

{ Βασικές έννοιες στη
(συμβατική) βελτιστοποίηση. }

• Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή αν (σε οποιοδήποτε υποσύνολο S του \mathbb{R}^n)

$$f[\alpha x_A + (1-\alpha)x_B] \leq \alpha f[x_A] + (1-\alpha)f[x_B]$$

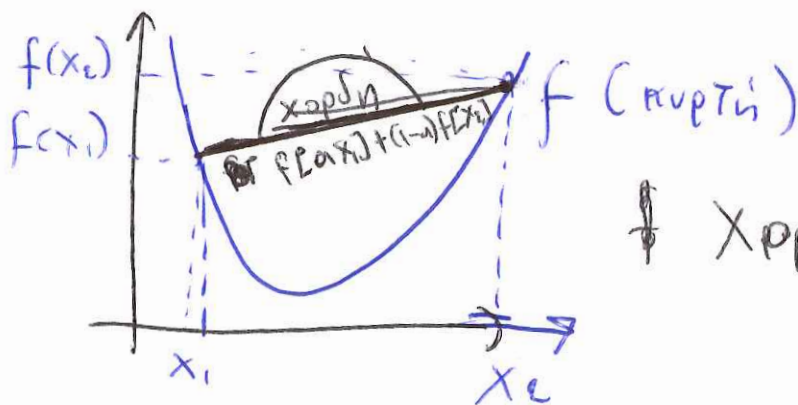
($\forall x_1, x_2 \in S$ και $0 < \alpha < 1$)

• Γνήσια κυρτή αν ισχύει μόνο η ανισότητα.

• Γεωμετρική ερμηνεία: Η χορδή που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται πάνω από το γράφημα της $f(x)$ που ενώνει $f(x_1)$, $f(x_2)$

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \succ 0 \rightarrow \text{τότε η } f \text{ είναι γνήσια κυρτή}$$

(πομπάκι
όρδιο)



$$\dagger \text{χορδή} \geq f(x_1 \text{ και } x_2)$$

Κοίλη Συναρτηση f:

- $f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \geq \alpha f[x_1] + (1-\alpha)f[x_2]$

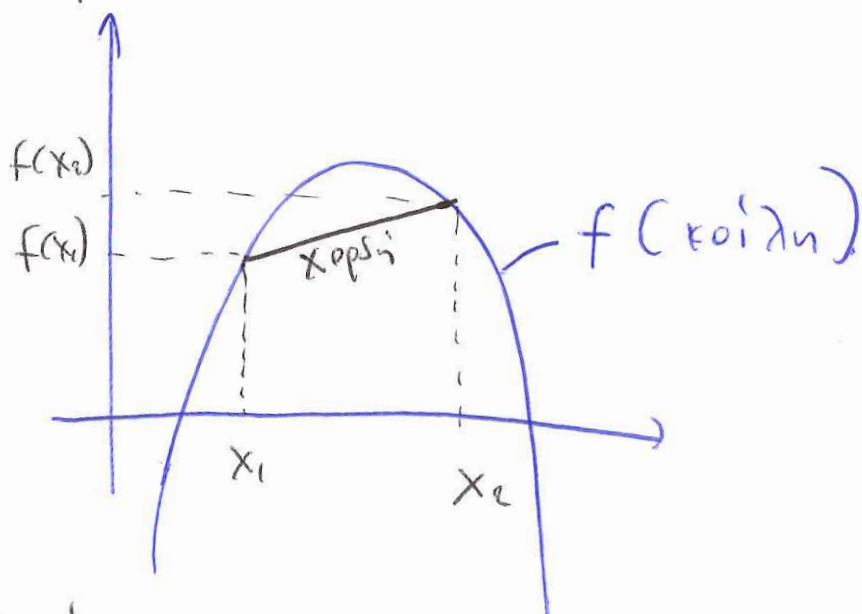
f (μεταξύ x_1 και x_2) \geq χορδή

- Αν δεν ισχύει η ισότητα, γν. κοίλη f .

- $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} < 0 \rightarrow$ γν. κοίλη.

- γεωμετρική ερμηνεία: Η χορδή που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ βρίσκεται κάτω από το γράφημα της $f(x)$ που εκώχει $f(x_1)$ και $f(x_2)$

