- Διαχείριση Ταμιευτήρα
- Μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση

Δρ Μ.Σπηλιώτη

Διαχείριση υδατικών πόρων

- Ανάγκη σύνθεσης επιστημών

Επιστημονικές και τεχνολογικές περιοχές σχετικές με τη διαχείριση υδατικών πόρων

- Υδρολογία
- Υδραυλική
- Γεωλογία
- Υδρογεωλογία
- Εδαφολογία
- Μετεωρολογία
- Περιβαλλοντική τεχνολογία
- Ενεργειακή τεχνολογία
- Αγροτική τεχνολογία
- Δασοτεχνολογία
- Οικολογία

- Κοινωνιολογία
- Πολιτική επιστήμη
- Οικονομική
- Νομική
- Επιστήμη διεθνών σχέσεων

- Θεωρία πιθανοτήτων, στατιστική, θεωρία στοχαστικών ανελίξεων
- Επιχειρησιακή έρευνα, Ανάλυση συστημάτων
- Θεωρία ελέγχου
- Πληροφορική

Κουτσογιάννης, 2015

Σημερινό μάθημα: έμφαση στη χρήση εννοιών και μεθόδων από την επιχειρησιακή έρευνα

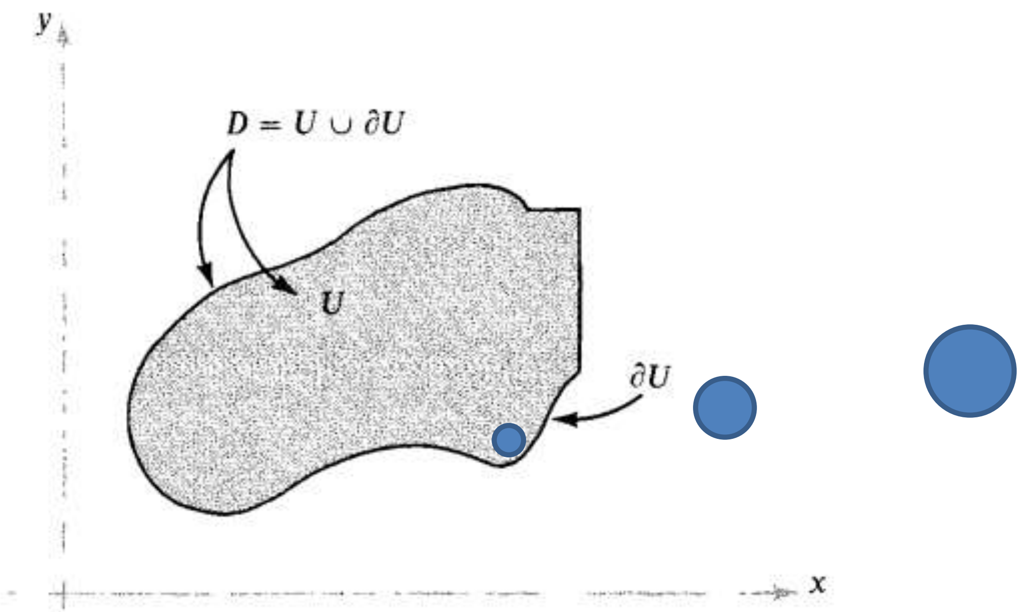
Βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς (π.χ. γραμμική παλινδρόμηση)

Βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς (ή με απλό περιορισμό, ως καρτεσιανό γινόμενο)

- Μηδενισμός μερικών παραγώγων
- Έλεγχος δεύτερης τάξης παραγώγων
- Γραμμική παλινδρόμηση: ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού αθροίσματος των αποκλίσεων (μέτρηση- γραμμικό μοντέλο)
- Δες βοηθητικές σημειώσεις

Γενίκευση....

- Μία συνεχή συνάρτηση πολλαπλών μεταβλητών παίρνει μία ολική και μία μέγιστη τιμή σε κάθε κλειστή οριοθετημένη περιοχή στην οποία ορίζεται (διάβασε σύνολο εφικτών λύσεων).
- Τα (υποψήφια σημεία) είναι εσωτερικά σημεία ή τα σύνορα του πεδίου ορισμού.



Θα υπάρχει σίγουρα ελάχιστο και μέγιστο η στο εσωτερικό U ή στο όριο

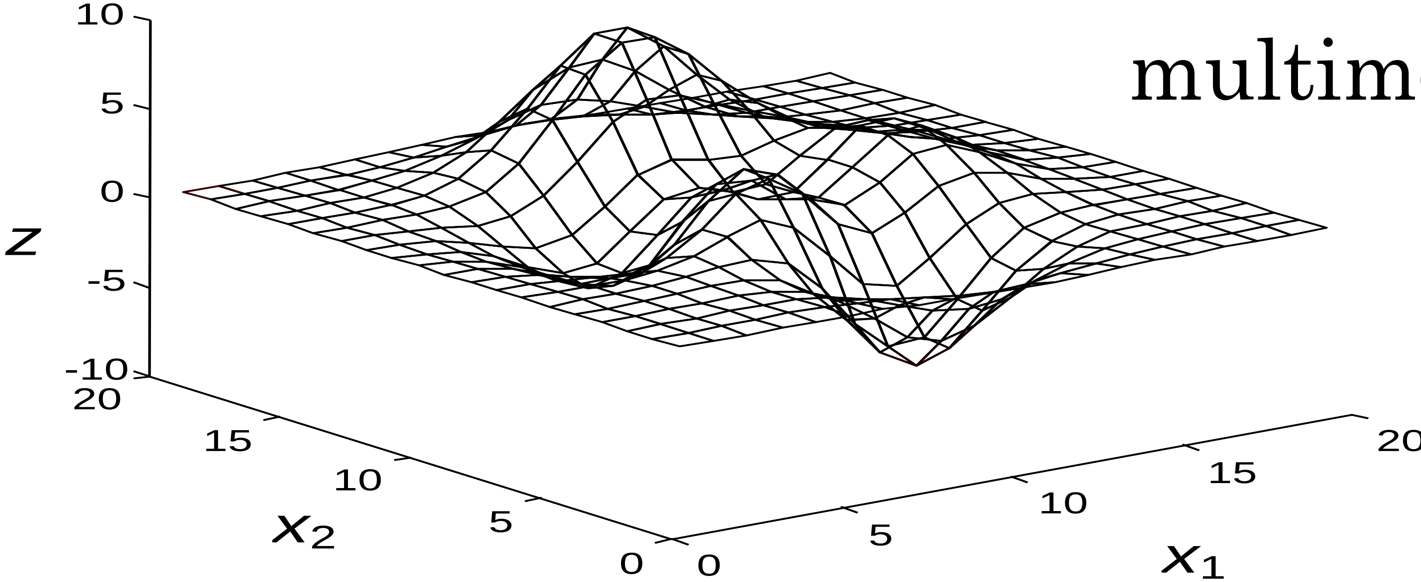
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ, ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΑ ΤΟΠΙΚΑ ΒΕΛΤΙΣΤΑ

