

Ας αμεν. Έστω n εγίωεν διαφορών πρῶτος τὰς n s

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}, \quad n=0,1, \dots \quad (1)$$

ἀνο $a, b, c, d \in (0, \infty)$ καὶ $0 < \frac{a}{d} < 1$, $ad - cb > 0$

Να δείξετε ὅτι καθε ἄνεν τῆς εγίωεν ἐναι φραγμένον ἀπὸ
θετικὸν ἀριθμὸν

Ἄνεν ἔχομε $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d} < \frac{ax_n + b}{d}$, $n=0,1, \dots$

Ἀρα ἔχομε ὅτι

$$x_{n+1} < \frac{a}{d} x_n + \frac{b}{d}, \quad n=0,1, \dots$$

Παίρομε τὴν διαμενὴν εγίωεν πρῶτος τὰς n s:

$$y_{n+1} = \frac{a}{d} y_n + \frac{b}{d}, \quad n=0,1, \dots \quad (2)$$

Θέλομε τὴν ἄνεν y_n τῆς (2) τέτοια ὥστε $y_0 = x_0$.

Γεωμετρική τnv ομογενή τns (2): $y_{n+1} = \frac{a}{d} y_n, n \geq 0, 1, \dots$

Τότε η γενική λύση τns ομογενούς $y_n^{(h)} = \left(\frac{a}{d}\right)^n K, K$ σταθερά

Θα βρούμε ναί μια γενική λύση $y_n^{(u)}$: Θετούμε $y_n = D$

Αν τnv (2) παίρνουμε: $D = \frac{a}{d} D = \frac{b}{d} \Rightarrow D \left(1 - \frac{a}{d}\right) = \frac{b}{d} \Rightarrow$

$$D = \frac{b}{d-a} \quad \text{Τότε}$$

$$y_n = \left(\frac{a}{d}\right)^n K + \frac{b}{d-a}$$

Υπολογίζουμε τnv σταθερά K αν θέλουμε $y_0 = x_0$.

Εφόσον $0 < \frac{a}{d} < 1$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{d}\right)^n = 0$. Επομένως y_n τεινέται
αν θέλουμε απείρως, ∞

$$x_1 < \frac{a}{d} x_0 + \frac{b}{d} = \frac{a}{d} y_0 + \frac{b}{d} = y_1$$

$$x_2 < \frac{a}{d} x_1 + \frac{b}{d} < \frac{a}{d} y_1 + \frac{b}{d} = y_2$$

$$x_n < y_n.$$

Άρα ναί $n \rightarrow \infty$ είναι y_n άνω φράγμα αν θέλουμε
απείρως

Επισημάνω να πάρει θετικό αριθμό M τέτοιος ώστε $x_n \leq M, n \in \mathbb{N}$.

Εξούτω
$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d} > \frac{b}{cM + d}$$

Αρα x_n φραγ. από κάτω από θετικό αριθμό.

Άσκηση. Έστω n εδωκεν δεύτερος τάξης

$$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad n=0,1,\dots \quad (1)$$

Θεωρούμε ότι $A > 1$. Υποθέτουμε ότι $x_0, x_1 > 0$. Να δείξετε ότι υπόθε θετική λύνει της εδωκεν είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς.

Λύση. Πρώτα θα δείξουμε ότι η τυχαία λύση x_n είναι φραγμένη από κάτω από θετικό αριθμό, Από την (1) είναι προφανές ότι $x_n > A$, $n \geq 2$. Άρα $x_n > \min\{A, x_1, x_0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι είναι φραγμένη και από πάνω. Εφόσον $x_n > A$, $n \geq 2$ έχουμε ότι

$$x_{n+2} < A + \frac{x_n}{A}$$

Θεωρούμε την γραμμή εδωκεν δεύτερος τάξης

$$y_{n+2} = \frac{y_n}{A} + A. \quad (2)$$

Θεωρούμε τν λden y_n τns (2) τέτοια ώστε $y_1 = x_1, y_2 = x_2$.

