Εξισώσεις Διαφορών.

Στις διαφ. εξισώσεις θεωρούμε μια σχέση

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y) = 0 \qquad (1)$$

Θέλουμε να βρούμε $y = y(x)$ η οποία να ικανοποιεί την (1)

Στις Εξισώσεις Διαφορών έχουμε μια σχέση

$$f(y_{n+r}, y_{n+r-1}, \dots, y_n) = 0 \qquad (2)$$

Ο αριθμός r είναι φυσικός αριθμός και η y_n είναι ακολουθία.
Η (2). είναι Εξίσωση Διαφορών r τάξεως.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την Εξίσωση

$$y_{n+3}^2 - 3y_{n+2} + 5y_{n+1} - y_n = 0$$

Θέλουμε ακολουθία y_n που να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση
Η εξίσωση είναι $3^{ης}$ τάξης.

Συμβολισμοί

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_{n-1}, \quad n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^{n_0-1} a_k = 0$$

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} a_k = a_{n_0} \cdot a_{n_0+1} \cdots a_{n-1}, \quad n \geq n_0 \quad \prod_{k=n_0}^{n_0-1} a_k = 1$$

Γνωστά Αθροίσματα

1) $$\sum_{k=n_0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^{n_0}\left(\omega^{n-n_0} - 1\right)}{\omega - 1}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

2) Έστω $|\omega| < 1$, $$\sum_{k=n_0}^{\infty} \omega^k = \frac{\omega^{n_0}}{1-\omega}$$

3). $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(1+n)n}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \prod_{k=n_0}^{n-1} c = c^{n-n_0}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

Έχουμε ότι $y' = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$. Άρα έχουμε:

$\lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f(x,y)$. Παίρνουμε για h μικρό

$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \cong f(x,y)$. Παίρνουμε τη σχέση

$$y(x+h) - y(x) = hf(x,y) \text{ ή } y(x+h) = y(x) + hf(x,y)$$

Για $x = x_0$ έχουμε: $y(x_0+h) = y(x_0) + hf(x_0,y_0) = y_0 + hf(x_0,y_0)$

Για $x = x_0+h$ παίρνουμε: $y(x_0+2h) = y(x_0+h) + hf(x_0+h, y(x_0+h))$
Εργαζόμενοι επαγωγικά παίρνουμε:

$$y(x_0+nh) = y(x_0+(n-1)h) + hf(x_0+(n-1)h, y(x_0+(n-1)h)), \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Θέτουμε $Z_n = y(x_0 + nh)$, τότε $y(x_0+(n-1)h) = Z_{n-1}$.

Άρα έχουμε την εξίσωση διαφορών:

$$Z_n = Z_{n-1} + h f(x_0+(n-1)h, Z_{n-1}). \quad n=1,2,\dots$$

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών

Μια γραμμική Εξίσωση Διαφορών r τάξεως έχει τη μορφή:

$$a_r(n) y_{n+r} + a_{r-1}(n) y_{n+r-1} + \dots + a_1(n) y_{n+1} + a_0(n) y_n = f_n \quad (i)$$

όπου $a_i(n)$, $i=0,1,\dots,n$ δοθείσες ακολουθίες, f_n επίσης γνωστή ακολουθία. Εάν η ακολουθία $f_n=0$, $n \in \mathbb{N}$ τότε η (i) καλείται ομογενής.

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση

$$y_{n+3} - y_{n+1} + \cos(y_n) = 0$$

Εφόσον υπάρχει ο όρος $\cos(y_n)$ δεν είναι γραμμική.

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση

$$y_{n+4} - 2^{n} y_{n+2} + \ln(n^2+1)\, y_n^2 = 0$$

Εφόσον υπάρχει ο όρος y_n^2 δεν είναι γραμμική.

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση:

$$y_{n+4} - \cos(n^5+1)\, y_{n+3} + \ln\left(\sqrt{n^2+1}\right) y_{n+1} + e^{n^2} y_n = 0$$

Αυτή είναι γραμμική τέταρτης τάξης και ομογενής.

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών πρώτης τάξης

Αυτές έχουν την γενική μορφή:

$$y_{n+1} = p_n y_n + q_n$$ όπου p_n, q_n γνωστές ακολουθίες

(Συμβολικά $p_n = p(n)$, $q_n = q(n)$)

Η ομογενής εξίσωση θα έχει την μορφή:

$$y_{n+1} = P_n y_n$$

Θεωρούμε κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ με y_{n_0} γνωστό. Έχουμε:

$$y_{n_0+1} = P_{n_0} y_{n_0}, \quad y_{n_0+2} = P_{n_0+1} \cdot y_{n_0+1} = P_{n_0} P_{n_0+1} y_{n_0}$$

Άρα $y_{n_0+2} = P_{n_0} P_{n_0+1} \cdot y_{n_0}$, $\quad y_{n_0+3} = P_{n_0+2} y_{n_0+2} \Rightarrow$

$y_{n_0+3} = P_{n_0} P_{n_0+1} P_{n_0+2} y_{n_0}$ Γενικά: για $n \geq n_0$

$$y_n = P_{n_0} P_{n_0+1} \cdots P_{n-1} y_{n_0} \Rightarrow \quad y_n = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} P_j\right) y_{n_0}, \quad n \geq n_0$$

Πρόταση: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} = P_n y_n, \quad y_{n_0} = c, \quad c \text{ σταθερά}$$

Τότε η λύση είναι η εξής:

$$y_n = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} P_j\right) y_{n_0} = c \prod_{j=n_0}^{n-1} P_j \;, \quad n \geq n_0$$

Παράδειγμα. Να λύσετε το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = 2y_n, \quad y_5 = 7$$

Η λύση είναι: $y_n = \left(\prod_{j=5}^{n-1} 2\right) 7 = 7 \cdot 2^{n-5}, \quad n \geq 5$