$$z = 3(1 - x_1)^2 \exp\left(-x_1^2 - (x_2 + 1)^2\right)$$

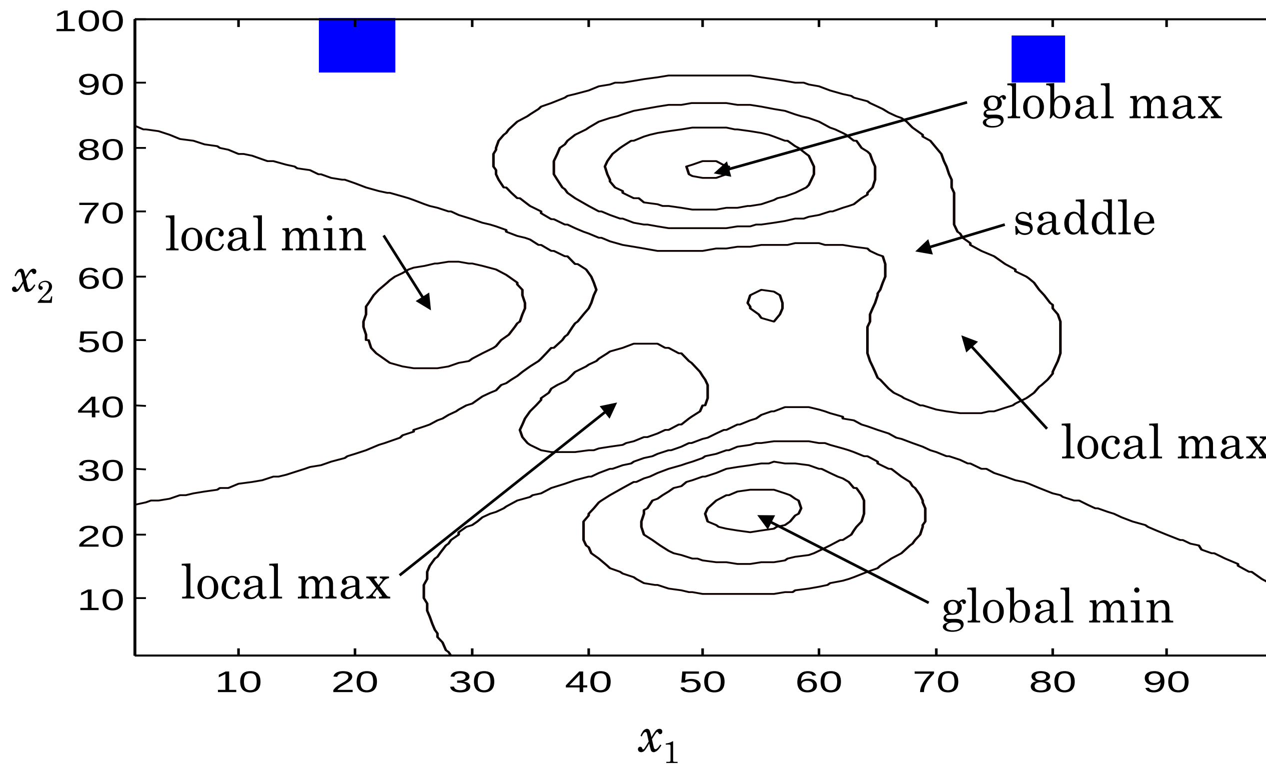
$$-10(0.2x_1 - x_1^3 - x_2^5)\exp(-x_1^2 - x_2^2)$$

$$-1/3\exp\left(-(x_1 + 1)^2 - x_2^2\right)$$

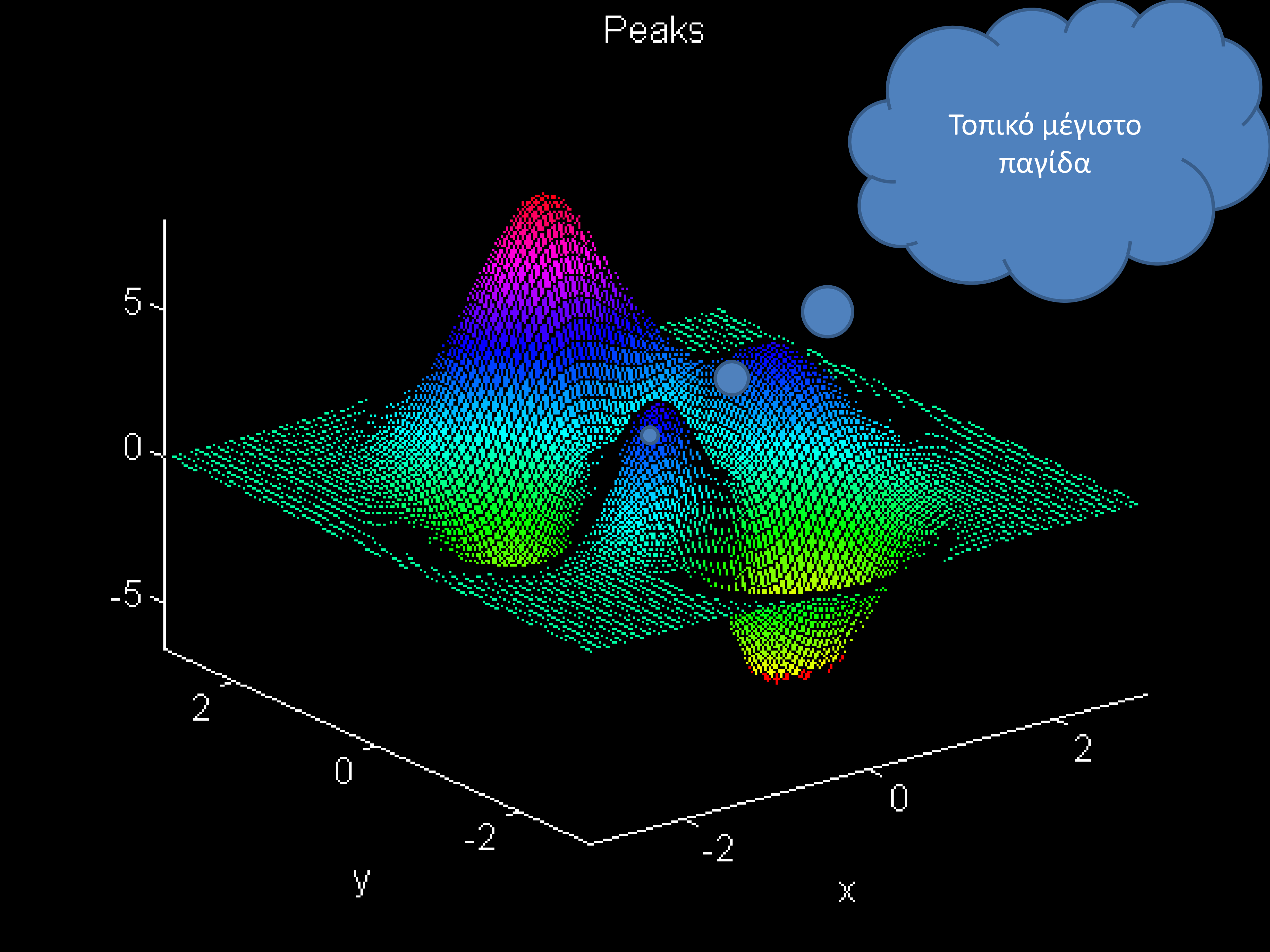
multimodal!



z
x2
x1



global max
saddle
local min
local max
local max
global min
x2
x1


Peaks
Τοπικό μέγιστο
παγίδα
5
0
-5
2
0
-2
y
-2
0
2
x

Βελτιστοποίηση με περιορισμούς (π.χ. γραμμικός προγραμματισμός)

