

Συνδυασμένες ασκήσεις οριζοντιογραφίας-μηκοτομής

1^η

1. Οδός ΜΑΩΩ'Α'Ν κατέρχεται με ενιαία κλίση από το Μ μέχρι το Ν και διέρχεται ανισόπεδα δύο φορές πάνω από αγροτική οδό ΓΔ στα σημεία Α (αρχή κλωθοειδούς) και Ω' (τέλος κυκλικού τόξου). Η οδός ΓΔ, μήκους 800 μ., κατέρχεται από το Γ με κλίση 5% και από το Δ με κλίση 3%. Η ακτίνα συναρμογής στη μηκοτομή της ΓΔ είναι $R = 8000 \mu.$

Δίδονται ακόμη :

- γωνία $\beta = 60^\circ$
- ακτίνα οριζοντ. ΜΝ: $R = 60 \mu.$
- εκτροπή $\epsilon = 2,5 \mu.$
- ύψος ανισ.διάβασης στο Α: $6,20 \mu.$
- ύψος ανισ.διάβασης στο Ω': $4,81 \mu.$
- υψόμετρο Γ : $150 \mu.$
- υψόμετρο Δ : $142 \mu.$
- μήκος ΓΑ = $200 \mu.$
- μήκος ΑΩ'Α = $300 \mu.$

Ζητείται η κατά μήκος κλίση της ΜΝ. (5%)

Λύση

Ψυχραιμία, όλα αντιμετωπίζονται με τάξη και σειρά: one by one!

Η οδός ΜΝ έχει ενιαία κατηφόρα. Η ΓΔ μηκοτομικά εμπεριέχει κοίλη καμπύλη. Το ενδιάμεσο τμήμα της (ΑΩ') είναι $800 - 200 - 300 = 300m$. Αυτό δεν ξέρουμε ακόμα αν θα μας χρειαστεί, αλλά είναι ένα εύκολο βήμα για να πάρουμε θάρρος. Η εξίσωση καθόδου από το Γ είναι: $150 - 0,05\chi$ και από το Δ: $142 - 0,03(800 - \chi)$. Πού συναντώνται; Στο ίδιο υψόμετρο, στη σημαία της μηκοτομικής πολυγωνικής, στο: $150 - 0,05\chi = 142 - 0,03(800 - \chi) \rightarrow \chi = 400m$ από την αρχή (που τυχαίνει να είναι το μέσον της ΓΔ. Πάμε να υπολογίσουμε και τα στοιχεία της κοίλης καμπύλης συναρμογής:

$$T = R\Delta i / 200 = 8000 \times (5 + 3) / 200 = 320m.$$

Για να βρούμε την ενιαία κλίση της ΜΝ (ζητούμενο) θα πρέπει, αναγκαστικά να προσδιορίσουμε και το μήκος της. Δεν μας ενδιαφέρει όμως όλο το μήκος της αλλά το μεταξύ Α και Ω', διότι εκεί από τα μηκοτομικά στοιχεία της ΓΔ θα προκύψουν τα ενιαία μηκοτομικά στοιχεία της ΜΝ.

Ποια είναι τα μηκοτομικά (υψομετρικά) στοιχεία των Α, Ω' της ΓΔ; Το ΓΔ είναι 800m και η T της κοίλης 320m, άρα 320m εκατέρωθεν του μέσου της το υψόμετρο της ερυθράς της επηρεάζεται από την κοίλη καμπύλη \rightarrow Αμφότερα τα Α και Ω' επηρεάζονται. Το Α έχει απόσταση χ από την αρχή της κοίλης: απέχει από τη σημαία $400 - 200 = 200m$ και με $T = 320m$ απέχει από το σημείο επαφτομένης $320 - 200 = 120m$. Αντίστοιχα το Ω' απέχει $200 - 300 = 100m$ από τη σημαία και $320 - 100 = 220m$ της αρχής της καμπύλης. Αμφότερα βρίσκονται πάνω από την πολυγωνική της μηκοτομής (ένεκα κοίλης καμπύλης). Για το Α: το υψόμετρό της στην πολυγωνική είναι $150 - 0,05 \times 200 = 140m$. Η διόρθωση λόγω της κοίλης: $\chi^2 / 2R = 120^2 / 2 \times 8000 = 0,9m \rightarrow$ υψόμετρο Α στην ΓΔ: $140 + 0,9 = 140,9m$ και υψόμετρο Α στην ΜΝ: $140,9 + 6,20 = 147,1m$ (άνω διάβαση). Για το Ω': το υψόμετρό της στην πολυγωνική είναι $142 - 0,03 \times 300 = 133m$. Η διόρθωση λόγω της κοίλης:

$\chi^2/2R=220^2/2 \times 8000=3,025m \rightarrow$ υψόμετρο Α στην ΓΔ: $133+3,025=136,025m$ και υψόμετρο Ω' στην ΜΝ: $136,025+4,81=140,835m$ (πάλι άνω διάβαση). Η διαφορά υψομέτρων επί της ΜΝ είναι $147,1-140,835=6,265m$. Τώρα βρίσκοντας το μήκος ΑΩ' επί της ΜΝ η άσκηση έχει λυθεί.

$$A\Omega' = L + \Omega\Omega'. \Delta R = L^2/24R \rightarrow L = \sqrt{(24 \times 60 \times 2,5)} = 60m$$

$\Omega\Omega' = \omega R$, θα πρέπει να βρω τη γωνία ω σε rad, $\omega/2 + \beta/2 + \tau = \text{ορθή γωνία}$. Με μετατροπές όλων σε rad ($\beta = 60/90$ των $\pi/2 = \pi/3$) έχουμε $\omega/2 + \pi/6 + \tau = \pi/2$. Το τ προκύπτει ως L/R (διότι $L = \tau R$) = $60/60 = 1$.

Οπότε $\omega/2 + \pi/6 + 1 = \pi/2 \rightarrow \omega = 2\pi/3 - 1$. Οπότε $\Omega\Omega' = \omega R = (2\pi/3 - 1) \times 60 = 65,66m$

Και $A\Omega' = 60 + 65,66 = 125,66$, οπότε η ενιαία μηκοτομική κλίση είναι: $6,265/125,66 = 4,99\%$.

Γενικά, αυτές οι σύνθετες ασκήσεις θα πρέπει να είναι έτσι 'στημένες' ώστε να δίνουν ένα στρογγυλό νούμερο ως αποτέλεσμα (εδώ 5%, ανακρίβειες λόγω στρογγυλοποιήσεων), το οποίο και αποτελεί ισχυρή ένδειξη ορθής επίλυσης.

2^η

2. Οδός ΚΛ όπως στο σχήμα, πλάτους 8 μ. και συνολικού μήκους 1000 μ. ανέρχεται από το Κ με κλίση 6% και από το Λ με κλίση 4%. Ακτίνα καμπύλης συναρμογής στη μηκοτομή 4000 μ. Στο σημείο Ω το άκρο της οδού απέχει 2 μ. από την πολυγωνική. Αν το μήκος του μεσαίου κυκλικού τόξου είναι ίσο με την ακτίνα R του μεσαίου κυκλικού τόξου ζητείται :

1. να ευρεθεί το υψόμετρο του σημείου Ε'
2. (96,4m)

Δίδονται : (ΚΑ) = 630 μ. (Α'Λ) = 150 μ.
 υψόμετρο σημείου Κ : 60
 υψόμετρο σημείου Λ : 90

Λύση

Αφού ζητούνται υψόμετρα και έχουμε κλίσεις θα πρέπει να λύσουμε, σε πρώτη φάση το ζήτημα των μηκών, επί των οποίων θα εφαρμοστούν οι κλίσεις.

Το κλειδί για την επίλυση της άσκησης είναι ότι το Ω απέχει από την πολυγωνική οριζοντιογραφία απόσταση περίπου τεσσάρων εκτροπών. Οπότε, εδώ $8/2 + 2 = 6m$, $6/4 = 1,5 \rightarrow \Delta R = 1,5m$.

Από τον τύπο $\Delta R = L^2/24R$: $1,5 = L^2/24R \rightarrow L = 6\sqrt{R}$

Επίσης, έχουμε ότι $\Omega\Omega' = R$.

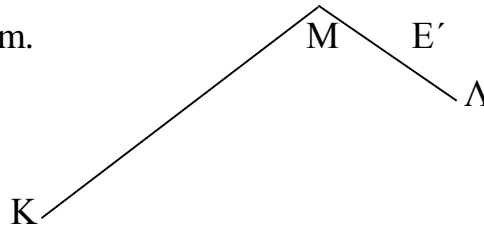
$ΚΛ = 1000 \rightarrow ΚΑ + L + \Omega\Omega' + L + Α'Λ = 1000 \rightarrow 630 + 2L + R + 150 = 1000 \rightarrow 2L + R = 220m$.