Έχουμε

$$x_3 < A + \frac{x_1}{A} = A + \frac{y_1}{A} = y_3.$$

$$x_4 < A + \frac{x_2}{A} = A + \frac{y_2}{A} = y_4.$$

$$x_5 < A + \frac{x_3}{A} < A + \frac{y_3}{A} = y_5$$

Εργαζόμενοι αναγκαστικά έχουμε $x_n \leq y_n, n=1,2, \dots$

Θα υπολ. τν λden y_n τns (2) έχουμε

$$y_{n+2} - \frac{1}{A} y_n = A$$

Θα ερπούμε τnv γενική λden τns Ομογενούς: $y_{n+2} - \frac{1}{A} y_n = 0$

Παίρνουμε Χαρατ. Εξίσωση: $\lambda^2 - \frac{1}{A} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{A}}, \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{A}}$

Άρα η γενική λden τns ομογενούς: $y_n = c_1 \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n$

Θα ερπούμε ναι για περην λden y_n (LMO).

Θέτουμε $y_n^{(k)} = C$. Τότε $C - \frac{1}{A}C = A \Rightarrow$

$$C\left(1 - \frac{1}{A}\right) = A \Rightarrow C = \frac{A^2}{A-1}$$

Επομένως η γενική λύση της (2) δίνεται

$$y_n = c_1 \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + \frac{A^2}{A-1}$$

Τα c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις $y_1 = x_1, y_2 = x_2$.

Εφόσον $A > 1$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n = 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n = 0$

Αρα η y_n είναι φραγμένη από πάνω και θετικά αριθμη

Επομένως εφόσον $x_n \leq y_n$ και η x_n είναι φραγμένη από πάνω από θετικά αριθμη.

Άσκηση Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς αριθμού να δείξετε ότι κάθε λ είναι $\in \mathbb{Q}$

$$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad n=0,1,\dots, \quad A > 1, \quad x_0 > 0. \quad (1)$$

Βεβαιωθείτε ότι η ακολουθία είναι $\in \mathbb{Q}$ και $\in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω x_n τυχαία $\lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{και} \quad l = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad \text{Θα δείξουμε ότι} \quad L = l.$$

Εφόσον $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ έχουμε:

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow x_n < L + \epsilon.$$

Επίσης $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ τότε:

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow x_n > l - \epsilon.$$

Παίρνουμε $\eta_0 = \max\{\eta_1, \eta_2\}$. Τότε ισχύει ότι

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists n \geq \eta_0) : l - \epsilon < x_n < l + \epsilon.$$

Θεωρούμε $m = \eta_0 + 2 \in \mathbb{N}$. Για τον $m = \eta_0 + 2$ υπάρχει αριθμός $s \geq \eta_0 + 2$

$$\text{τέτοιος ώστε } x_s < l + \epsilon$$

Εξούκι

$$x_s = A + \frac{x_{s-2}}{x_{s-1}} < l + \epsilon$$

$$\text{Ισχύει } s-2 \geq \eta_0 \text{ και } s-1 \geq \eta_0.$$

$$\text{Αρα } A + \frac{l - \epsilon}{L + \epsilon} < A + \frac{x_{s-2}}{x_{s-1}} < l + \epsilon \Rightarrow A + \frac{l - \epsilon}{L + \epsilon} < l + \epsilon$$

Για $\epsilon \rightarrow 0$ παίρνουμε

$$\boxed{A + \frac{l}{L} < l}$$

-75-

Πάρα, θεωρούμε το $m = n_0 + 2$. Για το $m = n_0 + 2$ υπάρχει ένας αριθμός $k \geq m = n_0 + 2$ τέτοιος ώστε

$$L - \epsilon \leq x_k$$

Αλλά $x_k = A + \frac{x_{k-2}}{x_{k-1}}$, έχουμε $k-2 \geq n_0 \Rightarrow k-1 \geq n_0$

Επομένως:

$$L - \epsilon \leq A + \frac{x_{k-2}}{x_{k-1}} \leq A + \frac{L + \epsilon}{L - \epsilon} \Rightarrow L - \epsilon \leq A + \frac{L + \epsilon}{L - \epsilon}$$

Για $\epsilon \rightarrow 0$ παίρνουμε:

$$L \leq A + \frac{L}{\epsilon}$$

Έχουμε τις σχέσεις: $A + \frac{\epsilon}{L} \leq \epsilon$ και $L \leq A + \frac{L}{\epsilon}$

$$\Rightarrow AL + \epsilon \leq \epsilon L \text{ και } L \leq A\epsilon + L. \text{ Άρα } A\epsilon + \epsilon \leq A\epsilon + L$$

$$\Rightarrow A(L - \epsilon) \leq L - \epsilon \Rightarrow (A - 1)(L - \epsilon) \leq 0 \Rightarrow L = \epsilon. \text{ Επομένως υπάρχει}$$

το $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Θεωρούμε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.

