Συνδυαστική άσκηση στις Πιθανότητες

Επιμέλεια: Μ. Σπηλιώτης

από Μυλωνάς και Παπαδόπουλος, 2017

Παράδειγμα 3.45 *Για την αντιπλημμυρική προστασία μίας περιοχής έχουν κατασκευασθεί τα εξής προχώματα:*

- *Πρόχωμα Α, για την πλημμύρα 25 ετών του ποταμού Ι.*
- *Πρόχωμα Β, για την πλημμύρα 15 ετών του ποταμού ΙΙ.*
- *Πρόχωμα Γ, για την πλημμύρα 30 ετών του ποταμού ΙΙ.*

Αν οι πλημμύρες των δύο ποταμών είναι ανεξάρτητες καθώς και οι αστοχίες των προχωμάτων, να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

α) Η περιοχή θα πλημμυρίσει σε ένα χρόνο μόνο από τον ποταμό ΙΙ,

β) Η περιοχή θα πλημμυρίσει σε ένα χρόνο

γ) Η περιοχή τα προσεχή 10 χρόνια:

i) δεν θα πλημμυρίσει,

ii) θα πλημμυρίσει τουλάχιστον μια φορά,

ii) θα πλημμυρίσει το πολύ δύο φορές.

Λύση

Θεωρώντας τα ενδεχόμενα

A: "Το πρόχωμα Α πλημμυρίζει σε ένα χρόνο"

B: "Το πρόχωμα Β πλημμυρίζει σε ένα χρόνο"

Γ: "Το πρόχωμα Γ πλημμυρίζει σε ένα χρόνο"

Π_1: "Συμβαίνει πλημμύρα στον ποταμό Ι σε ένα χρόνο"

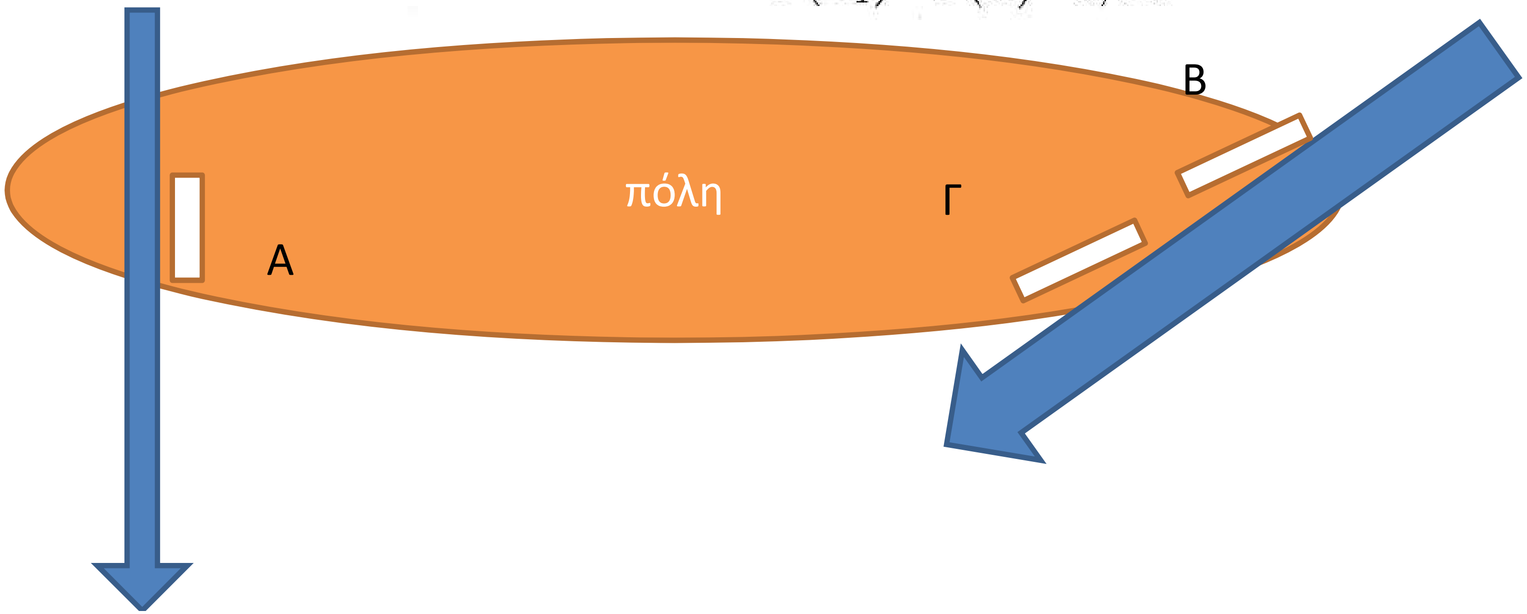
Π_2: "Συμβαίνει πλημμύρα στον ποταμό ΙΙ σε ένα χρόνο"

