

Εξισώσεις Διαφορών

-1-

Στις διαφορικές εξισώσεις θεωρούμε για εχέον:

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) = 0 \quad (1)$$

Θέλουμε να βρούμε για ευδρτην $y=y(x)$ τέτοια ώστε y να ικανοποιεί την (1). Η (1) είναι n τάξης

Παράδειγμα: Η δ.ε. $y^{(5)} - \frac{1}{y+1}y^{(3)} + y = \cos x$ είναι πέμπτης τάξης

$$\text{Ζητούμε για ευδρτην } y=y(x): \quad y^{(5)} - \frac{1}{y+1}y^{(3)} + y(x) = \cos x$$

Στις εξισώσεις διαφορών θεωρούμε για εχέον της μορφής:

$$f(y_{n+r}, y_{n+r-1}, \dots, y_n) = 0 \quad (2)$$

όπου $r \in \mathbb{N}$, $n=0,1,\dots$ Ζητούμε να βρούμε για συνεχότητα y_n τέτοια να ικανοποιεί την (2). Η (2) είναι r τάξης διαφορών & τάξης.

Παράδειγμα Έστω n ελιωές

$$y_{n+5}^2 - 3y_{n+4} \cdot y_{n+2} + y_n = 0, \quad n=91, \dots$$

Ζητούμε να βρούμε για ποια ονόματα y_n που ικανοποιεί την παραπάνω
εξίσωση. Η εξίσωση είναι πέμπτης τάξης

Συμμορφικοί.

$$\sum_{k=\eta_0}^{n-1} a_k = a_{\eta_0} + a_{\eta_0+1} + \dots + a_{n-1}, \quad n \geq \eta_0$$

$$\sum_{k=\eta_0}^{\eta_0-1} a_k = 0$$

$$\prod_{k=\eta_0}^{n-1} a_k = a_{\eta_0} \cdot a_{\eta_0+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1}, \quad \prod_{k=\eta_0}^{\eta_0-1} a_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\prod_{k=m_0}^{n-1} C = C \cdot \underbrace{C \cdots C}_{m-m_0} = C.$$

Θ ευφορία τ_n δ.ε. $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Εξάμε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} = f(x_0, y_0) \Rightarrow$

$y(x+h) - y(x) \approx h f(x, y).$ Θ ευφορία τ_n εξάν:

$y(x+h) - y(x) = h f(x, y) \Rightarrow y(x+h) = y(x) + h f(x, y).$

Για $x = x_0$: $y(x_0+h) = y(x_0) + h f(x_0, y_0) \Rightarrow y(x_0+h) = y_0 + h f(x_0, y_0).$

Για $x = x_0+h \Rightarrow y(x_0+2h) = y(x_0+h) + h f(x_0+h, y(x_0+h))$

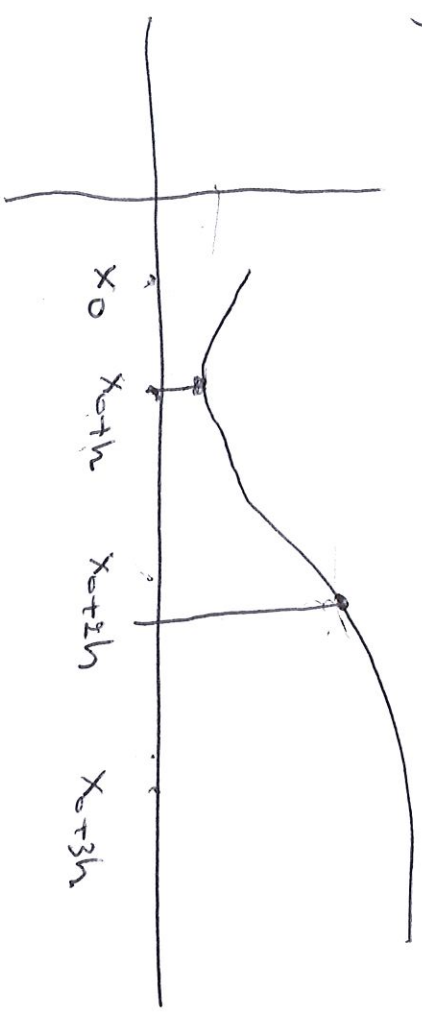
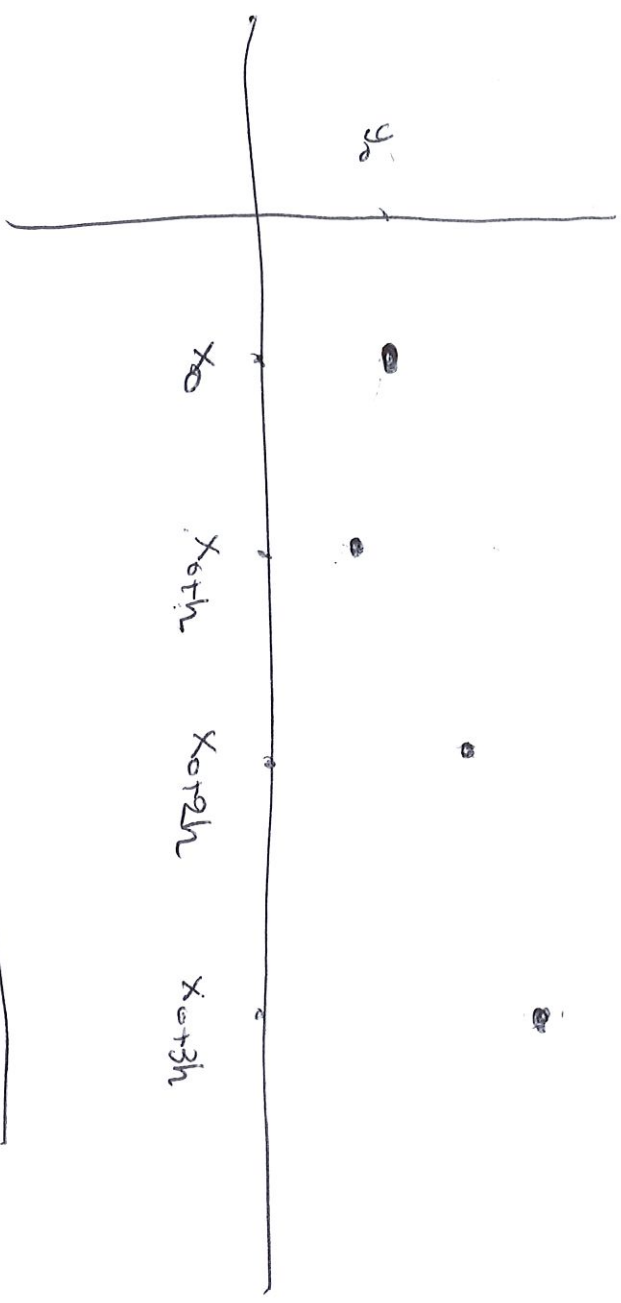
Για $x = x_0+(n-1)h \Rightarrow y(x_0+nh) = y(x_0+(n-1)h) + h f(x_0+(n-1)h, y(x_0+(n-1)h))$

Θ έστω $z_n = y(x_0+(n-1)h) \Rightarrow z_{n+1} = y(x_0+nh).$ Άρα να πούμε:

$z_{n+1} = z_n + h f(x_0+(n-1)h, z_n), n=0,1, \dots$ Είδικον διαδοχικόν σημείον z_n .

$$y' = \frac{x^2}{x+1}$$

$$y = y(x) : y'(x) = \frac{x^2}{y(x)+1}$$



Παράδειγμα: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

Προέχθην τms λύνσ: θεωρούμε τm σχέσ:

$$y(x+h) = y(x) + h f(x, y). \quad \text{Παίρνουμε } h = 0.01$$

$$\text{Τότε } y(x_0 + 0.01) = y(x_0) + 0.01 f(x_0, y_0). \quad \text{Έχουμε } x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$\text{Άρα } y(0.01) = 1 + 0.01 f(0, 1), \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(0, 1) = 0 + 1^2 = 1$$

$$\text{Επομένως } y(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01$$

$$y(x_0 + 2 \cdot 0.01) = y(x_0 + 0.01) + h f(x_0 + 0.01, y_0(x_0 + 0.01)) \Rightarrow$$

$$y(0.02) = y(0.01) + 0.01 f(0.01, y(0.01)) = 1.01 + 0.01 \cdot ((0.01)^2 + (1.01)^2)$$

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών,

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης διαφορών r τάξης είναι η

$$a_r(n)y_{n+r} + a_{r-1}(n)y_{n+r-1} + \dots + a_1(n)y_{n+1} + a_0(n)y_n = f_n$$

όπου $a_i(n)$, f_n δοθείσες ακολουθίες.