Έχουμε 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους, οπότε με αντικατάσταση έχουμε: $12\sqrt{R} + R = 220 \rightarrow 12\sqrt{R} = 220 - R$, σηματοδοτώ και επιλύω δευτεροβάθμια: $144R = 48400 + R^2 - 440R$. Οι δύο ρίζες προκύπτουν 100 και 484m. Η τιμή 484m θα οδηγούσε σε αρνητική τιμή της μιας εξίσωσης, άρα είναι άτοπη, άρα $R=100m$.

Τώρα περνάμε στο σκέλος των μηκοτομικών υπολογισμών. Θα πρέπει να χωροθετήσουμε το E' (το οποίο βρίσκεται στα μισά της κλωθοειδούς, $L=6\sqrt{100}=60m$) σε σχέση με την σημαία της μηκοτομής και την μηκοτομική καμπύλη συναρμογής. Πρώτα θα προσδιορίσουμε την κορυφή της μηκοτομής M .

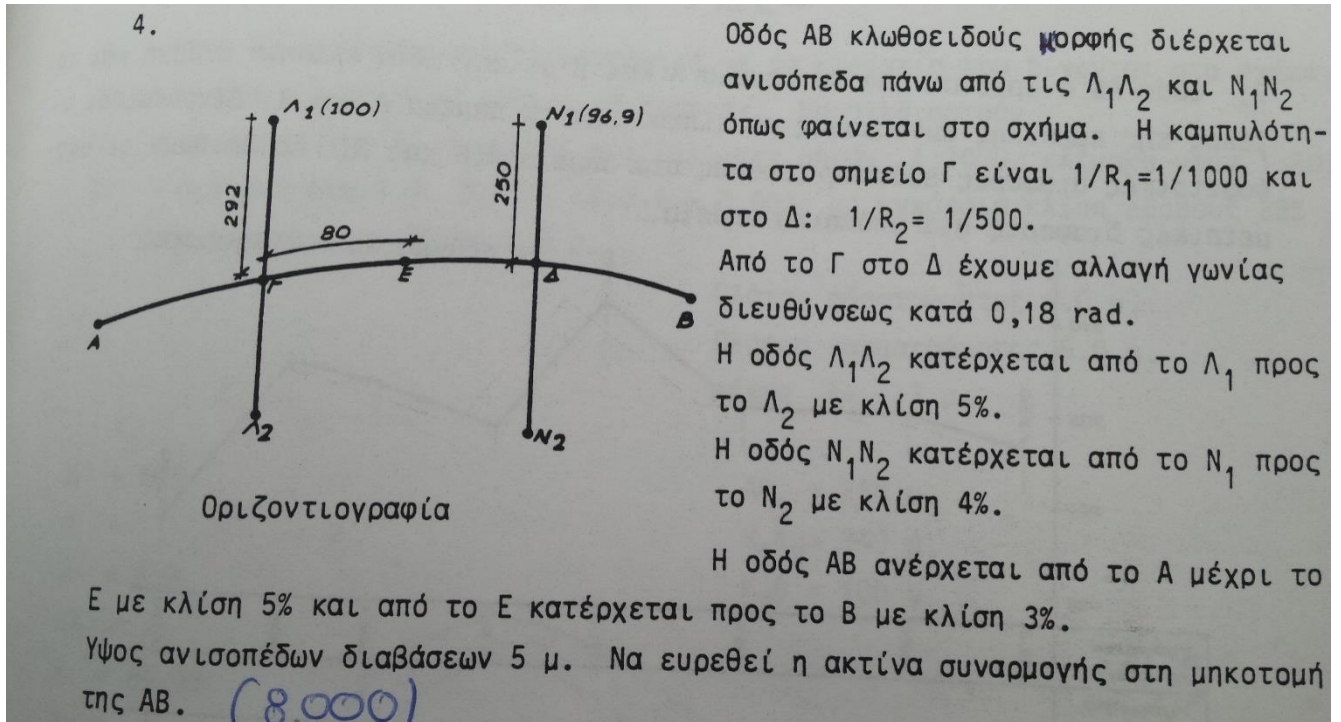
Οι εξισώσεις της πολυγωνικής της μηκοτομής είναι από το K : $60+0,06\chi$ και από το Λ : $90+0,04(1000-\chi) \rightarrow \chi=700m$. Η κορυφή της μηκοτομής απέχει από το K 700m και από το Λ 300m. Συνεπώς, το υψόμετρο στο ζητούμενο σημείο E' βρίσκεται προς την πλευρά του Λ , αφού απέχει από αυτό $150+60/2=180m$. Αν βρισκόταν πάνω στην πολυγωνική της μηκοτομής θα είχε υψόμετρο: $90+0,04 \times 180=97,2m$, όμως θα πρέπει να εξακριβώσουμε μήπως βρίσκεται στο τμήμα της κυρτής καμπύλης συναρμογής.