Επαλήθευση: $y_{n+1} = 7 \cdot 2^{n-4}$; $2 \cdot y_n = 2 \cdot 7 \cdot 2^{n-5} = 7 \cdot 2^{n-4}$ Άρα $y_{n+1} = 2y_n$

Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης μη ομογενή:

$$y_{n+1} - y_n = Z_n, \quad n = n_0, n_0+1, \dots$$

και η Z_n γνωστή ακολουθία. Θεωρούμε ότι $y_{n_0} = C$

Για $n = n_0$ έχουμε $\quad y_{n_0+1} - y_{n_0} = Z_{n_0}$

Για $n = n_0+1$ » $\quad y_{n_0+2} - y_{n_0+1} = Z_{n_0+1}$

Για $n = n_0+2$ » $\quad y_{n_0+3} - y_{n_0+2} = Z_{n_0+2}$

$$- \; - \; - \; - \; - \; -$$

Για $n \geq n_0$ $\quad y_n - y_{n-1} = Z_{n-1}$

Προσθέτουμε τις σχέσεις: $\quad y_n - y_{n_0} = Z_{n_0} + Z_{n_0+1} + \dots + Z_{n-1}, \quad n > n_0$

Άρα $\quad y_n = y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} Z_k, \quad n \geq n_0$

Παράδειγμα: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad y_{n_0} = c, \quad n_0 \in \mathbb{N}$$

Λύση: Έχουμε ότι: $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$y_n = y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = c + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}, \quad n \geq n_0.$$

Υπολογισμός της λύσης y_n του προβλήματος αρχικών τιμών;

$$y_{n+1} = p_n y_n + q_n \ , \quad n \geq n_0 \ , \quad y_{n_0} = c \ , \quad c \text{ σταθερά}$$

Θεωρούμε ότι $p_n \neq 0$, $n \geq n_0$, p_n, q_n δοθείσες ακολουθίες.

Παίρνουμε το γινόμενο $\prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1}$.

Πολ/ζουμε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με τον όρο $\prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1}$ και έχουμε:

$$y_{n+1} \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} = p_n y_n \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} + q_n \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} \Rightarrow$$

$$y_{n+1} \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} = y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j^{-1} + q_n \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1}.$$

Θέτουμε $v_n = y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j^{-1}$

Άρα $V_{n+1} = y_{n+1} \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1}$. Άρα παίρνουμε:

$$V_{n+1} = V_n + q_n \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1}, \quad n \geq n_0$$

Θέτουμε $Z_n = q_n \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1}$

τότε

$$V_{n+1} = V_n + Z_n, \quad n \geq n_0$$

Άρα

$$V_n = V_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} Z_k = y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} Z_k \Rightarrow$$

$$V_n = y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1}\left(q_k \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1}\right).$$

Αλλά $V_n = y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j^{-1}$

Επομένως

$$y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j^{-1} = y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1}\left(q_k \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_n = y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j + \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(q_k \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1} \right) =$$

$$y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(q_k \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j \cdot \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1} \right)$$

Για $n \geq k$ έχουμε $\prod_{j=n_0}^{n-1} p_j \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1} = \prod_{j=n_0}^{k} p_j \cdot \prod_{j=k+1}^{n-1} p_j \cdot \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1} = \prod_{j=k+1}^{n-1} p_j$

Άρα $$y_n = y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(q_k \cdot \prod_{j=k+1}^{n-1} p_j \right), \quad n \geq n_0$$

Παρατήρηση: Η $y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j$ είναι λύση ομογενούς:

$$y_{n+1} = p_n y_n$$

Η ακολουθία $\sum_{k=n_0}^{n-1} \left(q_k \prod_{j=k+1}^{n-1} p_j \right)$ είναι μια μερική λύση

της μη ομογενούς: $y_{n+1} = p_n y_n + q_n$: Ισχύει:

Γενική λύση της μη ομογενούς = γενική λύση της ομογενούς + μια μερική λύση της μη ομογενούς.

Άσκηση. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + n, \quad y_1 = c$$

Λύση: Εδώ $p_n = \frac{n}{n+1}$, $q_n = n$, $n \geq 1$. Προφανώς $p_n \neq 0$, $n \geq 1$.

Παίρνουμε τον όρο $\prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{j+1}{j} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} = n+1$

Άρα $\prod_{j=1}^{n} \frac{j+1}{j} = n+1$. Πολ/ζουμε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με τον όρο $n+1$ και έχουμε:

$$(n+1) y_{n+1} = n y_n + n(n+1) \Rightarrow (n+1) y_{n+1} - n y_n = n(n+1), \quad n \geq 1$$

Θέτουμε: $V_n = n y_n \Rightarrow V_{n+1} = (n+1) y_{n+1}$. Άρα έχουμε την εξίσωση:

$$V_{n+1} - V_n = n(n+1). \Rightarrow \quad V_n = V_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1).$$

Άρα $\quad n y_n = c + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = c + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 =$

$$= c + \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} \Rightarrow$$

$$y_n = \frac{c}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) \Rightarrow$$

$$y_n = \frac{c}{n} + \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}, \quad n \geq 1$$

Η ακολουθία $\frac{c}{n}$ είναι λύση της ομογενούς $y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n$

Η ακολουθία $\frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$ είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς: $y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + n, \quad n \geq 1$

Άσκηση: Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+1} = 2y_n + 3^n, \quad n \geq 0$$

Λύση: Εδώ $p_n = 2$ και $q_n = 3^n$, $n \geq 0$. Παίρνουμε τον όρο

$$\prod_{j=0}^{n} p_j^{-1} = \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Πολ/ζουμε αμφότερα τα μέλη με τον όρο $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} y_{n+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} y_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 3^n \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} y_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} y_n + 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Θέτουμε $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_n$. Τότε

$$v_{n+1} = v_n + 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

Άρα $$v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow v_n = c + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} \Rightarrow v_n = c + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1, \quad n \geq 0$$