Παραδείγματα: θεωρούμε την εξίσωση:

$$y_{n+2} - 2 \cdot y_{n+1} + y_n = 0, \quad n=0,1,\dots$$

Επίσης διαφορών δεύτερης τάξης. Εφόσον υπάρχει ο όρος y_n^2 δεν είναι γραμμική

θεωρούμε την εξίσωση:

$$(\cos n)y_{n+3} + \frac{1+\sin(n)}{\cos n} y_{n+2} + \frac{1}{1+n^2} y_{n+1} + y_n = n^2+1$$

Γραμμική πέμπτης τάξης.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y_{n+2} + \frac{1}{n+1} y_{n+1} + \cos(y_n) = 0, \quad n=0,1,\dots$$

Αν είναι γραμμική δίνει υπόδειξη ο άρτος $\cos(y_n)$.

Επίσης Διαφορών Γραμμικές Πρώτης Τάξης.

Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών.

$$y_{n+1} = p(n)y_n + q(n), \quad n=0,1,\dots$$

$p(n)$, $q(n)$ δοσμένες ακολουθίες. Εδώ θα θεωρούμε το πρῶτο κλάσμα αρακινών τιμών

$$y_{n+1} = p(n)y_n + q(n), \quad y_0 = c, \quad n_0 \in \mathbb{N}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή y_n , $n \geq n_0$.

Εάν $q(n)=0$, $n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε την εξίσωση

$$y_{n+1} = p(n)y_n, \quad n=0,1, \dots \quad (4).$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί γραμμική ομογενή με (4.3)

Εάν $q(n) \neq 0$, τότε η εξίσωση $y_{n+1} = p(n)y_n + q(n)$ αποτελεί
 μη ομογενή

Ανδ την (4) για $n=n_0$ παίρνουμε:

$$y_{n_0+1} = p(n_0)y_{n_0}$$

Ανδ την (4) για $n=n_0+1$ παίρνουμε

$$y_{n_0+2} = p(n_0+1)y_{n_0+1} = p(n_0+1)p(n_0)y_{n_0}.$$

Ομοίως

$$y_{n_0+3} = p(n_0+2)p(n_0+1)p(n_0)y_{n_0}$$

Τελικά για $n \geq n_0$ παίρνουμε:

$$y_n = p(n-1) \cdot p(n-2) \cdot \dots \cdot p(n_0+1)p(n_0)y_{n_0} \Rightarrow$$

1) Αρα

$$y_n = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} p_j \right) y_{n_0}, \quad n \geq n_0 \quad \left(\sum_{j=n_0}^n p_j = p(n) \right)$$

$$\left(\prod_{j=n_0}^n p_j = p(n) \right) \Leftrightarrow y_n = y_{n_0} \Rightarrow y_{n_0} = y_{n_0}.$$

Παραδείγματα: Να ληφθεί το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = 2 y_n, \quad y_5 = 1$$

$$\text{Εξάγε } y_n = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} p_j \right) y_{n_0}, \quad p(n) = 2, n \geq 0, \quad n_0 = 5, \quad y_{n_0} = 1.$$

$$A_{p,q} \quad y_n = \left(\prod_{j=5}^{n-1} 2 \right) 1 = 2^{n-5+1} = 2^{n-5}, \quad n \geq 5.$$

Θεωρούμε τώρα την εγγραφή διαφορών:

$$y_{n+1} - y_n = Z_n, \quad n = n_0, n_0+1, \dots$$

όπου Z_n γνωστή ακολουθία, γινόμενου δει $y_{n_0} = C$.

Θέτουμε ερω εγγραφή $n = n_0$ και έχουμε

$$y_{n_0+1} - y_{n_0} = Z_{n_0}$$

Επόμεν θέτουμε $n = n_0+1$:

$$y_{n_0+2} - y_{n_0+1} = Z_{n_0+1}$$

$\Rightarrow$

Επόμεν θέτουμε $n = n_0+2$:

$$y_{n_0+3} - y_{n_0+2} = Z_{n_0+2}$$

και γενικά για $n \geq n_0$

$$y_n - y_{n-1} = Z_{n-1}$$

$$y_{n_0+1} - y_{n_0} = Z_{n_0}$$

$$y_{n_0+2} - y_{n_0+1} = Z_{n_0+1}$$

$$y_{n_0+3} - y_{n_0+2} = Z_{n_0+2}$$

⋮
⋮
⋮

$$y_n - y_{n-1} = Z_{n-1}$$

Προθέτουμε μετά μέλη n και έχουμε:

$$y_n - y_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} z_k \Rightarrow y_n = c + \sum_{k=n_0}^{n-1} z_k, \quad n \geq n_0$$

$$\left(\text{Για } n=n_0 \text{ έχουμε } y_{n_0} = c + \sum_{k=n_0}^{n_0-1} z_k = c \Rightarrow y_{n_0} = c \right).$$

Παράδειγμα. Να ληφτεί το πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad y_{n_0} = c.$$

Λόγω $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ έχουμε

$$y_n = y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = c + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1}, \quad n \geq n_0.$$

Επιλέγουμε τον αρχικό προβλεπόμενο αριθμό τιμών (3):

$$y_{n+1} = p(n)y_n + q_n, \quad y_{n_0} = C, \quad p(n) \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Παίρνουμε την αναδρομή

$$\prod_{j=n_0}^n p(j)^{-1} = \prod_{j=n_0}^n \frac{1}{p(j)}.$$

Πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με τον έφο

$$\prod_{j=n_0}^n p(j)^{-1} \text{ και έχουμε:}$$

$$y_{n+1} \prod_{j=n_0}^n p(j)^{-1} = p(n)y_n \prod_{j=n_0}^n p(j)^{-1} + q_n \prod_{j=n_0}^n p(j)^{-1}$$

Αρα

$$y_{n+1} \prod_{j=n_0}^n p(j)^{-1} = y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p(j)^{-1} + q_n \prod_{j=n_0}^n p(j)^{-1}$$

Θέτουμε $y_n = y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p(j)^{-1}$. Τότε $y_{n+1} = y_{n+1} \prod_{j=n_0}^n p(j)^{-1}$.

$$\Theta \in \tau_{\text{ou}} \quad Z_n = q_n \prod_{j=n_0}^n P(j)^{-1}.$$

Τότε παίρνουμε:

$$V_{n+1} = V_n + Z_n, \quad n \geq n_0$$

Από το προηγούμενο πρόβλημα έχουμε:

$$V_n = V_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} Z_k, \quad n \geq n_0$$

$$V_{n_0} = y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n_0-1} P(j)^{-1} = y_{n_0} = C. \quad \text{Άρα}$$

$$y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j)^{-1} = C + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_{1k} \prod_{j=n_0}^k P(j)^{-1}, \quad n \geq n_0$$

Άρα

$$y_n = C \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) + \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) \cdot \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=n_0}^k P(j)^{-1}, \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow y_n = C \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) \cdot \prod_{j=n_0}^k P(j)^{-1}, \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow y_n = C \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=n_0}^k \cancel{P(j)} \cdot \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) \prod_{j=k+1}^k \cancel{P(j)^{-1}}, \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow y_n = C \prod_{j=n_0}^{n-1} P(j) + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=k+1}^{n-1} P(j), \quad n \geq n_0 \quad (q_k = q(k)).$$

Σημείωση: Γενικά δεν τms Mn Ομογενοδs =

Γενικά δεν τms Ομογενοδs + για κερικά δεν τms
 km Ομογενοδs, $\in \delta \delta$ $n < \prod_{j=1}^m p(j)$ είναι n γενικά

δεν τms Ομογενοδs, $\in \pi(n)$ n

$$\sum_{k=n_0}^{m-1} q_k \prod_{j=k+1}^{m-1} p(j)$$

είναι για κερικά δεν τms km Ομογενοδs!

$$y_{n+1} = p(n) y_n + q(n), \quad n=0, 1, \dots$$

Άσκηση. Να λύσετε το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = 2y_n + 3^n, \quad y_0 = c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ οποιαδήποτε.

