Θεώρηση πολλαπλών κριτηρίων στη ΔΥΠ (1)

Δρ Μ.Σπηλιώτη

Διαχείριση υδατικών πόρων

- Ανάγκη σύνθεσης επιστημών

Επιστημονικές και τεχνολογικές περιοχές σχετικές με τη διαχείριση υδατικών πόρων

- Υδρολογία
- Υδραυλική
- Γεωλογία
- Υδρογεωλογία
- Εδαφολογία
- Μετεωρολογία
- Περιβαλλοντική τεχνολογία
- Ενεργειακή τεχνολογία
- Αγροτική τεχνολογία
- Δασοτεχνολογία
- Οικολογία

- Κοινωνιολογία
- Πολιτική επιστήμη
- Οικονομική
- Νομική
- Επιστήμη διεθνών σχέσεων

- Θεωρία πιθανοτήτων, στατιστική, θεωρία στοχαστικών ανελίξεων
- Επιχειρησιακή έρευνα, Ανάλυση συστημάτων
- Θεωρία ελέγχου
- Πληροφορική

Κουτσογιάννης, 2015

Σημερινό μάθημα: έμφαση στη χρήση εννοιών και μεθόδων από την επιχειρησιακή έρευνα

Μέθοδοι πολλαπλών κριτηρίων

- Οι πολυκριτηριακές μέθοδοι αποτελούν μια ομάδα μεθόδων αξιολόγησης σχεδίων, προγραμμάτων ανάπτυξης και πολιτικών αποφάσεων.
- Όλες οι πολυκριτηριακές μέθοδοι έχουν ως αντικείμενο τα **στοιχεία ενός προβλήματος επιλογής**, δηλαδή τον προσδιορισμό των **καταλλήλων εναλλακτικών λύσεων**, τον καθορισμό των κατάλληλων κριτηρίων αξιολόγησης, την εκτίμηση της αριθμητικής αξίας κάθε κριτηρίου για κάθε εναλλακτική (μέσω π.χ. μιας ανάλυσης επιπτώσεων), τη συλλογή των πρωταρχικών πληροφοριών, τον προσδιορισμό των καταλλήλων επιπέδων απόφασης για θεσμικές αποφάσεις (στις περιπτώσεις με πολλαπλά κέντρα αποφάσεων) και τέλος τον καθορισμό του κατάλληλου συστήματος μέτρησης για τη διαθέσιμη πληροφορία (Διακουλάκη 2006 και Nijkamp, 1986).

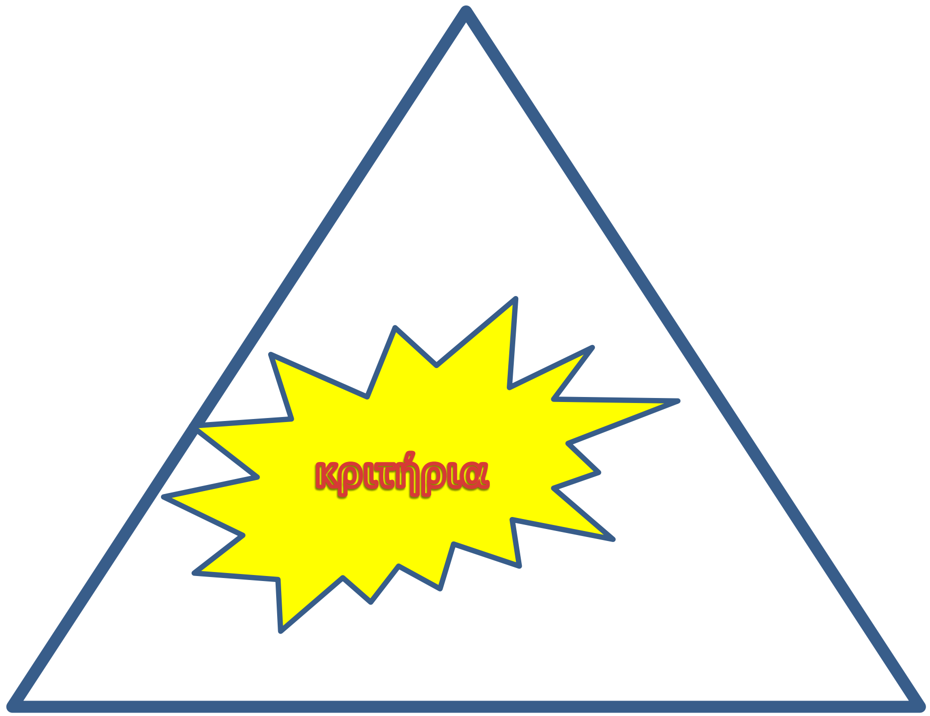
Κριτήρια

Κριτήρια. Είναι οι άξονες αξιολόγησης ή κανόνες αξιολόγησης με βάση τους οποίους κρίνονται οι εναλλακτικές λύσεις. Στα κριτήρια εμπλέκονται οι προτιμήσεις του αποφασίζοντα. Το σύνολο των κριτηρίων θα πρέπει να παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες:

- Πληρότητα, δηλαδή από το σύνολο των κριτηρίων να καλύπτονται όλες οι σημαντικές διαστάσεις αξιολόγησης.
- Μη επικάλυψη, δηλαδή να μην διπλομετρώνται κάποια χαρακτηριστικά.
- Συνάφεια. Να συνδέονται τα κριτήρια με τους βασικούς στόχους του αποφασίζοντα.
- Διαφάνεια, δηλαδή να είναι κατανοητή η κλίμακα και ο τρόπος μέτρησης των επιδόσεων (Διακουλάκη, 2007)

Ολιστική προσέγγιση

Κοινωνική θεώρηση



Περιβαλλοντική θεώρηση

Οικονομική θεώρηση

Η εφικτότητα των λύσεων (τεχνολογία, μέσα, τοπικές τεχνικές συνθήκες) μπορεί να οριστεί στο κοινό τόπο ή ως ξεχωριστός άξονας

Σύγκρουση κριτηρίων

Τρία σημεία πρέπει να προσεχθούν κατά την ανάλυση, τα οποία είναι:

Α) Οι στόχοι και τα κριτήρια δεν εκφράζονται με τις ίδιες μονάδες.

Β) Οι προτεραιότητες εξαρτώνται και διαμορφώνονται από την ειδική φύση του κάθε προβλήματος, τις επιδιώξεις, τους περιορισμούς που θα τεθούν και από τις εκάστοτε επικρατούσες συνθήκες (κοινωνικές, οικονομικές, περιβαλλοντικές κ.λ.π.)

Γ) Η παρουσία πολλών αντικρουόμενων στόχων και κριτηρίων, που δύναται να επηρεάσει το αποτέλεσμα.

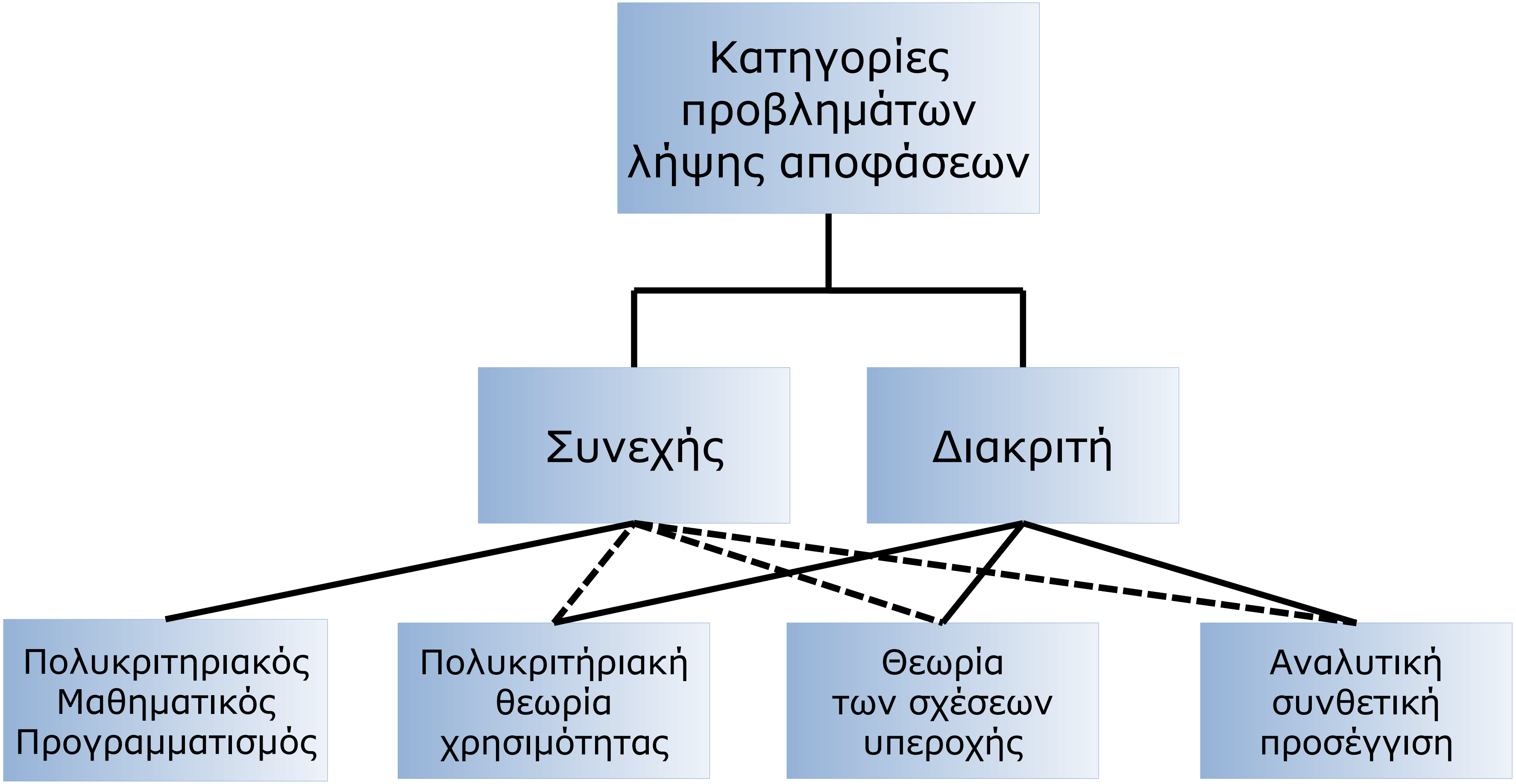
- Αντικρουόμενους στόχους έχουμε όταν η λύση ενός προβλήματος που ικανοποιεί ένα στόχο συνήθως είναι διαφορετική από αυτήν που ικανοποιεί έναν άλλο στόχο. Για παράδειγμα η ενέργεια σε έναν προγραμματισμό μπορεί να αποτελέσει από μόνη της ένα κριτήριο, ενώ ταυτόχρονα να επηρεάζει και το οικονομικό κριτήριο (Διακουλάκη, 2005).