Mathematical Description

Minimize : $f(\mathbf{x})$ objective function

Subject to: $\begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \text{equality constraints} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} & \text{inequality constraints} \end{cases}$

where $\mathbf{x} \in \Re^n$, is a vector of n variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$ is a vector of equalities of dimension m_1

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$ is a vector of inequalities of dimension m_2

Γενική διατύπωση γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης συμβατικού τύπου --χωρίς άμεση προσομοίωση

Γραμμικός προγραμματισμός

Συνάρτηση στόχου
Περιορισμοί } γραμμικές εξισώσεις

- Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

c_i : σταθεροί συντελεστές

x_i : μεταβλητές απόφασης

- Περιορισμοί: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k \qquad k = 1, 2, \ldots, m$

m ανισότητες, n άγνωστοι

Χρυσάνθου, 2013

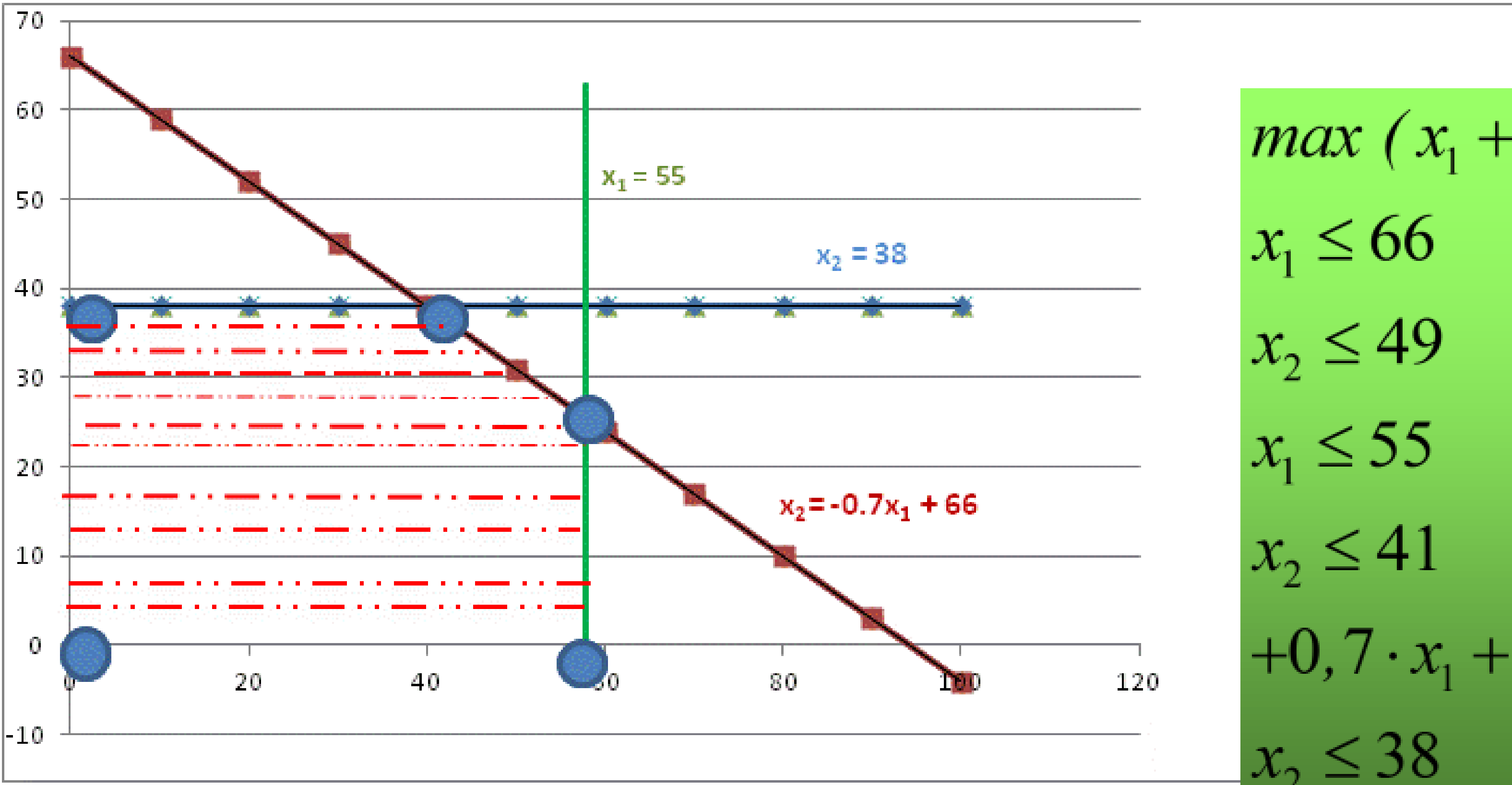
Συνθήκες προσήμου: $x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

(θετικές εισροές, αποθηκεύσεις κ.λπ.)

Κατανόηση γραμμικού προγραμματισμού

- **Συνάρτηση στόχου**: π.χ. επιδιωκόμενο κέρδος (μία συνάρτηση συμμετοχής)
- **Μεταβλητές απόφασης, π.χ. απολήψιμες ποσότητες νερού (μη αρνητικές ποσότητες)**
- **Περιορισμοί**, περιορισμοί διαθεσιμότητας νερού
  - Υλικοί περιορισμοί
- Λύση εντός του εφικτού πεδίου (που θα είναι κυρτό)
- ….στα σύνορα και μάλιστα στις κορυφές (για γραμμικό προγραμματισμό)