Από την (1) έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+2} = A + \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}} \Rightarrow \bar{x} = A + \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \Rightarrow$$

$$\bar{x} = A + 1,$$

Επομένως βλέπε θεωρήμα λήεν της (1) συζητείται στο παραπάνω ενδεύο
 Ισορροπίας $\bar{x} = A + 1$ της (1)

Πρόταση Έστω $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Θεωρούμε ότι n είναι φθίνουσα
 και αυξανής. Θεωρούμε επίσης ότι το αλγεβρικό σύστημα
 $M = f(M)$ και $m = f(M)$ έχει παραδυνή λήεν $m = M = \bar{x}$ άρα
 $\bar{x}$ είναι ενδεύο Ισορροπίας για την ελίσσον διαφύου
 $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$

Έστω ένα διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$
 Τότε βλέπε λήεν x_n με $x_0 \in [a, b]$ συζητείται στο $\bar{x}$ όταν $n \rightarrow \infty$.

-ff-

Απόδειξη: Παιχνίδια $a=m_0$, $b=M_0$ θεωρούμε το σύνολο

εξισώσεων διαφανών. $m_{n+1}=f(M_n)$, $M_{n+1}=f(m_n)$, $n=0,1, \dots$

έτσι ώστε $m_0=a$, $M_0=b$. Οι λύσεις του συστήματος θα είναι:

στη M_n . Έχουμε $f: [m_0, M_0] \rightarrow [m_0, M_0]$.

Παιχνίδια τα πρώτα έχουν

$$m_0 \leq M_0$$

$m_1=f(M_0)$ και $M_1=f(m_0)$. Από την $m_0 \leq M_0$ και επόθεν n φθίνουσα

έχουμε $f(M_0) \leq f(m_0) \Rightarrow m_1 \leq M_1$. Τα $m_1, M_1 \in [m_0, M_0]$.

Αρα έχουμε

$$m_0 \leq m_1 \leq M_1 \leq M_0$$

Ισχύει $m_2=f(M_1)$ και $M_2=f(m_1)$. $m_1 \leq M_1 \Rightarrow f(M_1) \leq f(m_1) \Rightarrow m_2 \leq M_2$

Από την $m_0 \leq m_1$ παίρνουμε $f(m_1) \leq f(m_0) \Rightarrow M_2 \leq M_1$.

Από την $M_1 \leq M_0$ παίρνουμε $f(M_0) \leq f(M_1) \Rightarrow m_1 \leq m_2$

Αρα:

$$m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq M_2 \leq M_1 \leq M_0$$

Εφαζόμενοι επαγωγικά παίρνουμε:

$$m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n \leq M_{n-1} \leq \dots \leq M_1 \leq M_0,$$

Αρα η ακολουθία m_n είναι αβζωα. και η M_n είναι φθιγγα

Εντός $m_n \in [a, b]$, $M_n \in [a, b]$ Άρα υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$

Έστω $m = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ και $M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$. Έχουμε το ερώτημα

$$M_{n+1} = f(m_n) \text{ και } m_{n+1} = f(M_n). \text{ Άρα } \lim_{n \rightarrow \infty} M_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(m_n) \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{n+1} = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} m_n\right) \text{ εφόσον η } f \text{ συνεχής. Άρα } m = f(M)$$

$$\text{Ομοίως } M = f(m). \text{ Ανέ τιν υπάρχει εφόσον } m = M = \bar{x}.$$

Έστω για λόγους τής (1) με κάποιο n_0 : $x_{n_0} \in [a, b] = [m_0, M_0]$

$$\text{Έχουμε } m_0 \leq x_{n_0} \leq M_0 \Rightarrow f(m_0) \leq f(x_{n_0}) \leq f(M_0)$$

$$m_1 \leq x_{n_0+1} \leq M_1 \Rightarrow f(m_1) \leq f(x_{n_0+1}) \leq f(M_1) \Rightarrow m_2 \leq x_{n_0+2} \leq M_2$$