Λύση. Έστω $p(n) = 2, n=0,1,\dots, q(n) = 3^n, n=0,1,\dots, \eta_0 = 0$.

$$\Theta \text{ωρσώμε τον άρο } \prod_{j=0}^n p(j)^{-1} = \prod_{j=0}^n \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Πολ/Σωμε αλφάβητα τα θέλουμε επίσυν με τον άρο $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ και έσωση:

$$y_{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} y_n + 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow y_{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\Theta \epsilon \tau \omega \sigma \epsilon \quad y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_n \Rightarrow y_{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = y_{n+1}. \quad \text{Ενών } \Theta \epsilon \tau \omega \sigma \epsilon \quad z_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Τότε

$$y_{n+1} = y_n + z_n \Rightarrow y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} z_k. \quad \text{έσωση } y_0 = y_0 = c$$

-17-

$$\text{Apra} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n y_n = c + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k = c + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n y_n = c + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1, \quad n \geq 0 \Rightarrow y_n = c \cdot 2^n + \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) 2^n$$

$$\Rightarrow y_n = c \cdot 2^n + 3^n - 2^n, \quad n \geq 0$$

Άσκηση. Να δείξετε το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + n, \quad y_1 = c, \quad c \text{ σταθερά, } n=1, 2, \dots$$

Λύση. Εξίσωση $p_n = p(n) = \frac{n}{n+1}$, $q_n = q(n) = n$. Παιχνίδι του όμο

$$\prod_{j=1}^n (p(j))^{-1} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{j}{j+1} \right)^{-1} = \prod_{j=1}^n \frac{j+1}{j} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1$$

Ποσότητα αμφοτέρων τα μέλη της εξίσωσης με τον όμο $n+1$:

$$(n+1) y_{n+1} = (n+1) \frac{n}{n+1} y_n + n(n+1) \Rightarrow (n+1) y_{n+1} = n y_n + n(n+1)$$

Θέτουμε $v_n = n y_n$. Τότε $(n+1) y_{n+1} = v_{n+1}$. Άρα παίρνουμε την εξίσωση

$$v_{n+1} = v_n + n(n+1) \Rightarrow v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1).$$

Άρα $v_1 = y_1 = c$. Παίρνουμε $v_n = c + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$.

-19-

Leibow:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(1+n)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Αρα $V_n = C + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}, \quad n \geq 1$

Leibow δε $V_n = n f_n \Rightarrow$

$$n f_n = C + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}, \quad n \geq 1$$

Πότε

$$f_n = \frac{C}{n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n-1}{2}, \quad n \geq 1$$

Παρατήρηση Η ακολουθία $\frac{C}{n}$ είναι ήδη ενς ολογευσ

Σημ. ενς $f_{n+1} = \frac{n}{n+1} f_n$. Επ' ους n ακολουθία

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n-1}{2} \text{ είναι για προηγ. ήδη ενς km ολογευσ}$$

$$f_{n+1} = \frac{n}{n+1} f_n + n.$$

Γραμμικὴς ἑξισώσεις Διαφορῶν δεύτερης τάξης.

Θεωροῦμε τὴν ἑξίσωσιν:

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = f_n, \quad n=0,1,\dots \quad (1)$$

ὅπου αἱ ἀνομοιότητες p_n, q_n, f_n εἶναι γνωστῆς.

Ἡ (1) ἀναγράφεται ἢν ὁμογενὴς δεύτερας τάξης. Ἡ ἑξίσωσιν

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0, \quad n=0,1,\dots \quad (2)$$

ἀναφέρεται ὁμογενὴς δεύτερας τάξης. Θα μελετήσωμε τὴν ἑξίσωσιν τῆς γενικῆς ἰσότητος τῆς ὁμογενούς (2).

Ὅρισμός: Ἐστω 2 ἀνομοιότητες $x_n, y_n, n=0,1,\dots$ Θα πῶμε δὲ αἱ x_n, y_n εἶναι γραμμικὰ ἀνεξάρτητα εἰς αὐτὴν τὴν ἐκδήσιν

$$\alpha x_n + \beta y_n = 0, \quad n=0,1,\dots$$

παίρνουσι δὲ $\alpha = \beta = 0$.

Ορίσμε: Θα λάμμε ότι οι x_n, y_n είναι γραμμικά ελαρτημένες εάν υπάρχουν αριθμοί λ, μ διάφοροι του μηδενός τέτοιοι ώστε

$$\lambda x_n + \mu y_n = 0, \quad n=0, 1, \dots$$

Παράδειγμα: Έστω οι ακολουθίες $x_n = 3n + \frac{19}{5}$ και $y_n = 5n + 4$

Παίρνουμε $\lambda = 5, \mu = -3$. Τότε

$$\lambda x_n + \mu y_n = 5\left(3n + \frac{19}{5}\right) - 3(5n + 4) = 15n + 19 - 15n - 12 = 0, \quad n=0, 1, \dots$$

Άρα οι x_n, y_n ελαρτημένες

Παράδειγμα. Έστω οι $x_n = 2^n, y_n = 3^n, n=0, 1, \dots$

Να ελετάεστε εάν είναι γραμμικά ελαρτημένες

Παίρνουμε τη σχέση $\lambda x_n + \mu y_n = 0 \Rightarrow \lambda 2^n + \mu 3^n = 0, \quad n=0, 1, \dots$

Για $n=0$ έχουμε $\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu$

Για $n=1$ έχουμε $2\lambda + 3\mu = 0 \Rightarrow -2\mu + 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Αρα οι ανισότητες $x_n = 2^n$, $y_n = 3^n$ επαληθεύονται,

θεωρούμε την Ομογενή Εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0 \quad (2)$$

Θέλουμε να ερμηνεύσουμε γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_n, z_n της (2). Τότε η γενική λύση της Ομογενούς $y_n^{(ΓΟ)}$ δίνεται

$$y_n = c_1 y_n + c_2 z_n, \quad n=0,1, \dots$$

c_1, c_2 σταθερές

Οπρίμως. Έστω x_n, y_n 2 λύσεις της Ομογενούς (2).
Τότε η επίλυση

$$C(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix}$$

καλείται επίλυση Cassorati

Πρόταση. Θεωρούμε την Ομογενή Εξίσωση (2) όπου $q_n \neq 0$, $n=0,1,\dots$. Έστω 2 λύσεις x_n, y_n της (2). Η επίδοσης $C(x_n, y_n)$ ^{$n=0,1,\dots$} διαφέρει από το μηδέν και να είναι και $C(x_0, y_0) \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω $u_n = C(x_n, y_n)$. Τότε

$$u_{n+1} = C(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} \end{vmatrix} = x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+2}y_{n+1}$$

Εφαρμόζοντας οι x_n, y_n είναι λύσεις της Ομογενούς (2) έχουμε:

$$x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = 0 \Rightarrow x_{n+2} = -p_n x_{n+1} - q_n x_n$$

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0 \Rightarrow y_{n+2} = -p_n y_{n+1} - q_n y_n$$

Τότε

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1}(-p_n y_{n+1} - q_n y_n) - (-p_n x_{n+1} - q_n x_n)y_{n+1} \\ &= -p_n x_{n+1}y_{n+1} - q_n x_{n+1}y_n + p_n x_{n+1}y_{n+1} + q_n x_n y_{n+1} = q_n(x_n y_{n+1} - x_{n+1}y_n) = q_n C(x_n, y_n) = q_n u_n. \end{aligned}$$

Αρα παίρνουμε την εξίσωση:

$$u_{n+1} = q_n u_n, \quad n=0,1,\dots \quad u_n = C(x_n, y_n),$$

έχουμε

$$u_n = \left(\prod_{s=0}^{n-1} q_s \right) u_0 \Rightarrow C(x_n, y_n) = \left(\prod_{s=0}^{n-1} q_s \right) C(x_0, y_0).$$

Από την υπόθεση έχουμε $q_n \neq 0, n=0,1,\dots$ άρα $\prod_{s=0}^m q_s \neq 0, n=0,1,\dots$

Αρα $C(x_n, y_n) = 0, n=0,1,\dots$ εάν $C(x_0, y_0) = 0$ και

$C(x_n, y_n) \neq 0, n=0,1,\dots$ εάν $C(x_0, y_0) \neq 0$.

Πρόταση. Έστω y_n, z_n 2 λύσεις της Ομογενούς (2).