Άρα $$\left(\frac{1}{2}\right)^n y_n = c + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \Rightarrow y_n = c\,2^n + 3^n - 2^n, \quad n \geq 0$$

Η $y_n = c\,2^n + 3^n - 2^n,\ n \geq 0$ είναι η γενική λύση της μη ομογενούς: $y_{n+1} = 2y_n + 3^n$ και

η ακολουθία $c\,2^n$ είναι η γενική λύση της ομογενούς: $y_{n+1} = 2y_n$,

η ακολουθία $3^n - 2^n$ είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς:

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 3^n$$

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών δεύτερης τάξης.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = f_n, \quad n=0,1,\ldots \qquad (1)$$

όπου p_n, q_n, f_n δοσμένες ακολουθίες

Η (1) είναι μια γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης μη ομογενής. Εάν $f_n=0$, $n=0,1,\ldots$ τότε η (1) λέγεται ομογενής.

Ορισμός: Δυο ακολουθίες x_n, y_n, $n=0,1,\ldots$ καλούνται γραμμικά εξαρτημένες εάν υπάρχουν αριθμοί λ και μ οι οποίοι είναι διάφοροι του μηδενός τέτοιοι ώστε:

$$\lambda x_n + \mu y_n = 0, \quad n=0,1,\ldots$$

Οι x_n, y_n καλούνται γραμμικά ανεξάρτητες εάν από τη σχέση

$\lambda x_n + \mu y_n = 0$ να έχουμε $\lambda=\mu=0$

Παράδειγμα: Έστω $x_n = 3n + \frac{12}{5}$ και $y_n = 5n+4$, $n=0,1,\ldots$

Παίρνουμε $\lambda=-5$ $\mu=3$. Τότε $-5x_n+3y_n = -5(3n+\frac{12}{5})+3(5n+4)=0$, $n=0,1,\ldots$

Άρα x_n, y_n γραμ. εξαρτημένες

Παράδειγμα. Έστω οι ακολουθίες $y_n = 2^n$ και $z_n = 3^n$, $n=0,1,\dots$
Να εξετάσετε εάν είναι γραμμικά εξαρτημένες

Παίρνουμε λ και μ τέτοιους ώστε $\lambda 2^n + \mu 3^n = 0$, $n = 0,1,\dots$

Για $n=0$ $\quad \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu$

Για $n=1$ $\quad 2\lambda + 3\mu = 0 \Rightarrow -2\mu + 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Επομένως οι 2^n και 3^n γραμμικά ανεξάρτητες

Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση:

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0, \quad n=0,1,\dots \qquad (2)$$

Για να μπορούμε να βρούμε τη γενική λύση της (2) θα πρέπει να γνωρίζουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2)
Έστω y_n και z_n 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2). Τότε η γενική λύση της (2) δίνεται:

$$y_n^{(\sigma)} = c_1 y_n + c_2 z_n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών: Θεωρούμε το πρόβλημα:

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0, \quad y_0 = a, \; y_1 = b, \quad a, b \text{ σταθερές.}$$

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις z_n και w_n, $n = 0, 1, \ldots$ Τότε η γενική λύση y_n δίνεται

$$y_n = c_1 z_n + c_2 w_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Θέτουμε $n=0$. Τότε $y_0 = c_1 z_0 + c_2 w_0 = a$
Θέτουμε $n=1$. Τότε $y_1 = c_1 z_1 + c_2 w_1 = b$.
υπολογίζουμε τις σταθερές c_1 και c_2

Βρίσκουμε τη λύση y_n του προβλήματος αρχικών τιμών.

Ορισμός. Έστω 2 ακολουθίες x_n, y_n. Τότε η ορίζουσα

$$C(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

καλείται ορίζουσα του Cassorati

Πρόταση. Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \qquad (A),$$

$q_n \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$ και x_n, y_n 2 λύσεις της (A). Τότε η ορίζουσα $C(x_n, y_n)$, $n = 0, 1, \dots$ διάφορη από το μηδέν εάν και μόνο εάν $C(x_0, y_0) \neq 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $u_n = C(x_n, y_n)$. $\Rightarrow$ $u_{n+1} = C(x_{n+1}, y_{n+1}) =$

$$\begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} \end{vmatrix} = x_{n+1} y_{n+2} - x_{n+2} y_{n+1}$$

Εφόσον x_n, y_n λύσεις της (A) έχουμε: $y_{n+2} = -p_n y_{n+1} - q_n y_n$ και $x_{n+2} = -p_n x_{n+1} - q_n x_n$. Άρα $u_{n+1} = x_{n+1}(-p_n y_{n+1} - q_n y_n) - (-p_n x_{n+1} - q_n x_n) y_{n+1}$

$= -q_n x_{n+1} y_n + q_n x_n y_{n+1} = q_n (x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n) = q_n C(x_n, y_n) = q_n u_n$

Άρα δείξαμε ότι $u_{n+1} = q_n u_n \Rightarrow u_n = \left(\prod_{s=0}^{n-1} q_s\right) u_0 \Rightarrow C(x_n, y_n) = \left(\prod_{s=0}^{n-1} q_s\right) C(x_0, y_0)$

Εφόσον $q_n \neq 0 \Rightarrow \prod_{s=0}^{n-1} q_s \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$ Άρα η απόδειξη είναι προφανής.

Πρόταση. Έστω y_n, z_n 2 λύσεις της ομογενούς (A). Αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες εάν και μόνο εάν $C(y_n, z_n) \neq 0$, $n=0,1,\ldots$ (Υποθέτουμε ότι $q_n \neq 0$, $n=0,1,\ldots$).