και γενικά παίρνουμε $m_n \leq x_{n_0+n} \leq M_n, n \in \mathbb{N}$. Εφόσον

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \bar{x} \quad \text{έξοφει} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \bar{x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

Άρα, Έστω n επίσημα διαφορών

$$x_{n+1} = \frac{ae^{b-cx_n}}{1+e^{b-cx_n}}, \quad n=0,1,\dots, \quad a,b,c \in (0,\infty).$$

Θεωρούμε ότι $0 < a-c < 4$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας επόμενος αριθμός στο πεδίο αντίστοιχων επόμενων

$$\text{Λόγω, Θεωρούμε την } f(x) = \frac{ae^{b-cx}}{1+e^{b-cx}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{ac e^{b-cx}}{(1+e^{b-cx})^2} < 0$$

Επομένως n f φθίνουσα

Θα ερμηνεύσουμε διαστήματα $[k, M]$ τέτοια ώστε $f: [k, M] \rightarrow [k, M]$

$$f(x) = \frac{ae^{b-cx}}{1+e^{b-cx}} \leq a \quad \text{εφόσον } n \text{ } f \text{ φθίνουσα για κάθε } x \leq a \text{ έχουμε}$$

$$f(a) \leq f(x). \quad \text{Αρα εάν } k = \frac{ae^{b-ca}}{1+e^{b-ca}} \text{ ναυ } M=a \text{ έχουμε } f: [k, M] \rightarrow [k, M]$$

Επιπλέον εάν x_n λένε τns (1) $\mu \in x_{n_0} \in [K, M]$ τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x},$$

Εφ'όσον x_n λένε τns (1) έχουμε $x_{n+1} = \frac{b - cx_n}{1 + e} \leq a, \quad n=0,1,-$

$$\Rightarrow x_n \leq a, \quad n=1,2,-$$

Η f φθίνουσα, άρα $f(a) \leq f(x_n) \Rightarrow \frac{a - b}{1 + e} \leq x_{n+1} \leq a. \quad \forall n$

για $n \geq 2 \quad x_n \in [K, M] \quad \forall n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x},$

Ευστάθεια Εξισώσεων Διαφορών Πρώτης Τάξης

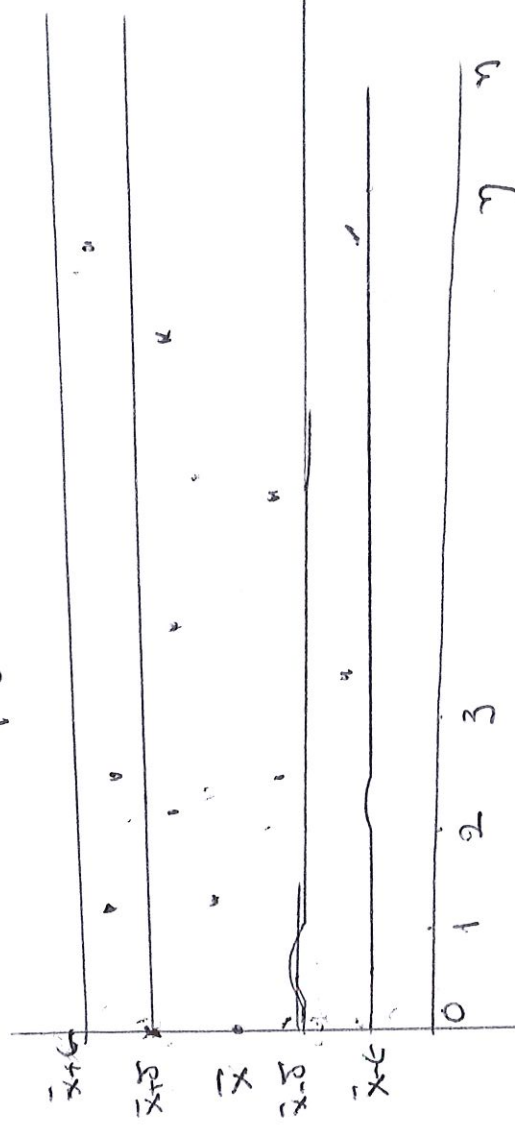
Ορισμός: Θεωρούμε την εξίσωση πρώτης τάξης $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=0,1,\dots$