Τότε αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες εάν και μόνο εάν

$$C(z_n, y_n) \neq 0, \quad n=0,1,\dots$$

Απόδειξη: Έστω ότι $C(z_n, y_n) \neq 0, n=0,1,\dots$ Θα δείξουμε ότι οι z_n και y_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω αντίθετα ότι είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τότε υπάρχουν αριθμοί λ, μ διάφοροι του μηδενός τέτοιοι ώστε:

$$\lambda y_n + \mu z_n = 0, \quad n=0,1,\dots \quad \text{Τότε} \quad y_n = -\frac{\mu}{\lambda} z_n, \quad n=0,1,\dots$$

$$\text{Παίρνουμε} \quad C(z_n, y_n) = \begin{vmatrix} z_n & y_n \\ z_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_n & -\frac{\mu}{\lambda} z_n \\ z_{n+1} & -\frac{\mu}{\lambda} z_{n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\mu}{\lambda} z_n z_{n+1} + \frac{\mu}{\lambda} z_n z_{n+1} = 0, \quad n=0,1,\dots \quad \text{άρα} \quad \text{δίδει} \quad \text{υπόδειγμα} \quad \text{ότι} \quad C(z_n, y_n) \neq 0. \quad \text{Αρα} \quad z_n, y_n \text{ γραμμικά ανεξάρτητες.}$$

Υποθέτουμε ότι ~~είναι~~ y_n, z_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Θα δείξουμε ότι $C(z_n, y_n) \neq 0$. Υποθέτουμε ότι $C(z_0, y_0) = 0$

Θεωρούμε το γραμμικό ομογενές σύστημα: (αλγεβρικό)

$$\lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0 = 0$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1 = 0$$

Θέλουμε να ελεγχουμε εάν υπάρχει απλοή λ_1, λ_2 διάφορα του μηδενός που να ικανοποιούν το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα

$$\text{Εφόσον η ορίζουσα } C(y_0, z_0) = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ τότε το παραπάνω}$$

σύστημα έχει άπειρα λύσεις (λ_1, λ_2) . Παίρνουμε την

$$\lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2. \text{ Οι } y_n, z_n \text{ λύσεις της } y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0$$

$$\text{Αρα } y_2 = -p_0 y_1 - q_0 y_0. \text{ Ομοίως } z_2 = -p_0 z_1 - q_0 z_0. \text{ Τότε}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 &= \lambda_1 (-p_0 y_1 - q_0 y_0) + \lambda_2 (-p_0 z_1 - q_0 z_0) = -p_0 (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1) - q_0 (\lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0) = \\ &= 0. \text{ Αρα } \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 = 0 \end{aligned}$$

Επαιγμένα αποδεικνύουμε ότι

$$\lambda_1 y_n + \lambda_2 z_n = 0, \quad n=0,1,\dots$$

Αρα οι y_n, z_n γραμμικά εξαρτημένοι, άραό δότω υποθέτουμε ότι οι y_n, z_n γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα $C(y_0, z_0) \neq 0 \Rightarrow C(y_n, z_n) \neq 0, \quad n=0,1,\dots$

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών Δευτέρου Τάξης Ομογενείς με σταθερούς συντελεστές θεωρούμε την εξίσωση

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0, \quad n=0,1,\dots, \quad a_2 \neq 0 \quad (3)$$

όπου a_1, a_2 σταθερές

Εδώ ψάχνουμε λύσεις της μορφής λ^n , $\lambda \in \mathbb{R}$

Ανό των (3) παίρνουμε: $\lambda^{n+2} + a_1 \lambda^{n+1} + a_2 \lambda^n = 0 \Rightarrow$

$$\lambda^n (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0. \quad \text{Θέλουμε } \lambda \neq 0. \quad \text{Άρα } \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

Άρα για να είναι η $y_n = y^n$ λύση της (3) θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$y^2 + a_1 y + a_2 = 0 \quad (4)$$

Η (4) καλείται χαρακτηριστική εξίσωση της (3),

έχουμε τρεις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: Έστω ότι η (4) έχει 2 πραγματικές λύσεις

λ_1, λ_2 διάφορες μεταξύ τους. Τότε η (3) έχει 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της. $y_1 = \lambda_1^n$, $z_1 = \lambda_2^n$. Θα δούμε

ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες: Παίρνουμε την $C(y_1, z_1) =$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^n \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} \lambda_2^n = \lambda_1^n \lambda_2^n (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

όπου υποθέσαμε ότι $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$. Άρα $y_1 = \lambda_1^n$, $z_1 = \lambda_2^n$ είναι λύσεις της (3) γραμμικά ανεξάρτητες

Q^n περιττων: Έστω ότι n αλγεβρική επίκεν (4) έχει για δινηί γένος τμ $Q \in \mathbb{R}$. Η για γένος τμ ϕ ογενος (3) είναι

$$y_n = Q^n \quad \text{Πρέπει να ερωθε και για άλλην γένος } Z_n \text{ τέτοια ώστε}$$

ει y_n, Z_n να είναι διακριτά ανεξάρτητα Παίρνουμε

τμ αναλογισια $Z_n = n Q^n$. Θα εβτασουμε εάν $n Z_n$ είναι γένος τμς ϕ ογενος (3). Παίρνουμε:

$$Z_{n+2} + a_1 Z_{n+1} + a_2 Z_n = (n+2) Q^{n+2} + a_1 (n+1) Q^{n+1} + a_2 n Q^n =$$

$$= Q^n \left[(n+2) Q^2 + a_1 (n+1) Q + a_2 n \right] = Q^n \left[n (Q^2 + a_1 Q + a_2) + 2Q^2 + a_1 Q \right] =$$

$$= Q^n (2Q^2 + a_1 Q) \quad \text{εφδεν } Q^2 + a_1 Q + a_2 = 0$$

εφδεν Q είναι δινηί ρίδια τμς $Q^2 + a_1 Q + a_2 = 0$ έχουμε

$$Q + Q = -a_1 \Rightarrow 2Q = -a_1 \Rightarrow 2Q + a_1 = 0 \quad \text{Τότε}$$

$$Z_{n+2} + a_1 Z_{n+1} + a_2 Z_n = Q^{n+1} (2Q + a_1) = 0. \quad \text{Άρα } Z_n \text{ γένος τμς (3).}$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι οι $y_n = a^n$ και $z_n = n a^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Παιχνάκι του $C(y_n, z_n)$.

$$C(y_n, z_n) = \begin{vmatrix} a^n & n a^n \\ a^{n+1} & (n+1) a^{n+1} \end{vmatrix} = (n+1) a^{n+1} a^n - n a^n a^{n+1} =$$

$$= n a^{n+1} / a^n + a^{n+1} a^n - n a^n / a^{n+1} = a^{2n+1} \neq 0. \text{ Επομένως οι } y_n = a^n, z_n = n a^n \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητες των } \mathbb{C} \text{ πολυνομίων (3).}$$

3^ο Πείρισμα: Δεσπόζει ότι n αλλ. ελάχιστη (4) έχει

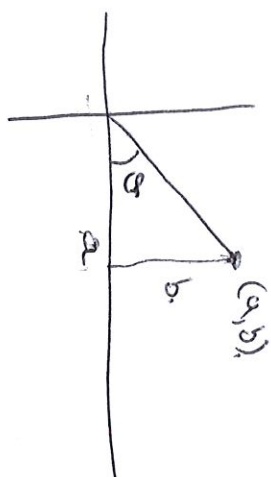
2 μιγαδικές ρίζες τις $a+bi$ και $a-bi$. Οι 2 γραμμικά ανεξάρτητες άδεις των $\mathbb{C}$ πολυνομίων θα είναι οι

$$(a+bi)^n \text{ και } (a-bi)^n, \quad n=0,1, \dots$$

Παίρνουμε την σχέση $(a+bi)^n$ της ολοθέτου

Γράφουμε τον μιγαδικό αριθμό σε πολυπολική μορφή:

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$



$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{Επομένως } a+bi = \sqrt{a^2+b^2} [\cos \theta + i \sin \theta] \Rightarrow (a+bi)^n = (a^2+b^2)^{n/2} (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$\Rightarrow (a+bi)^n = (a^2+b^2)^{n/2} [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

$$\text{Ανοδεύουμε ότι οι } y_n = (a^2+b^2)^{n/2} \cos(n\theta), \quad z_n = (a^2+b^2)^{n/2} \sin(n\theta)$$

είναι λύσεις της διαφορικής (3). Επίσης $C(y_n, z_n) \neq 0$, $n=0,1, \dots$

Άρα y_n, z_n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3).

Λύσμεν: Να ληστέ το πρόβλημα αρχικά τιμήν

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 2.$$

Λύσμεν. Πρώτα θα βρούμε τη γενική λύση $y_n^{(T.O.)}$. Παίρνουμε

την χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$

Άρα έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητα λύσεις της εξίσωσης:

οι $y_n = (-3)^n$ και $z_n = 4^n$. Επομένως η γενική λύση δίνεται:

$$y_n^{(T.O.)} = c_1 (-3)^n + c_2 4^n, \quad n=0,1, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Τα } n=0 \text{ θέλουμε: } & \left. \begin{aligned} c_1 (-3)^0 + c_2 4^0 &= 1 \\ c_1 (-3)^1 + c_2 4^1 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ -3c_1 + 4c_2 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{7} \\ c_2 &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Άρα
$$y_n = \frac{2}{7} (-3)^n + \frac{5}{7} 4^n, \quad n=0,1, \dots$$

Αντικ. Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0.$$

Λύση. Παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Εδώ έχουμε την $\lambda = 3$ διπλή ρίζα. Άρα έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις $y_1 = 3^n$ και $z_n = n3^n$. Επομένως η γενική της ομογενούς δίνεται:

$$y_n^{(ro)} = c_1 3^n + c_2 n 3^n, \quad n=0,1,\dots, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}$$

Άσκηση. Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0, \quad n=0,1,\dots$$

Λύση: Παίρνουμε την Χαρατ. Εξίσωση:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Έχουμε 2 μιγαδικές ρίζες τις $\alpha_1 = -1+i$ και $\alpha_2 = -1-i$

Θα γράψουμε σε τριγωνομετρική μορφή την $\alpha_1 = -1+i$

$$-1+i = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Παίρνουμε το θ : $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Έχουμε $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Άρα $-1+i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$. Επομένως οι 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι

$$y_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right), \quad z_n = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right), \quad n=0,1,\dots$$

Αρα η γενική λύση είναι:

$$y_n^{(T_0)} = c_1 (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + c_2 (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right), \quad n=0,1,-\dots$$

και c_1, c_2 σταθερές.