Κυρτό πεδίο ορισμού, γραμμικός προγραμματισμός λύση στις κορυφές



$$\max\ (x_1 + 1{,}5 \cdot x_2)$$

$$x_1 \le 66$$

$$x_2 \le 49$$

$$x_1 \le 55$$

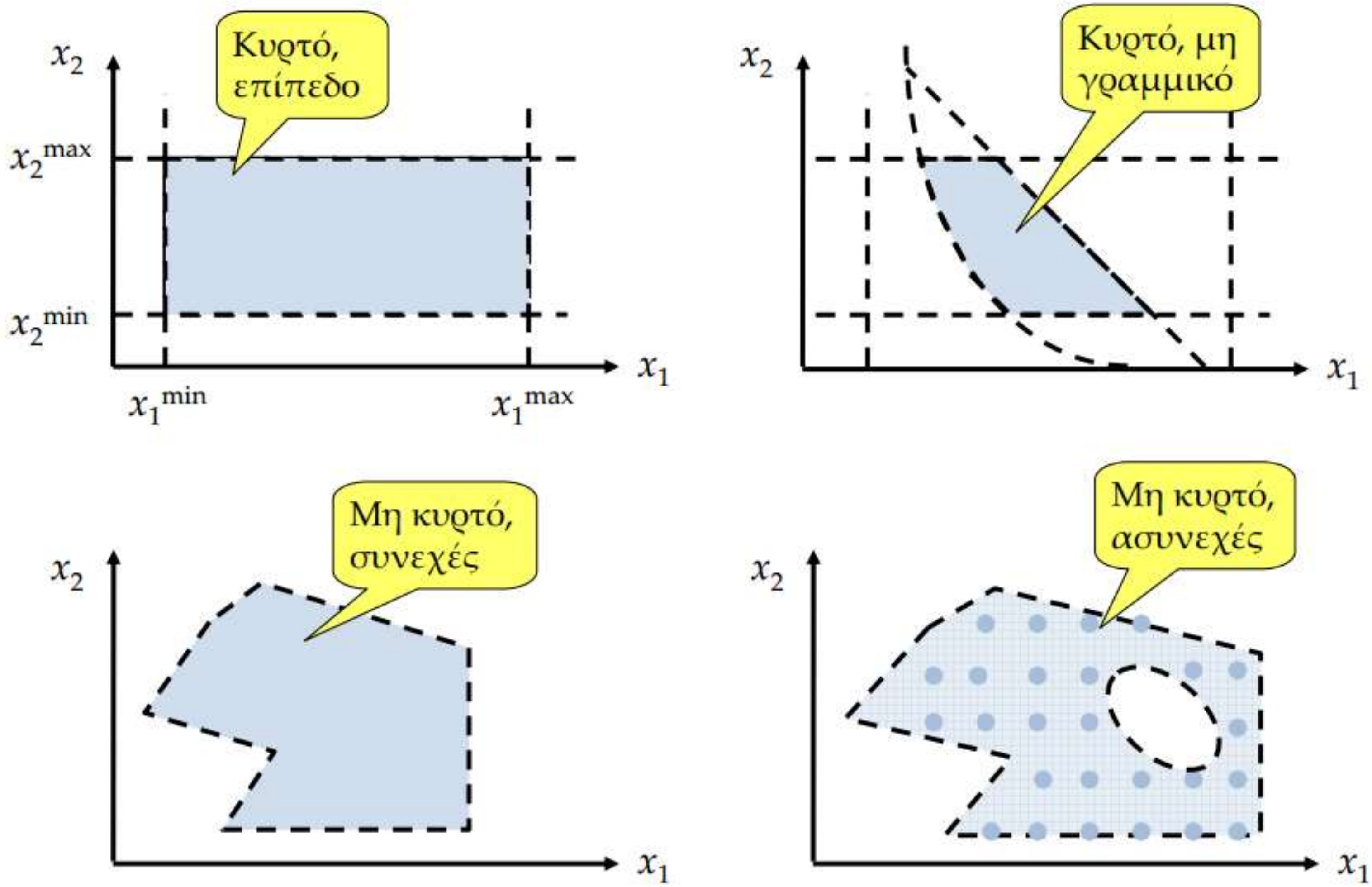
$$x_2 \le 41$$

$$+0{,}7 \cdot x_1 + x_2 \le 66$$

$$x_2 \le 38$$

$$x_1,\ \ x_2 \ge 0$$

Παραδείγματα περιορισμών – εφικτών πεδίων



Πιο γενικά: Ευστρατιαδης, 2013

Αλγόριθμος Simplex

- Βέλτιστη τιμή (μέγιστη ή ελάχιστη) της συνάρτησης στόχου Z
- Αλγόριθμος Simplex

  από κορυφή σε κορυφή

- Σύστημα ανισοτήτων ⇒ σύστημα γραμμικών εξισώσεων

Επίσης lingo, Matlab, εξέλ

- Εισαγωγή επιπλέον αγνώστων μεταβλητών x_{n+k}

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i + x_{n+k} = b_k & k = 1, 2, 3, ----, m \\ x_{n+k} \geq 0 \quad k = 1, 2, 3, ----, m & \end{array}\right\} \text{Περιορισμοί}$$

(συνθήκες προσήμου)

- <u>Με μορφή πινάκων:</u>

Συνάρτηση στόχου: $Z = cx$

Περιορισμοί: $Ax = b, \quad x \geq 0$

x : διάνυσμα γραμμής με $n+m$ στοιχεία

$x_1, x_2, ---, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ------, x_{n+m}$

c : διάνυσμα γραμμής με $n+m$ στοιχεία

$c_1, c_2, ---, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, -----, c_{n+m}$

$c_{n+1}, c_{n+2}, ---, c_{n+m} = 0$

b : διάνυσμα στήλης με m στοιχεία

$b_1, b_2, ---, b_m$

A : πίνακας με m γραμμές και $n+m$ στήλες

Χρυσάνθου, 2013

x_{n+k} για να γίνουν οι ανισότητες → ισότητες (βοηθητικές μεταβλητές)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- $Ax = b \Rightarrow m$ γραμμικές εξισώσεις με $n+m$ αγνώστους
- Εύρεση της λύσης x που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση στόχου Z (αλγόριθμος Simplex)

Τονίζεται ότι οι περιορισμοί είναι υπό την μορφή ανισοτήτων αλλά με τις βοηθητικές μεταβλητές μετατρέπονται σε ισότητες

MATLAB, με πίνακες

linprog

Solve linear programming problems

Equation

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \le b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \le x \le ub. \end{cases}$$

f, *x*, *b*, *beq*, *lb*, and *ub* are vectors, and *A* and *Aeq* are matrices.

Syntax

```
x = linprog(f,A,b)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
x = linprog(problem)
[x,fval] = linprog(...)
[x,fval,exitflag] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(...)
```

Description

`linprog` solves linear programming problems.

`x = linprog(f,A,b)` solves min `f'*x` such that `A*x ≤ b`.

`x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)` solves the problem above while additionally satisfying the equality constraints `Aeq*x = beq`. Set `A = []` and `b = []` if no inequalities exist.

Σχηματοποίηση Υδατικού Συστήματος

- Σχηματοποίηση
  - Υδατικού συστήματος
  - Κόμβοι
  - Κλάδοι

- Καταναλώσεις: «σημειακές» από κόμβους)
- Διαθεσιμότητα νερού: από τον αμέσως ανάντη κλάδο (προσέγγιση). Γνώση από προσομοίωση

- Ανά κλάδο, θεώρηση, ή μη απωλειών η εμπλουτισμού

  η σταθερή παροχή όπως εδώ

- Άλλη προσέγγιση διαθεσιμότητα ανάντη κόμβου στον κατάντη κόμβο κατανάλωσης

- Άλλη προσέγγιση:

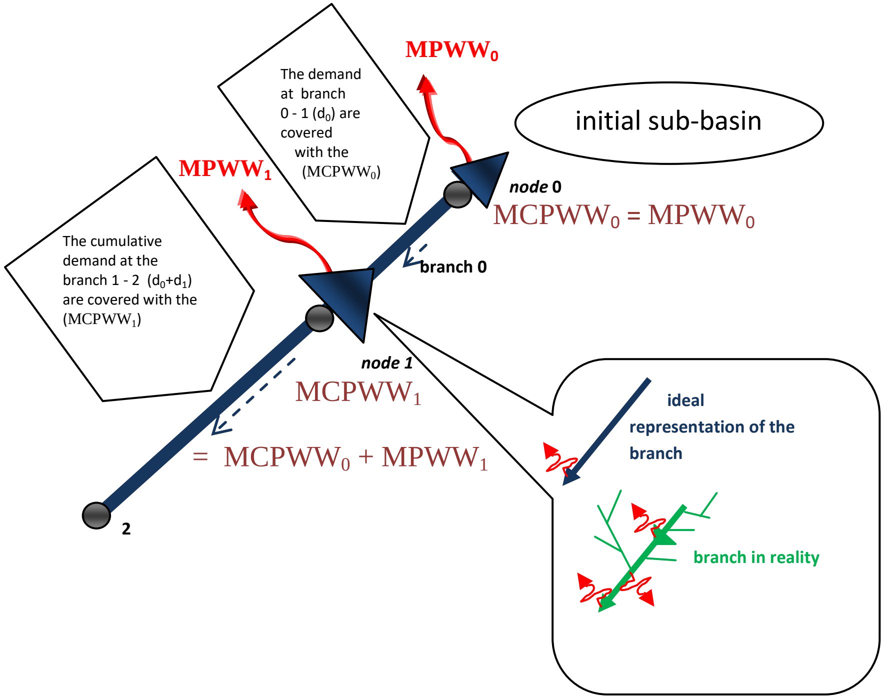


Fig.1: Calculation of the Maximum Cumulative Potential Withdrawal

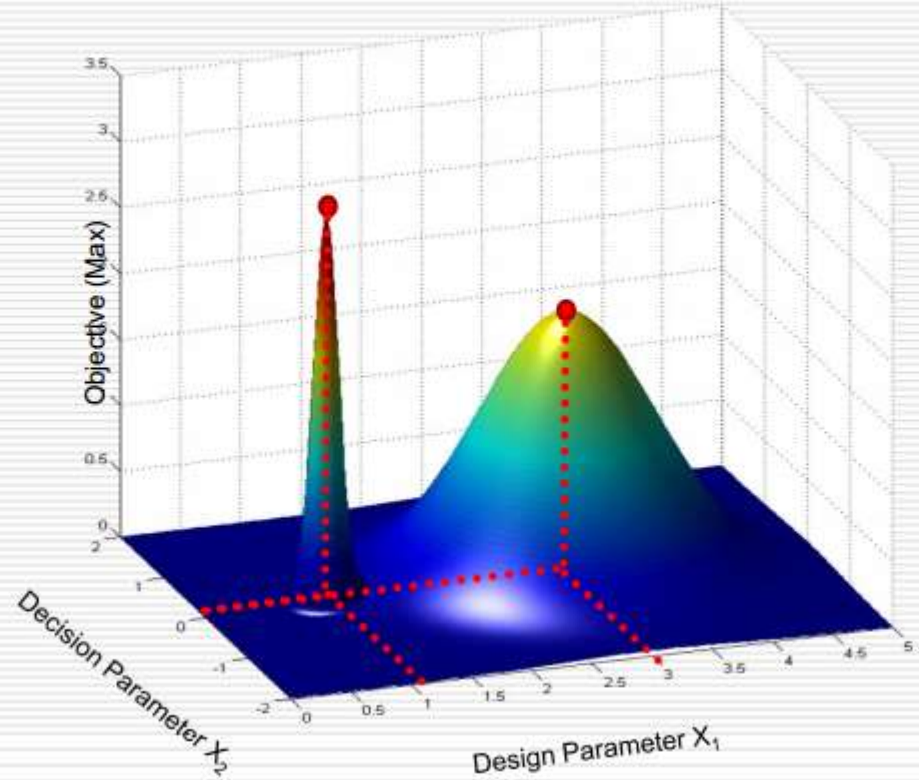
Μερικές διαφορές γραμμικού και μη γραμμικού προγραμματισμού

- Ακόμη και αν το πεδίο εφικτών λύσεων είναι κυρτό σύνολο (π.χ. λόγω ύπαρξης μόνο γραμμικών περιορισμών) το βέλτιστο δεν είναι απαραίτητα στο σύνορο του πεδίου ορισμού
- Το πεδίο των εφικτών λύσεων δεν είναι πάντα κυρτό
- Δυναμική ενσωμάτωση της προσομοίωσης με ευρετικούς αλγορίθμους

Μαρκόπουλος και Ευστρατιάδης, 2013
https://www.itia.ntua.gr/getfile/1109/1/documents/Week1_Introduction_full.pdf

Βέλτιστη λύση: όχι πάντα η κορυφή της καμπύλης

- Αβεβαιότητα στις παραμέτρους
- Αβεβαιότητα στην αντίληψή μας για το πρόβλημα
- Μεταβολές στα δεδομένα και τις διεργασίες του συστήματος
- «Εύρωστη» λύση (robust solution)



Κριτική/ μετάβαση στο επόμενο μάθημα

- Ύπαρξη πολλαπλών στόχων → κριτήρια → στη βελτιστοποίηση, συναρτήσεις στόχου. *(βλπ πολλαπλά κριτήρια, αποτελεσματικές λύσεις)*
- Δεν μπορούμε να παραμείνουμε σε μία απλή συνθετική συνάρτηση (σύνθεση διαφορετικών ποσοτήτων, βάρη???, ισόρροπες αποφάσεις???)
- Ενσωμάτωση της αβεβαιότητας στην απόφαση *(βλπ ασαφή λογική)*
- Ανάγκη πρόβλεψης ευκαμψίας, οι οριακές λύσεις (π.χ. μετά από βελτιστοποίηση με αυστηρούς περιορισμούς) σε μία περίπτωση βλάβης οδηγούν σε καθολική αστοχία απόφαση (βλπ δίκτυα διανομής νερού) *(βλπ ασαφή λογική και πολλαπλά κριτήρια)*
- Αλληλεπιδραστική διαδικασία
- Ανάγκη για πιστότερη προσομοίωση του συστήματος *(βλπ προσομοίωση+βελτιστοποίηση ή ευρετικοί αλγόριθμοι)*

Διαχείριση Ταμιευτήρα

- Βελτιστοποίηση (με παραδοχές)
- Ομοίωμα
- Εκμεταλλεύσιμο Επιφανειακό Υδατικό Δυναμικό

Προσομοίωση VS Βελτιστοποίηση(?)

- Προσομοίωση, διάφορα «τρεξίματα» για την επιλογή της βέλτιστης τιμής, ικανότητα ακριβούς προσομοίωσης. Ενδεχόμενη προσέγγιση βέλτιστης λύσης, καλή λειτουργία
- Συμβατική βελτιστοποίηση. Η προσομοίωση υπεισέρχεται στο πρόβλημα με απλουστεύσεις. Βέλτιστη λύση αλλά ερώτημα για τις παραδοχές.
- Ευρετικοί αλγόριθμοι. Ρωμαλέα ενσωμάτωση της προσομοίωσης προσέγγιση λύσης κοντά στο βέλτιστο, καλύτερη λύση από την πρώτη περίπτωση, σχετική γνώση, προσοχή στα τοπικά ακρότατα.

Βασική εξίσωση στον ταμιευτήρα χωρίς υπερχείλιση

- Εξίσωση της μάζας: (εισροές (I) μείον εκροές (Q) ίσον με μεταβολή στην αποθήκευση (ΔS/Δt):

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = I - Q$$

- Για διακριτό σταθερό βήμα Δt (π.χ. μήνας)

