$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \Leftrightarrow 0,09 = \frac{\sigma}{8,2} \Leftrightarrow \sigma = 0,738.$$

Για τον υπολογισμό των ζητούμενων πιθανοτήτων χρησιμοποιώ την αντίστοιχη της X τυποποιημένη μεταβλητή ($Z \sim N(0,1)$)

$$Z = \frac{X - 8,2}{0,738}$$

α) Η αντίστοιχη της $x = 9$ τιμή της Z είναι

$$z = \frac{9 - 8,2}{0,738} = 1,08,$$

οπότε με τη βοήθεια της Παρατήρησης 4.7 και της (4.37)

$$P(X > 9) = P(Z > 1,08) = 1 - \Phi(1,08) = 1 - 0,8599 = 0,1401$$

β) Οι αντίστοιχες των $x_1 = 7,1$ και $x_2 = 9,1$ τιμές της Z είναι

$$z_1 = \frac{7,1 - 8,2}{0,738} = -1,5$$

$$z_2 = \frac{9,1 - 8,2}{0,738} = 1,21$$

οπότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.7 και την (4.42),

$$P(7,1 < X < 9,1) = P(-1,5 < z < 1,21) = \Phi(1,5) + \Phi(1,21) - 1 = 0,9332 + 0,8869 - 1 = 0,8201.$$

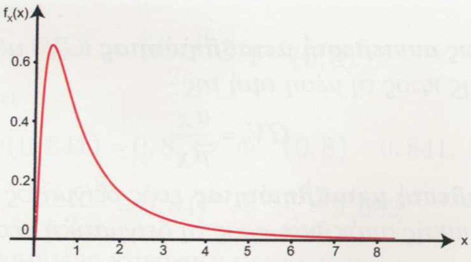
4.5 Λογαριθμοκανονική κατανομή

Ορισμός 4.19 *Μια τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί **λογαριθμοκανονική κατανομή** με παραμέτρους λ και ζ, αν η τυχαία μεταβλητή $\ln X$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή λ και τυπική απόκλιση ζ ($\ln X \sim N(\lambda, \zeta^2)$) και γράφουμε*

$$X \sim \Lambda o\gamma(\lambda, \zeta).$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.1, προκύπτει ότι η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2} \tag{4.50}$$



Σχήμα 4.38 *Η συνάρτηση πιθανότητας της λογαριθμοκανονικής κατανομής με παραμέτρους $\lambda = 0$ και $\zeta = 1$*

Από τον Ορισμό 4.19 προκύπτει:

Πρόταση 4.3 *Η μέση τιμή και η διασπορά της λογαριθμοκανονικής κατανομής είναι*

$$E(X) = \mu_X = e^{\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2}$$

και

$$Var(X) = \sigma_X^2 = e^{2\lambda+\zeta^2} - e^{2\lambda+\zeta^2} = \mu_X^2(e^{\zeta^2} - 1).$$

Poisson Κατανομή

Οι ηλεκτρικές αντλίες που χρησ/νται για άρδευση είναι του ιδίου τύπου. Στη θερινή περίοδο (3 μήνες) κατά μέσο όρο 2 αντλίες χαλάνε. Εφόσον θεωρούμε ότι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε έως και τη βλάβη 4 αντλιών. Ποια η πιθανότητα ότι στο κτήμα να μην υπάρξει πρόβλημα λόγω βλάβης στο κτήμα;

Poisson $\to \lambda = \frac{2}{3}$ (βλάβη/μήνα).

Δεν θα έχω βλάβη αν χαλάνε έως $t =$

$$= P(X_3 \leq 4) = \quad \left(\begin{array}{l} t = 3 \text{ μήνες} \\ \lambda = \text{βλ./μήνα} \end{array} \right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{2}{3}\cdot 3}\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right)^0}{0!} + \frac{e^{-\frac{2}{3}\cdot 3}\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right)^1}{1!} + \dots + \frac{e^{-\frac{2}{3}\cdot 3}\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right)^4}{4!}$$

$$= e^{-2} + e^{-2}\frac{2^1}{1!} + e^{-2}\frac{2^2}{2!} + e^{-2}\frac{2^3}{3!} + e^{-2}\frac{2^4}{4!} = 0{,}947.$$

Παράδειγμα. (Ang and Tang, 1984)

Ο πύργος ελέγχου σε ένα αεροδρόμιο, σχεδιάστηκε "για τον άνεμο των 50 ετών". $\rightarrow p = \frac{1}{50} = 0.02$.

(α) Ποια η πιθανότητα ότι αυτή η ταχύτητα θα ξεπεραστεί για πρώτη φορά στον πέμπτο χρόνο?

Λύση: Το τελευταίο χρονο - ήρθε

$$P(T=5) = 0.02 \cdot 0.98^4 = 0.018$$

(γεωμετρική κατανομή): $T = 5$ (αποτυχία, αποτυχία, αποτυχία, αποτυχία, επιτυχία)

1 2 3 4 5

τελευταίο έτος 1 επιτυχία.

(β) Ποια η πιθανότητα ότι ο άνεμος αυτός θα παρουσιαστεί ~~σε 5 χρ~~ μέσα σε 5 χρόνια 1 τουλάχιστον φορά:

Λύση

$$P(T \le 5) = \cancel{1 - P(T=0)} = [1 - (0.98)^5]$$

συμπλήρωμα...

καμία επιτυχία σε 5 χρόνια.

(γ) Ποια η πιθανότητα για 1 ακριβώς άνεμο σε 5 χρόνια:

Λύση

ή μόνο πρώτο, ή μόνο δεύτερο, ή μόνο το τρίτο...

$$\binom{5}{1} 0.02 \cdot 0.98^4 = 0.092$$

← Bernoulli Διωνυμική κατανομή

Περίοδος επαναφοράς και γεωμετρική κατανομή

Δοκιμή $\to$ χρονικό διάστημα:

Ο μέσος χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση ορισμένου ενδεχομένου έως το πρώτο συμβάν. (Ang and Tang, 1984.)

$$T = E(T) = \sum_{t=1}^{\infty} t\, p\, q^{t-1} =$$

$$= p(1+2q++3q^2+\dots) \to$$

για $|q|<1$

$$\to \frac{1}{p^2}\cdot p = \frac{1}{p}$$

Κατά <u>μέσο όρ</u>[illegible] χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικ[illegible] επιτυχιών" (καταστροφής κλπ) είναι ίσος με τ[illegible] αντίστροφο της πιθανότητας ότι η επιτυχ[illegible] να συμβεί σε μία χρονική μονάδα. (Ang and Tang 1984)

Γεωμετρική Κατανομή

Έχουμε t δοκιμές, στην

$t^{η}$ δοκιμή εμφανίζεται η <u>πρώτη</u> επιτυχία!

$$P(T=t) = p\,q^{t-1}.$$

(πρώτη επιτυχία στη $t^{η}$ δοκιμή)

$$\overbrace{\underbrace{q \cdot q \cdots q}_{t-1} \cdot p}^{t\ \text{δοκιμές}} = q^{t-1} \cdot p.$$