Π: "Συμβαίνει πλημμύρα σην περιοχή σε ένα χρόνο"

$$P(A) = \frac{1}{25} = 0,04, \quad P(B) = \frac{1}{15} = 0,067 \quad \text{και} \quad P(\Gamma) = \frac{1}{30} = 0,033$$

α) Ο ποταμός Ι έχει ένα πρόχωμα, οπότε

$$P(\Pi_1) = P(A) = 0,04.$$



Πιθανότητα ένωσης ανεξάρτητων ενδεχομένων

$$P(\Pi_1) = P(A) = 0,04.$$

Επειδή ο ποταμός ΙΙ έχει δύο προχώματα, πλημμυρίζει όταν πλημμυρίσει τουλάχιστον ένα από τα προχώματα Β ή Γ, οπότε, λόγω και του Θεωρήματος 2.5,

$$\begin{aligned} P(\Pi_2) &= P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) \\ &= P(B) + P(\Gamma) - P(B)P(\Gamma) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{1}{30} - \frac{1}{15}\frac{1}{30} = 0,098 \end{aligned}$$

(αφού οι αστοχίες των δύο προχωμάτων είναι ανεξάρτητες).

β) Επειδή η περιοχή πλημμυρίζει όταν πλημμυρίζει τουλάχιστον ένας από τους δύο ποταμούς, λόγω και του (α), ισχύει

$$\begin{aligned} P(\Pi) &= P(\Pi_1 \cup \Pi_2) = P(A \cup \Pi_2) = P(A) + P(\Pi_2) - P(A \cap \Pi_2) \\ &= P(A) + P(\Pi_2) - P(A)P(\Pi_2) = 0,04 + 0,098 - 0,04 \cdot 0,098 = 0,134. \end{aligned}$$

γ) Σύμφωνα με το (β), η τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“ αριθμός πλημμύρων στη περιοχή τα επόμενα 10 χρόνια”}$$

ακολουθεί διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0,134$

$$X \sim B(10,\ 0.134).$$

Έτσι:

i) Η πιθανότητα ότι η περιοχή δεν θα πλημμυρίσει στα 10 χρόνια είναι

$$P_i = P(X = 0) = (1 - p)^{10} = (1 - 0,134)^{10} = 0,866^{10} = 0,237.$$

ii) Η πιθανότητα ότι η περιοχή θα πλημμυρίσει τουλάχιστον μια φορά στα 10 χρόνια είναι

$$P_{ii} = P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,237 = 0,763.$$

Αφού προσδιορίσω την πιθανότητα αστοχίας προσδιορίζω τη διωνυμική κατανομή

Διωνυμική κατανομή:

(πλημμύρα, μη πλημμύρα)

$iii)$ Η πιθανότητα ότι θα συμβούν το πολύ δύο πλημμύρες στην περιοχή είναι

$$P_{iii} = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \tag{i}$$

Επειδή $X \sim B(10, 0.134)$,

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \binom{10}{1} p(1-p)^9 = 10 \cdot 0,134 \cdot 0,866^9 = 0,367 \\ P(X=2) &= \binom{10}{2} p^2(1-p)^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0,134^2 \cdot 0,866^8 = 0,256 \end{aligned}$$

από την (i) προκύπτει ότι (λόγω και του (γ)i)

$$P_{iii} = 0,237 + 0,367 + 0,256 = 0,896.$$