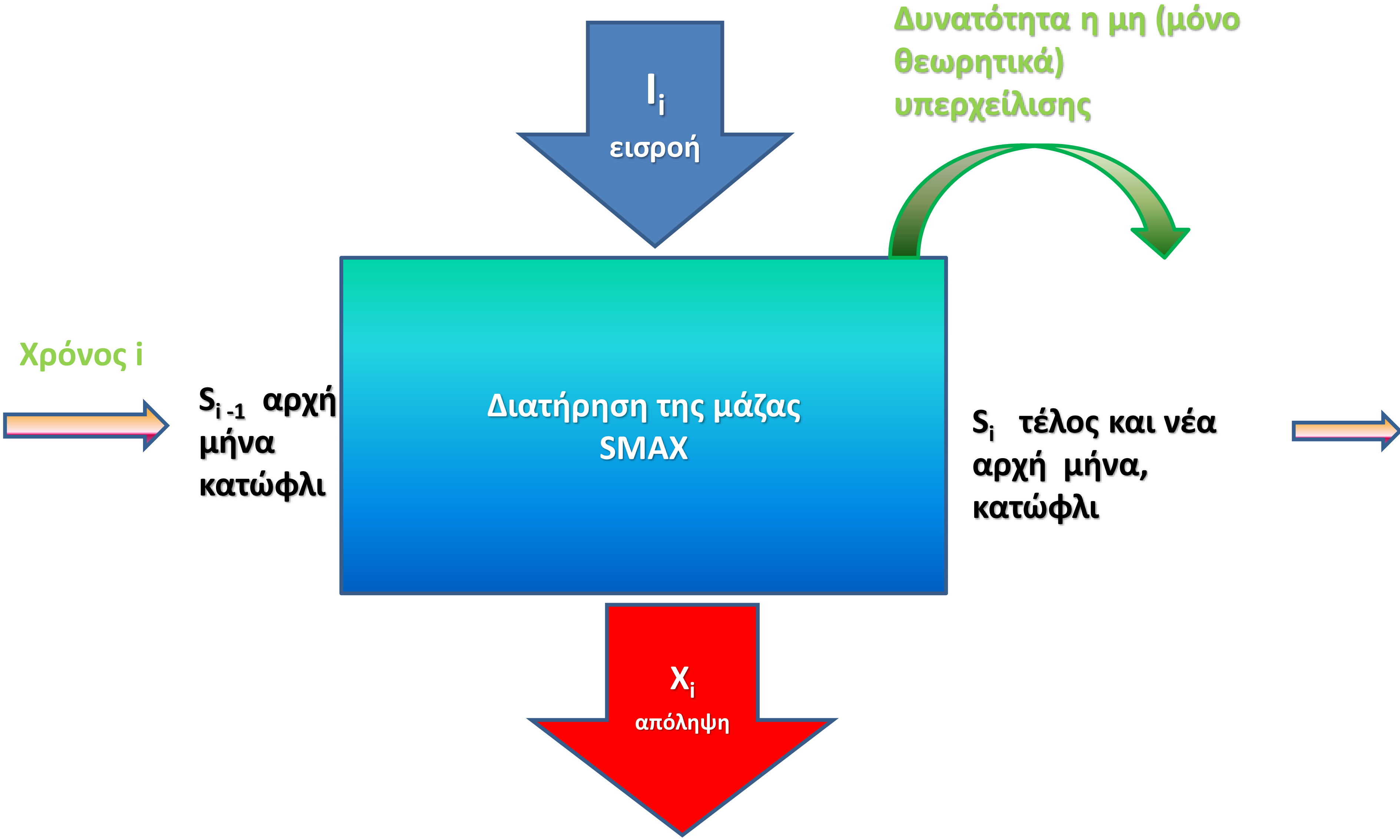
$$S_i = S_{i-1} + \left(I_i - Q_i\right)$$

- Απλούστευση για βελτιστοποίηση και μία πρώτη εκτίμηση: έστω εκροή (ζήτηση) και εισροή νερού από ανάντη λεκάνη

$$S_i = S_{i-1} + \left(I_i - Q_i\right)$$

$$Q_i = \sum_m x_{i,m}$$

Κατά τη διάρκεια του μήνα



Υπερχείλιση

- Περιορισμός μέγιστης χωρητικότητας. Προφανώς:

$$S \le S_{max}$$

- Αν $S < S_{MAX}$ τότε ο ταμιευτήρας δεν υπερχειλίζει
- Διαφορετικά , $S=S_{MAX}$ και η περίσσεια θα γίνει υπερχείλιση

$$R = S_i + I_i - Q_i - S_{MAX}$$

Εξάτμιση

- Στην πραγματικότητα υπάρχει και η εξάτμιση που λαμβάνει χώρα στον ταμιευτήρα (άνω των 1000mm για τα Ελληνικά δεδομένα π.χ. Τήλος 1700mm).
- Η εξάτμιση εξαρτάται από την επιφάνεια του ταμιευτήρα και αυτή εξαρτάται μη γραμμικά από το ύψος στάθμης του νερού στον ταμιευτήρα.
- Η θεώρηση της εξάτμισης οδηγεί σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα.

Παράδειγμα θεώρησης εξάτμισης σε ταμιευτήρα (Ναλμπάντης και τσακίρης, 2008)
-μη γραμμική σχέση

Δίνεται λεκάνη απορροής στην έξοδο της οποίας διατίθεται η χρονοσειρά μηνιαίας απορροής του Πίνακα 2.7. Αυτή προέκυψε από μετρήσεις. Στην έξοδο της λεκάνης έχει κατασκευαστεί ταμιευτήρας ωφέλιμης χωρητικότητας $77.11 \times 10^6\,\mathrm{m}^3$. Το εμβαδόν καθρέφτη του ταμιευτήρα A δίνεται σε km^2 συναρτήσει του αποθέματος S ($\times 10^6\,\mathrm{m}^3$) από την πολυωνυμική σχέση

$$A = -0.00003\,S^2 + 0.0235\,S + 1.4406 \qquad (2.22)$$

Εφαρμογή βελτιστοποίησης σε ταμιευτήρα
-γραμμικός προγραμματισμός
-Δεν επιτρέπουμε υπερχείλιση
-Δε λαμβάνω υπόψη την εξάτμιση
(πρώτη διαστασιολόγηση, μετά τρέχω αναλυτικά το φυσικό ομοίωμα)
Ταμιευτήρας «μονής» σκοπιμότητας
(μία μόνο χρήση νερού)