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι $C(y_n, z_n) \neq 0$. Θα δείξουμε ότι y_n, z_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Υποθέτουμε αντιθέσει ότι y_n, z_n είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τότε υπάρχουν αριθμοί λ και μ διάφοροι του μηδενός τέτοιοι ώστε $\lambda y_n + \mu z_n = 0$, $n=0,1,\ldots$ Άρα $y_n = -\frac{\mu}{\lambda} z_n = k z_n$, $n=0,1,\ldots$

Παίρνουμε

$$C(y_n, z_n) = \begin{vmatrix} y_n & z_n \\ y_{n+1} & z_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k z_n & z_n \\ k z_{n+1} & z_{n+1} \end{vmatrix} = k z_n \cdot z_{n+1} - k z_n z_{n+1} = 0$$

$\Rightarrow C(y_n, z_n) = 0$, καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα y_n, z_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θα δείξουμε τώρα ότι εάν y_n, z_n γραμμικά ανεξάρτητες τότε $C(y_n, z_n) \neq 0$. Έστω εν αντιθέσει ότι $C(y_n, z_n) = 0$

Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό αλγεβρικό σύστημα:

$$\lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0 = 0$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1 = 0$$

Ισχύει ότι $\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0$. Άρα το αλγ. σύστημα έχει άπειρες λύσεις

Επομένως υπάρχουν αριθμοί λ_1, λ_2 διάφοροι του μηδενός που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα. Παίρνουμε την παράσταση

$$\lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1(-p_0 y_1 - q_0 y_0) + \lambda_2(-p_0 z_1 - q_0 z_0) = -p_0(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1)$$

$$-q_0(\lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0) = -p_0 \cdot 0 - q_0 \cdot 0$$ από το παραπάνω σύστημα

Άρα $\lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 = 0$. Εργαζόμενοι επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$\lambda_1 y_n + \lambda_2 z_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Άρα y_n, z_n γραμμ. εξαρτημένες

άτοπο διότι υποθέσαμε ότι $y_n z_n$ γραμμ. ανεξάρτητες Άρα $C(y_n, z_n) \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών δεύτερης τάξης Ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0, \quad n=0,1,\dots \quad (B)$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$.

Θεωρούμε μια ακολουθία της μορφής $y_n = \lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$
Θέλουμε να βρούμε το λ έτσι ώστε η y_n να είναι λύση της (B).
$y_{n+2} = \lambda^{n+2}$ και $y_{n+1} = \lambda^{n+1}$. Από την (B) παίρνουμε:

$$\lambda^{n+2} + a_1 \lambda^{n+1} + a_2 \lambda^n = 0 \Rightarrow \lambda^n(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (\text{Χαρακτ. Εξίσωση}).$$

Έστω ότι η Χαρακτ. Εξίσωση έχει 2 λύσεις πραγματικές λ_1, λ_2 και $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε θεωρούμε τις ακολουθίες λ_1^n και λ_2^n, $n=0,1,\dots$ Αυτές είναι λύσεις της (B). Θα δείξουμε ότι είναι και γραμμικά ανεξάρτητες.

Παίρνουμε την ορίζουσα $C(\lambda_1^n, \lambda_2^n) = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^n \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} \lambda_2^n =$

$= \lambda_1^n \lambda_2^n (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$. Άρα οι λ_1^n και λ_2^n είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Επομένως η γενική λύση της (Β) δίνεται:

$$y_n^{(\gamma)} = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \quad n = 0, 1 \ldots$$

Έστω τώρα η χαρακτ. εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την λ.

Τότε η λ^n είναι λύση της εξίσωσης (Β).

Θέλουμε να βρούμε και μια άλλη λύση έτσι ώστε να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $n\lambda^n$ είναι λύση της (Β).

Παίρνουμε τη σχέση $(n+2)\lambda^{n+2} + a_1(n+1)\lambda^{n+1} + a_2 n\lambda^n =$

$\lambda^n \left[(n+2)\lambda^2 + a_1(n+1)\lambda + a_2 n\right] = \lambda^n \left[n(\underbrace{\lambda^2 + a_1\lambda + a_2}_{0}) + 2\lambda^2 + a_1\lambda\right]$ Έχουμε

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ διότι το λ λύσης της χαρακτ. εξίσωσης: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

Η τιμή λ είναι διπλή ρίζα της Χαρακτ. Εξίσωσης $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$

Άρα $\lambda+\lambda=-a_1 \Rightarrow 2\lambda=-a_1 \Rightarrow 2\lambda+a_1=0$

Άρα $(n+2)\lambda^{n+2}+a_1(n+1)\lambda^{n+1}+a_2 n\lambda^n = \lambda^n(2\lambda^2+a_1\lambda) = \lambda^{n+1}(2\lambda+a_1)=0$

Άρα η ακολουθία $n\lambda^n$ είναι λύση της Εξίσωσης (Β)

Βρήκαμε 2 λύσεις τις: λ^n και $n\lambda^n$ της (Β). Θα δείξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Παίρνουμε

$$C(\lambda^n, n\lambda^n) = \begin{vmatrix} \lambda^n & n\lambda^n \\ \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n+1} \end{vmatrix} = (n+1)\lambda^{2n+1} - n\lambda^{2n+1} = \lambda^{2n+1} \neq 0$$

Άρα οι λ^n και $n\lambda^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (Β).