Η Ομογενής Γραμμική Εξίσωση

Paiprote en Ediscomi

$$J_{n+2} + \theta_1 J_{n+1} + \theta_2 J_n = J_n, \quad n=0,1, \dots \quad (1)$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ non 3 für jede Anzahl

$\Gamma_{\text{even}} \quad \text{even} \quad \text{rns} \quad \text{Ologenods (1)} \quad \gamma_1 \quad = \quad \Gamma_{\text{even}} \quad \text{even} \quad \text{Ologenods}$

$(\text{CrO}) + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{CrO}_4$

Zurück zur letzten Aufgabe: Da x_{n+1} beliebig klein gemacht werden kann, ist x_n beliebig klein. Es gilt also $x_n \rightarrow 0$.

$$f_{\eta} = P(\eta) e^{i \left(A \cos(\eta n) + B \sin(\eta n) \right)}$$

$\delta\pi_{\text{out}}$ $p(\pi)$ $\pi\sigma\lambda\omega\lambda\sigma\lambda\sigma\lambda\sigma$ ϵ, A, γ, B σταθερές.

Τότε η μερική άθροιση $y_n^{(LMO)}$ της άνω ολοκληρώσεως θα έχει την μορφή

$$y_n^{(LMO)} = r^n e^{i n \theta} \left(C(n) \cos(\delta n) + D(n) \sin(\delta n) \right)$$

όπου $C(n), D(n)$ προκύπτουν από γινόμενα των μορφών 1 δυν. βαθμίου με το πολυώνυμο $P(n)$. Υπολογισμός του P :

$$\text{Θεωρούμε τον αριθμό } e^{i(\cos \gamma + i \sin \gamma)} = \lambda$$

Τότε $P=0$ εάν ο αριθμός λ δεν είναι ρίζα της χαρμ. Εξίσωσης της Ολοκληρώσεως: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$. Επείτα $P=1$ εάν λ είναι αυτή ρίζα της χαρμ. Εξίσωσης και τέλος $P=2$ εάν λ είναι διπλή ρίζα της χαρμ. Εξίσωσης.

Άσκηση Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = 4 \cdot 5^n, \quad n=0,1,\dots$$

Λύση: Ξέρει $y_n^{(r_1,0)} = y_n + y_n$.

Θα υπολ. πρώτα τη $y_n^{(r_2,0)}$: Ολοκληρώνω: $y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = 0$

Χαρακτ. Εξίσωση: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$ διπλή ρίζα.

Άρα έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Ολοκληρώνω:
 5^n και $n5^n$. Τότε

$$y_n^{(r_2,0)} = c_1 5^n + c_2 n 5^n, \quad n=0,1,\dots$$

Θα υπολ. και την $y_n^{(u,0)}$. Ξεκινάμε $f_n = 4 \cdot 5^n$. Άρα

$$P(n)=4, \quad n=0,1,\dots \quad B=5, \quad A=1, \quad \gamma=0. \quad \text{Άρα}$$

$$y_n^{(u,0)} = n^p 5^n C, \quad C \text{ σταθερά.}$$

Θα υποθέτουμε ότι: Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda = e(\cos \gamma + i \sin \gamma) =$
 5 διάνυσμα της Χαράου. Εξίσωση. Άρα $p = 2$. Επομένως

$$y_n^{(uM0)} = n^2 5^n C. \quad \text{Θα υποθέτουμε ότι υπάρχει } C:$$

Ανέτουμε εξίσωση έχουμε:

$$y_{n+2}^{(uM0)} - 10 y_{n+1}^{(uM0)} + 25 y_n^{(uM0)} = 4 \cdot 5^n \Rightarrow (n+2)^2 5^{n+2} C - 10(n+1)^2 5^{n+1} C + 25 n^2 5^n C = 4 \cdot 5^n \Rightarrow 25(n^2 + 4n + 4) C - 50(n^2 + 2n + 1) C + 25 n^2 C = 4$$

$$\Rightarrow (25 n^2 + 100 n + 100) + (50 n^2 - 100 n - 50) C + 25 n^2 C = 4$$

$$\Rightarrow 100 C - 50 C = 4 \Rightarrow C = \frac{4}{50} \Rightarrow C = \frac{2}{25}, \quad \text{Τότε } y_n^{(uM0)} = \frac{2}{25} n^2 5^n$$

Άρα

$$y_n^{(uM0)} = C_1 5^n + C_2 n 5^n + \frac{2}{25} n^2 5^n, \quad n=0,1, \dots$$

Παρατηρήσεις: Έστω ότι στο πρόβλημα θέλουμε να

χάσουμε τέτοια ώστε $y_0 = 1$, $y_1 = 2$,

$$y_0 = c_1 5^0 + c_2 0 \cdot 5^0 + \frac{2}{25} 0^2 5^0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y_1 = 5c_1 + 5c_2 + \frac{2}{25} 5 = 2 \Rightarrow 5c_2 = -3 - \frac{2}{5} = -\frac{17}{5} \Rightarrow c_2 = -\frac{17}{25}$$

Άρα

$$y_n = 5^n - \frac{17}{25} n 5^n + \frac{2}{25} n^2 5^n.$$

Αντικείμενο: Να βρεθεί τμή γεννήσι γεννη τμή

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 3 \cdot 2^n, \quad n=0,1, \dots$$

$$\Lambda \hat{=} \sigma_n, \quad y_n^{(\tau_0)} = y_n + y_n^{(\mu_0)}$$

$y_n^{(\tau_0)}$: Χαρακτ. Εξίσωση: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$. Άρα

$$y_n^{(\tau_0)} = C_1 2^n + C_2 5^n, \quad n=0,1, \dots$$

$$y_n^{(\mu_0)}: \quad f_n = 3 \cdot 2^n. \quad \text{Άρα } p(n) = 3, \quad \theta = 2, \quad A = 1, \quad r = 0$$

$$\text{Επομένως } y_n^{(\mu_0)} = n C 2^n. \quad \text{Θα υπολ τμ σταθερά } p:$$

Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda = \theta(\cos \gamma + i \sin \gamma) = 2$. αλληλ πίδα τμή

Χαρακτ. Εξίσωση. Άρα $p = 1$. Επομένως $y_n^{(\mu_0)} = C n 2^n$. Άρα

$$(C n^2) 2^n - 7(C n+1) 2^n + 10(C n) 2^n = 3 \cdot 2^n \Rightarrow 4C(n^2) - 14C(n+1) + 10Cn = 3$$

$$8C - 14C = 3 \Rightarrow C = -\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}. \quad \text{Άρα } y_n^{(\mu_0)} = -\frac{1}{2} n 2^n.$$

$$\text{Άρα } y_n^{(rmo)} = c_1 2^n + c_2 5^n - \frac{1}{2} n 2^n, \quad n=0,1, \dots$$

Παρατήρηση: Έστω ότι έχουμε και είκοσι:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)} + \dots + f_n^{(k)}$$

$$\text{όπου } f_n^{(i)} = p_n^{(i)} \theta_L^n \left(A_L \cos(\gamma_n) + B_L \sin(\gamma_n) \right), \quad i=1,2, \dots, k,$$

Ζητούμε την γενική λύση $y_n^{(hmo)}$. θεωρούμε τις εξισώσεις

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n^{(i)}, \quad i=1,2, \dots, k.$$

Με τη μέθοδο προσδιοριστέων ετερογενών υποχ. τις γενικές λύσεις

$$y_n^{(i, hmo)}, \quad i=1,2, \dots, k \quad \text{όπου} \quad y_n^{(hmo)} = y_n^{(1, hmo)} + y_n^{(2, hmo)} + \dots + y_n^{(k, hmo)}.$$

Αντικείμενα Να ερμηνεύει την γενική σχέση τους.

$$y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 2 - 4 \cdot 3^n, \quad n=0,1,\dots$$

Αντικείμενα: $f_n = 2 - 4 \cdot 3^n$. Παιχνίδι $f_n^{(1)} = 2$, $f_n^{(2)} = -4 \cdot 3^n$. Θεωρούμε