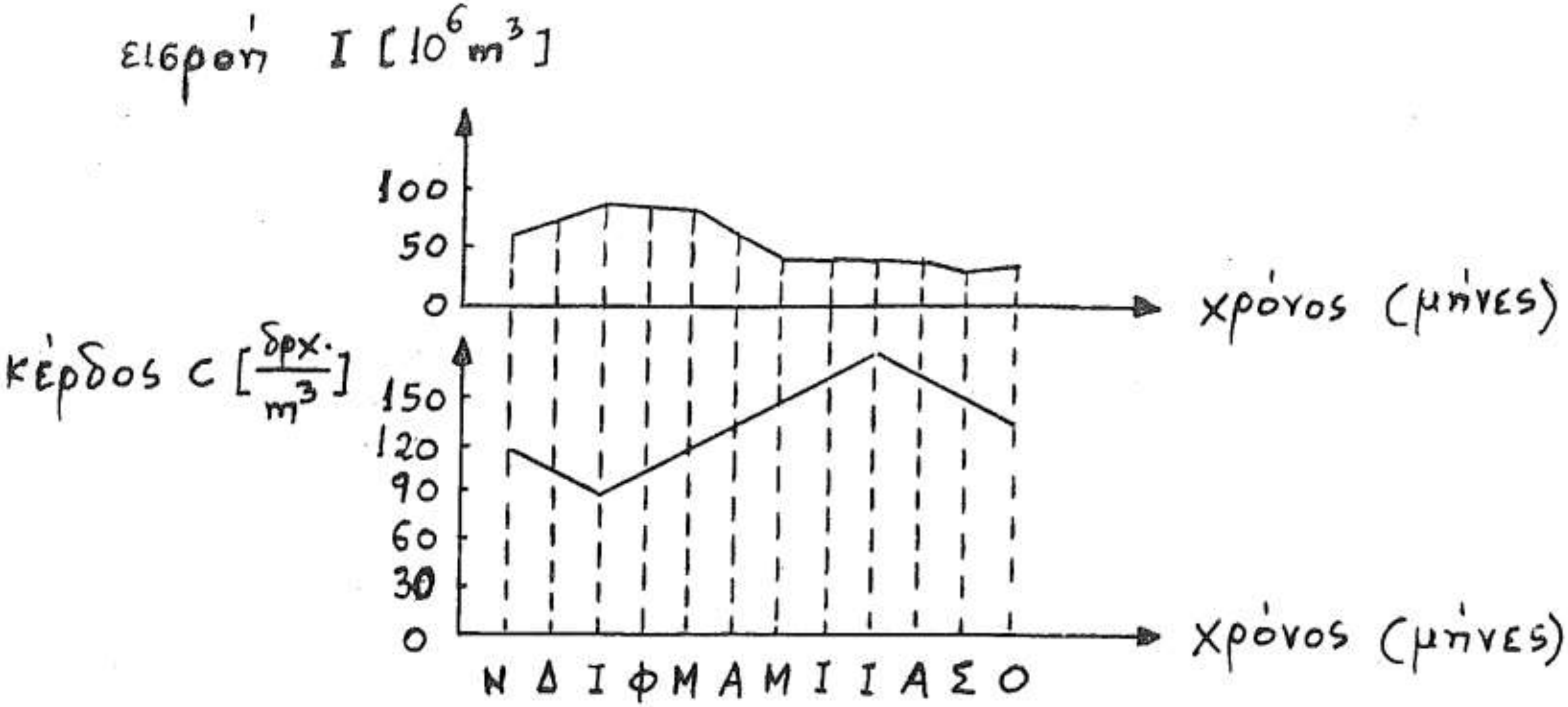
Παράδειγμα γραμμικού προγραμματισμού

- Ταμιευτήρας απλής σκοπιμότητας
- Δίδονται:
  - το υδρογράφημα εισροών σε μέση μηνιαία βάση
  - η καμπύλη του μηνιαίου κέρδους σε δρχ./m^3 νερού
  - χωρητικότητα ταμιευτήρα $S_{max} = 200 \cdot 10^6\ m^3$
  - αποθηκευμένος όγκος νερού στην αρχή του έτους $S_o = 100 \cdot 10^6\ m^3$

Χρυσάνθου, 2013

- Ζητούνται τα υδρογραφήματα των μηνιαίων εκροών και αποθηκεύσεων, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό ετήσιο κέρδος.

Δίνεται επίσης, ότι για κάθε μήνα η ελάχιστη παροχή κατάντη του ταμιευτήρα ορίζεται σε 20·10^6m^3 και η μέγιστη σε 140·10^6m^3


εισροή I [$10^6 m^3$]
100
50
0
χρόνος (μήνες)
κέρδος c [$\frac{δρχ.}{m^3}$]
150
120
90
60
30
0
χρόνος (μήνες)
Ν Δ Ι Φ Μ Α Μ Ι Ι Α Σ Ο

Μαθηματική διατύπωση

x_i : εκροή νερού από τον ταμιευτήρα κατά το μήνα i (μεταβλητή απόφασης)

c_i: τιμή του νερού ανά m^3 κατά το μήνα i (άρδευση)

Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_{i=1}^{12} c_i x_i = max$

Περιορισμοί:

α. Θετικές αποθηκεύσεις στον ταμιευτήρα

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} I_i + S_0 \qquad n=1,2,----,11 \quad (11 \text{ συνθήκες})$$

β. Ετήσιο ισοζύγιο

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = \sum_{i=1}^{12} I_i \qquad \text{(1 συνθήκη)}$$

Δηλαδή, ο αποθηκευμένος όγκος στον ταμιευτήρα θα είναι μικρότερος από τη μέγιστη χωρητικότητα

γ. Μη υπερχείλιση του ταμιευτήρα

$$S_{max} \geq S_o + \sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad n = 1, 2, ----, 11 \qquad \text{(11 συνθήκες)}$$

δ. Ελάχιστη παροχή νερού στον ποταμό κατάντη του ταμιευτήρα: $20 \cdot 10^6$ m^3 ανά μήνα

$$x_i \geq 20 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \qquad i = 1, 2, ----, 12 \qquad \text{(12 συνθήκες)}$$

ε. Μέγιστη επιτρεπόμενη εκροή: $140 \cdot 10^6$ m^3 ανά μήνα

$$x_i \leq 140 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \qquad i = 1, 2, ----, 12 \qquad \text{(12 συνθήκες)}$$

Λύση

Συνάρτηση στόχου

$$Z = 120x_1 + 105x_2 + 90x_3 + 105x_4 + 120x_5 + 135x_6 + 150x_7 + 165x_8 +$$
$$+ 180x_9 + 165x_{10} + 150x_{11} + 135x_{12}$$

x_1 : εκροή το Νοέμβριο

x_2 : εκροή το Δεκέμβριο

κ.λπ.

Περιορισμοί

a. $x_1 \leq I_1 + S_0$

$$x_1 + x_{13} = I_1 + S_0 = (58.6 + 100) \cdot 10^6 = 158.6 \cdot 10$$

x_{13}

Βοηθητική μεταβλητή για μετατροπή της ανισότητας σε ισότητα (για επίλυση χειροκίνητα, δεν είναι απαραίτητη η θεώρηση της σε υπολογιστικά πακέτα)

- Περιορισμός θετικών αποθηκεύσεων στον ταμιευτήρα β. $\sum_{i=1}^{12} x_i = 655.7 \times 10^6$

γ. για $n = 1$

$$S_{max} \geq S_0 + I_1 - x_1 \Rightarrow 200 \times 10^6 \geq (10\ \ 8.6) \cdot 10^6 - x_1$$

Για n =2

$$S_{max} \geq S_1 + (I_2 - x_2) = (S_0 + I_1 - x_1) + (I_2 - x_2)$$

$$S_{max} \geq S_0 + (I_1 + I_2) - (x_1 + x_2)$$

Για n =3

$$S_{max} \geq S_0 + (I_1 + I_2 + I_3) - (x_1 + x_2 + x_1)$$

Δηλαδή ο αποθηκευμένος όγκος στον ταμιευτήρα θέλω να είναι μικρότερος από τη μέγιστη χωρητικότητα
Χωρίς υπερχείλιση