Έστω ότι η εξίσωση έχει ένα ενδεύο ισορροπίας $\bar{x} : (\bar{x} = f(\bar{x}))$. Τότε

θα λέμε ότι το $\bar{x}$ είναι ευσταθές, εάν:

$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta(\epsilon)) : \forall x_0 : |x_0 - \bar{x}| < \delta \text{ να έχουμε } |x_n - \bar{x}| < \epsilon, n \geq 0$

Σχήμα:



Παρατήρηση: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$: Έχουμε τms $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=0,1,\dots$

Έχουμε $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{(2)}(x_0)$, $\dots$, $x_n = f^{(n)}(x_0)$

Έχουμε $\bar{x}$, το οποίο ισοπoνiαs τms $x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \bar{x} = f(\bar{x})$. Είναι απoφoρiς

o2i $f^{(n)}(\bar{x}) = \bar{x}$ $\left(\begin{array}{l} x_1 = f(x_0) \Rightarrow x_1 = f(\bar{x}) = \bar{x}, \quad x_2 = f(x_1) = f(\bar{x}), \dots, x_n = f(\bar{x}) = \bar{x}. \\ x_0 = \bar{x} \end{array} \right)$

Tότε ean τo $\bar{x}$ είναι eυσταθές έχουμε:

$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta(\epsilon))$: $\forall x_0$: $|x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(\bar{x})| < \epsilon$, $n > 0$

Αρα $n f^{(n)}(x)$ είναι eωvής cτo $\bar{x}$, για κάθε n .

Ορίσμος: Το $\bar{x}$ να λέγεται τοπικά ελυστική σημείο εάν υπάρχει κάποιος αριθμός $m > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε x_0 : $|x_0 - \bar{x}| < m$ να έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \bar{x}$$

Ορίσμος: Το $\bar{x}$ λέγεται τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν το $\bar{x}$ είναι ευσταθές και είναι τοπικά ελυστική σημείο.

Ορίσμος: Το $\bar{x}$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν είναι ευσταθές και κάθε δάν x_n της $\varepsilon_{\text{Lewens}}$ $x_{n+1} = f(x_n)$ συγχλίνει στο $\bar{x}$ όταν $n \rightarrow \infty$.

Πρόταση. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Θεωρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο. Έστω επίσης $\bar{x}$ ένα σημείο ισοπνοίας της

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n=0,1,\dots \quad (1),$$

1) Τότε εάν $|f'(\bar{x})| < 1$ (2).

τότε το $\bar{x}$ είναι τριπλά ασυμπτωτικά ευσταθές για την (1).

2) Εάν $|f'(\bar{x})| > 1$

τότε το $\bar{x}$ είναι ασταθές για την (1).

Ανόδειξη του πρώτου μέρους. Θεωρούμε ότι ισχύει η (2). Είναι προφανές ότι υπάρχει αριθμός M :

$$|f'(\bar{x})| < M < 1$$

Από την υπόθεση η f' είναι συνεχής. Τότε υπάρχει μια περιοχή

$I = (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in I$ να έχουμε:
 $|f(x)| < M < 1$.

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα της μέσης τιμής:

$$x_1 - \bar{x} = f(x_1) - f(\bar{x}) = f'(\xi_1)(x_1 - \bar{x}), \quad \xi_1 \text{ ανάμεσα στο } x_1 \text{ και } \bar{x}.$$

Επομένως $|x_1 - \bar{x}| = |f'(\xi_1)| |x_1 - \bar{x}|$. Εφόσον το ξ_1 είναι ανάμεσα στο x_1 και $\bar{x}$, τότε $\xi_1 \in I$. Άρα $|f'(\xi_1)| < M$. Επομένως

$$|x_1 - \bar{x}| < M |x_1 - \bar{x}|$$

Επίσης

$$x_2 - \bar{x} = f(x_2) - f(\bar{x}) = f'(\xi_2)(x_2 - \bar{x}), \quad \xi_2 \text{ ανάμεσα στα } x_2 \text{ και } \bar{x}, \text{ άρα } \xi_2 \in I$$

