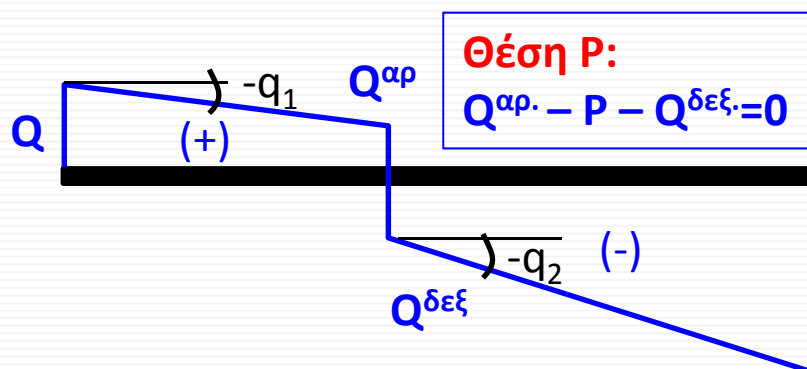
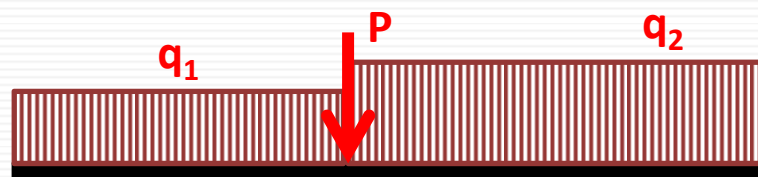
Η κλίση της καμπύλης Q σε κάθε θέση ισούται με την τιμή -q

Η κλίση της καμπύλης M σε κάθε θέση ισούται με την τιμή της τέμνουσας στην ίδια θέση

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx$$

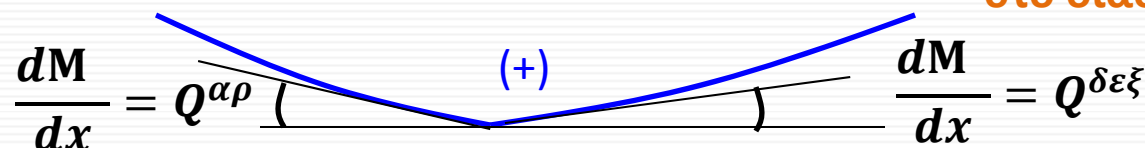
$$M_2 = M_1 + \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx$$

Συγκεντρωμένο φορτίο P: σημείο ασυνέχειας (άλμα), απότομης αλλαγής στα διάγραμμα των Q(x) & M(x)



Θέση P:
 $Q^{\alpha\rho} - P - Q^{\delta\epsilon\chi} = 0$

Αν γνωρίζω τις τιμές Q_1, M_1 μιας προηγούμενης θέσης x_1 , τότε μπορώ να βρω της επόμενης x_2 , αφαιρώντας/προσθέτοντας τα σχετικά εμβαδά της $q(x)$ και $Q(x)$ στο διάστημα x_1-x_2 .



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: σωστή κατασκευή διαγραμμάτων και έλεγχος!

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

Για συνάρτηση f:

Αν $f' > 0 \rightarrow$ η f είναι αύξουσα, αλλιώς φθίνουσα

Αν για $x=a$ $f'(x)=0 \rightarrow$ ακρότατη τιμή της f

Αν $f'' > 0 \rightarrow$ κοίλα άνω,

Αν η f'' αλλάζει πρόσημο \rightarrow σημείο καμπής

Για την συνάρτηση Q(x):

Επειδή $dQ/dx = -q$ (το q θετικό όταν κατευθύνεται προς την δοκό) η κλίση είναι αρνητική, η κατανομή βαίνει φθίνουσα!

- Αν $q(x)$ πολυώνυμο n βαθμού \rightarrow η $Q(x)$ είναι n+1 βαθμού

$$-\frac{d^2Q}{dx^2} = -\frac{dq}{dx}$$

- αν $dq/dx > 0$, η $q(x)$ είναι αύξουσα, η $Q(x)$ έχει κοίλα κάτω, αλλιώς η $q(x)$ είναι φθίνουσα, η $Q(x)$ έχει κοίλα άνω
- Αν $q(x)=0$ (αφόρτιστο τμήμα δοκού), η $Q(x) =$ σταθερή

Για την συνάρτηση M(x):

Επειδή $dM/dx = Q(x)$, η κλίση της ροπής στην θέση x ισούται με την τιμή της τέμνουσας.