$$T=R\Delta l/200=4000 \times 10/200=200m.$$



Η σημαία απέχει από το Λ 300m, το T είναι 200m, το E' απέχει από το Λ 180m άρα βρίσκεται 80m εντός της μηκοτομικής καμπύλης συναρμογής και συνεπώς κατά $y=x^2/2R$ χαμηλότερα της πολυγωνικής της μηκοτομής (υπάρχει πάντα η πολυγωνική της οριζοντιογραφίας, όπου κοτσάρονται οι στροφές και οι κλωθοειδείς και η ανεξάρτητη πολυγωνική της μηκοτομής, όπου συναρμολογούν οι κοίλες και κυρτές καμπύλες).

$$\text{Υψόμετρο: } 97,2 - 80^2/2 \times 4000 = 96,4m.$$

3^η

Λύση

Ο ένας δρόμος βρίσκεται σε οριζοντιογραφική στροφή χωρίς κυκλικό τόξο.

Η πορεία επίλυσης πλέον είναι ξεκάθαρη. Θα βρούμε μηκοτομικά τα υψόμετρα, θα βρούμε οριζοντιογραφικά τα αναγκαία μήκη και τέλος θα βρούμε τα ζητούμενα μηκοτομικά στοιχεία με βάση υψόμετρα και μήκη.

Υπενθυμίζεται η έννοια της καμπυλότητας ως αντίστροφη της τοπικής ακτίνας σε κάθε σημείο της κλωθοειδούς. Δηλαδή στο σημείο Γ η ακτίνα είναι 1000m και στο Δ 500m. Εδώ θα εφαρμοστεί ο σχετικός τύπος που δίνει το μήκος τόξου κλωθοειδούς ως: ακτίνα στο πέρας της επί τη γωνία ($L=2\tau R$). Εδώ, βέβαια γνωρίζουμε τα στοιχεία στα άκρα εκάστου κλωθοειδούς τμήματος, άρα μπορούμε με αφαίρεση να έχουμε τα στοιχεία για το ενδιαφερόμενο τμήμα της κλωθοειδούς. Δηλαδή από την αρχή της κλωθοειδούς (που δεν ενδιαφέρει πού βρίσκεται) έως το σημείο στιγμιαίας ακτίνας 1000m, το μήκος είναι $1000\tau_1$ (σε rad), Από την ίδια αρχή της έως το σημείο στιγμιαίας ακτίνας 500m, το μήκος είναι $500\tau_2$ και εμείς γνωρίζουμε τη διαφορά των γωνιών στα πέρατα. Για να απαλλαγούμε από τις διαφορετικές μεταβλητές του μήκους των κλωθοειδών θα τις εκφράσουμε με βάση την παράμετρο A που είναι η ίδια (αφού πρόκειται για τμήματα της ίδιας κλωθοειδούς – έχει λυθεί ανάλογη άσκηση στην οριζοντιογραφία, η 7).

$$L/2=\tau R \quad (\tau \text{ σε rad})$$

Το κλειδί επίλυσης είναι να υπολογίσουμε το μήκος της κλωθοειδούς έως τον μικρό κύκλο, έως τον μεγάλο κύκλο και να αφαιρέσουμε. Το δεδομένο που έχουμε είναι η αλλαγή κατεύθυνσης, άρα θα επιλύσουμε ως προς τ .

$$\tau=L/2R. \quad \tau_2=L_2/2 \times 500, \quad \tau_1=L_1/2 \times 1000 \quad \text{και} \quad \tau_2-\tau_1=0,18 \text{ rad},$$

$$0,18=\tau_2-\tau_1=L_2/1000 - L_1/2000 \quad \text{Η άσκηση ζητά το } \Delta L = L_1-L_2.$$