Ταξινόμηση μεθόδων με πολλαπλά κριτήρια

- Οι Pardalos et al. (1995) πρότειναν την ταξινόμηση των μεθόδων σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με τη μορφή του μοντέλου ολικής προτίμησης που χρησιμοποιούν αλλά και τη διαδικασία ανάπτυξης του μοντέλου. Βάσει αυτής της θεώρησης πρότειναν την ακόλουθη κατηγοριοποίηση:
- Πολυκριτηριακός μαθηματικός προγραμματισμός (multi mathematical programming) (βελτιστοποίηση με πολλαπλά κριτήρια)
- Πολυκριτηριακή θεωρία χρησιμότητας (multiattribute utility theory) (μία συνάρτηση αξιών για αξιολόγηση κριτηρίων)
- Θεωρία των σχέσεων υπεροχής (outranking relations theory) (διμερείς συγκρίσεις)
- Αναλυτική – συνθετική προσέγγιση (preference disaggregation approach) (μπορεί να ειδωθεί απλουστευτικά ως αντίστροφο πρόβλημα)

Εναλλακτικές λύσεις

- *Εναλλακτικές λύσεις.* Η συνήθης ύπαρξη περισσότερων εναλλακτικών, δημιουργεί μια αβεβαιότητα ως προς τα ποια εναλλακτική είναι καλύτερη ή ποιες μεταβλητές ανήκουν σε μια ομάδα καλύτερης λύσης ή τέλος στην κατάταξη των εναλλακτικών. Οι εναλλακτικές μπορεί να είναι είτε διακριτές συνεχείς, οπότε προκύπτουν από την επίλυση κατάλληλα διαμορφωμένων προβλημάτων “βελτιστοποίησης“.



Αλληλεπίδραση μεθόδων πολλαπλών κριτηρίων

Παράμετροι απόφασης (μη σύγχυση με μεταβλητές απόφασης)

- *Οι παράμετροι της απόφασης.* Σε όλα τα προβλήματα Λ.Α. η ενδεδειγμένη λύση εξαρτάται από την τιμή ορισμένων παραμέτρων του εξωτερικού περιβάλλοντος οι οποίες δεν υπόκεινται στον έλεγχο του αποφασίζοντα και γι’ αυτό ονομάζονται μη ελεγχόμενες μεταβλητές. Για παράδειγμα, η εξέλιξη των τιμών των πρώτων υλών αποτελεί παράδειγμα μη ελεγχόμενων μεταβλητών οι οποίες επηρεάζουν την απόφαση για την προώθηση ενός νέου προϊόντος στην αγορά ή για τον καθορισμό της δυναμικότητας παραγωγής .

“Βελτιστοποίηση” με πολλαπλά κριτήρια: Μη αποτελεσματικές λύσεις

Στα πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης η έννοια της βέλτιστης λύσης αντικαθίσταται από την έννοια της **αποτελεσματικής λύσης (!)** (efficient solution), η οποία βασίζεται στην έννοια της **κυριαρχίας** (dominance) (Δούμπος, 2004).

Στα πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης η έννοια της βέλτιστης λύσης αντικαθίσταται από την έννοια της αποτελεσματικής λύσης (efficient solution), η οποία βασίζεται στην έννοια της κυριαρχίας (dominance) (Δούμπος, 2004).

Ορισμός (κυριαρχία): Δεδομένων δύο εφικτών λύσεων x, y και ενός συνόλου συναρτήσεων:

$\{g_1(x), \ldots, g_K(x)\}$ κριτηρίων, μία δυνατή λύση x κυριαρχεί έναντι μίας άλλης y $x \Delta y$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$x \Delta y \Leftrightarrow g_i(x) \geq g_i(y), \forall i \in K$$

και για έναν τουλάχιστον δείκτη i^* ισχύει:

$$g_{i*}(x) > g_{i*}(y) \qquad (3.1)$$

Ορισμός (αποτελεσματική λύση): Μία δυνατή λύση $x \in A$ ονομάζεται αποτελεσματική για την οικογένεια κριτηρίων $\{g_1(x), \ldots, g_K(x)\}$ αν και μόνο αν δεν υπάρχει δυνατή λύση $y \in A$ η οποία να κυριαρχεί της x. Από πολλούς χρησιμοποιείται και η ονομασία μη κατώτερη λύση.

Σπηλιώτης, 2007, δ.δ., ΕΜΠ

Παράδειγμα 1

	Cr.1	Cr.2	Cr.3
Εναλλακτική Α	0.3	0.5	0.16
Εναλλακτική Β	0.25	0.9	1

Καμία δεν κυριαρχεί

Παράδειγμα 2

	Cr.1	Cr.2	Cr.3
Εναλλακτική Α	0.3	0.5	0.3
Εναλλακτική Β	0.4	0.5	0.3

Η Β κυριαρχεί επί της Α

Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση

- Πολλές συναρτήσεις στόχου (αντ. έμμεσα ή άμεσα, κριτήρια)
- Υπό ένα σύνολο περιορισμών
- Πρόβλημα ασθενώς ορισμένο
- Εύρεση λύσεων Pareto (μη κατώτερων λύσεων) αντί βέλτιστης λύσης

$$Z(x) = [Z_1(x), Z_2(x), \ldots, Z_r(x)]$$

Υπό ένα σύνολο περιορισμών που καταλήγουν σε ένα πεδίο εφικτών λύσεων

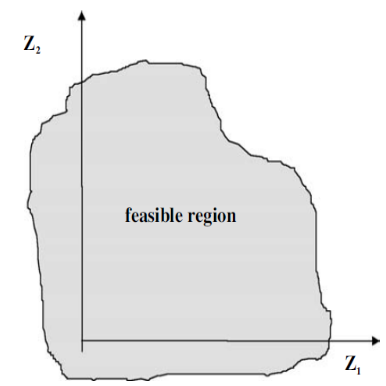


Figure 10.2 *Feasible region of a multi-objective problem presented in the objective space*

Μέτωπο Pareto

- Μέτωπο Pareto: Το σύνολο όλων των μη κατώτερων λύσεων (**παρατηρείστε ότι αν βελτιωθεί μία λύση ως προς ένα κριτήριο χειροτερεύσει ως προς ένα άλλο**)
- Η συμβιβαστική λύση(εις) πρέπει να ανήκει στο μέτωπο Pareto
- Παρατηρείστε ότι σε πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης παριστάνουμε τις συναρτήσεις στόχου αντί των μεταβλητών απόφασης σε διαγράμματα.