Τις σχέσεις

$$y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 2 \quad (A).$$

$$y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = -4 \cdot 3^n \quad (B).$$

$$\text{Λέμε } y_n^{(TM)} = y_n^{(T)} + y_n^{(M)}$$

$y_n^{(T)}$: Χαρακτηριστική: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$ διπλή. Άρα

$$y_n^{(T)} = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n, \quad n=0,1,\dots$$

$$\text{Θα υπολογίσουμε } y_n^{(M)} = y_n^{(A,M)} + y_n^{(B,M)}$$

$$y_n^{(A, \mu m)} : f_n^{(1)} = 9. \quad \text{Άρα } y_n^{(A, \mu m)} = \eta^P_A C$$

Θα υπολογίσουμε την P_A : Παίρνουμε τον αριθμό: $e_A(\cos \gamma + i \sin \gamma) = 1$

δεν είναι ρίζα της χαρμ. εξίσωσης, άρα $P_A = 0$. Επομένως

$$y_n^{(A, \mu m)} = C. \quad \text{Ανέχουμε } (A) \text{ έχουμε } C + 6C + 9C = 9 \Rightarrow$$

$$C = \frac{9}{16} \Rightarrow C = \frac{1}{8}. \quad \text{Επομένως } y_n^{(A, \mu m)} = \frac{1}{8}, \quad m=0,1, \dots$$

Θα υπολογίσουμε και την $y_n^{(B, \mu m)}$: Εδώ $f_n^{(2)} = -4 \cdot 3^n$, $\theta = 3$, $\rho(m) = -4$

$$H \quad y_n^{(B, \mu m)} = D \cdot \eta^P_B \cdot 3^n \quad \text{Υπό του } P_B: \text{ Παίρνουμε τον αριθμό } e_B(\cos \gamma + i \sin \gamma) =$$

3 δεν είναι ρίζα της χαρμ. εξίσωσης, άρα $P_B = 0$. Επομένως

$$y_n^{(B, \mu m)} = D \cdot 3^n. \quad \text{Ανέχουμε } (B) \text{ έχουμε: } D 3^{n+2} + 6 D 3^{n+1} + 9 D 3^n = -4 \cdot 3^n$$

$$\text{Άρα } 9D + 18D + 9D = -4 \Rightarrow D = -\frac{4}{36} = -\frac{1}{9}. \quad \text{Επομένως } y_n^{(B, \mu m)} = -\frac{1}{9} \cdot 3^n.$$

$$\text{Άρα } y_n^{(C, \mu m)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \cdot 3^n. \quad \text{Άρα } y_n^{(C, \mu m)} = C_1(-3)^n + C_2 \eta(-3)^n + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \cdot 3^n, \quad m=0,1, \dots$$

Άσκηση. Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 6n$$

$$(r^2) \quad (r^2) \quad (r^2)$$

$$\text{Λύση. } y_n = y_n + y_n$$

$$y_n^{(r^2)} : \text{ Χαρακτ. Εξίσωση: } \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \delta \text{ in } \mathbb{C}.$$

$$\text{Άρα } y_n^{(r^2)} = c_1 1^n + c_2 n 1^n \Rightarrow y_n^{(r^2)} = c_1 + c_2 n, \quad n=0,1,\dots$$

$$y_n^{(h^2)} : f_n = 6n \quad \in \text{Xαρὰς } p(n) = 6n, \quad e=1, \quad \gamma=0, \quad A=1$$

$$\text{Άρα } y_n^{(h^2)} = n \cdot 1 \cdot C(n), \quad \deg C(n) = \deg p(n) = 1, \quad \in \text{Πολύνομο}$$

$$C(n) = Dn + B. \quad \text{Θα υπολ το } p: \text{ Παίρνουμε τον αριθμό } e(\cos \gamma + i \sin \gamma) = 1$$

$$\delta \text{ in } \mathbb{C} \text{ π'ότα της χαρακτ. Εξίσωσης Άρα } y_n^{(h^2)} = n^2 \cdot (Dn + B) = Dn^3 + Bn^2$$

Ανó τñ αρχική Εξίσωση:

$$D(n+2)^3 + B(n+2)^2 - 2D(n+1)^3 - 2B(n+1)^2 + Dn^3 + Bn^2 = 6n \Rightarrow D(n^3 + 3n^2 \cdot 2 + 3n \cdot 2^2 + 2^3) + B(n^2 + 4n + 4) - 2D(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 2B(n^2 + 2n + 1) + Dn^3 + Bn^2 = 6n$$

Αρα $\epsilon D = \epsilon \Rightarrow D = 1$ και $\epsilon D + 2B = 0 \Rightarrow 2B = -6 \Rightarrow B = -3$.

Επομένως $y_n^{(\mu_{m0})} = \eta^3 - 3\eta^2$

Αρα $y_n^{(\tau_{m0})} = C_1 + C_2 \eta + \eta^3 - 3\eta^2, \quad n=0,1, \dots$

Άρα να επείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} + y_n = -2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n=0,1, \dots$$

Λόγω: $y_n^{(\tau_{m0})} = y_n + y_n^{(\mu_{m0})}$

$y_n^{(\tau_{m0})}$: Χαρακ. Εξίσωση: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

Παίρνουμε τον $\lambda_1 = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$. Αρα οι 2 γενικές ανεξάρτητες

λύσεις της Ομογενούς είναι οι: $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n=0,1, \dots$

$y_n^{(\tau_{m0})} = C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right); \quad C_1, C_2 \text{ σταθερές}$

$$y_n^{(k,nD)} : \quad \begin{aligned} & \in \delta u \\ & f_n = -2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \epsilon_{\text{XOY}} \in P(n) = -2, \quad \theta = 1, \quad A = 1, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \\ & B = 0. \end{aligned}$$

$$y_n^{(k, m)} = r^n \left(C \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + D \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right)$$

C, D πολλαπλασιασμοί μετρήσιμων εαυτών δίνει και το $p(n) = -2$ είναι μετρήσιμος εαυτός. Για τον p : Παίρνουμε τον αριθμό $\theta(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ είναι αρχή είδη της χαρμυτ επιφανείας, άρα $p = 1$. Επομένως

Example: $y_n = C \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. And $y_{n+2} + y_n = -2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$C(n+2) \cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + D(n+2) \sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + Cn \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Dn \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -C(n+2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - D(n+2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Cn\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Dn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$-C \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2C \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - D \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2C \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -2C \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2D \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2C \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow -2C = -2, \quad -2D = 0 \Rightarrow C = 1, D = 0.$$

Αρα $y_n^{(HMD)} = n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Τελικά

$$y_n^{(TMD)} = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n=0,1,\dots$$

Μη χαρακτηριστικό ελλειψές Διαφορών:

Θεωρούμε την εξίσωση: $y_{n+1} = \frac{ay_n + b}{cy_n + d}, \quad n=0,1,\dots$

με τον περιορισμό $ad - cb \neq 0$. Θεωρούμε την αλγ. εξίσωση:

$$\lambda = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \Rightarrow c\lambda^2 + d\lambda = a\lambda + b \Rightarrow c\lambda^2 + (d-a)\lambda - b = 0$$

Θεωρούμε ότι η αλγ. εξίσωση έχει 2 ρίζες $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

□ aiprove:

$$\frac{y_{n+1} - \alpha_1}{y_{n+1} - \alpha_2} = \frac{\frac{ay_n + b}{cy_n + d} - \frac{a\alpha_1 + b}{c\alpha_1 + d}}{\frac{ay_n + b}{cy_n + d} - \frac{a\alpha_2 + b}{c\alpha_2 + d}} =$$

$$= \frac{(ay_n + b)(c\alpha_1 + d) - (a\alpha_1 + b)(cy_n + d)}{(cy_n + d)(c\alpha_1 + d)} = \frac{c\alpha_2 + d}{c\alpha_1 + d} \cdot \frac{y_n - \alpha_1}{y_n - \alpha_2}$$

$$\frac{(ay_n + b)(c\alpha_2 + d) - (a\alpha_2 + b)(cy_n + d)}{(cy_n + d)(c\alpha_2 + d)}$$

Επιπλέον

$$\frac{y_{n+1} - \alpha_1}{y_{n+1} - \alpha_2} = \frac{c\alpha_2 + d}{c\alpha_1 + d} \cdot \frac{y_n - \alpha_1}{y_n - \alpha_2}$$

Θέτουμε $u_n = \frac{y_n - \alpha_1}{y_n - \alpha_2} \Rightarrow \frac{y_{n+1} - \alpha_1}{y_{n+1} - \alpha_2} = u_{n+1}$. Άρα $u_{n+1} = \frac{c\alpha_2 + d}{c\alpha_1 + d} u_n$.