Επομένως η γενική λύση της (Β) δίνεται

$$y_n^{(\gamma)} = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n, \quad n=0,1,\dots$$

Έστω τώρα η αλγ. εξίσωση $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ έχει μιγαδικές ρίζες τις $\lambda_1=a+bi$, $\lambda_2=a-bi$, $i=\sqrt{-1}$

Οι $(a+bi)^n$ και $(a-bi)^n$ είναι λύσεις της (B) σε μιγαδική μορφή

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\,\big(\cos(\theta)+i\sin\theta\big)$$ όπου

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Άρα $(a+bi)^n=(a^2+b^2)^{n/2}\big(\cos(\theta)+i\sin\theta\big)^n=(a^2+b^2)^{n/2}\big(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\big)$

$$=(a^2+b^2)^{n/2}\cos(n\theta)+i\,(a^2+b^2)^{n/2}\sin(n\theta).$$

Τότε οι ακολουθίες $(a^2+b^2)^{n/2}\cos(n\theta)$ και $(a^2+b^2)^{n/2}\sin(n\theta)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (B). Σε αυτή την περίπτωση η γενική λύση της ομογενούς δίνεται

$$y_n^{(\gamma)}=c_1(a^2+b^2)^{n/2}\cos(n\theta)+c_2(a^2+b^2)^{n/2}\sin(n\theta),\quad n=0,1,\ldots$$

c_1, c_2 σταθερές

Άσκηση. Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Λύση: Παίρνουμε Χαρακτ. Εξίσωση: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0$

Άρα η $\lambda = 3$ διπλή ρίζα της χαρακτ. Εξίσωσης. Άρα οι 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Εξίσωσης διαφορών είναι οι 3^n και $n \cdot 3^n$. Άρα η γενική λύση της Εξίσωσης διαφορών είναι

$$y_n^{(\Gamma)} = c_1 3^n + c_2 n 3^n, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}$$

Άσκηση. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης:

$$y_{n+2}+2y_{n+1}+2y_n=0, \quad n=0,1,\dots$$

Λύση. Παίρνουμε χαρακτ. εξίσωση: $\lambda^2+2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=-1+i,\ \lambda_2=-1-i$

Εδώ $|\lambda_1|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. Άρα $\lambda_1=-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

Θέλουμε $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}$

Επομένως $\lambda_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Άρα οι 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι:

$$(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \quad \text{και} \quad (\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right).$$

Επομένως η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών δίνεται:

$$y_n^{(\Gamma)}=c_1(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right)+c_2(\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right), \quad n=0,1,\dots$$

Παράδειγμα: Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 2$$

Λύση. Παίρνουμε την χαρακτ. εξίσωση: $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = 4$. Άρα έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης οι $(-3)^n$ και 4^n. Άρα η γενική λύση δίνεται

$$y_n = c_1(-3)^n + c_2 4^n, \quad n = 0, 1, \ldots \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}$$

Παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{ll} \text{για } n=0: & c_1 + c_2 = 1 \\ \text{για } n=1: & -3c_1 + 4c_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{7}, \quad c_2 = \frac{5}{7}$$

Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται: $y_n = \frac{2}{7}(-3)^n + \frac{5}{7} \cdot 4^n$

Μη Ομογενείς Γραμμικές Εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Έχουμε την εξίσωση:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n, \quad n=0,1,\dots \qquad (\Gamma).$$

όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ και f_n δοσμένη ακολουθία.

Θέλουμε να βρούμε την γενική λύση $y_n^{(\Gamma MO)}$ της (Γ).

Ισχύει ότι η γενική λύση της μη ομογενούς ισούται με γενική λύση της ομογενούς + μια μερική λύση της μη ομογενούς:

$$y_n^{(\Gamma MO)} = y_n^{(\Gamma O)} + y_n^{(MMO)}, \quad n=0,1,\dots$$

Η $y_n^{(\Gamma O)}$ υπολογίζεται από τα προηγούμενα. Πρέπει να υπολογίσουμε και την $y_n^{(MMO)}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών;
Εδώ θα πρέπει η f_n να είναι της μορφής:

$$f_n = p(n)\, \beta^n \left(A \cos(\gamma n) + \Delta \sin(\gamma n)\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

όπου $p(n)$ πολυώνυμο, β, A, Δ, γ σταθερές.

Παραδείγματα: Έστω $f_n = \frac{1}{n^3+2n+1} 2^n$ δεν είναι της παραπάνω μορφής

Έστω $f_n = (2n+5)\, 3^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ $\quad p(n) = 2n+5, \ \beta = 3, \ A = 1, \ \gamma = \frac{\pi}{4}, \ \Delta = 0$

Η μερική λύση $y_n^{(MMO)}$ θα έχει την μορφή:

$$y_n^{(MMO)} = n^p \beta^n \left(C(n) \cos(\gamma n) + D(n) \sin(\gamma n)\right)$$

Τα $C(n)$ και $D(n)$ είναι πολυώνυμα ίδιου βαθμού με το $p(n)$ στην γενική τους μορφή:

Έστω $p(n)=n^2+1$. Τότε παίρνουμε:

$C(n)=a_1 n^2+a_2 n+a_3$, $D(n)=b_1 n^2+b_2 n+b_3$

Υπολογισμός του p: Θεωρούμε τον αριθμό $\theta(\cos\gamma+i\sin\gamma)=\lambda$.

Εάν ο αριθμός λ δεν είναι ρίζα της Χαρακτ. Εξίσωσης τότε $p=0$

Εάν ο αριθμός λ είναι απλή ρίζα " " " τότε $p=1$

Εάν ο αριθμός λ είναι διπλή ρίζα " " " τότε $p=2$

Παρατήρηση. Έστω ότι έχουμε την εξίσωση

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_{1n} + f_{2n} + \dots + f_{kn} \qquad (A).$$

όπου $f_{jn} = P_j(n) e_j^n \left(A_j \cos(\gamma_j n) + B_j \sin(\gamma_j n) \right)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Υπολ. τις μερικές λύσεις των

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_{jn} \qquad (A_j).$$

Έστω ότι η μερική λύση της (A_j) είναι $y_{jn}^{(\mu MO)}$, $j = 1, 2, \dots, k$

Τότε η μερική λύση $y_n^{(\mu MO)} = y_{1n}^{(\mu MO)} + y_{2n}^{(\mu MO)} + \dots + y_{kn}^{(\mu MO)}$

είναι της (A)

Άσκηση Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 3\cdot 2^n$$

Λύση: Έχουμε $f_n = 3\cdot 2^n$. Πρώτα θα βρούμε την γενική λύση της ομογενούς: $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0$. Παίρνουμε την Χαρακτ. Εξίσωση:

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$. Άρα η γενική λύση της Ομογενούς είναι η $y_n^{(\Gamma O)} = c_1 2^n + c_2 5^n$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Τώρα θα βρούμε και μια μερική λύση $y_n^{(MMO)}$.