- Αν $q(x)$ πολυώνυμο n βαθμού \rightarrow η $M(x)$ είναι n+2 βαθμού
- Αν $q(x)=0$, αφόρτιστο τμήμα δοκού, η $M(x)$ μεταβάλλεται γραμμικά
- Αν $q(x) > 0$, $d^2M/dx^2 < 0$, κοίλα κάτω!!
- Αν $Q(x) > 0$, η $M(x)$ είναι αύξουσα
- Αν $Q(x)=0$, η M έχει ακρότατο

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: σωστή κατασκευή διαγραμμάτων και έλεγχος!

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

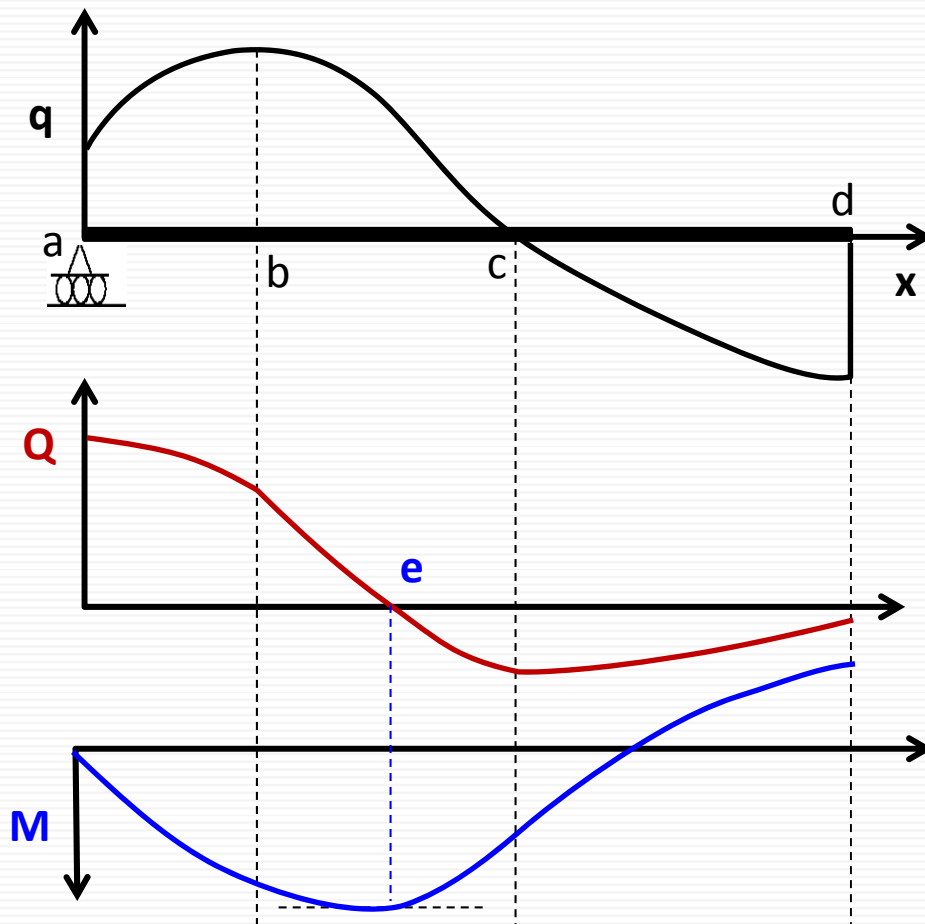
Για συνάρτηση f:

Αν $f' > 0 \rightarrow$ η f είναι αύξουσα, αλλιώς φθίνουσα

Αν για $x=a$ $f'(x)=0 \rightarrow$ ακρότατη τιμή της f

Αν $f'' > 0 \rightarrow$ κοίλα άνω,

Αν η f'' αλλάζει πρόσημο \rightarrow σημείο καμπής



(a-b):

$q(x) > 0$ & αύξουσα: $dQ/dx < 0 \rightarrow Q(x)$ φθίνουσα
 $d^2Q/dx^2 = -dq/dx < 0 \rightarrow$ Κοίλα κάτω

(b-c):

$q(x) > 0$ & φθίνουσα: $dQ/dx < 0 \rightarrow Q(x)$ φθίνουσα
 $d^2Q/dx^2 = -dq/dx > 0 \rightarrow$ Κοίλα άνω

Στο b: σημείο καμπής ($dq/dx=0$) για Q

(c-d):