Φαινομενικά έχουμε 2 αγνώστους σε μια εξίσωση, αλλά δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ακόμα ότι πρόκειται για την ίδια κλωθοειδή, οπότε $L_2=A^2/500$, $L_1=A^2/1000$

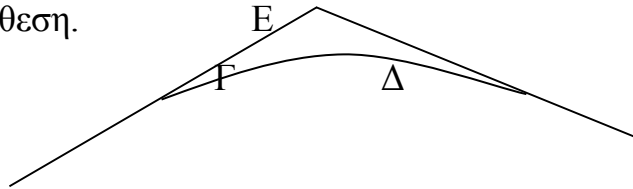
Άρα $0,18=A^2(1/500 \times 1000 - 1/1000 \times 2000) \rightarrow A^2=120000$, $L_2=120000/500=240m$ και $L_1=120000/1000=120m$, οπότε $\Delta L=120m$.

Ως προς τα υψόμετρα: $\Lambda_1\Gamma: 100-0,05 \times 292=85,4m \rightarrow \Gamma$ στην AB: $85,4+5=90,4m$.

$N_1\Delta: 96,9-0,04 \times 250=86,9m \rightarrow \Delta$ στην AB: $86,9+5=91,9m$.

Η σημαία της πολυγωνικής της AB είναι στο E, $\Delta i=5=3=8\%$. $T=R\Delta i/200=0,04R$.

Υποθέτουμε ότι το σημείο Γ όπου γνωρίζουμε το υψόμετρο βρίσκεται εντός της επιρροής της T. Προσοχή, διότι υπάρχει ενδεχόμενο αυτή η υπόθεση να ανατραπεί στην πορεία επίλυσης της άσκησης, οπότε θα πρέπει να επανέλθουμε με νέα κατάλληλη υπόθεση.



Έχουμε υπολογίσει $\Gamma\Delta=120m$, οπότε $E\Delta=120-80=40m$

Συνεπώς το σημείο Γ θα απέχει από την αρχή της κυρτής μηκοτομικής καμπύλης συναρμογής (T-80).

Θα πρέπει να βρεθούν και τα υψόμετρα επί της πολυγωνικής της μηκοτομής στα σημεία αυτά. Έτσι το σημείο E βρίσκεται $0,05 \times 80=4m$ υψηλότερα της πολυγωνικής υψομετρικής θέσης του Γ και $0,03 \times 40=1,2m$ υψηλότερα του Δ. Έστω λοιπόν ότι υψόμετρο στο E είναι H_E .

$$H_E - 4 - (X_\Gamma)^2/2R = 90,4 \rightarrow (T-80)^2/2R = 94,4$$

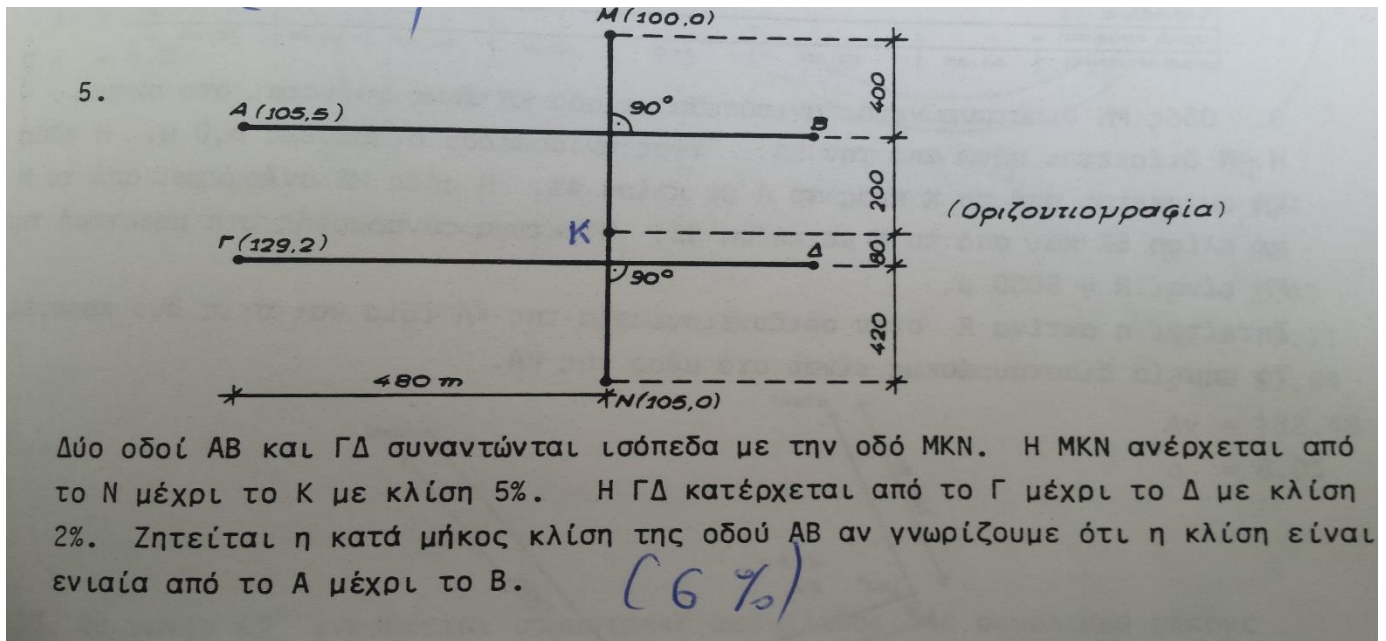
$$H_\Delta - 1,2 - (X_\Delta)^2/2R = 91,9 \rightarrow (T-40)^2/2R = 93,1$$