Μη υπερχείλιση του ταμιευτήρα

$$S_{max} \geq S_0 + \sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad n = 1, 2, \ldots, 11 \quad (11 \text{ συνθήκες})$$

$$S_2 = S_1 + (I_2 - x_2) = (S_0 + I_1 - x_1) + (I_2 - x_2) \Leftrightarrow$$

$$S_2 = S_0 + (I_1 + I_2) - (x_1 + x_2)$$

$\acute{o}\mu o\iota\alpha$

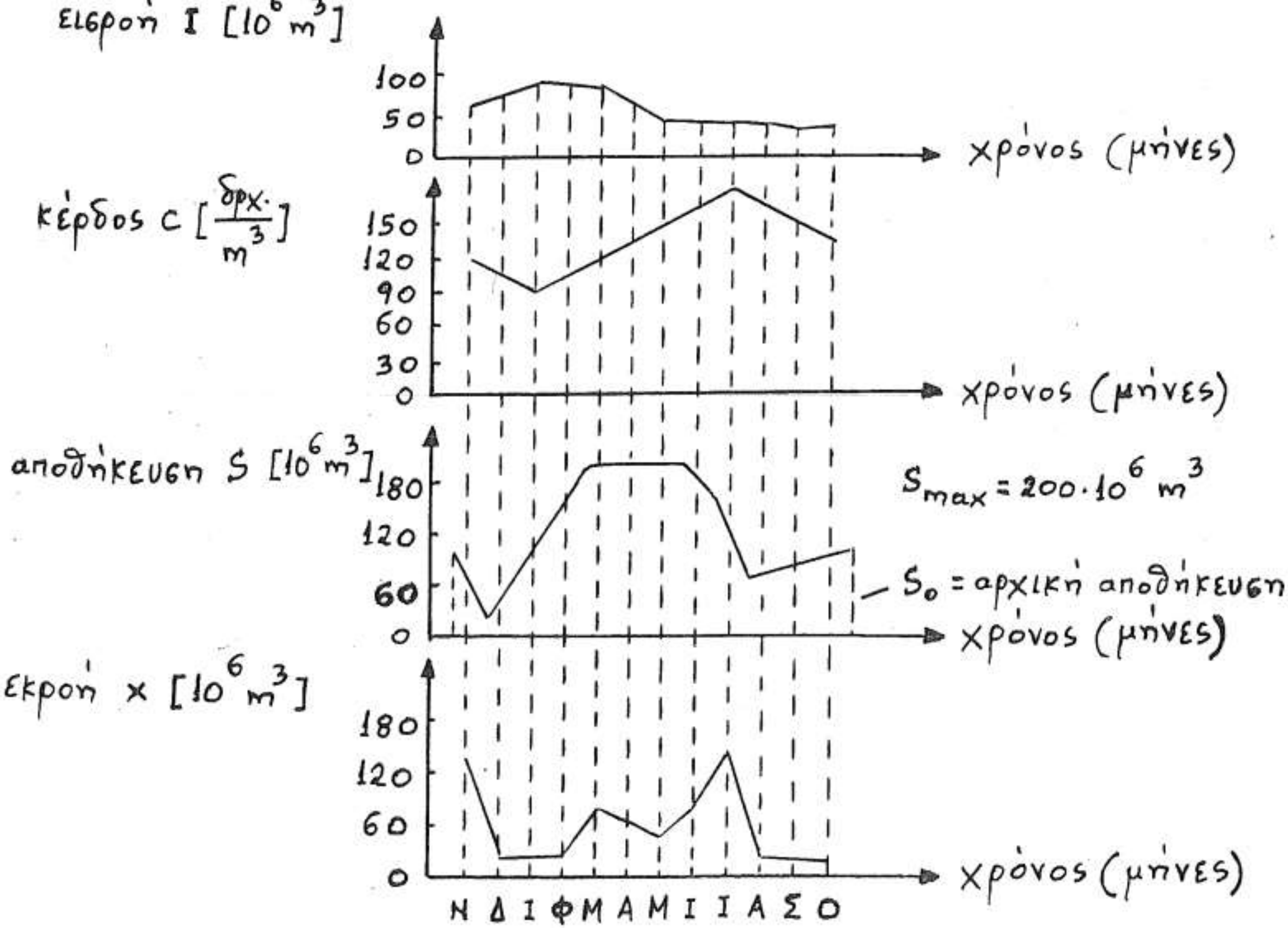
$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} (I_i - x_i)$$

$\gamma\iota\alpha \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; (\mu\acute{\varepsilon}\sigma o) \; \mu\acute{\eta}\nu\alpha :$

$$0 \le S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} (I_i - x_i) \le S_{MAX}$$

Ο δεύτερος περιορισμός είναι επιλογή

- $Z_{max} = 96.3 \times 10^9$ δρχ. ανά έτος (κέρδος)



-Προσομοίωση ταμιευτήρα πολλαπλής χρησιμότητας
(πιο ακριβής θεώρηση γενικά, *μπορεί να υπάρξει υπερχείλιση, θεώρηση της εξάτμισης*)
- πολλαπλές προσομοιώσεις για διαστασιολόγηση
- Αξιοπιστία ταμιευτήρα
- Εκμεταλλεύσιμο Επιφανειακό Υδατικό Δυναμικό με ταμίευση

Συνάρτηση στόχου

- Ποιες είναι οι μεταβλητές απόφασης? (π.χ. χωρητικότητα ταμιευτήρα και/ή προσφορά νερού ανά μήνα σε κάθε χρήστη και/ή κατανομή καλλιεργειών)
- Συνάρτηση στόχου, συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης:
  - Γραμμική ή μη
  - Κόστος (ελάχιστο)
  - Χωρητικότητα ταμιευτήρα
  - Απόκλιση από την προσφορά νερού στόχου για κάθε κατανάλωση
  - Ελάχιστες υπερχειλίσεις
  - Μέγιστο κέρδος από την εκμετάλλευση νερού

Περιορισμοί

- Περιορισμοί που συναρτώνται από τη φυσική προσομοίωση (π.χ. εξίσωση ισοζυγίων μάζας)
- Τεχνικοί –λειτουργικοί. π.χ. περιορισμός για το ύψος πίεσης
- Περιορισμοί υλικών πόρων (π.χ. διαθέσιμη επένδυση)
- Περιορισμοί περιβαλλοντικοί (π.χ. οικολογική παροχή), οικονομικοί, κοινωνικοί κλπ
- Από άλλη σκοπιά, περιορισμοί ως υποκατάστατο των κριτηρίων
- Λύση εντός του πεδίου των εφικτών λύσεων

Επίλυση με lingo

```
max=x1+1.5*x2;
x1<=66;
x2<=59;

x1<=55;
x2<=41;
59-x2>=9;
66+59-x2-0.32*x1>=47;
```

Lingo 19.0 - [Solution Report - ασκηση 5]

File Edit Solver Window Help

```
LINGO/WIN32 19.0.40 (26 Apr 2021), LINDO API 13.0.4099.270

Licensee info: Eval Use Only
License expires: 20 NOV 2021

Global optimal solution found.
Objective value:                              116.5000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             0
Elapsed runtime seconds:                          0.85

Model Class:                                        LP

Total variables:                      2
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                    7
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                       9
Nonlinear nonzeros:                   0



                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        55.00000            0.000000
                                    X2        41.00000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        116.5000            1.000000
                                     2        11.00000            0.000000
                                     3        18.00000            0.000000
                                     4        0.000000            1.000000
                                     5        0.000000            1.500000
                                     6        9.000000            0.000000
                                     7        19.40000            0.000000
```

Value	Reduced Cost
55.00000	0.000000
41.00000	0.000000

Reduced cost: όταν η μεταβλητή έχει μηδενική τιμή στην τελική απόφαση: **μεταβολή της συνάρτησης στόχου** όταν ο περιορισμός αρνητικότητας μεταβληθεί σε περιορισμό >=1 δλδ η **επιλογή τουλάχιστον μίας μονάδας από τη μεταβλητή αυτή λάβει χώρα**.

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	116.5000	1.000000
2	11.00000	0.000000
3	18.00000	0.000000
4	0.000000	1.000000
5	0.000000	1.500000
6	9.000000	0.000000
7	19.40000	0.000000

Περίσσευμα στους περιορισμούς

Δυική αξία των πρώτων υλών

Δλδ

Βελτίωση της τιμής της συνάρτησης στόχους εάν το δεξί μέλος του περιορισμού **αυξηθεί κατά μία μονάδα**