$$\Rightarrow u_n = \left(\frac{c\alpha_2 + d}{c\alpha_1 + d} \right)^n u_0 \Rightarrow \frac{y_n - \alpha_1}{y_n - \alpha_2} = \left(\frac{c\alpha_2 + d}{c\alpha_1 + d} \right)^n \cdot \left(\frac{y_0 - \alpha_1}{y_0 - \alpha_2} \right), n=0,1, \dots$$

Assumen: Na Abete m $y_{n+1} = \frac{12y_n - 2}{9y_n + 3}$

Anden: Paiproke m $\alpha \lambda \gamma$. Ejlæven $\alpha = \frac{12\lambda - 2}{9\lambda + 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{2}{3}$ Paiproke for $\lambda \delta \gamma$

$$\frac{y_{n+1} - \frac{1}{3}}{y_{n+1} - \frac{2}{3}} = \frac{y_{n+1} - \frac{1}{3}}{y_{n+1} - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{12y_n - 2}{9y_n + 3} - \frac{1}{3}}{\frac{12y_n - 2}{9y_n + 3} - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3(12y_n - 2 - 3y_n - 3)}{3(9y_n + 3)}}{\frac{3(12y_n - 2 - 2(9y_n + 3))}{3(9y_n + 3)}} =$$

$$\frac{2 + y_n - 9}{18y_n - 12} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3y_n - 1}{3y_n - 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3y_n - 1}{3y_n - 2} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{y_{n+1} - \frac{1}{3}}{y_{n+1} - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}} \quad \text{Oetrouke } u_n = \frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}}$$

For $u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n \Rightarrow u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n u_0 \Rightarrow \frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{y_0 - \frac{1}{3}}{y_0 - \frac{2}{3}}\right)$

Θεωρούμε τιν επίμεν διαφορών $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$, $n=0,1,\dots$
 όπου $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc \neq 0$.

Παίρνουμε τιν ax επίμεν: $\lambda = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow$

$$c\lambda^2 + (d-a)\lambda - b = 0$$

Θεωρούμε ότι n ax επίμεν έχει μια γραμμική ρίζα διότι
 έχουμε λ n διηλθ ρίζα. Από τιν επίμεν παίρνουμε:

$$c\lambda^2 + d\lambda - a\lambda - b = 0 \Rightarrow \lambda(c\lambda - a) = b - d\lambda \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{b-d\lambda}{c\lambda-a}$$

$$\text{Επίμεν ισχύει: } 2\lambda = -\left(\frac{d-a}{c}\right) \Rightarrow$$

$$2\lambda = \frac{a-d}{c}$$

Έστω x_n λέν τιν επίμεν διαφορών με $x_0 \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε:

$$\frac{1}{x_{n+1} - \lambda} = \frac{1}{\frac{ax_n + b}{cx_n + d} - \lambda} = \frac{cx_n + d}{ax_n + b - \lambda(cx_n + d)} = \frac{cx_n + d}{ax_n + b - \lambda cx_n - \lambda d} = \frac{cx_n + d}{x_n(a - \lambda c) + b - \lambda d}$$

$$= \frac{1}{a - \lambda c} \cdot \frac{cx_n + d}{x_n + \frac{b - \lambda d}{a - \lambda c}} = \frac{1}{a - \lambda c} \cdot \frac{cx_n + d}{x_n - \lambda} = \frac{a - \lambda c - a + \lambda c + cx_n + d}{(a - \lambda c)(x_n - \lambda)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a-\lambda c}{(a-\lambda c)(x_{n-2})} + \frac{-a+\lambda c + cx_{n+1}+d}{(a-\lambda c)(x_{n-2})} = \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{-a+\lambda c + cx_{n+1}+d}{(a-\lambda c)(x_{n-2})} \\
 &= \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{-2\lambda c + \lambda c + cx_n}{(a-\lambda c)(x_{n-2})} = \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{-\lambda c + cx_n}{(a-\lambda c)(x_{n-2})} = \\
 &= \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{c(x_{n-1})}{(a-\lambda c)(x_{n-2})}
 \end{aligned}$$

Teoriale Hauptprobe zum Ergebnis;

$$\frac{1}{x_{n+1-2}} = \frac{c}{a-\lambda c} + \frac{1}{x_{n-2}}, \quad n=0,1,\dots$$

Ökonomie $v_n = \frac{1}{x_{n-2}}$ IdTe $v_{n+1} = \frac{c}{a-\lambda c} + v_n, \quad n=0,1,\dots$

$$v_n = v_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{c}{a-\lambda c} \Rightarrow v_n = v_0 + \frac{nc}{a-\lambda c} \Rightarrow \frac{1}{x_{n-2}} = \frac{1}{x_{0-2}} + \frac{nc}{a-\lambda c}, \quad n=0,1,\dots$$

Na
NeeTe
Tn
Edison.

$$x_H = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Neben Laplace in $x \times x$. Effizient: $x = \frac{6x-4}{x+2} \Rightarrow$

Laipnate Ton do

$$\frac{1}{y_{n+1} - 2} = \frac{1}{y_n + 2} \cdot \frac{y_n + 2}{y_{n+1} - 2}$$

[illegible]

$$\frac{1}{\frac{1}{j_{n-2}} + \frac{1}{j_5} + \frac{1}{j_{n+1}}} = \frac{j_5 j_{n-2} j_{n+1}}{j_5 j_{n-2} + j_5 j_{n+1} + j_{n-2} j_{n+1}}$$

[illegible]

3
1
0

Ποιο τμήμα $M \in \mathcal{X}$ είναι των χ μέσων των $\mathcal{E}$ ιδιοτήτων Διαφορών,
 Σ μήκεια $\mathcal{L}$ ομοιοτήτων;

Ορίσματα: θεωρούμε την $\mathcal{E}$ ιδιοτήτων πρώτους τὰ $\mathcal{E}$ της

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n=0,1,\dots \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{επειδή} \quad (1)$$

Ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}$ να ληφθεί σημείο $\mathcal{L}$ ομοιοτήτων για την (1) εάν
 ικανοποιεί $\bar{x} = f(\bar{x})$. Αυτό σημειώνεται ότι n $x_n = \bar{x}$, $n=0,1,\dots$ είναι
 μια σταθερή λύση της (1)

Παραδείγματα. Να ερευνηθεί τα σημεία $\mathcal{L}$ ομοιοτήτων της $\mathcal{E}$ ιδιοτήτων
 $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n)$, $n=0,1,\dots$

Απάντ: $\mathcal{E}$ ιδιοτήτων $f(x) = 2x(1-x)$. Θέτουμε $x = f(x)$ δηλ. $x = 2x(1-x)$
 $\Rightarrow \bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{2}$ είναι τα σημεία $\mathcal{L}$ ομοιοτήτων για την (1).

Πρόταση. Έστω $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ και f συνεχής στο $[a, b]$.

Τότε η εξίσωση διαφέρειων (1) έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ευθεία $g(x) = f(x) - x$. Η g είναι συνεχής και έχει τιμές στο $[a, b]$. Παιρνουμε: $g(a) = f(a) - a \geq 0$. Επίσης $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Άρα υπάρχει $c \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c$. Επομένως η (1) έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

Πρόταση. Έστω $I = [a, b]$ και f μια συνεχής συνάρτηση στο I . Υποθέτουμε ότι: $I \subseteq f(I)$. Τότε η (1) έχει τουλάχιστον ένα ενήλιο ισορροπίας.

Απόδειξη. Έχουμε $I \subseteq f(I)$ θα υπάρχει $c \in [a, b]$ τέτοιος ώστε $a = f(c)$ Ομοίως θα υπάρχει $d \in [a, b]$ τέτοιος ώστε

$$b = f(d) \quad \text{Παίρνουμε την συνάρτηση } f(x) - x = g(x) \text{ η οποία}$$

είναι προφανές ότι είναι συνεχής.

Παίρνουμε $g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$

$$g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0. \quad \text{Άρα υπάρχει αριθμός } \bar{x} \in I \text{ τέτοιος ώστε}$$

$$g(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = \bar{x}. \quad \text{Άρα το } \bar{x} \text{ ενήλιο ισορροπίας δια την (1).}$$

Άσκηση. Έστω η εξίσωση διαφορών (διακριτή εξίσωση)

$$x_{n+1} = ax_n + (b + cx_n)e^{-x_n} \quad n=0,1,\dots$$

Θεωρούμε ότι $0 < a, c < 1$, $b > 1$. Τότε η εξίσωση έχει μοναδικό μηδείο ισορροπίας.