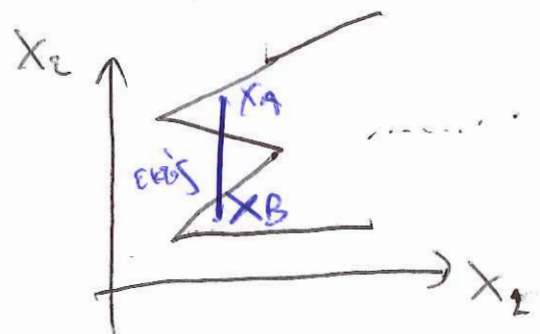
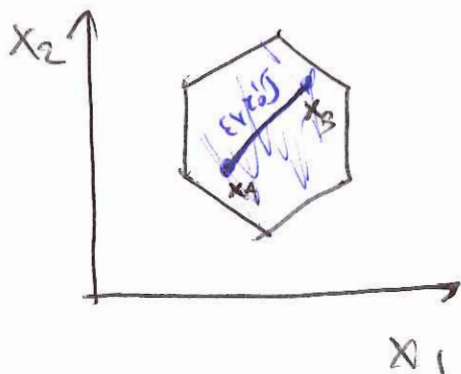
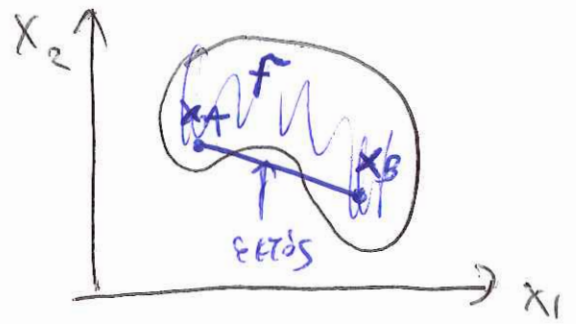
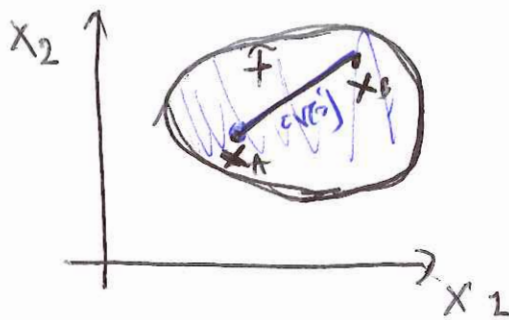
(ποτηράκι
τούμπα)



- Αν η f είναι κυρτή, η $-f$ είναι κοίλη.

Κυρτό Σύνολο εφικτών λύσεων
(με βάση τους περιορισμούς)

\mathcal{F} είναι κυρτό σύνολο αν η χορδή που ενώνει
κάθε ζεύγος (x_A, x_B) ανήκει επίσης στο σύνολο \mathcal{F}



Κυρτά σύνολα

μη κυρτά σύνολα

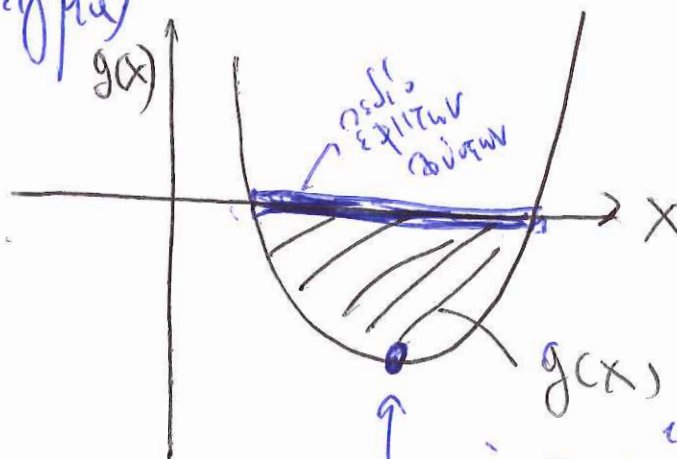
3

④ Ένα Τοπικό μέγιστο (ή ελάχιστο) είναι και ολικό μέγιστο (ή ελάχιστο) στο πεδίο εφικτών λύσεων F αν:

- 1) Το σύνολο εφικτών λύσεων είναι κυρτό
- 2) Η συνάρτηση στόχου είναι κυρτή (για ελάχιστο) [ή κοίλη για μέγιστο].

Αν η συνάρτηση f είναι είναι μονότονη (αύξουσα ή κοίλη) τότε το βέλτιστο αυτό είναι μοναδικό

(Παράδειγμα)