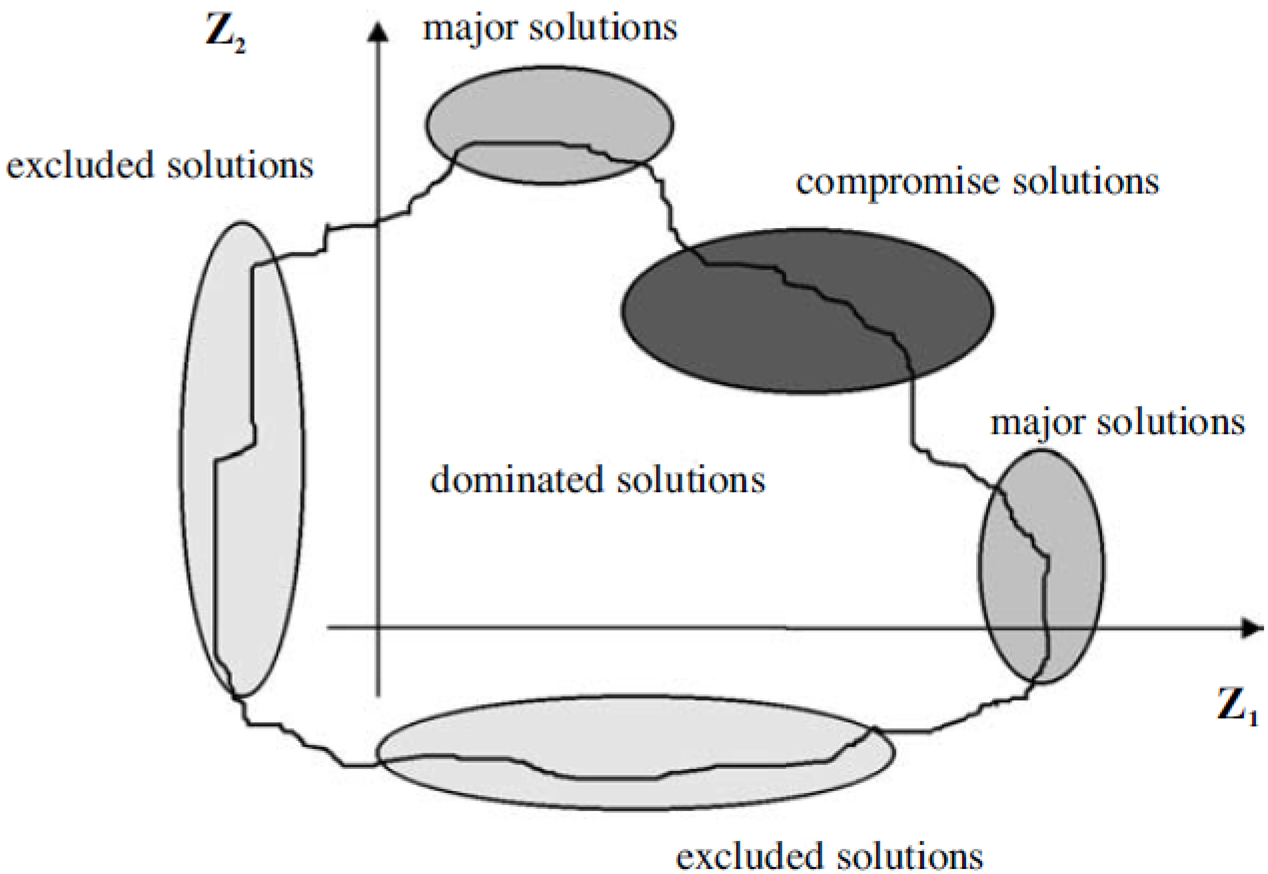


Figure 10.3 *Classification of feasible multi-objective alternative solutions*

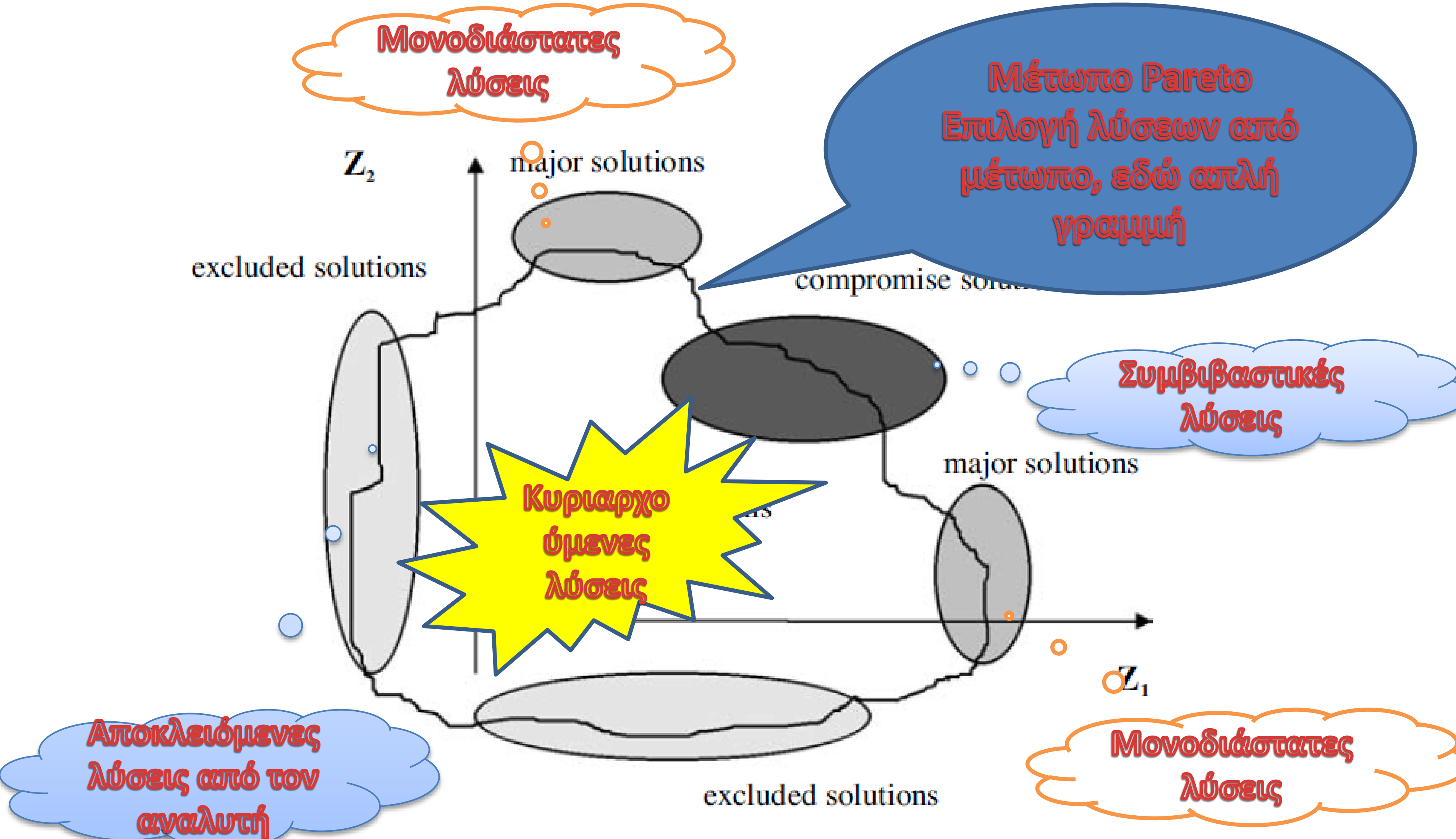
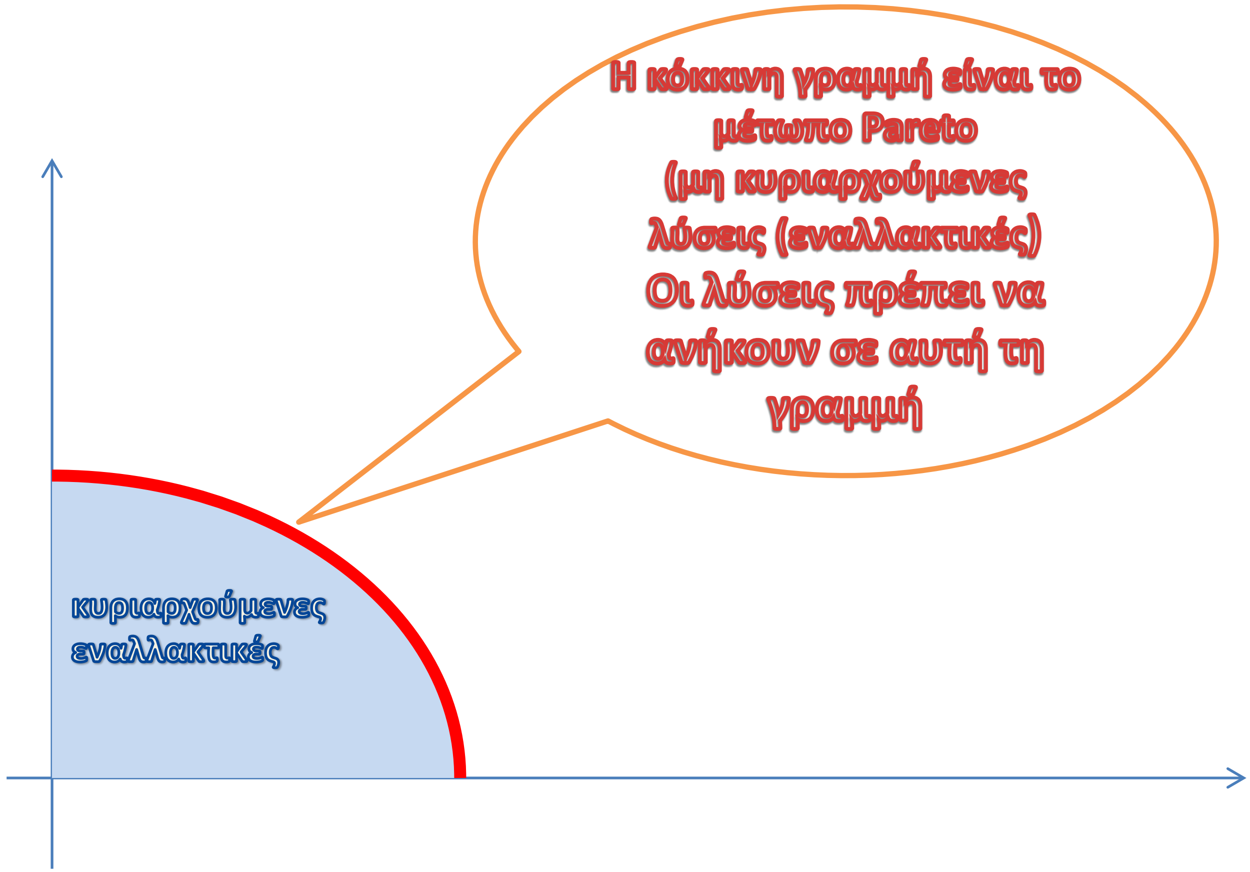
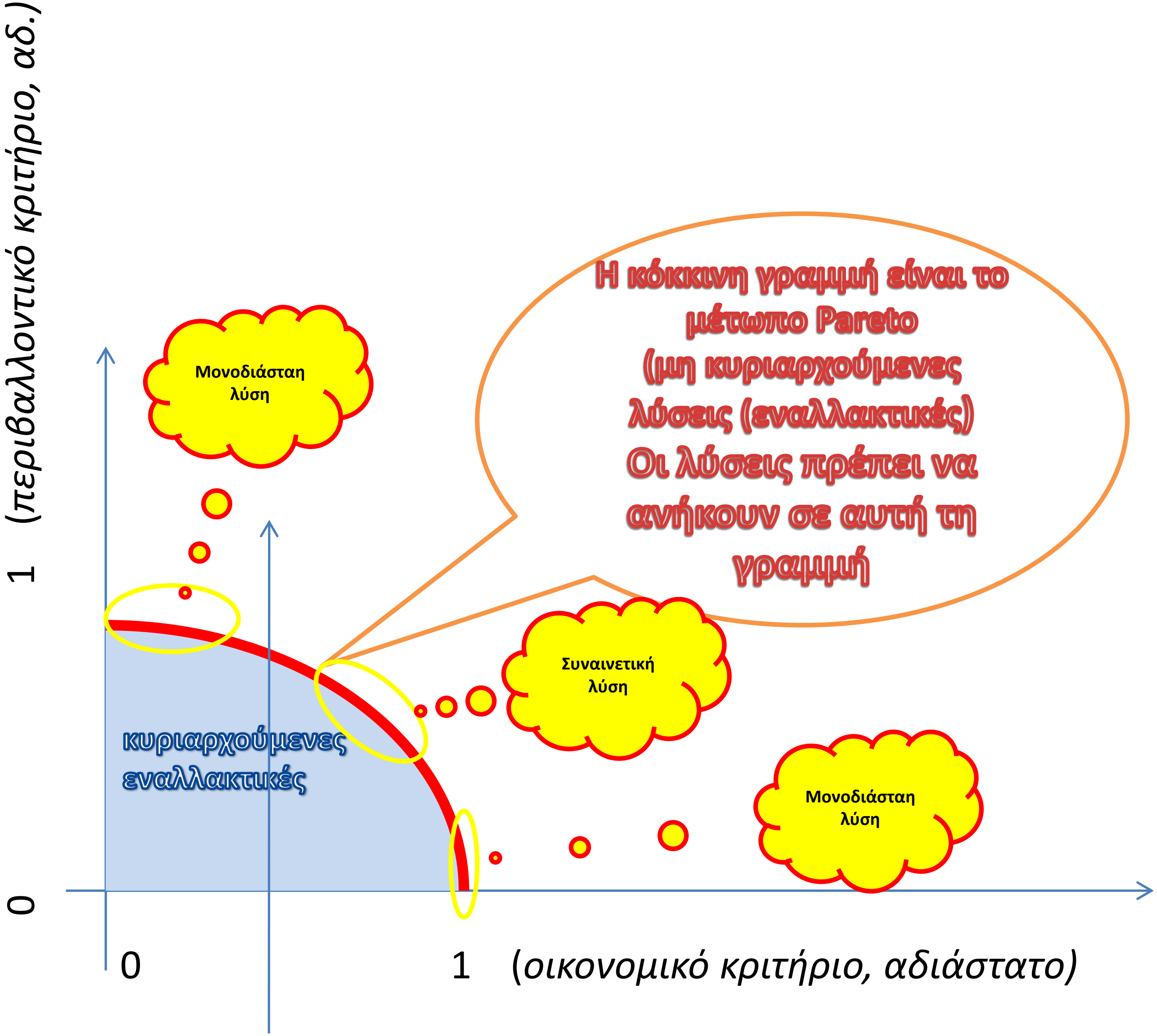