$f_n = p(n)\, \varepsilon^n \left(A\cos(\gamma n) + B\sin(\gamma n)\right)$. Έχουμε $\gamma = 0$, $\varepsilon = 2$, $p(n) = 3$, $A = 1$

Άρα $y_n^{(MNO)} = n^p \varepsilon^n \left(C(n)\cos(\gamma n) + D(n)\sin(\gamma n)\right) = n^p 2^n C(n)$ όπου

$C(n)$ πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το $p(n) = 3$, άρα $C(n) = C$, C σταθερά.

Άρα $y_n^{(MNO)} = n^p 2^n \cdot C$. Θα υπολ. τη σταθερά p.

Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda = \varepsilon(\cos\gamma + i\sin\gamma) = 2$; απλή ρίζα της Χαρακτ. Εξίσωσης

Άρα $p = 1$.

Επομένως $y_n^{(\mu MO)} = n 2^n \cdot C$. Θα υπολ. τη σταθερά C.

Ισχύει

$$y_{n+2}^{(\mu MO)} - 7 y_{n+1}^{(\mu MO)} + 10 y_n^{(\mu MO)} = 3 \cdot 2^n \Rightarrow$$

$$(n+2) 2^{n+2} \cdot C - 7 (n+1) 2^{n+1} \cdot C + 10 n 2^n C = 3 \cdot 2^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4C(n+2) - 14C(n+1) + 10nC = 3 \Rightarrow 8C - 14C = 3 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Άρα $y_n^{(\mu MO)} = -\frac{1}{2} n 2^n$

Άρα η γενική λύση $y_n^{(\Gamma MO)} = c_1 2^n + c_2 5^n - \frac{1}{2} n 2^n$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση. Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+2} - 8y_{n+1} + 16y_n = -5\cdot 4^n \quad , \quad n=1,2,\dots$$

Λύση. Γενική λύση Ομογενούς: Χαρακτ. Εξίσωση: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 4$ διπλή. Άρα $y_n^{(ΓΟ)} = c_1 4^n + c_2 n\cdot 4^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Θα βρούμε και μία μερική λύση $y_n^{(ΜΜΟ)}$. Έχουμε $f_n = -5\cdot 4^n$

Άρα $y_n^{(ΜΜΟ)} = n^p \cdot 4^n C$

Υπολ. του p: Παίρνουμε το $\lambda = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta) = 4$ διπλή ρίζα της Χαρακτ. Εξίσωσης. Άρα $p=2$. Επομένως $y_n^{(ΜΜΟ)} = n^2 \cdot 4^n \cdot C$

Παίρνουμε:

$$(n+2)^2\cdot 4^{n+2}\cdot C - 8(n+1)^2 4^{n+1} C + 16 n^2 4^n \cdot C = -5\cdot 4^n \Rightarrow$$

$$16(n+2)^2 C - 32(n+1)^2 C + 16n^2 C = -5 \Rightarrow C[16(n^2+4n+4) - 32(n^2+2n+1)] + 16n^2 C = -5$$

$$Cn(\cancel{64n} - 64n) + 64C - 32C = -5 \Rightarrow C = \frac{-5}{32} \Rightarrow y_n^{(ΜΜΟ)} = \frac{-5}{32} n^2 \cdot 4^n$$

Άρα $y_n^{(ΓΜΟ)} = c_1 4^n + c_2 n 4^n - \frac{5}{32} n^2 \cdot 4^n$, $n=1,2,\ldots$

Άσκηση Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+2} + y_n = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Λύση. Γενική λύση Ομογενούς: Χαρακτ. Εξίσωση: $\lambda^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm i$. Παίρνουμε την $\lambda = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

Άρα $y_n^{(ΓΟ)} = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, c_1, c_2 σταθερές

(Οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Ομογενούς είναι οι $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ και $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$).

Θα βρούμε και μια μερική λύση $y_n^{(ΜΜΟ)}$. $f_n = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Έχουμε $y_n^{(ΜΜΟ)} = n^p\left(C \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$, C, D σταθερές.

Υπολ. του ρ: Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda = \varrho(\cos\gamma + i\sin\gamma) =$

$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ είναι απλή ρίζα της Χαρακτ. Εξίσωσης, άρα $p=1$

Επομένως $y_n^{(\mu\text{ΜΟ})} = n\left(C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$, $n=1,2,\dots$

Πρέπει να υπολ. τις C και D. Από την αρχική Εξίσωση έχουμε:

$$(n+2)\,C\cos\left((n+2)\frac{\pi}{2}\right) + (n+2)D\sin\left((n+2)\frac{\pi}{2}\right) + n\left(C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -(n+2)\,C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (n+2)D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + nC\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + nD\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -2C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} -2C = -2 \Rightarrow C = 1 \\ -2D = 0 \Rightarrow D = 0 \end{array}$$

Άρα $y_n^{(\mu\text{ΜΟ})} = n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Άρα η γενική λύση $y_n^{(\text{ΓΜΟ})}$ δίνεται:

$$y_n^{(\text{ΓΜΟ})} = c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),\quad n=1,2,\dots$$

Άσκηση. Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 6n.$$

Λύση. Γενική λύση $y_n^{(\Gamma O)}$: Χαρακτ. Εξίσωση: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
$\Rightarrow \lambda = 1$ διπλή. Άρα $y_n^{(\Gamma O)} = c_1 1^n + c_2 n 1^n = c_1 + c_2 n$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Θα υπολ. και μια μερική λύση $y_n^{(\mu MO)}$, Έχουμε $f_n = 6 \cdot n$

Άρα $y_n^{(\mu MO)} = n^p \cdot 1^n \cdot g(n)$, $g(n)$ ίδιου βαθμού με το f_n, πρώτου βαθμού, $g(n) = a_1 \cdot n + a_2$, a_1, a_2 πρέπει να υπολογιστούν.