Έχουμε 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους. Απαλείφω τον R, διαιρώντας κατά μέρη: $(T-80)^2/(T-40)^2 = 94,4/93,1$. Επιλύοντας προκύπτει (λαμβάνουμε μόνο τη θετική ρίζα) $T=85m$.

Συνεπώς, η υπόθεση που κάναμε περί της θέσης του Γ ήταν ορθή.

(Αν ήταν λάθος θα έπρεπε να ξαναεπιλύσουμε την απλούστερη εκδοχή το Γ να κείται επί της μηκοτομικής πολυγωνικής κι όχι επί του κυρτού τόξου συναρμογής.

$$T=R\Delta i/200 \rightarrow R=200T/\Delta i = 200 \times 85/8 = 2125m$$

4^η

Λύση

NK ανηφόρα 5%: υψόμετρο K = $105 + 0,05 \times (420 + 8) = 130\text{m}$.

Με βάση το υψόμετρο της εκφώνησης στο M προκύπτει ότι η κλίση KM είναι κατηφορική και ίση με $(130 - 100) / (200 + 400) = 5\%$. Συνεπώς υπάρχει κυρτή καμπύλη συναρμογής με εξίσωση $T = R\Delta i / 200 = R / 20 \rightarrow R = 20T$.

Υψόμετρο τομής ΓΔ με NK (έστω σημείο E): $129,2 - 0,02 \times 480 = 119,6$, δηλαδή, λόγω της ισόπεδης διασταύρωσης, το υψόμετρο της E, ευρισκόμενη, καθ' υπόθεση ($T > 80\text{m}$) επί της κυρτής της MN είναι 119,6m.

Υψόμετρο πολυγωνικής στο E: $130 - 0,05 \times 80 = 126\text{m}$. Συνεπώς, $y = 126 - 119,6 = 6,4\text{m}$