Ανεν θέτουμε $F(x) = ax + (b + cx)e^{-x}$ και

$G(x) = F(x) - x$, έφ'όσον η F είναι συνεχής είναι προφανές ότι και η

G είναι συνεχής. Παιρνουμε:

$$G(0) = F(0) = b > 0. \text{ Επίσης } G(x) = ax + (b + cx)e^{-x} =$$

$$= (a-1)x + (b+cx)e^{-x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = -\infty. \text{ Άρα υπάρχει μοναδικό } \bar{x}:$$

$G(\bar{x}) = 0 \Rightarrow F(\bar{x}) = \bar{x}$. Άρα η εξίσωση έχει το μέγιστο ένα μηδείο ισορροπίας $\bar{x}$.

Παίρνουμε τω $G'(x) = a-1 + e^{-x}(b+cx) + ce^{-x}$

$$\Rightarrow G'(x) = a-1 + e^{-x}(c-b-G(x)) = a-1 + (c(1-x)-b)e^{-x}$$

Εάν $x > 1$ τότε είναι προφανές ότι $G'(x) < 0$

Εάν $x \leq 1$, τότε $c(1-x)-b \leq 0$, άρα νότι $G'(x) < 0$ ενδεχόμεν

η G είναι γνήσιος φθίνουσα. Άρα το $\bar{x}$ είναι το μοναδικό ενδεό ισορροπίας.

Mendins
Peartins
Jew.

Opicids: *Mia* and *Noctia* ⁱⁿ *Elva* *phayhem* and *Herve* *vai* and *uatu* and *Getuev* *apibhah* *en* *uaprom* *K*, *M* *> 0* *Tetolai* *bert*

π

Aennen, Despothe In

$$X_{H1} = \frac{a}{c + \frac{a}{X_{H2}}}$$

$\delta\tau_{00}$, c , d determine approximately the value of x_0 .

Na Seilsete dte udde nhen x n elvai fpaalhen and ndrus uua and
ndtu and Getme's apidhah's

Notes
Lectures
Xs
Tutorials
Notes
Tus
Edwards
Tel
Xo
Deirdre.

$$\begin{array}{c} \text{X}_3 \\ \text{11} \\ \hline \text{1} + \text{2} + \text{3} + \text{4} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{11, 2, 1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{16X361} \\ \text{X}_3 \\ \text{11} \\ \hline \text{1} + \text{2} + \text{3} + \text{4} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{11, 2, 1} \end{array}$$

Enophrys m kn einer Apoglym und räum und Getriebe apothel To $\frac{d}{c} = M$.

Θα δείξουμε ότι x_n είναι μια αύξουσα φραγμένη και θετική
αριθμητική. Έχουμε:

$$x_n = \frac{a}{c + dx_{n-1}}$$

$$\text{και } x_n < \frac{a}{c}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{Για } n \geq 2 \text{ είναι προφανές ότι } x_n \geq \frac{a}{c + d \frac{a}{c}}, \quad n \geq 2$$

$$\text{Επομένως } x_n \geq \min \left\{ x_1, \frac{a}{c + d \frac{a}{c}} \right\}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{Άρα παύουμε } k = \min \left\{ x_1, \frac{a}{c + d \frac{a}{c}} \right\}.$$

Σύγκριση των άδρων σε ενήλιο ισορροπίας,

Ορισμός: Έστω x_n μια ακολουθία, $x_n \in \mathbb{R}$ θεωρούμε για
ακόμα ακολουθία y_n , $y_1 < y_2 < \dots < y_n < \dots$ Τότε n

x_n λέγεται υποακολουθία της x_n .

Παράδειγμα, Έστω n ακολουθία $x_n = \frac{3+n}{2+n}$, $n=1,2, \dots$

Θεωρούμε την $y_n = 2^n$, $n=1,2, \dots$ Τότε n

$$x_{y_n} = \frac{3+2^n}{2+2^n}, n=1,2, \dots \text{ είναι υποακολουθία της } x_n.$$

Ορισμός. Ένας αριθμός ℓ λέγεται οριατός αριθμός για την x_n
εάν υπάρχει υποακολουθία της x_n που συγκλίνει στο ℓ .

Πρόταση: Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια
υποακολουθία συγκλίνουσα

Παραδίδεται: Έστω n

$$x_n = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n} & n=2k \\ 3 + \frac{n}{n+1} & n=2k+1 \end{cases}$$

Η ακολουθία x_n δεν συγκλίνει. Έχει 2 υποακολουθίες

$$\text{Π.1} \quad x_{2k} = 2 + \frac{1}{2k}, \quad k=1,2,\dots \quad \text{όπου} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 2$$

$$\text{και την υποακολουθία} \quad x_{2k+1} = 3 + \frac{2k+1}{2k+2} \quad \text{όπου} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = 4.$$

Εξού υπάρχει 2 σημεία απόφαση το 2 και το 4.

Η ακολουθία x_n δεν έχει όριο διότι $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ και

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$$

Ορίσμός: θεωρούμε για φραγμένη ακολουθία x_n . Τότε

ο μικρότερος οριακός αριθμός ονομάζεται $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$,

ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός ονομάζεται $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Πρόταση. Υπάρχει το $\lim x_n$ εάν και μόνο εάν $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n =$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Πρόταση. Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία. Τότε
 $\ell = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ εάν ισχύει:

a) $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \ell - \epsilon \leq x_n$.

b) $\forall m \in \mathbb{N} \exists m_0 \geq m$ τέτοιο ώστε: $x_{m_0} \leq \ell + \epsilon$.

Εντός $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ εάν ισχύει:

a) $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad x_n \leq L + \epsilon$.

b) $\forall m \in \mathbb{N} \exists m_0 \geq m$ τέτοιο ώστε $L - \epsilon \leq x_{m_0}$.

Άσκηση: Να δείξετε ότι κάθε θετική λήν της

$$x_{n+1} = \frac{a}{b + dx_n}, \quad n=0,1,\dots$$

$a, b, d \in (0, \infty)$ συγκλίνει στο μοναδικό εν λείο ισορροπίας της εξίσωσης,

Λήν: Θα δείξουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδικό εν λείο ισορροπίας

$$\text{Παίρνουμε } x = \frac{a}{b + dx} \Rightarrow dx^2 + bx - a = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ad}}{2d}$$

Η εξίσωση έχει μοναδικό θετικό εν λείο ισορροπίας το $\bar{x} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ad}}{2d}$.

Έστω x_n τυχόν λήν της εξίσωσης με $x_0 > 0$.

Θα δείξουμε ότι $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. θεωρούμε

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{και} \quad l = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Αντί του προηγούμενου πρότασης έχουμε:

$$(x > 0) \exists n \in \mathbb{N}: x \geq n, \quad l - \epsilon \leq x_n$$

$$(x < 0) \exists n_2 \in \mathbb{N}: x \leq n_2, \quad x_n \leq l + \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 (\exists n_2 \in \mathbb{N}): x \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}: \quad l - \epsilon \leq x_n \leq l + \epsilon$$

Παίρνουμε έστω $m = n_0 + 1$, τότε θα υπάρχει $k \geq m$:

$$x_k \leq l + \epsilon \Rightarrow \frac{a}{b + dx_{k-1}} \leq l + \epsilon \quad \text{Αλλά} \quad k \geq n_0 + 1 \Rightarrow k-1 \geq n_0$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad x_{k-1} \leq l + \epsilon \Rightarrow \frac{a}{b + d(l + \epsilon)} \leq \frac{a}{b + dx_{k-1}} \leq l + \epsilon$$

$\Rightarrow$ όταν $\epsilon \rightarrow 0$ έχουμε:

$$\boxed{\frac{a}{b + dL} \leq l}$$

Παίρνουμε έστω $m = n_0 + 1$ τότε θα υπάρχει $s \geq m$ τέτοιο ώστε

$$l - \epsilon \leq x_s = \frac{a}{b + dx_{s-1}} \leq$$

$$\frac{a}{b + d(l - \epsilon)}$$

Τότε $\epsilon \rightarrow 0$ έχουμε

$$\boxed{l \leq \frac{a}{b + dL}}$$

Πήραμε τις εκθέσεις: $\frac{a}{b+dL} \leq \ell$ και $L \leq \frac{a}{b+dL}$

Εξάγουμε: $\frac{aL}{b+dL} \leq \ell$ και $L\ell \leq \frac{aL}{b+dL}$ Τότε

$$\frac{aL}{b+dL} \leq \frac{aL}{b+dL} \Rightarrow bL + d\cancel{L} \leq b\ell + d\cancel{L} \Rightarrow b(L-\ell) \leq 0$$

Εφόσον $b > 0$ παίρνουμε $L - \ell \leq 0 \Rightarrow L = \ell \Rightarrow$ υπάρχει το

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. Ανά τm $x_{n+1} = \frac{a}{b+d x_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{a}{b+d \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{a}{b+d\bar{x}}$. Άρα x_n συγκλίνει στο μοναδικό όριο

εντός της ακολουθίας $\bar{x}$.