Επομένως $y_n^{(\mu MO)} = n^p (a_1 n + a_2)$

Υπολ. του p: Παίρνουμε $\lambda = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta) = 1$ διπλή ρίζα της Χαρακτ. Εξίσωσης. Άρα $p=2$. Επομένως $y_n^{(\mu MO)} = n^2 (a_1 n + a_2) = a_1 n^3 + a_2 n^2$

$$a_1(n+2)^3 + a_2(n+2)^2 - 2\left(a_1(n+1)^3 + a_2(n+1)^2\right) + a_1 n^3 + a_2 n^2 = 6n \Rightarrow$$

$$6a_1 n + 6a_1 + 2a_2 = 6n \Rightarrow \quad \begin{aligned} &6a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 1 \\ &6a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -3. \end{aligned}$$

Άρα $y_n^{(\mu\Pi O)} = n^3 - 3n^2$.

Επομένως η $y_n^{(\Gamma\Pi O)} = c_1 + c_2 n + n^3 - 3n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$

Άσκηση Να βρείτε τη γενική λύση της:

$$y_{n+2}+6y_{n+1}+9y_n = 2-4\cdot 3^n \quad , \; n=0,1,\ldots$$

Λύση. Θα βρούμε την γενική λύση της Ομογενούς:

$y_{n+2}+6y_{n+1}+9y_n=0$. Χαρακτ. Εξίσωση: $\lambda^2+6\lambda+9=0 \Rightarrow$

$\lambda=-3$. διπλή. Άρα η γενική λύση $y_n^{(ΓΟ)} = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n$,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Θα βρούμε και μια μερική λύση $y_n^{(ΜΜΟ)}$ της αρχικής,

Εδώ $f_n = 2-4\cdot 3^n$ $\left(f_n = p(n)\theta^n \left(A\cos(\gamma n)+B\sin(\gamma n)\right)\right)$

Γράφουμε $f_n = f_{1n}+f_{2n}$, $f_{1n}=2$, $f_{2n}=-4\cdot 3^n$ και θεωρούμε τις εξισώσεις

$$y_{n+2}+6y_{n+1}+9y_n = 2 \quad (a)$$

$$y_{n+2}+6y_{n+1}+9y_n = -4\cdot 3^n \quad (b)$$

Θα υπολ. πρώτα την μερική λύση $y_{1n}^{(\mu\mu o)}$ της (a)

Έχουμε $y_{1n}^{(\mu\mu o)} = n^{p_1} \cdot C$, C σταθερά.

Υπολ του p_1: Παίρνουμε $\lambda_1 = \varepsilon_1(\cos\gamma_1 + i\sin\gamma_1) = 1$. δεν είναι ρίζα της Χαρακτ. Εξίσωσης, άρα $p_1 = 0$. Επομένως $y_{1n}^{(\mu\mu o)} = C$

Θα υπολ. το C. Ισχύει

$$C + 6C + 9 \cdot C = 2 \Rightarrow C = \frac{1}{8}. \text{ Άρα } y_{1n}^{(\mu\mu o)} = \frac{1}{8},\ n = 1, 2, \ldots$$

Θα υπολ. και τη μερική λύση $y_{2n}^{(\mu\mu o)}$ της (b). Εδώ $f_{2n} = -4 \cdot 3^n$

Άρα $y_{2n}^{(\mu\mu o)} = n^{p_2} 3^n D$, D σταθερά

Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda_2 = \varepsilon_2(\cos\gamma_2 + i\sin\gamma_2) = 3$ δεν είναι ρίζα της Χαρακτ. Εξίσωσης. Άρα $p = 0$. Επομένως $y_{2n}^{(\mu\mu o)} = D \cdot 3^n$.

Άρα από την (b) έχουμε:

$$D\cdot 3^{n+2} + 6D\,3^{n+1} + 9D\,3^{n} = -4\cdot 3^{n} \Rightarrow 9D + 18D + 9D = -4$$

$$\Rightarrow D = -\frac{4}{36} \Rightarrow D = -\frac{1}{9}.$$ Άρα $y_{2n}^{(\text{ΜΜΟ})} = -\frac{1}{9}3^{n}$

Άρα η μερική λύση $y_n^{(\text{ΜΜΟ})}$ της αρχικής δίνεται:

$$y_n^{(\text{ΜΜΟ})} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9}3^{n}, \quad n=1,2,\ldots$$

Επομένως η γενική λύση $y_n^{(\text{ΓΜΟ})} = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}3^{n}, \; n=1,2,\ldots$

Μη Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών.

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y_{n+1} = \frac{a y_n + b}{c y_n + d}, \quad a, b, c, d \text{ σταθερές}, \quad c \neq 0.$$

με $ad - cb \neq 0$.