Figure 10.3 *Classification of feasible multi-objective alternative solutions*

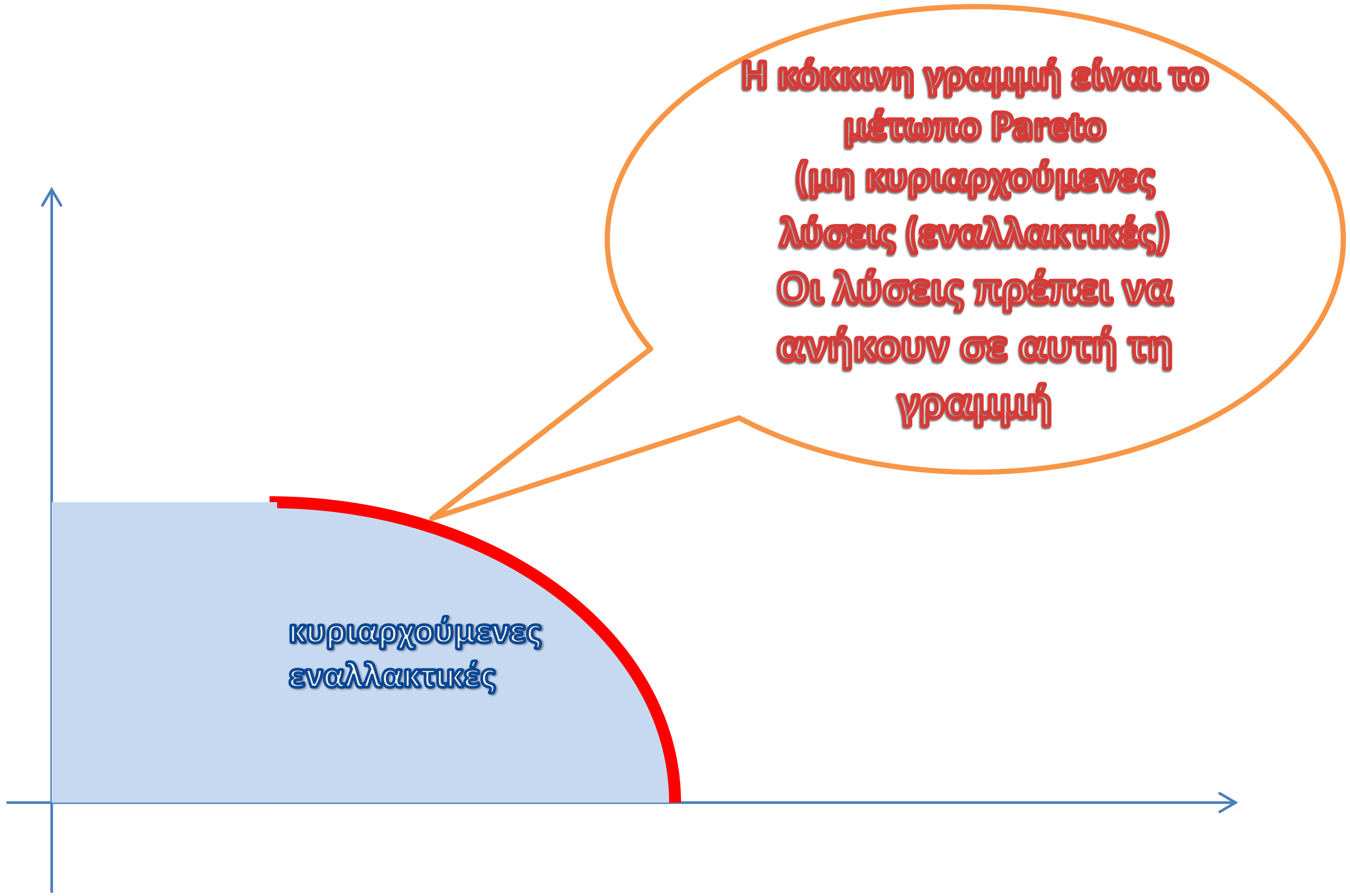
Simonovic, 2009

MAX


Η κόκκινη γραμμή είναι το μέτωπο Pareto
(μη κυριαρχούμενες λύσεις (εναλλακτικές)
Οι λύσεις πρέπει να ανήκουν σε αυτή τη γραμμή
κυριαρχούμενες εναλλακτικές



(περιβαλλοντικό κριτήριο, αδ.)
1
0
Μονοδιάσταση λύση
Η κόκκινη γραμμή είναι το μέτωπο Pareto (μη κυριαρχούμενες λύσεις (εναλλακτικές) Οι λύσεις πρέπει να ανήκουν σε αυτή τη γραμμή
Συναινετική λύση
κυριαρχούμενες εναλλακτικές
Μονοδιάσταση λύση
0
1
(οικονομικό κριτήριο, αδιάστατο)


Η κόκκινη γραμμή είναι το μέτωπο Pareto
(μη κυριαρχούμενες λύσεις (εναλλακτικές)
Οι λύσεις πρέπει να ανήκουν σε αυτή τη γραμμή
κυριαρχούμενες εναλλακτικές

Συναινετική λύση

Συνήθως η ιδεατή λύση δεν είναι εφικτή κάτι που οφείλεται στην ανταγωνιστική φύση των κριτηρίων σε συνδυασμό με τους ίδιους τους περιορισμούς. Προκύπτει λοιπόν η ανάγκη για την παραγωγή συμβιβαστικών ή συναινετικών λύσεων με διάφορες τεχνικές. Για την παραγωγή συμβιβαστικής λύσης έχει ευρέως προταθεί η υιοθέτηση ενός μοντέλου ολικής προτίμησης (global evaluation model). Στο μοντέλο ολικής προτίμησης συνθέτονται όλα τα κριτηρία έτσι ώστε να επιτευχθεί ο στόχος της ανάλυσης ανάλογα με την προβληματική που έχει καθοριστεί.

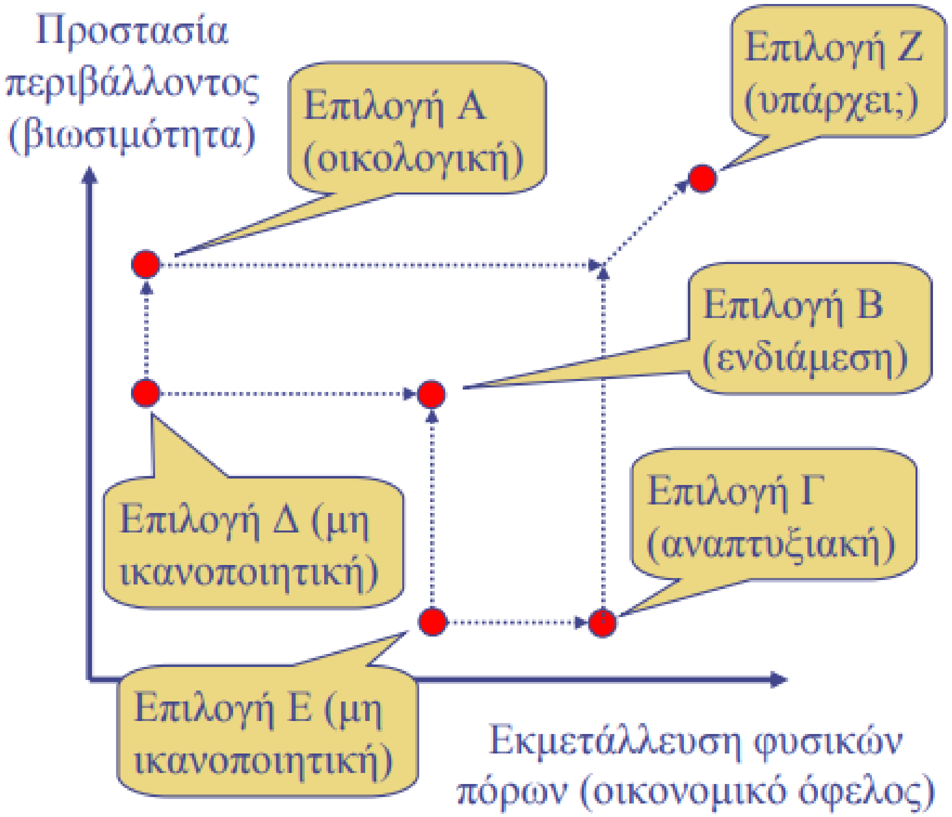
Προσοχή η συναινετική λύση πρέπει να είναι μη κατώτερη