$q(x) < 0$ & φθίνουσα: $dQ/dx > 0 \rightarrow Q(x)$ αύξουσα
 $d^2Q/dx^2 = -dq/dx < 0 \rightarrow$ Κοίλα κάτω

Στο c: $q=0 \rightarrow$ ακρότατο για Q

(a-c):

$q(x) > 0$, $d^2M/dx^2 = -q(x) < 0 \rightarrow M$ κοίλα κάτω

(c-d):

$q(x) < 0$, $d^2M/dx^2 = -q(x) > 0 \rightarrow M$ κοίλα άνω

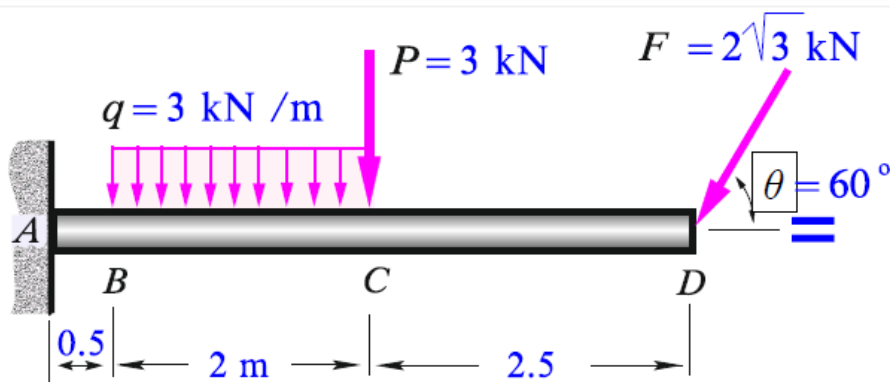
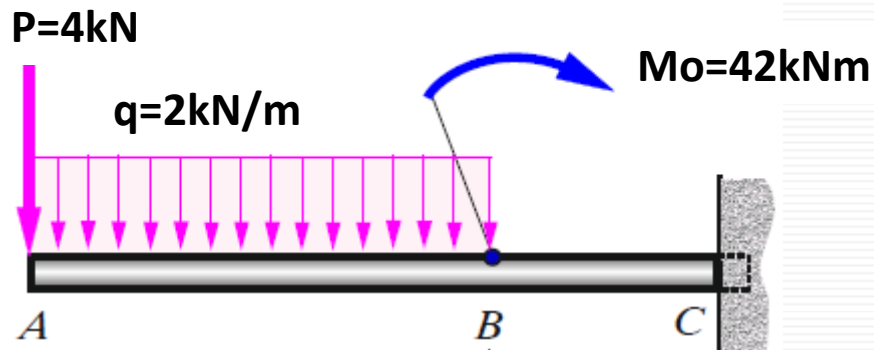
Στο c σημείο καμπής για την M

Στο (a-e): $Q > 0$, M αύξουσα

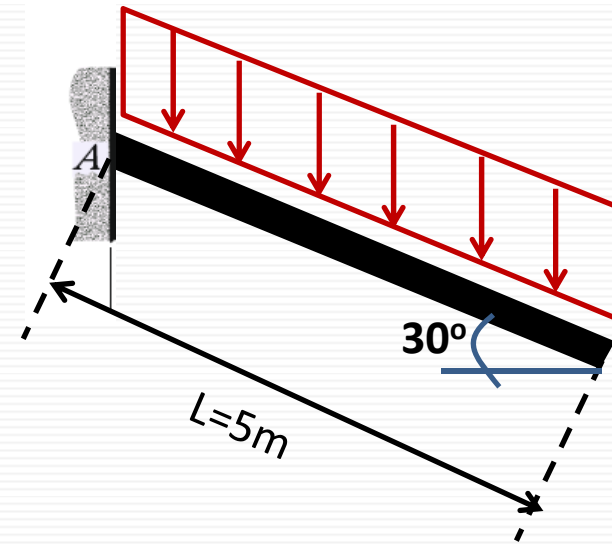
Στο (e-d): $Q < 0$, M φθίνουσα

Στο e όπου $Q=0$, ακρότατο για την M

Ασκήσεις για το σπίτι: να βρεθούν οι αντιδράσεις και να σχεδιασθούν τα διαγράμματα N, Q, M



Κατακόρυφο φορτίο ανά μέτρο μήκους κεκλιμένης δοκού, $q=10\text{kN/m}$



Κατακόρυφο φορτίο ανά μέτρο οριζόντιας προβολής κεκλιμένης δοκού, $q=10\text{kN/m}$