Επομένως

$$|x_2 - \bar{x}| = |f'(\xi_2)| \cdot |x_2 - \bar{x}| < M |x_2 - \bar{x}|$$

Εφαρμόζοντας επανειλημμένα παρίστανται

$$|x_n - \bar{x}| < M^n |x_0 - \bar{x}|$$

Εφόσον $N < \infty$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \bar{x}| = 0 \quad \text{όταν} \quad |x_0 - \bar{x}| < C,$$

Άρα το $\bar{x}$ είναι το μόνο ελκυστικό σημείο, θα συγκλίνει δη το $\bar{x}$ είναι και ευσταθές. Θεωρούμε ένα τυχαίο $\epsilon > 0$.

Παίρνουμε $\delta = \min\{\epsilon, C\}$. Τότε παίρνουμε $|x_0 - \bar{x}| < \delta$

$$|x_n - \bar{x}| < M^n |x_0 - \bar{x}| < |x_0 - \bar{x}| < \delta < \epsilon$$

Άρα από τον ορισμό το $\bar{x}$ ευσταθές

Άσκηση. Έστω n εδιωμεν

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad \lambda \in (0, 2].$$

Να βρείτε τα ενδιάμεσα σημεία ισορροπίας και να ελέγξετε την ευστάθεια τους.

Λύση: Πρώτα θα βρούμε τα ενδιάμεσα σημεία ισορροπίας. Θετούμε

$$x = f(x), \quad f(x) = 1 - \lambda x^2. \quad \text{Άρα παίρνουμε την αλγ. εδιωμεν}$$

$$x = 1 - \lambda x^2 \Rightarrow \lambda x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}.$$

Έχουμε 2 ενδιάμεσα σημεία ισορροπίας: $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$ και $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}.$

x_1 : Παίρνουμε $f'(x) = -2\lambda x \Rightarrow f'(x_1) = -2\lambda \left(\frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} \right) = 1 + \sqrt{1+4\lambda} > 1 \Rightarrow |f'(x_1)| > 1$, άρα το x_1 ασταθές.

x_2 : $f'(x_2) = -2\lambda \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} \right) = 1 - \sqrt{1+4\lambda} \Rightarrow |f'(x_2)| = |1 - \sqrt{1+4\lambda}|.$

Τοπολογική

Για να είναι ευσταθής το x_2 θα πρέπει $|f(x_2)| < 1$ δηλ.

$$|1 - \sqrt{1+4\lambda}| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - \sqrt{1+4\lambda} < 1 \Rightarrow -2 < -\sqrt{1+4\lambda} < 0$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{1+4\lambda} < 2. \quad \text{Θα πρέπει } \sqrt{1+4\lambda} < 2 \Rightarrow 1+4\lambda < 4 \Rightarrow \lambda < \frac{3}{4}.$$

Αρα εάν $\lambda \in (0, \frac{3}{4})$ τότε το x_2 ευσταθές, ενώ εάν $\lambda \geq \frac{3}{4}$

τότε το x_2 ασταθές.

Παρατήρηση:

Ευσταθία: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon)): \forall x_0: |x_0 - \bar{x}| < \delta$ να έχουμε $|x_n - \bar{x}| < \epsilon, \quad n \geq 0$

Ασταθία: $(\exists \epsilon > 0): (\forall \delta(\epsilon)): \exists x_0: |x_0 - \bar{x}| < \delta$ έτσι ώστε $|x_n - \bar{x}| \geq \epsilon, \quad n \geq 0$

Πρόταση. Θεωρήστε την (1). Υποθέτουμε ότι $\bar{x}$ είναι ένα ενδεύο ισοφονίας της (1). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχουν οι f', f'', f''' και είναι να σωθείς σωστής. Υποθέτουμε ότι

$$f'(\bar{x}) = -1,$$

Τότε εάν

- 1) $f''(\bar{x}) \neq 0$, τότε το $\bar{x}$ αταθείς
- 2) $f''(\bar{x}) = 0$ και $f'''(\bar{x}) < 0$ τότε το $\bar{x}$ ενταθείς
- 3) $f''(\bar{x}) = 0$ και $f'''(\bar{x}) > 0$ τότε το $\bar{x}$ αταθείς.