Ορισμός (βέλτιστη συναινετική λύση): Μία εφικτή λύση είναι βέλτιστη συναινετική λύση αν η εφικτή λύση x προτιμάται από τον αναλυτή σε σχέση με τις άλλες λύσεις λαμβάνοντας υπ΄ όψιν όλα τα κριτήρια. Πρέπει να επιδιώκεται μία βέλτιστη συναινετική λύση που να είναι αποτελεσματική λύση (Zimmermann, 1991).

Λήψη αποφάσεων με αντικρουόμενα κριτήρια

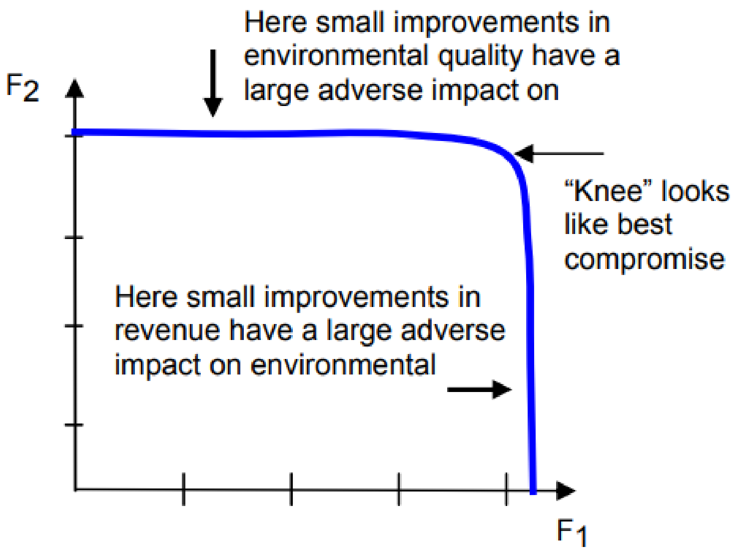
Εισαγωγικό παράδειγμα

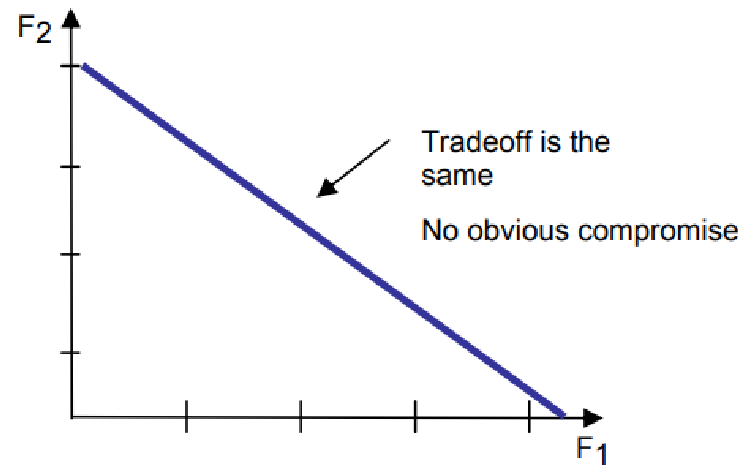
1. Αν τα κριτήρια λήψης αποφάσεων είναι αντικρουόμενα, μπορεί να προσδιοριστεί μια επιλογή που να είναι αντικειμενικά βέλτιστη;
2. Υπάρχει δυνατότητα συστηματικού διαχωρισμού των ικανοποιητικών από τις μη ικανοποιητικές επιλογές;
3. Με ποια υπολογιστική διαδικασία είναι δυνατή η εύρεση εναλλακτικών ικανοποιητικών επιλογών;



Συμβιβαστική λύση

Different types of tradeoffs:





Utility

https://ocw.mit.edu/courses/civil-and-environmental-engineering/1-731-water-resource-systems-fall-2006/lecture-notes/lect15.pdf

Πίνακας πληρωμών

Table 10.1 *Payoff matrix*

Alternatives		**1**	**2**	**...**	***n***
Criteria	1	v_{11}	v_{12}	...	v_{1n}
	2	v_{21}	v_{22}	...	v_{2n}
	...				
	...				
	m	v_{m1}	v_{m2}	...	v_{mn}

- Μπορούμε να λύσουμε ξεχωριστά το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ως προς κάθε κριτήριο ξεχωριστά και έτσι διαμορφώνοντα μονοκριτηριακές λύσεις.
- Σε περίπτωση διακριτού προβλήματος απλά χρησιμοποιώ τον παρακάτω πίνακα

4 βασικές προσεγγίσεις στα πολλαπλά κριτήρια

- Απλό αθροιστικό μοντέλο
- **Μέθοδοι αποστάσεων (π.χ. συμβιβαστικός προγραμματισμός)**
- Μέθοδος των ε-περιορισμών

Οι παραπάνω μέθοδοι εφαρμόζονται σε διακριτές εναλλακτικές ή προβλήματα πολ. βελτιστοποίησης

- Μέθοδοι υπεροχής (στο επόμενο μάθημα)
- Αναλυτική συνθετική προσέγγιση (στο επόμενο μάθημα)

Προκλήσεις στις Πολυκριτηριακές μεθόδους

- Διαφορετική φύση των κριτηρίων, ανάγκη κανονικοποίησης (ουσιαστική η κανονικοποίηση του κριτηρίου συνιστά ένα είδος βάρους)
- Βάρη, καθοριστική επίδραση, τρόπος επιλογής
- Ανάγκη ισόρροπων λύσεων κατά τη σύνθεση των κριτηρίων.

Απλό αθροιστικό μοντέλο σύνθεσης επιδόσεων

$$U(a) = w_1(g_1(a)) + \ldots + w_n(g_n(a))$$

- Απλό άθροισμα, βάρη, υποκειμενική επιλογή
- Κριτήρια διαφορετική φύση, ανάγκη κανονικοποίησης που ούτε αυτή θεραπεύει το πρόβλημα
- Κυρτά προβλήματα: Με την εναλλαγή των βαρών προσδιορίζεται το μέτωπο Pareto

Μέθοδος πολυκριτηριακής ταξινόμησης με βάση τη συνάρτηση αξιών

Η μέθοδος πολυκριτηριακής ταξινόμησης με βάση τη συνάρτηση αξιών (value function) και εδράζεται στη σχέση ισχυρής προτίμησης ή αδιαφορίας ενώ αποκλείει τη μη συγκρησιμότητα (Single Synthesizing Criterion, Roy, 1996). Βασικό της γνώρισμα είναι ότι ανάγει ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα σε μονοκριτηριακό ή βαθμωτό πρόβλημα.

Η συνήθης περίπτωση προβλημάτων απαρτίζεται από τις παρακάτω συνιστώσες:

a) το σύνολο των δυνατών επιλογών $A = a_1, a_2, ..., a_i, ... a_m$

b) τα κριτήρια $g_1, g_2, ..., g_j, ..., g_n$

και επιπλέον ως $g_j(a_i)$ συμβολίζεται η επίδοση (συνήθως πραγματικός αριθμός) μιας επιλογής a_i πάνω στο κριτήριο g_j.

Η μέθοδος ολικού κριτηρίου η οποία αποτελεί ένα ειδικό κριτήριο U ορισμένη σ' ένα σύνολο A μπορεί να γραφτεί a priori με την πιο κάτω γενική μορφή:

$$U(a) = U\left[g_1(a), g_2(a), ..., g_j(a), ..., g_n(a)\right]$$

Απλό μοντέλο σύνθεσης επιδόσεων

Μια συνήθης υπόθεση είναι η αμοιβαία προτιμησιακή ανεξαρτησία των κριτηρίων αξιολόγησης, οπότε προκύπτει η παρακάτω συνάρτηση αξιών που είναι ένα απλό μοντέλο σύνθεσης προτιμήσεων ή όπως συνηθίζεται να ονομάζεται προσθετική συνάρτηση αξιών:

$$U(a) = U_1\left[g_1(a)\right] + U_2\left[g_2(a)\right] + \ldots + U_n\left[g_n(a)\right] \tag{6.4}$$

όπου κάθε μία από τις συναρτήσεις $U_1, U_2, \ldots, U_n$ καλείται συμβολή του αντίστοιχου κριτηρίου στην αθροιστική συνάρτηση αξιών U.

Η πιο δεδομένη μορφή της παραπάνω συνάρτησης συμμετοχής είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος:

$$U(a) = w_1\left(g_1(a)\right) + \ldots + w_n\left(g_n(a)\right) \tag{6.5}$$

Όπου w_j το βάρος κάθε κριτηρίου j που υποδηλώνει τη σημαντικότητα του κριτηρίου. Συνήθως επιλέγεται η κανονικοποίηση των βαρών, δηλαδή να ισχύει:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1. \tag{6.6}$$

Ο σταθμισμένος μέσος όρος δίνει τη δυνατότητα της περιγραφής όλων των μη κατώτερων λύσεων για κατάλληλη επιλογή βαρών σε κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης (Miettinen, 1998).