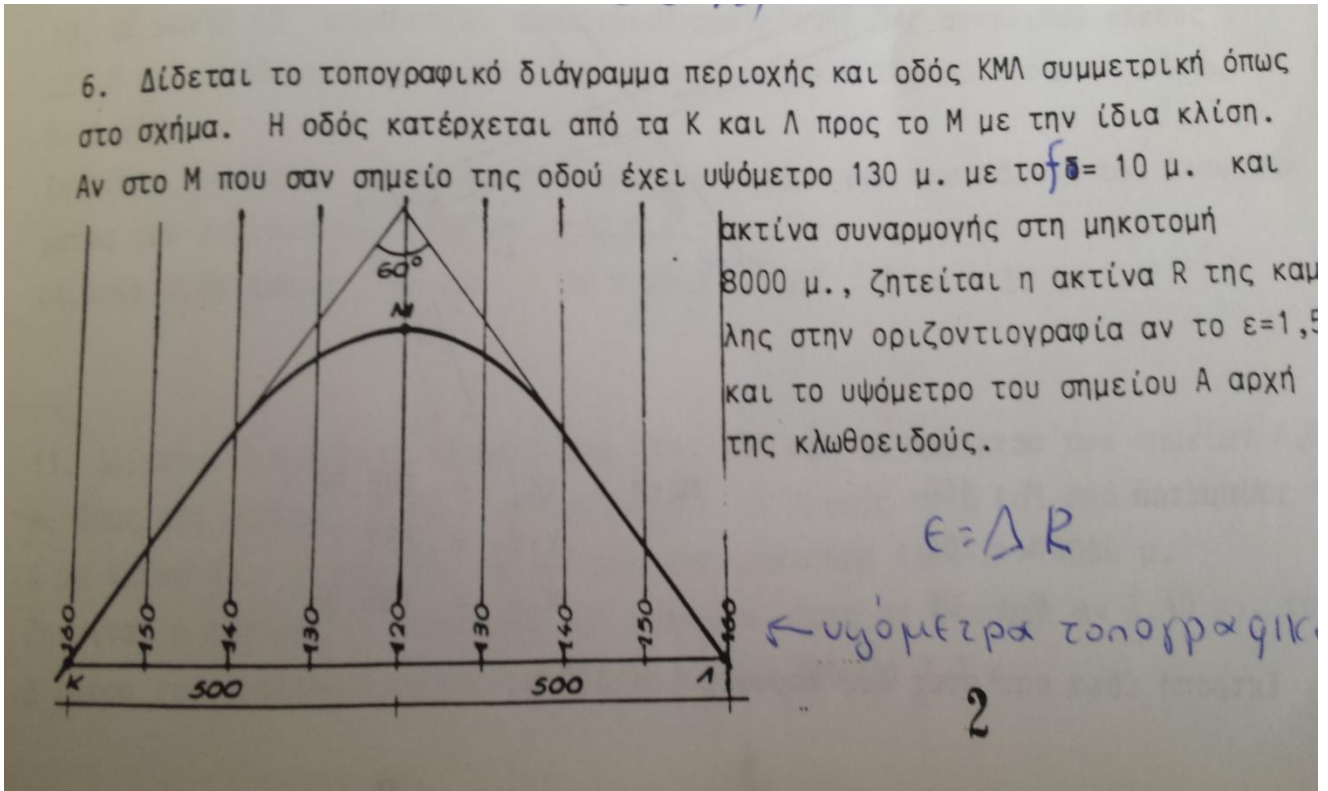
Από την εξίσωση έχουμε: $y = x^2 / 2R = (T - 80)^2 / 2R = 6,4 \rightarrow (T - 80)^2 = 6,4 \times 2 \times (20T) = 256T$
 Επιλύοντας τη δευτεροβάθμια έχω δύο ρίζες, 16 και 400m ως τιμή της εφαπτομένης T. Η 1^η τιμή είναι πολύ μικρή για κατακόρυφες καμπύλες, η 2^η είναι η σωστή (και σύμφωνη με την υπόθεση που έγινε). Επίσης, η ακτίνα της κυρτής μηκοτομικής καμπύλης συναρμογής είναι $20 \times 400 = 8000\text{m}$.

Το επόμενο βήμα είναι να προσδιορίσω το υψόμετρο του σημείου τομής των AB και MN (έστω το σημείο Z), με δεδομένο ότι βρίσκεται και αυτό επί της κυρτής καμπύλης συναρμογής.

Το Z επί της πολυγωνικής θα έχει υψόμετρο (θεώρηση από το M):
 $100 + 0,05 \times 400 = 120\text{m}$. Το Z βρίσκεται επί της κυρτής (δηλαδή χαμηλότερα) με $X = (T - 200) = 200\text{m}$. $Y = X^2 / 2 \times 8000 = 200^2 / 16000 = 2,5\text{m} \rightarrow$ Υψόμετρο Z = $120 - 2,5 = 117,5\text{m}$.

Τέλος, για το ζητούμενο, έχουμε επί της AB ένα μήκος 480m και μια υψομετρική διαφορά $117,5 - 105,5 = 12\text{m}$, οπότε η κλίση είναι $12 / 480 = 2,5\%$.

5^η



Λύση

Προσοχή ΔΕΝ πρόκειται για μηκοτομή, αλλά για οριζοντιογραφία επί τοπογραφικού, με ισοϋψείς (μια ομοιόμορφης και συμμετρικής κλίσης πλαγιά). Από την περιγραφή, αν σχεδιάζαμε τη μηκοτομή θα είχε αντίστροφη 'εικόνα' της οριζοντιογραφίας. Συνεπώς το M βρίσκεται στην κορυφή της κοίλης μηκοτομικής καμπύλης, βρίσκεται υψηλότερα του εδάφους ($130-120=10m$), το ότι η εκφώνηση δίνει και το $f=10m$ είναι πλεονασμός.