Παίρνουμε την αλγ. εξίσωση: $\lambda = \dfrac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \Rightarrow$

$$c\lambda^2 + \lambda d = a\lambda + b \Rightarrow c\lambda^2 + \lambda(d-a) - b = 0$$

Θεωρούμε ότι η αλγ. εξίσωση έχει 2 πραγμ. ρίζες λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Παίρνουμε το λόγο

$$\frac{y_{n+1} - \lambda_1}{y_{n+1} - \lambda_2} = \frac{\dfrac{a y_n + b}{c y_n + d} - \dfrac{a\lambda_1 + b}{c\lambda_1 + d}}{\dfrac{a y_n + b}{c y_n + d} - \dfrac{a\lambda_2 + b}{c\lambda_2 + d}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(ay_n+b)(c\lambda_1+d)-(a\lambda_1+b)(cy_n+d)}{(c\cancel{y_n}+d)(c\lambda_1+d)}}{\dfrac{(ay_n+b)(c\lambda_2+d)-(a\lambda_2+b)(cy_n+d)}{(c\cancel{y_n}+d)(c\lambda_2+d)}} =$$

$$\frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d} \cdot \frac{(ay_n+b)(c\lambda_1+d)-(a\lambda_1+b)(cy_n+d)}{(ay_n+b)(c\lambda_2+d)-(a\lambda_2+b)(cy_n+d)} =$$

$$= \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d} \cdot \frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2} \quad \text{διότι} \quad ad-cb \neq 0$$

Άρα $$\frac{y_{n+1}-\lambda_1}{y_{n+1}-\lambda_2} = \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d} \cdot \frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2}, \quad n=1,2,\ldots$$

Άρα $\quad \dfrac{y_{n+1}-\lambda_1}{y_{n+1}-\lambda_2} = C \cdot \dfrac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2}, \quad C = \dfrac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}$

Θέτουμε $\quad v_n = \dfrac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2} \Rightarrow v_{n+1} = C v_n \Rightarrow v_n = v_0 \cdot C^n$

$\Rightarrow \dfrac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2} = \dfrac{y_0-\lambda_1}{y_0-\lambda_2} \cdot C^n \Rightarrow$ υπολ. το y_n.

$$y_n-\lambda_1 = \frac{y_0-\lambda_1}{y_0-\lambda_2} C^n (y_n-\lambda_2) \Rightarrow y_n\left(1 - \frac{y_0-\lambda_1}{y_0-\lambda_2} C^n\right) = \lambda_1 - \lambda_2 C^n \frac{(y_0-\lambda_1)}{y_0-\lambda_2}$$

Άσκηση: Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+1} = \frac{12y_n - 2}{9y_n + 3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Λύση, Παίρνουμε την αλγ. εξίσωση $\lambda = \frac{12\lambda - 2}{9\lambda + 3} \Rightarrow$

$9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}, \ \lambda_2 = \frac{2}{3}$. Θεωρούμε τον λόγο

$$\frac{y_{n+1} - \lambda_1}{y_{n+1} - \lambda_2} = \frac{y_{n+1} - \frac{1}{3}}{y_{n+1} - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{12y_n - 2}{9y_n + 3} - \frac{1}{3}}{\frac{12y_n - 2}{9y_n + 3} - \frac{2}{3}} = \frac{c\lambda_2 + d}{c\lambda_1 + d} \cdot \frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1} - \frac{1}{3}}{y_{n+1} - \frac{2}{3}} = \frac{9\,\frac{2}{3} + 3}{9\,\frac{1}{3} + 3} \cdot \frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}} = \frac{9}{6}\,\frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\,\frac{y_n - \frac{1}{3}}{y_n - \frac{2}{3}}$$

Άρα $$\frac{y_{n+1}-\frac{1}{3}}{y_{n+1}-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\,\frac{y_n-\frac{1}{3}}{y_n-\frac{2}{3}}$$

Θέτουμε $v_n = \dfrac{y_n-\frac{1}{3}}{y_n-\frac{2}{3}}$. Τότε $v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n \Rightarrow$

$$v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n v_0 \Rightarrow \frac{y_n-\frac{1}{3}}{y_n-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{y_0-\frac{1}{3}}{y_0-\frac{2}{3}}$$

Υπολ. τη λύση y_n.

Έστω ότι η αλγ. εξίσωση $c\lambda^2 + (d-a)\lambda - b = 0$ έχει διπλή πραγμ. ρίζα την λ. Τότε παίρνουμε τον λόγο

$$\frac{1}{y_{n+1} - \lambda} = \frac{1}{\frac{a y_n + b}{c y_n + d} - \lambda} = \frac{1}{y_n - \lambda} + \frac{c}{a - \lambda c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_{n+1} - \lambda} = \frac{c}{a - \lambda c} + \frac{1}{y_n - \lambda}$$

Θέτουμε $\quad V_n = \frac{1}{y_n - \lambda} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{c}{a - \lambda c} + V_n$

$$\Rightarrow V_n = V_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{c}{a - \lambda c} \Rightarrow V_n = V_0 + \frac{nc}{a - \lambda c} \Rightarrow \frac{1}{y_n - \lambda} = \frac{1}{y_0 - \lambda} + \frac{n c}{a - \lambda c}$$

Υπολ. την ακολουθία y_n.

Άσκηση. Να λύσετε το πρόβλημα

$$y_{n+1} = \frac{6y_n - 4}{y_n + 2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Λύση: Παίρνουμε $\lambda = \frac{6\lambda - 4}{\lambda + 2} \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ διπλή.

Άρα ισχύει ότι $\frac{1}{y_{n+1} - 2} = \frac{c}{a - \lambda c} + \frac{1}{y_n - 2} = \frac{1}{6 - 2 \cdot 1} + \frac{1}{y_n - 2}$

$\Rightarrow \frac{1}{y_{n+1} - 2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{y_n - 2}$. Θέτουμε $v_n = \frac{1}{y_n - 2}$

Άρα $v_{n+1} = \frac{1}{4} + v_n \Rightarrow v_n = v_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{4} \Rightarrow v_n = v_0 + \frac{1}{4} n \Rightarrow$

$\frac{1}{y_n - 2} = \frac{1}{y_0 - 2} + \frac{n}{4}$. Υπολ. την ακολουθία y_n.