Μέθοδοι αποστάσεων

- Μία άλλη σημαντική κατηγορία μεθόδων που στην ουσία αποτελούν υποπερίπτωση της μεθόδου της συνάρτησης αξιών είναι οι μέθοδοι των αποκλίσεων (distance methods) που στηρίζονται στην έννοια της απόκλισης ή απόστασης από (θετικά) ιδεατή ή αντι – ιδεατή (ή αρνητικά ιδεατή) λύση. Η πλέον διαδεδομένη οικογένεια των μεθόδων αυτών είναι η TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity of Ideal Solution).

- Η βασική ιδέα των μεθόδων των αποστάσεων είναι ευρέως διαδεδομένη και εύκολη στη σύλληψή της. Βασική ιδέα αποτελεί ότι οι επιλεγμένες μεταβλητές θα πρέπει να έχουν την **ελάχιστη απόσταση από την ιδεατή θετική λύση**, που ορίζει ο αναλυτής σε συνεργασία με τον αποφασίζοντα, και τη **μέγιστη απόσταση από την αρνητικά- ιδανική λύση** κατά μία γεωμετρική έννοια (Triantaphyllou, 2000).

Κανονικοποίηση στην αξιολόγηση των κριτηρίων, Βελτίωση μεθόδου

$$L_p(a) = \left[\sum_{j=1}^{J} w_j^p \left| f_j^* - f_j(a) \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Κριτήρια: διαφορετική φύση άρα και μονάδες, προβληματική η αθροιστική λειτουργία.
Κανονικοποίηση:

$$L_p(a) = \left[\sum_{j=1}^{J} w_j^p \left| \frac{f_j^* - f_j(a)}{M_j - m_j} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Όπου g η f αναπαριστά την αξιολόγηση μίας εναλλακτικής ως προς ένα κριτήριο
Σε επόμενη έκδοση (φέτος πρώτη φορά) θα διορθωθεί

$$L_p(a) = \left[\sum_{j=1}^{J} w_j^p \left| \frac{f_j^* - f_j(a)}{M_j - m_j} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Ελαχιστοποίηση απόστασης από βέλτιστη λύση, z^*

Δηλαδή συνθέτω όλα τα κριτήρια σε μία συνάρτηση αξιών (καταλήγω έτσι σε ένα εικονικό «μονοκριτηριακό» πρόβλημα

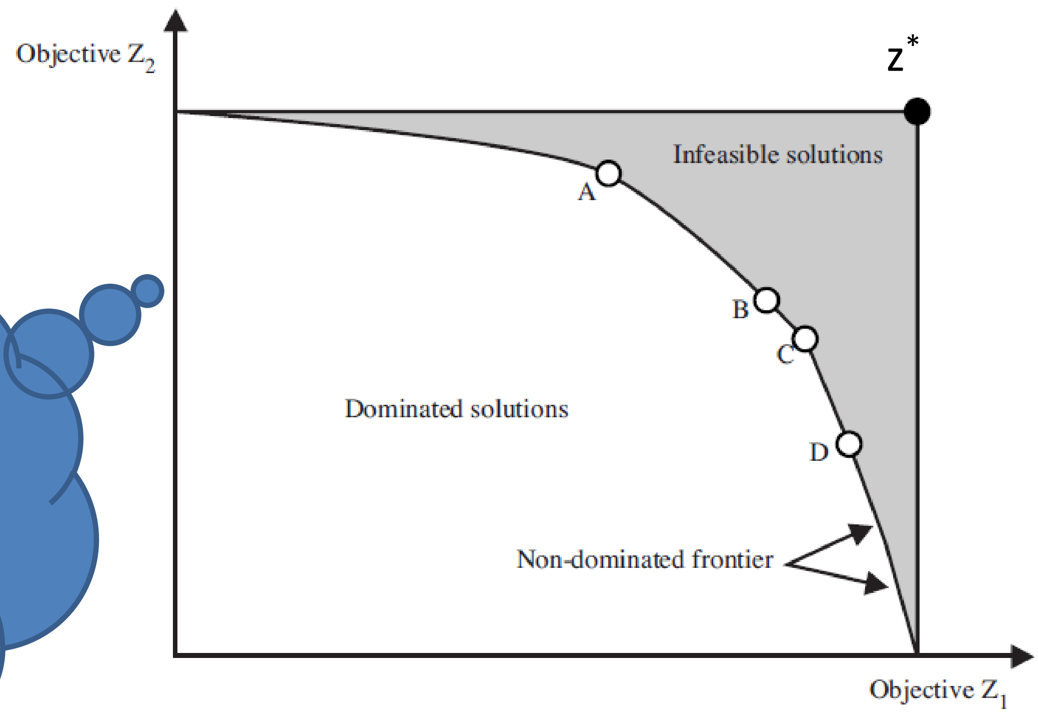
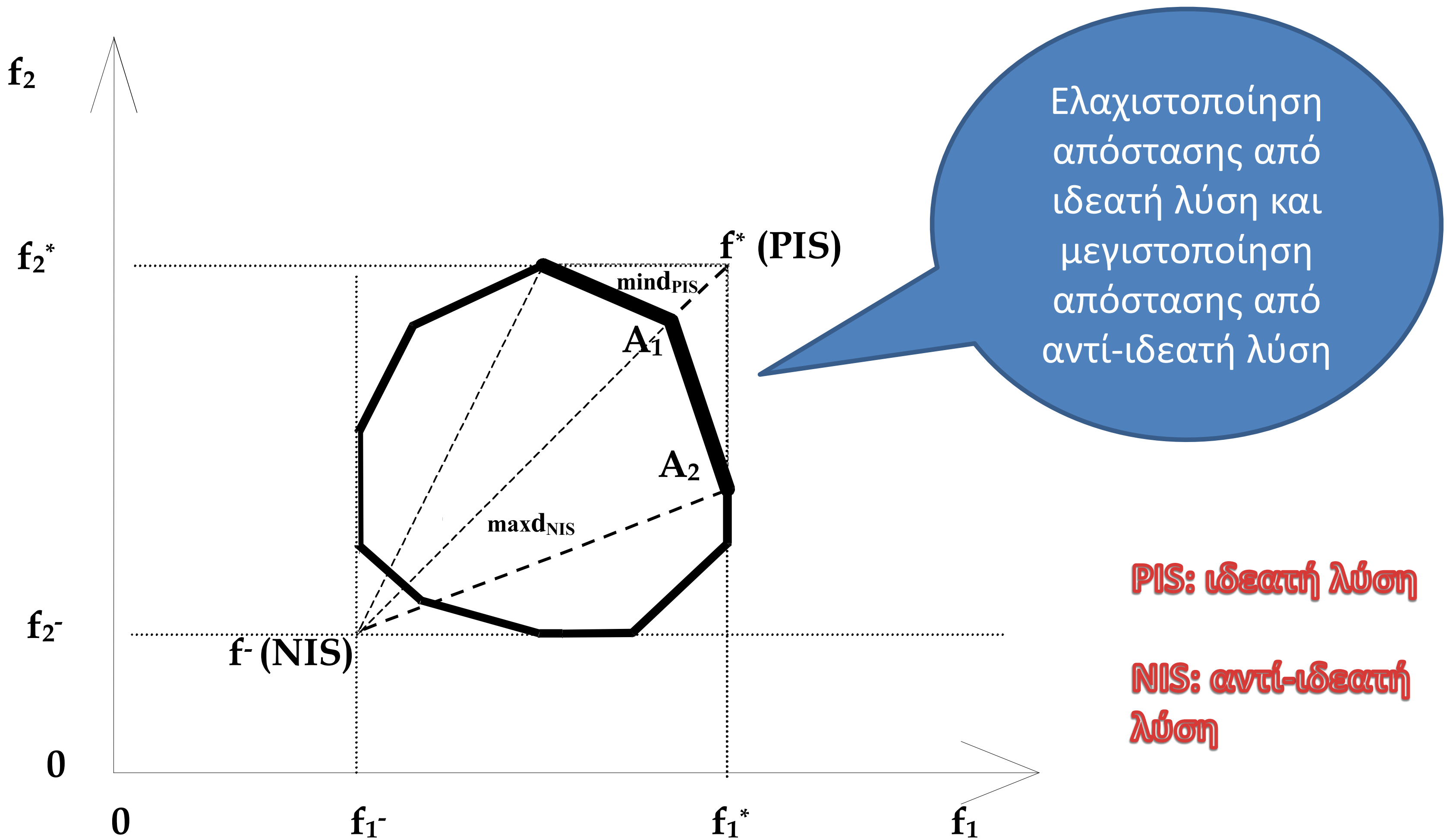


Figure 10.6 *Illustration of compromise solutions*



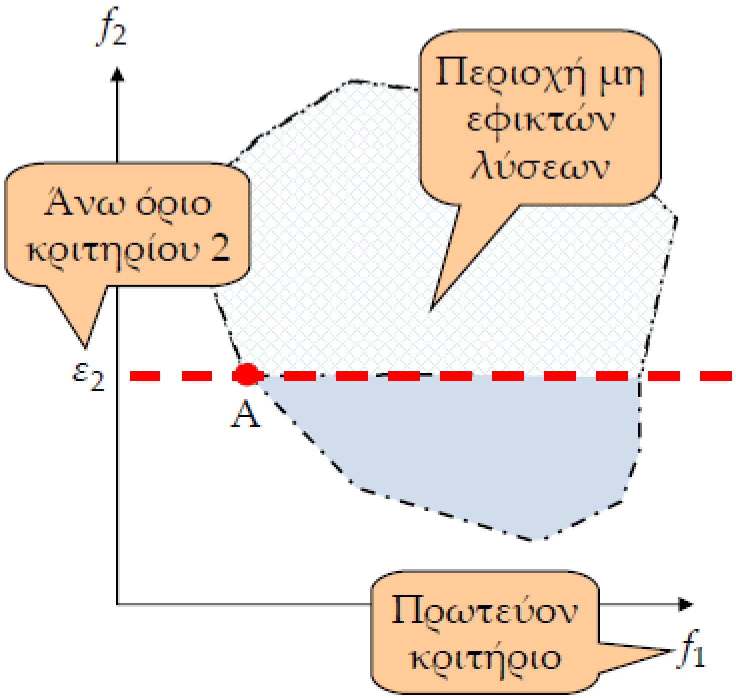
Σχ.9.1: Δύο «συμβιβαστικές λύσεις» με βάση την ελάχιστη απόσταση από τη PIS και την ελάχιστη απόσταση από τη NIS