Άρα: Έστω n ελιωον

$$x_{\eta\eta} = x_{\eta} - x_{\eta}^3$$

Να βρείτε τα ενδεύα ισοφονίας και να ελέγξετε την ενταθεία τους

Λύση. $f(x) = x - x^3$. Θα εστιάσουμε τα σημεία ισορροπίας: $x = f(x)$.

Θέτουμε $x = x - x^3 \Rightarrow \bar{x} = 0$ προφανώς σημείο ισορροπίας. Παίρνουμε

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(\bar{x}) = f'(0) = 1, \quad \text{Παίρνουμε } f''(x) = -6x \Rightarrow f''(0) = 0.$$

Παίρνουμε $f'''(x) = -6 \Rightarrow f'''(0) = -6 < 0$. Άρα το $\bar{x} = 0$ είναι ευσταθές.

Πρόταση. Έστω $n \in \mathbb{N}$, και $\bar{x}$ ένα σημείο ισορροπίας της (1).

Θεωρούμε ότι f', f'', f''' συνεχώς σφαιρικές. Υποθέτουμε ότι $f'(\bar{x}) = -1$

Τότε ισχύουν τα εξής:

- Εάν $\int f(\bar{x}) < 0$, το $\bar{x}$ τενικά ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Εάν $\int f(\bar{x}) > 0$ το $\bar{x}$ ασταθές.

$$\int f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2. \quad \text{Εδώ } \int f(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2} (f''(\bar{x}))^2$$

Αντίθετα θεωρούμε την εγγραφή (1), όπου $n \in \mathbb{N}$ και $f \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι υπάρχει n $f \circ f = f$ ⁽²⁾. Θεωρούμε και την εγγραφή

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n=0,1, \dots \quad (B),$$

Εάν το $\bar{x}$ είναι ενήλιο ισορροπία για την (1), τότε είναι και ενήλιο ισορροπία για την (B).

Ενίκα εάν το $\bar{x}$ είναι ενήλιο ισορροπία για την (B), θα είναι ενήλιο για την (1) εάν $x_{n+1} = f(x_n)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το $\bar{x}$ είναι ενήλιο ισορροπία για την (1). Τότε $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Άρα $g(\bar{x}) = f \circ f(\bar{x}) = f(f(\bar{x})) = f(\bar{x}) = \bar{x}$, άρα το $\bar{x}$ είναι ισορροπία για την (B).

Υποθέτουμε ότι το $\bar{x}$ συσταθές για την (B). Αρα

$$(f \in \mathcal{O}) (\exists \delta(\varepsilon)) : \forall x_0 : |x_0 - \bar{x}| < \delta(\varepsilon) \text{ να έχουμε } |f(x_0) - \bar{x}| < \varepsilon, \quad n \geq 0$$

Θα πρέπει να ενοστειδούμε και μια ανάλυση σχέση για τις περιπτώσεις συνέχειας της f : Ανά την υπόθεση n είναι συνεχής συνάρτηση.

Αρα για το δ υπάρχει κάποιο $\eta > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε x_0 :

$$|x_0 - \bar{x}| < \eta \text{ να έχουμε } |f(\bar{x}) - f(x_0)| < \delta$$

Θεωρούμε $\theta = \min\{\delta, \eta\}$. Τότε

$$(f \in \mathcal{O}) \exists \theta = \min\{\delta, \eta\} : |x_0 - \bar{x}| < \theta \text{ να έχουμε } |f(x_0) - \bar{x}| < \varepsilon, \quad n \geq 0$$

$$\Rightarrow (f \in \mathcal{O}) (\exists \theta = \min\{\delta, \eta\}) : |x_0 - \bar{x}| < \theta \quad \Rightarrow \quad |f(x_0) - \bar{x}| < \varepsilon, \quad n \geq 0$$

Αρα το $\bar{x}$ είναι συσταθές και για την (D): $x_{n+1} = f(x_n)$

Aufgaben TMS

$\prod_{\text{pdTages}}$; $\prod_{\text{Alprokte Tm}}$ $\in \text{jeweil } (B)$ $\in \text{Tm}$

$$x_n = 1 + n \quad \therefore x_n = n \quad \therefore x_n = 0, 1, 2, \dots$$

Θα δείξουμε ότι $S_f(\bar{x}) < 0$. Τότε το $\bar{x}$ είναι σταθερό για την (B) , άρα το $\bar{x}$ θα είναι σταθερό για την (I) σύμφωνα με το προηγούμενο πρόβλημα.