g : κυρτή γνησίως

περιορισμοί

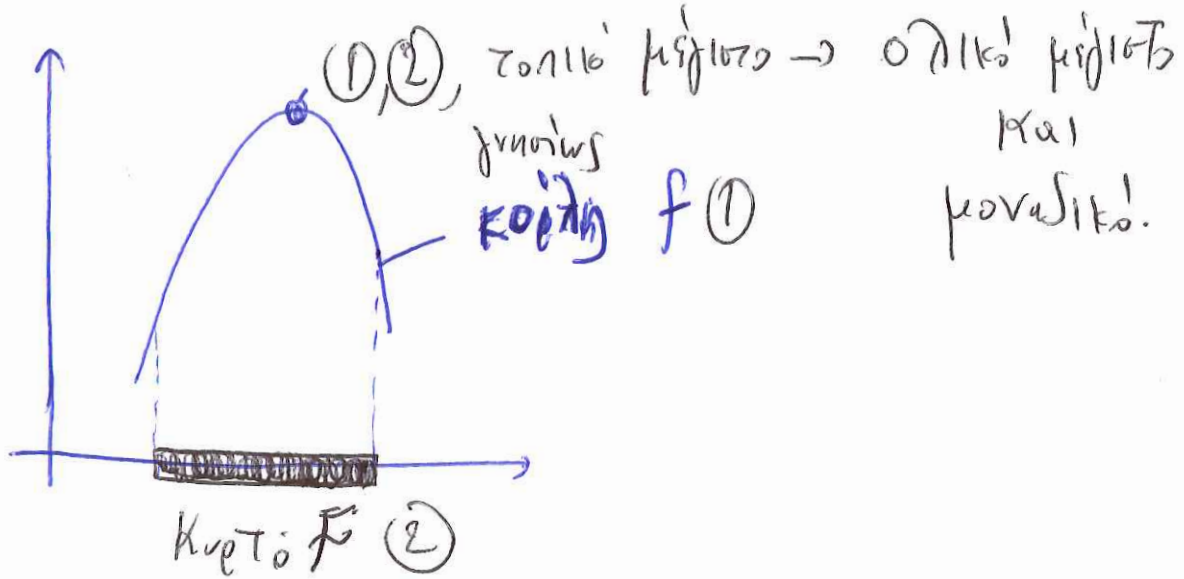
$$g(x) \leq 0$$

$g(x)$ → κυρτό σύνολο

↑ αυτό το ^{τοπικό} ελάχιστο είναι ολικό και μοναδικό

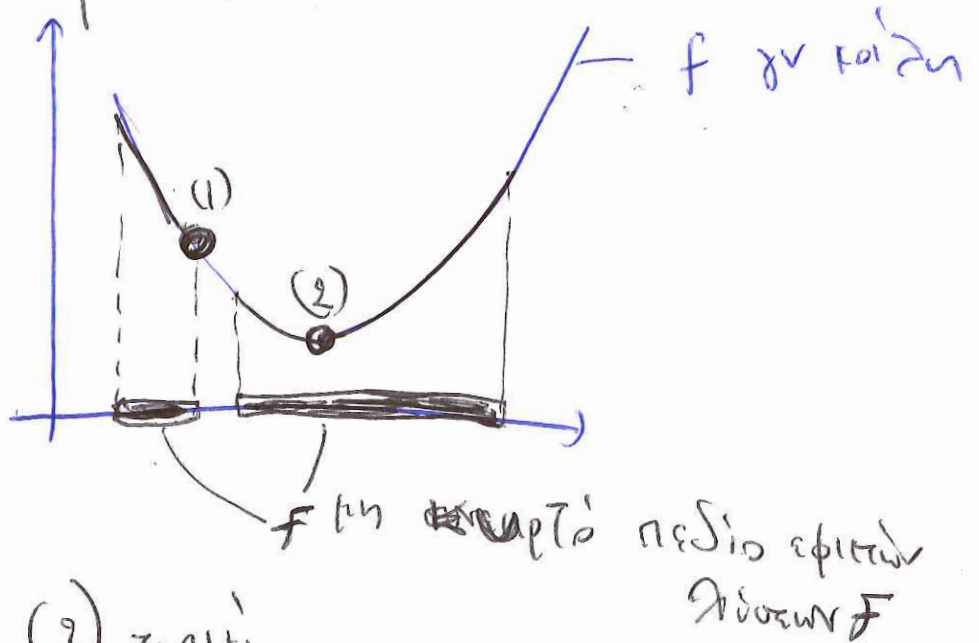
Παραδείγματα ⑤

①



②

f αλλά F μη κυρτό, τοπικό ελάχιστο δεν είναι απαραίτητα και ολικό

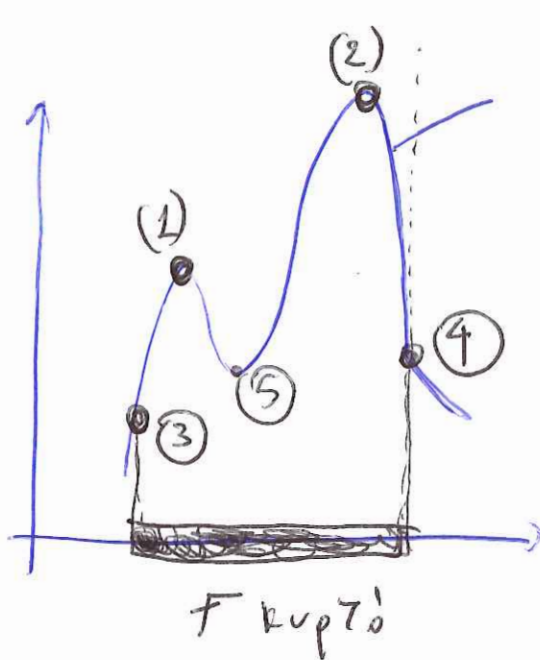


(1) και (2) τοπικά ελάχιστα, αλλά το (2) δεν είναι ολικό.

⑥ Παράδειγμα:

Συνάρτηση f δεν είναι κυρτή, αλλά το
σώμα

σύνολο επιπέδων F είναι κυρτό.



f μη κυρτή
ή
κοίλη

(1), (2) τοπικά μέγιστα, αλλά μόνο το (2)
είναι ολικό μέγιστο...

(3), (4), (5) τοπικά ελάχιστα, αλλά μόνο
το (3) ολικό.