- Ο στόχος της επίτευξης της μέγιστης απόστασης από τη NIS και της ελάχιστης απόστασης από τη PIS, δεν οδηγούν πάντοτε στην ίδια λύση. Άλλωστε ενδέχεται και τα βάρη κάθε απόστασης να είναι διαφορετικά. Στο Σχ. 9.1 απεικονίζεται με τη βοήθεια του λογισμικού Autocad ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα με κυρτό πεδίο ορισμού και δύο συναρτήσεις στόχου. Με βάση την ελάχιστη γεωμετρική απόσταση από τη PIS επιλέγεται η κορυφή A_1, ενώ με βάση τη μέγιστη γεωμετρική απόσταση από τη NIS επιλέγεται η κορυφή $A_{2.}$ Επιπλέον, η επιλογή της ιδεατής και ιδιαίτερα της αντί – ιδεατής λύσης παρουσιάζει δυσκολίες και επιδέχεται διαφόρων ερμηνειών.

- <u>Θεώρημα:</u> Έστω το μέτρο απόστασης από την θετική ιδεατή λύση (ιδεατή) και την αρνητική ιδεατή λύση (αντιδεατή) λύση σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις. Τότε για p = 1, οι δύο διατυπώσεις εύρεσης της ελάχιστης απόστασης από την θετικά ιδεατή λύση και εύρεσης της μέγιστης απόστασης από τη αρνητικά ιδεατή λύση ταυτίζονται για εύρος ίσο με το ιδεαό και αντί ιδεατό σημείο.

Κλασικές τεχνικές πολυκριτηριακής ανάλυσης (γ) Μέθοδος ε-περιορισμών

- Η μέθοδος συνίσταται στη βελτιστοποίηση του πλέον κρίσιμου ή πρωτεύοντος κριτηρίου $f_p(\mathbf{x})$, χειριζόμενοι τα υπόλοιπα κριτήρια ως μαθηματικούς περιορισμούς που φράσσονται από αντίστοιχα επιτρεπόμενα όρια, ε_j.
- Διαμορφώνεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης της βαθμωτής συνάρτησης $f_p(\mathbf{x})$, στην οποία εισάγονται $m - 1$ περιορισμοί της μορφής $f_j(\mathbf{x}) \le \varepsilon_j$.
- Διαφοροποιώντας το πρωτεύον κριτήριο και μεταβάλλοντας τις τιμές των περιορισμών, προκύπτουν λύσεις που είναι βέλτιστες Pareto.
- Τα μειονεκτήματά της μεθόδου είναι αφενός η προσθήκη περιορισμών στο τροποποιημένο πρόβλημα, παρόλο που το αρχικό δεν διατυπώνεται, υποχρεωτικά, με περιορισμούς, και αφετέρου η μη εξασφαλισμένη εύρεση εφικτών λύσεων, στην περίπτωση που τα όρια ε_j είναι μη εφικτά ή, έστω, υπερβολικά αυστηρά.



Συνάρτηση χρησιμότητας (κατά άλλους συνάρτηση αξιών)

- Οποιασδήποτε άλλος τρόπος σύνθεσης συναρτήσεων στόχου ή κριτηρίων
- Εφαρμογή σε διακριτά προβλήματα ή προβλήματα βελτιστοποίησης
- **Αντί πολλά κριτήρια, ένα συνθετικό κριτήριο**
- **Στόχος: Συναινετική λύση**
- **Καταλήγω σε ένα «εικονικό» μονοκριτηριακό πρόβλημα**
- Δυνατότητα ενσωμάτωσης της αβεβαιότητας
- Έλεγχος να η λύση είναι μη κατώτερη

Μέθοδοι υπεροχής

- Διμερής συγκρίσεις, κατώφλι αδιαφορίας, δικαίωμα στην αρνησικυρία
- Σε αντίθεση με την πολυκριτηριακή θεωρία χρησιμότητας, στόχος της θεωρίας των σχέσεων υπεροχής δεν είναι η ανάπτυξη μιας συνάρτησης βαθμολόγησης των εναλλακτικών δραστηριοτήτων, όπως η συνάρτηση αξιών, αλλά η πραγματοποίηση διμερών συγκρίσεων μεταξύ των εναλλακτικών. Βασικό κύτταρο της μεθόδου αποτελεί η μονοκριτηριακή σύγκριση, δηλαδή η διμερής σύγκριση των εναλλακτικών για κάθε κριτήριο ξεχωριστά. Οι ενδοκριτηριακές προτιμήσεις του αποφασίζοντα αντανακλώνται στην επιλογή κατάλληλων κατωφλιών, όπως του κατωφλιού προτίμησης, ισοδυναμίας και αρνησικυρίας.
- Συνήθως, εφαρμόζεται μόνο σε διακριτές εναλλακτικές

Γαλλική σχολή και Αμερικάνικη σχολής στα πολλαπλά κριτήρια

- Αμερικάνικη σχολή, έμφαση στη βελτιστοποίηση και στην προσαρμοστικότητα
- Γαλλική σχολή υπό τον Roy, διμερείς συγκρίσεις, έμφαση στις διμερείς συγκρίσεις και σε ισόρροπες λύσεις (με τη χρήση του κανόνα της αρνησικυρίας). Σημαντική μαθηματική θεμελίωση, χρήση της ασαφούς λογικής και συνόλων,

Εφαρμογή: Για τις παρακάτω εναλλακτικές να γίνει η κατάταξη των εναλλακτικών (διακριτό πρόβλημα) με βάση το συμβιβαστικό προγραμματισμό

Table 2

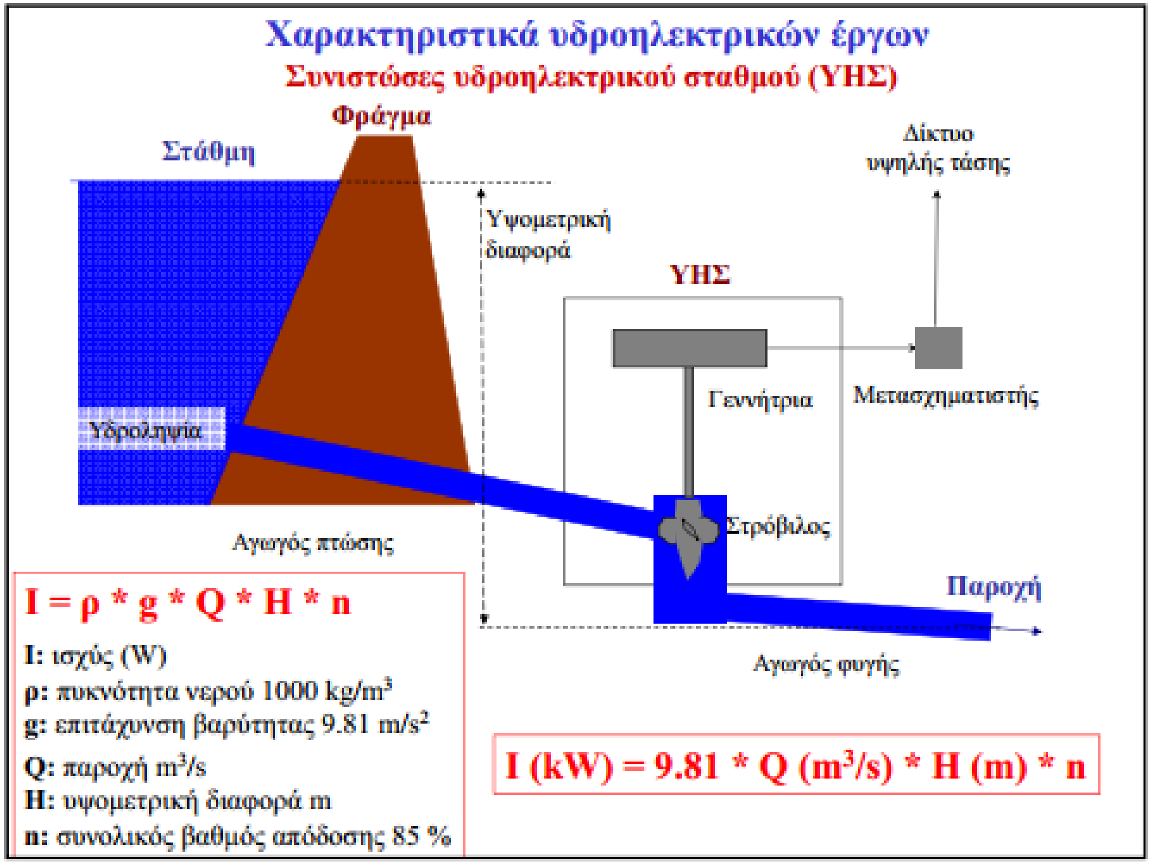
Crit.	Min or Max	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Type of crit.	Parameters	
f_1	Min	80	65	83	40	52	94	II	$q = 10$	
f_2	Max	90	58	60	80	72	96	III		$p = 30$
f_3	Min	6	2	4	10	6	7	V	$q = 0.5$	$p = 5$
f_4	Min	5.4	9.7	7.2	7.5	2.0	3.6	IV	$q = 1$	$p = 6$
f_5	Min	8	1	4	7	3	5	I	–	
f_6	Max	5	1	7	10	8	6	VI	$\sigma = 5$	