Παίρνουμε:

[illegible]

$$\begin{aligned} & \uparrow \uparrow \\ & (\otimes f(\otimes f)) + (\otimes f(\otimes f)) = (\otimes f(\otimes f)) \\ & \uparrow \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p''(\bar{x}) &= f''(\bar{x})(f'(\bar{x}))^2 + f(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x}) = f''(\bar{x}) \cdot (-1)^2 + f'(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x}) = \\ &= f''(\bar{x}) - f''(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

$$g'''(x) = \left(f''(f(x)) (f'(x))^2 + f'(f(x)) f''(x) \right)' = f'''(f(x)) (f'(x))^3 + 2f''(f(x)) f'(x) f''(x) + f''(f(x)) f''(x) \cdot f'(x) \\ + f'(f(x)) f'''(x) \geq g'''(\bar{x}) = f'''(\bar{x}) \cdot (f'(\bar{x}))^3 + 2f''(\bar{x}) f'(\bar{x}) f''(\bar{x}) + f''(\bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) \cdot f'''(\bar{x}) =$$

$$= f'''(\bar{x}) \cdot (-1)^3 + 2(f''(\bar{x}))^2(-1) + (f''(\bar{x}))^2(-1) - f'''(\bar{x}) = -2f'''(\bar{x}) - 3(f''(\bar{x}))^2$$

$$= 2(-f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2) = 2S(f(\bar{x})). \text{ Άρα } g'''(\bar{x}) = 2S(f(\bar{x})).$$

Εάν $S(f(\bar{x})) < 0$ τότε $g'''(\bar{x}) < 0$. Επομένως εὐκρίνως με την προϋπόθεση πρώτης το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την (B), και εὐκρίνως με το δεύτερο το $\bar{x}$ ευσταθές και για την (1).

Άρα λοιπόν. Δίνεται $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n, \quad n=0,1, \dots$$

Να ερευνήσουμε τα σημεία ισορροπίας και να ερευνήσουμε την ευστάθεια τους,

Λύση: Παίρνουμε $x = f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = -2$ τα σημεία ισορροπίας.

$$\bar{x}_1 = 0: f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(\bar{x}_1) = 3 \Rightarrow |f'(\bar{x}_1)| = 3 > 1 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0 \text{ ασταθές.}$$

$$\bar{x}_2 = -2: f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(\bar{x}_2) = -1. \text{ Παίρνουμε } S(f(\bar{x})) = -f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2$$

$$f''(x) = 2, f'''(x) = 0 \Rightarrow S(f(-2)) = -\frac{3}{2} \cdot 2^2 < 0 \Rightarrow \bar{x}_2 \text{ τελικά ασυμπιπτική ευσταθές.}$$

Άρα: Έστω n eigen

$$X_{n1} = -1 + e^{-x}$$

Να ελεγχете τις συνθήκες του σημείου ισορροπίας $\bar{x} = 0$,

Αν. Παίρνουμε $x = -1 + e^{-x}$, ισχύει $0 = -1 + e^{-0}$, άρα πράγματι το

$\bar{x} = 0$ είναι σημείο ισορροπίας της εξίσωσης.

$$\text{Εδώ } f(x) = -1 + e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x} \Rightarrow f'(\bar{x}) = f'(0) = -e^{-0} = -1.$$

$$\text{Παίρνουμε την } Sf(x) = -f''(x) - \frac{3}{2}(f'(x))^2, \text{ έχουμε } f''(x) = e^{-x} \Rightarrow f''(x) = -e^{-x}.$$

$$\text{Αρα } Sf(0) = -e^{-0} - \frac{3}{2}(e^{-0})^2 = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} < 0. \text{ Άρα } \bar{x} = 0 \text{ είναι σταθ.}$$