Θα επιλύσουμε πρώτα την μηκοτομή: $T=R\Delta i/200 = 8000\Delta i/200=40\Delta i$. Η σημαία της μηκοτομής στο M έχει υψόμετρο 120m. Δεν γνωρίζουμε το μήκος (λόγω της οριζοντιογραφικής καμπύλης) για να βρούμε την κλίση. Αλλά, $f=T^2/2R \rightarrow T^2=20R=20 \times 8000 \rightarrow T=400$.

Οπότε $\Delta i=400/40=10\%$, λόγω συμμετρίας (εκφώνηση) κάθε σκέλος έχει κλίση $\Delta i/2=5\%$. Συνεπώς το μήκος της μισής οριζοντιογραφικής χάραξης είναι (για μια υψομετρική διαφορά άκρου-μέσου: $160-130=30m$) ίσο με $30/0,05=600m$ (προφανώς μεγαλύτερο από τα 500m της πλευράς του τοπογραφικού). Υπενθυμίζεται ότι η ευθυγραμμία στη μηκοτομή έχει πρακτικά το ίδιο μήκος κατά προσέγγιση με τις καμπύλες.

Έχουμε μια οριζοντιογραφία 1200m, συμμετρική αποτελούμενη από δύο ευθύγραμμα τμήματα, δύο κλωθοειδείς κι ένα κυκλικό τόξο. Αλλιώς: $600=KA+L+\Omega\Omega'/2$. Έστω N η κορυφή της πολυγωνικής. Με βάση το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε ότι η υποτείνουσα είναι διπλάσια της μικρής κάθετης πλευράς. Άρα $KN=2 \times 500=1000$. Αλλά $KN=KA+AN=1000$. Το AN δίνεται από το τυπολόγιο οριζοντιογραφίας (με συμβολισμό AK εκεί) $=R\sigma\phi(\beta/2)+L/2+\Delta R \times \sigma\phi(\beta/2) = 1,73R+L/2+1,5 \times 1,73=1,73R+L/2+2,6$.

$$\text{Συνεπώς: } KA+L+\Omega\Omega'/2=600$$

$$KA+1,73R+L/2+2,6=1000$$

$$\text{Απαλείφω το } KA \text{ (αφαιρώ το } 1^\circ \text{ από το } 2^\circ\text{): } 397,4=1,73R-L/2-\Omega\Omega'/2$$

Παίρνουμε το τυπολόγιο της οριζοντιογραφίας: $\Delta R=L^2/24R$, $\Omega\Omega'=\omega R$ (ω σε rad), $L/2=\tau R$ (τ σε rad) και $\tau+\omega/2+\beta/2=\pi/2$ σε rad

$$\text{Έχουμε: } \Delta R=L^2/24R \rightarrow L=\sqrt{(24R\Delta R)}=\sqrt{(24 \times 1,5R)}=6\sqrt{R} \text{ και } L=2\tau R \rightarrow 2\tau R=6\sqrt{R}$$
$$\rightarrow \tau=3/\sqrt{R}$$

$$\tau+\omega/2+\beta/2=\pi/2 \rightarrow \tau+\omega/2+\pi/6=\pi/2 \rightarrow \tau+\omega/2=\pi/3 \rightarrow \omega=(\pi/3-\tau)$$

$$\rightarrow \omega=(\pi/3-3/\sqrt{R})$$

$$\Omega\Omega'=\omega R=(\pi/3-3/\sqrt{R})R=\pi R/3+3\sqrt{R}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω: $397,4=1,73R-L/2-\Omega\Omega'/2 \rightarrow 397,4=1,74R-3\sqrt{R}-\pi R/6-1,5\sqrt{R}=2,26R-4,5\sqrt{R}$. Αντικαθιστώντας \sqrt{R} με X , επιλύω ως δευτεροβάθμια και (παίρνω μόνο τη θετική ρίζα) έχω: $R=200\text{m}$.

$$\text{Συνεπώς: } L=6\sqrt{R}=6\sqrt{200}=85\text{m}, \Omega\Omega'=\pi R/3+3\sqrt{R}=252$$

$$\rightarrow KA=600-85-252/2=389,5\text{m},$$

Οπότε, η αρχή της κλωθοειδούς βρίσκεται χαμηλότερα από το σημείο K: $160-389,5 \times 0,05=140,5\text{m}$.

Καλή δύναμη!