Brans and Vincle, 1986

Όπου g η f αναπαριστά την αξιολόγηση μίας εναλλακτικής ως προς ένα κριτήριο Σε επόμενη έκδοση (φέτος πρώτη φορά) θα διορθωθεί

f_1 εργατικό δυναμικό
f_2 ισχύς
f_3 Κόστος κατασκευής
f_4 Κόστος συντήρησης
f_5 Αριθμός χωριών που εκκενώνονται’
f_6 Βαθμός ασφάλειας

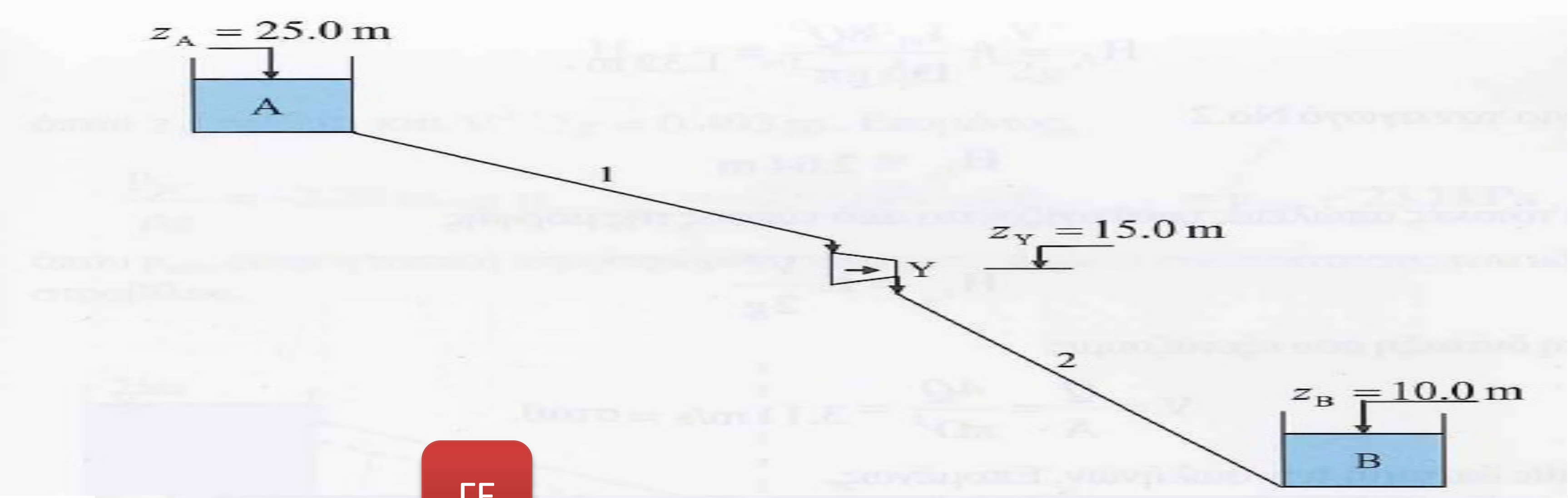
f_1: manpower,
f_2: power (MW),
f_3: construction cost $(10^{9}\ \$)$,
f_4: maintenance cost $(10^{6}\ \$)$,
f_5: number of villages to evacuate,
f_6: security level.



Μαμάσης , 2013

Υδρ. σε μοντέλο δύο δεξαμενών

Λιακόπουλος, Υδραυλική



Ολικό **θεωρητικό** δυναμικό

$I_θ = 9810 \times Q(m^3/s) \times H(m)$ [W]

- Δε λαμβάνονται οι απώλειες λόγω εξάτμισης
- Το ωφέλιμο φορτίο, *H* υπολογίζετε με άξονα αναφοράς τον τελικό αποδέκτη (π.χ θάλασσα)
- Συνεχής λειτουργία με απόδοση 100%

Τεχνητά εκμεταλλεύσιμο δυναμικό

$$I_{\mathrm{T}} \approx \left(0.2 \div 0.80\right) \mathrm{I}_{\theta}$$

[W]

- Αφαιρούνται οι απώλειες στη λεκάνη απορροής και στην υδροδυναμική εγκατάσταση

Οικονομικά εκμεταλλεύσιμο δυναμικό

$$\mathrm{I}_0 \approx \left(0.2 \div 0.80\right) I_{\mathrm{T}} \approx \left(0.1 \div 0.65\right) \mathrm{I}_{\theta}$$

[W]

- Είναι το τεχνητώς εκμεταλλεύσιμο δυναμικό το οποίο μπορεί ν αξιοποιηθεί από τα τεχνικά έργα και να είναι οικονομικά συμφέρον

Βελτιστοποίηση αγωγού

- Μικρό κόστος για μικρή διάμετρο αλλά μεγαλύτερες απώλειες ενέργειας
- Μικρότερο διαθέσιμο φορτίο για παραγωγή ενέργειας
- Βέλτιστη διάμετρος
- Προσοχή ση διαχρονική αξία του χρήματος σύγκριση με τα ποσά ανηγμένα στην ίδια βάση
- Κριτήριο: max(B-C)

Ίδια μονοτονία….
Για να έχω στόχο παντού τη μεγιστοποίηση των κριτηρίων, όπου αυτό δε συμβαίνει αλλάζω το πρόσημο

Table 2. Transformed payoff matrix

Crit. / Alt.	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	-80	90	-6	-5.4	-8.0	5
A_2	-65	58	-2	-9.7	-1.0	1
A_3	-83	60	-4	-7.2	-4.0	7
A_4	-40	80	-10	-7.5	-7.0	10
A_5	-52	72	-6	-2.0	-3.0	8
A_6	-94	96	-7	-3.6	-5.0	6

Parameters required for each criterion	Notation	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Maximum value	M_j	-40.00	96.00	-2.00	-2.00	-1.00	10.00
Minimum value	m_j	-94.00	58.00	-10.00	-9.70	-8.00	1.00
Ideal value	f_j^*	-40.00	96.00	-2.00	-2.00	-1.00	10.00
Weights	w_j	1	1	1	1	1	1
Normalized* weights	w_j	0.1666	0.1666	0.1666	0.1666	0.1666	0.1666

Μέγιστες και ελάχιστες τιμές. Με βάση τις αξιολογήσεις των εναλλακτικών
Προσέγγιση ίσων βαρών. Άθροισμα βαρών ίσο με τη μονάδα.

$$L_p(a) = \left[\sum_{j=1}^{J} w_j^p \left| \frac{f_j^* - f_j(a)}{M_j - m_j} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Πηγαίνω μία-μία εναλλακτική ξεχωριστά, κριτήριο, κριτήριο

$$\text{Criterion } C_1 = \left[0.1666^p \left| \frac{(-40.00 - (-80.00))}{(-40.00 - (-94.00))} \right|^p \right] = 0.1234074^p$$

$$\text{Criterion } C_2 = \left[0.1666^p \left| \frac{(96.00 - 90.00)}{(96.00 - 58.00)} \right|^p \right] = 0.02630526^p$$

$$\text{Criterion } C_3 = \left[0.1666^p \left| \frac{(-2.00 - (-6.00))}{(-2.00 - (-10.00))} \right|^p \right] = 0.0833^p$$

$$\text{Criterion } C_4 = \left[0.1666^p \left| \frac{(-2.00 - (-5.4))}{(-2.00 - (-9.70))} \right|^p \right] = 0.07356364^p$$

Kummar, 2014

$$\text{Criterion } C_5 = \left[0.1666^p \left| \frac{(-1.00 - (-8.00))}{(-1.00 - (-8.00))} \right|^p \right] = 0.1666^p$$

$$\text{Criterion } C_6 = \left[0.1666^p \left| \frac{(10.00 - 5.00)}{(10.00 - 1.00)} \right|^p \right] = 0.09255556^p$$

Αξιολόγηση για την Α1 εναλλακτική με βάση το σύνολο των κριτηρίων για διάφορες τιμές του p.

$$\left\{0.1234074^{p}+0.02630526^{p}+0.0833^{p}+0.07356364^{p}+0.1666^{p}+0.09255556^{p}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

For $p = 1$, $L_1(\mathrm{A}_1)$ is as follows:

$$\left\{0.1234074+0.02630526+0.0833+0.07356364+0.1666+0.09255556\right\}^{\frac{1}{1}}=0.56573$$

For $p = 2$, $L_2(\mathrm{A}_1)$ is as follows:

$$\left\{0.1234074^{2}+0.02630526^{2}+0.0833^{2}+0.07356364^{2}+0.1666^{2}+0.09255556^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}=0.25415$$

For $p = 10$ (approximating for ∞), $L_{10}(\mathrm{A}_1)$ is as follows:

$$\left\{0.1234074^{10}+0.02630526^{10}+0.0833^{10}+0.07356364^{10}+0.1666^{10}+0.09255556^{10}\right\}^{\frac{1}{10}}=0.16748$$

Table 4. L_p - metric values and corresponding ranking pattern

Alternative	$p = 1$	$p = 2$	$p = \infty$
A_1	0.56573 (4)	0.25415 (3)	0.16748 (4)
A_2	0.57693 (6)	0.29869 (6)	0.18595 (6)
A_3	0.57159 (5)	0.25512 (4)	0.16087 (2)
A_4	0.49855 (3)	0.25929 (5)	0.17034 (5)
A_5	0.31017 (1)	0.15171 (1)	0.10620 (1)
A_6	0.47459 (2)	0.23311 (2)	0.16682 (3)

Τελική αξιολόγηση,
Όσο το p αυξάνει οδηγούμαστε σε τελεστή της ένωσης

$$L_p(a) = \left[\sum_{j=1}^{J} w_j^p \left| \frac{f_j^* - f_j(a)}{M_j - m_j} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Kummar, 2014

Σχόλιο: Από πολλούς το βάρος, w στην παραπάνω εξίσωση δεν υψώνεται σε δύναμη p